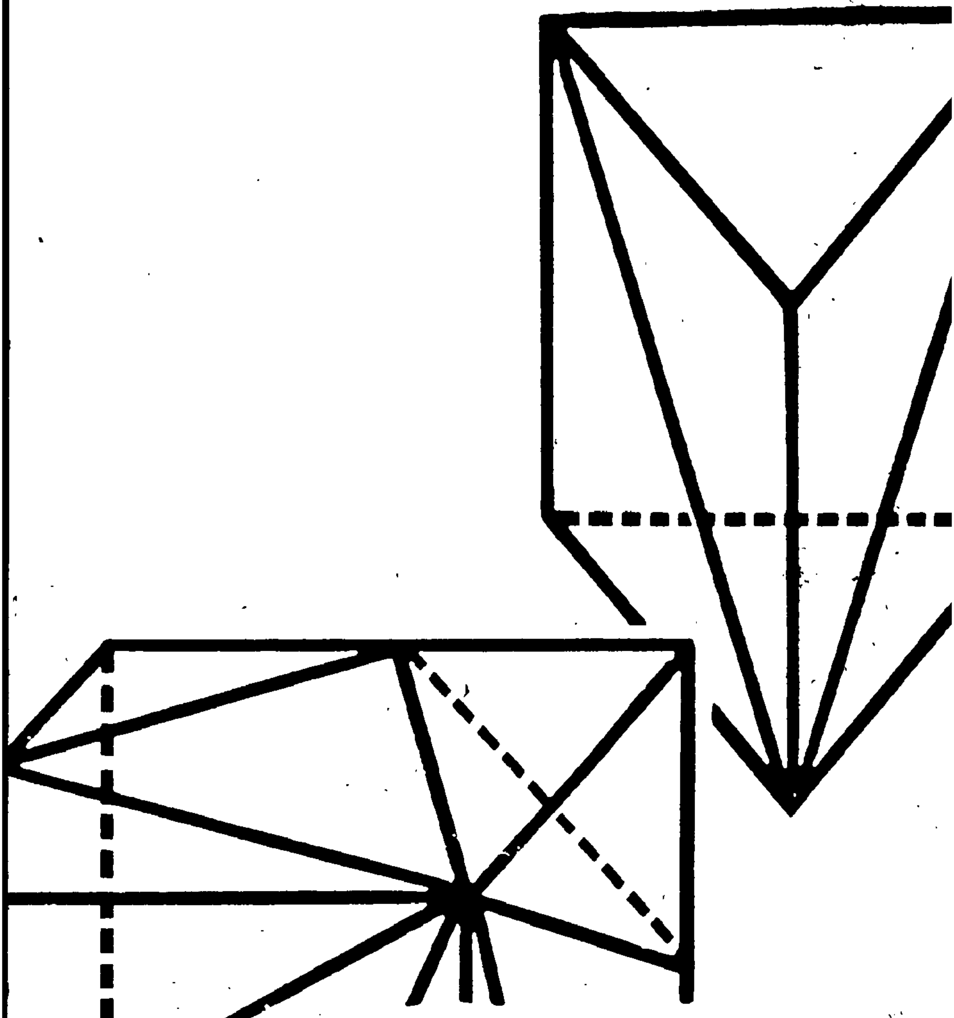
З. Я. КВАСНИКОВА, А. И. ПОСПЕЛОВ,
Е. Н. ЕРМОЛАЕВА, Н. М. КАЛИТКИН



СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

З. Я. КВАСНИКОВА, А. И. ПОСПЕЛОВ,
Е. Н. ЕРМОЛАЕВА, Н. М. КАЛИТКИН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

ДЛЯ СТАРШИХ КЛАССОВ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1964

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

В настоящей книге авторами использован в значительной степени материал их «Сборника задач по геометрии», опубликованного в 1957 году.

Рукопись рецензировали учителя
А. А. Колосов, Г. А. Назаревский
и доцент *Н. Н. Шоластер*

IX КЛАСС

§ 1. Симметрия относительно прямой

1. Построить отрезок, симметричный данному отрезку относительно оси s. Рассмотреть различные случаи взаимного положения отрезка и оси.

2. Даны две пересекающиеся прямые и ось симметрии, пересекающая их. Построить прямые, симметричные данным относительно оси.

3. Выполнить преобразование осевой симметрии: а) четырехугольника относительно прямой, содержащей одну из его диагоналей, б) трапеции относительно прямой, содержащей ее среднюю линию, в) правильного пятиугольника относительно прямой, содержащей одну из его сторон, и относительно прямой, содержащей одну из его меньших диагоналей.

4. (Устно.) Какие точки и прямые при симметрии относительно оси преобразуются сами в себя?

5. Построить ось симметрии: а) двух точек, б) угла, в) двух данных прямых (рассмотреть случаи, когда данные прямые параллельны и когда пересекаются).

6. (Устно.) Сколько осей симметрии имеют: а) отрезок, б) две точки, в) две прямые, г) одна прямая, д) окружность?

7. Сколько осей симметрии имеют правильные треугольник, четырехугольник, шестиугольник, пятиугольник?

8. Какого вида треугольники, параллелограммы и трапеции имеют оси симметрии? (Указать количество осей в каждом случае.)

9. Построить ось симметрии двух пересекающихся окружностей одинакового радиуса и доказать, что эта ось будет являться осью симметрии центров этих окружностей.

10. Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Доказать, что три оси симметрии трех пар этих точек (A и B, B и C, C и A) пересекаются в одной точке.

11. Даны две пересекающиеся прямые, симметричные относительно оси s. Доказать, что точка пересечения этих прямых принадлежит оси s.

12. Даны ось симметрии s и точка A вне ее. С помощью только одного циркуля построить точку, симметричную точке A относительно оси s.

13. С помощью модели установить, можно ли совместить, не выводя из плоскости, симметричные относительно оси: а) два равнобедренных треугольника, б) два разносторонних треугольника, в) два косоугольных параллелограмма, г) два прямоугольника.

14. (Устно.) Даны две прямые a и b и разносторонний треугольник ABC. Симметрией относительно прямой a треугольник ABC преобразовался в треугольник $A_1B_1C_1$, и затем треугольник $A_1B_1C_1$ симметрией относительно прямой b преобразовался в треугольник $A_2B_2C_2$. Можно ли, не выводя из плоскости, совместить треугольники ABC и $A_2B_2C_2$?

15. (Устно.) Рассмотреть вопрос, аналогичный поставленному в предыдущей задаче, для случая, когда разносторонний треугольник последовательно подвергается преобразованию симметрии от: а) 3 осей, б) $2n$ осей, в) $(2n-1)$ осей (n — натуральное число).

16. Даны две параллельные прямые s_1 и s_2, расстояние между которыми равно d, и точка A, расположенная по одну сторону от обеих прямых. В результате последовательного выполнения преобразования симметрии относительно оси s_1 и затем оси s_2 точка A преобразовалась в точку A_1. Доказать, что отрезок AA_1 равен удвоенному расстоянию между осями и перпендикулярен им.

Рассмотреть случаи, когда точка A удалена от оси s_1 на расстояние, меньшее d, равное d и большее d. Сохранится ли направление отрезка от A к A_1 при изменении расстояния точки A от оси s_1?

17. Решить задачу, аналогичную предыдущей, для случая, когда точка A расположена: 1) на оси s_1, 2) между осями s_1 и s_2, 3) на оси s_2.

18. Построить четырехугольник, имеющий только одну ось симметрии. (Рассмотреть случаи, когда ось симметрии проходит через вершину и не проходит через вершину.)

19. Построить четырехугольник так, чтобы прямые, проходящие через противоположные вершины, являлись его осями симметрии. Установить вид этого четырехугольника.

20. а) Доказать, что точки, лежащие на сторонах данного угла, одинаково удаленные от его вершины, симметричны относительно биссектрисы этого угла.

б) Точки M и N симметричны относительно прямой s. Доказать, что каждая точка прямой s одинаково удалена от точек M и N.

в) Точка A одинаково удалена от точек M и N. Доказать, что точка A принадлежит оси симметрии точек M и N.

21. Доказать, что если каждая из точек M и N одинаково удалена от точек A и B, то прямая MN является осью симметрии точек A и B.

22. Пользуясь понятием симметрии относительно оси, доказать общие признаки равенства треугольников.

23. Пользуясь понятием осевой симметрии, доказать, что если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то такой параллелограмм является ромбом и диагонали его делят углы этого параллелограмма пополам.

24. Дана прямая a и точки A и B, расположенные по одну сторону от нее Построить две прямые, из которых одна проходит через A, другая — через B, так, чтобы они были симметричны друг другу относительно прямой a.

25. Построить треугольник ABC, если дано положение вершины A и даны две прямые, на которых расположены биссектрисы углов B и C.

26. В окружность вписан четырехугольник, не имеющий равных сторон, одной из диагоналей которого служит диаметр этой окружности. Найти на сторонах этого четырехугольника две точки, симметричные относительно этой диагонали.

27. Построить четырехугольник $ABCD$, зная его стороны, если диагональ AC делит угол A пополам.

28. В каком направлении должен идти луч света из источника A, чтобы, отразившись от плоского зеркала, он попал в точку B?

29*. На берегу канала требуется построить водонапорную башню для снабжения водой двух селений A и B. Выбрать место для строительства башни с таким расчетом, чтобы общая длина труб от водонапорной башни до обоих селений была наименьшая.

30*. Внутри острого угла А дана точка M. На сторонах угла A найти точки K и L так, чтобы периметр треугольника MKL был наименьшим.

31*. На бильярдном столе находятся в точках A и B два шара. Как выбрать направление удара в шар A так, чтобы он, отразившись от двух бортов, попал в шар B?

32. Требуется измерить косвенно ширину озера и находящегося на нем островка. Эту работу надо выполнить путем построения на местности отрезков, симметричных данным относительно оси, проходящей через точку H, которая выбрана для первоначальной установки эккера.

Построить схематический чертеж последующего хода работы и дать теоретическое обоснование способа ее выполнения (при помощи эккера, рулетки и вех).

§ 2. Симметрия относительно точки

33. На плоскости даны точка O и две прямые a и b, пересекающиеся в точке A. Построить прямые, симметричные прямым a и b относительно точки O. Рассмотреть случаи, когда: 1) точка O совпадает с точкой A, 2) точка O лежит на прямой a, 3) точка O лежит внутри одного из углов, образуемых прямыми a и b.

34. Построить фигуру, симметричную данному треугольнику относительно точки O, если точка O: а) расположена вне данного треугольника, б) совпадает с одной из его вершин, в) расположена внутри треугольника.

35. На плоскости даны точка O и отрезок AB. Построить отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно точки O. Доказать, что если точка M делит отрезок AB в отношении $m:n$, то и соответствующая ей точка делит отрезок A_1B_1 в том же отношении.

36. Точки A и A_1, B и B_1 попарно симметричны относительно центра O. Точки M и M_1 принадлежат соответственно отрезкам AB и A_1B_1, причем $AM:MB = A_1M_1:M_1B_1$. Доказать, что точки M и M_1 симметричны относительно центра O.

37. Два равных отрезка AB и A_1B_1 расположены на одной прямой. Найти центр симметрии этих отрезков. Рассмотреть различные случаи взаимного положения этих отрезков.

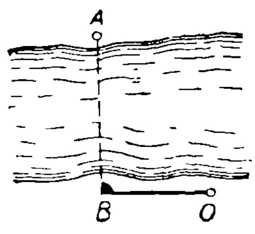
38. (Устно.) Какие прямые и точки при симметрии относительно центра преобразуются сами в себя?

39. Точки A и B симметричны относительно точки O. Доказать, что две параллельные прямые, проходящие через точки A и B, симметричны относительно точки O.

40. Дана дуга окружности, центр которой неизвестен. Построить дугу, симметричную данной относительно центра окружности, частью которой является данная дуга.

41. Можно ли, не выводя из плоскости, совместить два разносторонних треугольника, симметричных относительно точки? (Ответ иллюстрировать на модели.)

42. Требуется измерить ширину AB реки путем построения на местности отрезка, симметричного AB относительно центра O, который взят на перпендикуляре к AB (черт. 1). Построить схематический чертеж последующего хода работы, выполняемой с помощью вех, рулетки и эккера, и обосновать способ ее выполнения.



Черт. 1

43. Требуется измерить косвенно ширину AB озера, к противоположному берегу которого нельзя подойти, путем построения отрезка, симметричного AB относительно некоторого центра. Построить схематический чертеж хода работы, выполняемой с помощью вех, рулетки и эккера, и обосновать способ ее выполнения.

44. (Устно.) Имеют ли центр симметрии: 1) отрезок прямой, 2) прямая, 3) окружность, 4) пара пересекающихся прямых, 5) треугольник, 6) параллелограмм?

45. Доказать, что четырехугольник, имеющий центр симметрии, есть параллелограмм.

46. Доказать, что всякая точка оси симметрии двух параллельных прямых является центром симметрии этих прямых.

47. Доказать, что шестиугольник, у которого стороны попарно равны и параллельны, имеет центр симметрии.

48. Доказать, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелограмма, делит его на два четырехугольника, симметричных относительно этой точки.

49. В данной прямоугольной системе осей координат даны две точки A (a, b) и B $(-a, -b)$. Доказать: 1) точки A и B симметричны относительно начала координат; 2) в результате последовательного выполнения преобразования симметрии относительно двух координатных осей каждая из данных точек преобразуется в другую.

50. Доказать, что график функции $y=x^3$ симметричен относительно начала координат.

51. Доказать, что графики функций $y=ax+b$ и $y=ax-b$ симметричны друг другу относительно начала координат.

52. Точки A и A_1 симметричны относительно точки O. Доказать, что одна из них может быть получена из другой с помощью последовательного преобразования симметрии относительно двух взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в точке O.

53. Доказать, что если какая-либо фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то она имеет и центр симметрии.

54 *. Фигуры F и F_1 симметричны относительно точки O. Доказать, что одна из них может быть получена из другой с помощью последовательного выполнения преобразования симметрии относительно двух взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в точке O.

55. Даны два треугольника, симметричные относительно оси, а также относительно некоторого центра. Установить вид этих треугольников, положение их относительно оси и положение их центра симметрии.

56. Если каждой точке фигуры F_1 можно поставить в соответствие определенную точку фигуры F_2 так, что соответственные отрезки этих фигур равны, параллельны и противоположно направлены, то фигуры F_1 и F_2 симметричны относительно некоторой точки.

57. *Построить квадрат, зная положение двух точек, принадлежащих двум противоположным его сторонам, и положение точки пересечения диагоналей.*

58. Через точку M, данную внутри угла ABC, провести секущую, *отрезок которой, лежащий внутри угла, делился бы точкой* M пополам.

59 *. Построить отрезок так, чтобы середина его была расположена в данной точке, а концы соответственно на данной прямой и данной окружности.

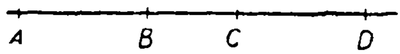
60. Через точку A пересечения двух окружностей провести секущую BAC так, чтобы хорда BA одной окружности была равна хорде AC другой окружности.

61 *. Построить квадрат, зная положение двух точек, принадлежащих двум его смежным сторонам, и положение точки пересечения диагоналей.

§ 3. Понятие о векторе. Сумма и разность векторов

62. (Устно.) Среди величин: длина, сила, площадь, время, вес, объем, скорость, работа, ускорение, температура — указать векторные и скалярные.

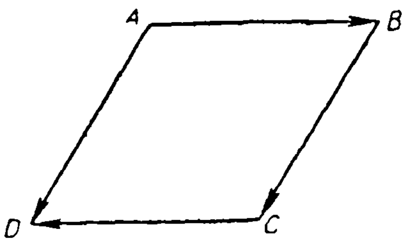
63. Отрезки AB и CD равны между собой и расположены на одной прямой (черт. 2).



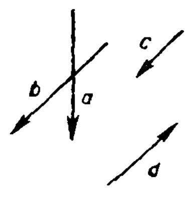
Черт. 2

Записать соотношение между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ и векторами $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$.

64. Четыре вектора совпадают со сторонами ромба (черт. 3). Равны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$? Записать соотношение между векторами, совпадающими с противоположными сторонами ромба.



Черт. 3.



Черт. 4

65. Вектор c совпадает с гипотенузой, и вектор b — с катетом прямоугольного треугольника ABC. Какая из следующих записей: $c > b$; $|c| > |a|$ — имеет смысл?

66. Векторы a, b, c, d расположены так, как показано на чертеже 4. Привести их к общему началу.

67. На векторах $\overline{AB}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{AD}=\boldsymbol{b}$ построен параллелограмм $ABCD$. Выразить векторы $\overline{AC}$, $\overline{CA}$, $\overline{BD}$, $\overline{DB}$ в зависимости от векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

68. Даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Построить каждый из следующих векторов: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, $-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

Рассмотреть случаи, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$: 1) лежат на одной прямой, 2) параллельны, 3) не параллельны.

69. (Устно.) Показать, что $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

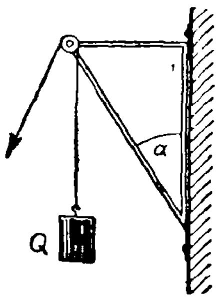
В каком случае имеет место знак равенства?

70. (Устно.) При каких условиях векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ лежат на одной прямой?

71. (Устно.) При каком условии сумма и разность двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ могут быть взаимно перпендикулярны?

72. Груз Q поднимается при помощи блока, укрепленного на кронштейне, который схематично изображен на чертеже 5. При этом горизонтальная балка кронштейна испытывает растяжение P, а наклонный подкос — сжатие T.

Выразить векторным равенством зависимость между силами Q, $\overline{P}$ и $\overline{T}$ и вычислить величины P и T, если вес груза $Q \approx 75$ *кг*, а подкос образует с вертикалью угол $\alpha \approx 40°$.

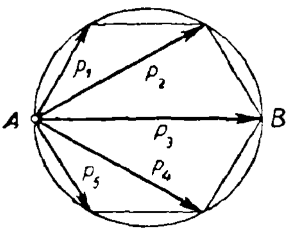


Черт 5.

73. На плоскости даны векторы: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. Построить их сумму тремя способами, соответствующими записям: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$; $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$. Сравнить результаты трех построений.

74. Скорость течения реки 30 *м/мин*. Лодка движется со скоростью 90 *м/мин* под углом в 75° к направлению течения реки. Графически найти собственную скорость лодки.

75. Собственная скорость лодки 90 *м/мин*, скорость течения реки 20 *м/мин*. Лодка движется под углом в 70° к направлению течения. Графически найти скорость движения лодки.



Черт. 6

76. Точка приложения 5 сил находится в вершине правильного шестиугольника: величины и направления сил даны на чертеже 6. Вычислить равнодействующую этих сил, если $p_1=1$.

§ 4. Параллельный перенос

77. Преобразовать с помощью параллельного переноса, определяемого вектором $\boldsymbol{m}$: 1) прямую a, 2) отрезок b. (Рассмотреть случаи: 1) прямая a не параллельна вектору $\boldsymbol{m}$;

2) прямая a параллельна вектору m. То же для отрезка b.)

78. Даны треугольник ABC и вектор a. Выполнить параллельный перенос треугольника ABC, определяемый вектором a. Внутри треугольника ABC взять произвольную точку M и построить ей соответственную. Будут ли соответственными точками середины соответственных сторон данного и полученного треугольников?

79. Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ получен из четырехугольника $ABCD$ с помощью параллельного переноса. Будут ли точки пересечения диагоналей этих четырехугольников соответственными точками?

80. Даны две равные окружности O_1 и O_2 радиуса R, не имеющие общих точек. Расстояние между центрами этих окружностей равно a. В результате параллельного перенесения окружность O_1 преобразовалась в другую окружность, которая: 1) совпадает с окружностью O_2, 2) касается окружности O_2, 3) пересекает окружность O_2 так, что их общая хорда равна b. Вычислить длину вектора, определяющего каждый из указанных параллельных переносов, если известно, что он параллелен прямой O_1O_2.

81. Даны ломаные линии $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$. Известно, что $AB \parallel A_1B_1$ и $AB = A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$ и $BC = B_1C_1$ и т. д. Кроме того, отрезки AB и A_1B_1, BC и B_1C_1 и т. д. одинаково направлены. Доказать, что одна из данных ломаных может быть получена из другой с помощью параллельного переноса.

82. Треугольник $A_1B_1C_1$ получен из треугольника ABC с помощью параллельного переноса. Доказать, что треугольник $A_1B_1C_1$ можно получить из треугольника ABC путем последовательного выполнения преобразования симметрии относительно двух осей. Построить эти оси.

83. Треугольник ABC с помощью последовательного выполнения преобразования симметрии относительно двух параллельных осей преобразован в треугольник $A_1B_1C_1$. Доказать, что треугольник $A_1B_1C_1$ может быть получен из треугольника ABC с помощью параллельного переноса. Построить вектор, определяющий этот параллельный перенос, и выразить его длину через расстояние между осями.

84. Дана система осей координат. Выполнить параллельный перенос графика функции $y = \frac{1}{2}x + 2$, определяемый: 1) вектором a, длина которого равна 5 ед. масштаба и направление совпадает с направлением оси ординат, 2) вектором b, имеющим длину, равную 3 ед., и направление, противоположное направлению оси абсцисс. Написать уравнение функции, соответствующей каждому преобразованному графику.

85. Вектор a образует с положительным направлением оси абсцисс угол в 150° и имеет длину, равную 6 ед. масштаба. Вы-

полнить параллельный перенос графика функции $y=\sqrt{3}\cdot x+2$, определяемый вектором a, и написать уравнение функции, соответствующей преобразованному графику.

86. Дана система осей координат с началом в точке O и вектор $\overline{OA}$, конец A которого имеет координаты $(3, -4)$. Выполнить параллельный перенос графика функции $y=x^2$, определяемый вектором $\overline{OA}$, и написать уравнение функции, соответствующей преобразованному графику.

87. Построить вектор, определяющий параллельный перенос, с помощью которого график функции $y=x^2$ можно преобразовать в график функции $y=x^2-2x-3$.

88. Правильный шестиугольник $ABCDEF$, сторона которого a, переместился так, что две его смежные вершины прошли по направлениям, перпендикулярным к AB, пути, равные апофеме шестиугольника. Найти площадь общей части данного и полученного шестиугольников.

89. Дан острый угол. Построить отрезок данной длины, перпендикулярный к одной из сторон этого угла, так, чтобы его концы лежали на сторонах угла.

90. Построить отрезок, равный и параллельный данному отрезку AB, так, чтобы концы его лежали на двух пересекающихся прямых MN и KL.

91. Данным радиусом r описать окружность, центр которой лежал бы на стороне данного угла и которая от другой стороны его отсекала бы хорду данной длины.

92. Доказать, что в трапеции разность оснований больше разности боковых сторон.

93. Построить трапецию по разности оснований, двум углам, прилежащим к большему основанию, и одной из диагоналей.

94. Построить трапецию $ABCD$ $(BC \parallel AD)$, если $AB=a$; $BC=b$; $CD=c$; $DA=d$.

95. В трапеции диагонали взаимно перпендикулярны и соответственно равны 6 *см* и 8 *см*. Найти среднюю линию трапеции.

96. Построить трапецию по основаниям и диагоналям.

97. Найти площадь трапеции по двум диагоналям ее 113 *см* и 17 *см* и высоте 15 *см*.

98*. Дан треугольник ABC. Сторона AC этого треугольника после параллельного переноса, определяемого вектором $\overline{CB}$, заняла положение BA_1. На продолжении BA отложен отрезок $AE=BA$. Доказать, что в треугольнике CA_1E: 1) каждая сторона вдвое больше соответствующей медианы треугольника ABC; 2) точка A является центром тяжести треугольника A_1CE.

99*. Построить треугольник по трем его медианам.

100*. Построить четырехугольник, зная три стороны и углы, прилежащие к четвертой стороне.

101 *. Построить четырехугольник, зная его стороны и угол, образуемый продолжениями двух противоположных сторон.

102 *. Между населенными пунктами A и B расположен канал с прямолинейными и параллельными берегами. Где следует выбрать место для моста, перпендикулярного к берегам канала, чтобы путь от A до B был кратчайшим?

103 * Даны прямые a и b и окружность O. Построить отрезок данной длины, параллельный прямой a, так, чтобы один его конец принадлежал b, а другой — окружности O.

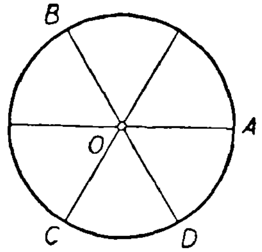
§ 5. Обобщение понятия угла

104. Какие углы описывают часовая и минутная стрелки часов в течение: а) 1 *ч* 30 *мин*, б) 5 *ч* 12 *мин*?

105. (Устно.) Колесо машины делает в 2 *сек* 6 оборотов. Найти в градусной мере угол поворота колеса за 1 *сек*, за 10 *сек*.

106. (Устно.) Одно из двух сцепленных зубчатых колес вращается в положительном направлении. В каком направлении вращается второе колесо? В системе последовательно сцепленных зубчатых колес первое вращается в положительном направлении. В каком направлении будет вращаться последнее колесо системы, если всего колес: а) $2n$, б) $2n+1$?

107. Окружность разделена на 6 равных частей (черт. 7). а) На какой наименьший положительный угол надо повернуть радиус OA, чтобы точка A попала в точку B? в точку C? в точку D? б) Какой наименьший по абсолютной величине отрицательный поворот совместит A и B, C и D? в) Можно ли определенно ответить на эти вопросы, если исключить из них слово «наименьший»?



Черт. 7.

108. Окружность разделена на 6 равных частей. Выразить в градусах сумму дуг: $\smile ABCAB + \smile BAC + \smile CDA$ (черт. 7).

109. (Устно.) Вектор $\overline{OA}$ повернулся вокруг точки O на угол 75° На какой угол повернется вектор OA, если, продолжая вращение в том же направлении, он сделает еще: 1) один полный оборот; 2) два полных оборота; 3) n полных оборотов?

110. Маховое колесо повернулось на 3475°. Найти наименьший положительный угол между направлениями спицы в начальном и конечном положениях.

111. По данному общему виду угла $\alpha = 83° + 360° n$ найти его частные значения: а) при $n=0$; 2; -3; б) заключенные между $-640°$ и 540°.

112. Вектор $\overline{AB}$, занимавший горизонтальное положение, повернули вокруг точки A на угол β. Построить при помощи циркуля и линейки начальное и конечное положения вектора $\overline{AB}$, если угол β равен: $150°$; $240°$; $330°$; $405°$; $540°$; $-120°$; $-210°$; $-840°$.

113. Вокруг какой точки и на какой угол на координатной плоскости следует повернуть график функции $y=\sqrt{3}\,x+3$, чтобы получить график функции: а) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$; б) $y=-x+3$.

§ 6. Вращение

114. Данную прямую MN повернуть на угол $\varphi=120°$ вокруг данного центра вращения O. Рассмотреть случаи: а) точка O принадлежит прямой MN; б) точка O расположена вне прямой MN.

115. Данный отрезок AB повернуть на угол $\varphi=-80°$ вокруг данного центра вращения O, расположенного вне отрезка AB.

116. Повернуть вокруг данного центра вращения O на угол φ данную окружность. Рассмотреть случаи: а) точка O расположена вне окружности; б) точка O расположена на окружности; в) точка O совпадает с центром окружности.

117. Даны четырехугольник и точка O. Повернуть данный четырехугольник вокруг точки O на угол $\varphi=-780°$ Рассмотреть случаи: 1) точка O совпадает с одной из вершин четырехугольника; 2) точка O расположена внутри четырехугольника.

118. Построить центр вращения и найти угол поворота, если даны две соответственные точки A и A_1 (точка A_1 есть образ точки A) и известно, что центр вращения лежит на данной прямой.

119. Дан четырехугольник $ABCD$. Сторона AB этого четырехугольника в результате вращения вокруг некоторого центра преобразовалась в данный отрезок A_1B_1. Как, не находя центра вращения и угла поворота, построить образ четырехугольника $ABCD$ в том преобразовании вращения, которое переводит отрезок AB в отрезок A_1B_1?

120. Даны два равных непараллельных отрезка. Доказать, что путем вращения можно один из них привести в совмещение с другим.

121. Даны два равных параллельных отрезка AB и A_1B_1. Найти центр вращения и угол поворота, переводящего отрезок AB в отрезок A_1B_1, считая точки A и A_1, B и B_1 соответственными.

122. Один из двух равных равносторонних треугольников со стороной a, наложенных друг на друга, повернут около его центра на 60°. Найти периметр образовавшейся при этом звезды.

123. Один из двух квадратов со стороной a, наложенных друг на друга, повернут около его центра на 45°. Найти периметр образовавшеися при этом звезды.

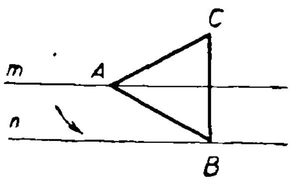
124. Треугольник ABC повернуть на 180° вокруг центра вращения, который лежит на середине одной из сторон треугольника. Доказать, что построенный треугольник и заданный образуют параллелограмм.

125. (Устно.) На какой угол надо повернуть многоугольник вокруг одной из его вершин, чтобы получить многоугольник, симметричный данному относительно этой вершины?

126. В результате поворота данной прямой a вокруг данного центра O на данный угол φ образовалась прямая a_1. Построить $OA \perp a$; $OA_1 \perp a_1$ и доказать: 1) $\angle AOA_1 = \varphi$; 2) $OA = OA_1$; 3) один из углов между прямыми a и a_1 равен φ. Как использовать результат решения задачи для выполнения поворота прямой вокруг данной точки на данный угол?

127. Даны две пересекающиеся прямые a и b. Сколько существует центров вращения, переводящих прямую a в прямую b? Где расположены эти центры?

128. Вершины A и B равностороннего треугольника ABC принадлежат соответственно прямым m и n. Повернуть прямую m вокруг точки C на угол в 60° в направлении, указанном на чертеже 8. Доказать, что прямая m в новом положении пересечет прямую n в точке B.



Черт. 8.

129. Даны точка A и две параллельные прямые m и n.

Построить треугольник ABC так, чтобы $AB = AC$, $\angle A = 30°$, а вершины B и C принадлежали прямым m и n.

130. Построить равносторонний треугольник так, чтобы одна из его вершин находилась в данной точке A, а две другие — на двух данных пересекающихся прямых.

131*. Построить равносторонний треугольник, вершины которого лежат соответственно на трех данных параллельных прямых.

132. Построить квадрат так, чтобы три его вершины лежали на трех данных параллельных прямых m, n, p.

133*. Даны две параллельные прямые, пересеченные двумя другими параллельными прямыми.. Построить квадрат так, чтобы его вершины принадлежали четырем данным прямым

134*. Построить треугольник так, чтобы стороны его относились как 3 : 4 : 5, а вершины принадлежали трем данным параллельным прямым.

§ 7. Умножение вектора на число

135. (Устно.) Направление вектора a изменялось на противоположное, а длина увеличивалась вдвое. Выразить вновь полученный вектор в зависимости от a.

136. Даны векторы a и b Построить каждый из следующих векторов: 1) $4a$; 2) $-3a$; 3) $-\frac{1}{3}b$; 4) $2a+\frac{1}{3}b$.

137. O — центр квадрата $ABCD$. Найти величину тех из следующих отношений, которые имеют смысл: $\overline{BD}:\overline{OD}$; $\overline{AC}:\overline{CO}$, $\overline{AC}:\overline{CB}$.

138. На векторах $AB=a$ и $AD=b$ построен параллелограмм $ABCD$. M — точка пересечения диагоналей этого параллелограмма. Выразить в зависимости от a и b следующие векторы: $\overline{MC}$, $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ и $\overline{MD}$.

139. Доказать построением векторное тождество:

$$a+\frac{b-a}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

140 Сторона BC треугольника ABC разделена на 4 равные части и точки деления D_1, D_2, D_3 соединены с вершиной A. Положив, что $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$, найти векторы $\overline{AD}_1$, $\overline{AD}_2$, $\overline{AD}_3$.

141. Даны треугольник ABC и его биссектриса AM. Зная, что $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, найти вектор $\overline{AM}$.

142. При помощи векторов доказать теорему о средней линии треугольника.

143. При помощи векторов доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

§ 8. Гомотетия

144. Выполнить преобразование гомотетии точки A относительно центра гомотетии S при k, равном 3; $\frac{1}{2}$; $-1{,}5$; 1; -1.

145. Даны отрезок AB и точка S вне его. Выполнить преобразование гомотетии отрезка AB, принимая за центр гомотетии точку S при k, равном 2; -2; $-\frac{1}{2}$.

146. Даны две прямые a и b, пересекающиеся в точке A. Подвергнуть эти прямые преобразованию гомотетии с центром S и коэффициентом $k=3$, если: 1) центр S совпадает с точкой A, 2) центр S принадлежит прямой a.

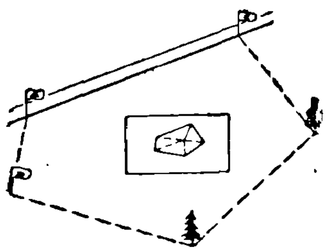
147. Сколько центров гомотетии имеют: 1) два параллельных отрезка (рассмотреть случаи, когда отрезки равны и не равны), 2) две параллельные прямые, 3) две непараллельные прямые, 4) две точки?

148. Данный треугольник преобразовать в гомотетичный ему, принимая за центр гомотетии: 1) вершину треугольника, 2) точку, взятую на стороне треугольника ($k=2$). Зависят ли длины сторон полученного треугольника от положения центра гомотетии?

149. (Устно.) На плоскости даны два гомотетичных треугольника. Как найти их центр гомотетии?

150. Данный пятиугольник преобразовать в гомотетичный ему, принимая за центр гомотетии точку, взятую: 1) внутри пятиугольника, 2) вне его, 3) на стороне пятиугольника $\left(k=\frac{2}{3}\right)$.

151. На чертеже 9 изображен планшет в заключительный момент съемки плана многоугольного участка, которая была произведена при помощи мензулы полярным способом. Обосновать, что многоугольник на местности и многоугольник на плане гомотетичны.



Черт. 9.

152. Пришкольный участок имеет форму четырехугольника. Снят план этого участка в масштабе 1 : 5000. Как, используя гомотетию, начертить на кальке план того же участка в масштабе 1 : 15 000?

153. На плоскости дан центр гомотетии S и соответственные точки A и A_1. Построить точку, соответствующую данной точке B.

154. Построить многоугольник, гомотетичный данному многоугольнику $ABCD$, зная положение центра гомотетии и положение вершины A_1 искомого многоугольника, соответственной вершине A. Где должна быть расположена точка A_1, чтобы задача имела решение?

155. (Устно.) Стороны одного многоугольника параллельны сторонам другого многоугольника. Является ли это условие достаточным для того, чтобы эти многоугольники были гомотетичны?

156. Для того чтобы два многоугольника были гомотетичны, достаточно, чтобы их соответственные стороны были параллельны и соответственные вершины лежали на прямых, пересекающихся в одной точке. Доказать.

157. Будут ли гомотетичны два ромба, имеющие общий угол? Рассмотрите аналогичный вопрос для двух прямоугольников и двух разносторонних треугольников.

158. (Устно.) Доказать, что два многоугольника, расположенные симметрично относительно некоторой точки, будут го-

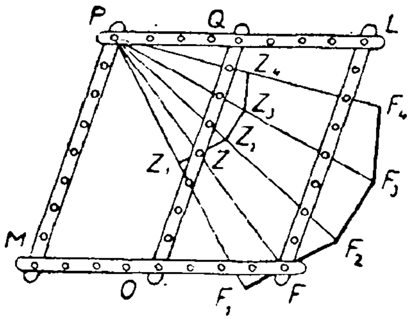
мотетичны. Где будет расположен центр гомотетии и чему равен коэффициент гомотетии?

159. Через произвольную точку, взятую на диагонали параллелограмма, проведены прямые, параллельные его сторонам. Сколько пар гомотетичных параллелограммов получилось при этом? Указать для каждой пары центр гомотетии.

160. Доказать, что данный треугольник и треугольник, образованный его средними линиями, гомотетичны.

161 *. Два неравных подобных многоугольника расположены так, что их сходственные стороны параллельны. Доказать, что эти многоугольники гомотетичны.

162. На чертеже 10 изображен пантограф, состоящий из пяти реек одинаковой длины. На каждой рейке сделано одинаковое количество отверстий на равном расстоянии друг от друга. Обводящий штифт установлен в точке F, а карандаш — в точке Z. 1) Почему точки P, F, Z расположены на одной прямой? 2) В какое отверстие нужно поместить карандаш, если рейка O будет проходить через второе отверстие рейки PL (считая отверстие P первым)? Чему при этом будет равно отношение отрезка, описываемого штифтом F, к отрезку, описываемому карандашом Z? 3) Почему отрезки Z_1Z_2, Z_2Z_3, Z_3Z_4, описываемые карандашом, будут соответственно параллельны отрезкам F_1F_2, F_2F_3, F_3F_4, описываемым обводящим штифтом? 4) Как нужно расположить рейку OQ, чтобы, имея карту с масштабом 1 : 250 000, начертить карту того же района в масштабе 1 : 1 000 000?



Черт. 10.

163. Треугольник $A_1B_1C_1$ получен из треугольника ABC с помощью гомотетии с центром S и коэффициентом гомотетии k. Доказать, что отношение: а) соответственных высот, б) радиусов вписанных окружностей, в) радиусов описанных окружностей треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC — равно k.

164. Построить треугольник по отношению двух сторон, углу между ними и а) биссектрисе данного угла, б) высоте, опущенной на большую из двух сторон, отношение которых дано, в) медиане, проведенной из вершины данного угла.

165. Построить треугольник, зная отношение его сторон и а) медиану большей стороны, б) высоту, проведенную из вершины большего угла.

166. Построить треугольник по двум углам и 1) сумме медианы и высоты, проведенных из вершины третьего угла, 2) сумме всех его высот, 3) периметру.

167. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и а) сумме боковой стороны и основания, б) разности боковой стороны и основания, в) сумме медиан.

168. Построить прямоугольник, зная: а) отношение двух неравных сторон и диагональ, б) острый угол между диагоналями и меньшую сторону прямоугольника, в) отношение стороны к диагонали и периметр.

169. Построить параллелограмм: а) по отношению двух неравных сторон, углу между ними и диагонали, проведенной из вершины данного угла, б) по отношению диагоналей, углу между ними и высоте, в) по отношению диагоналей, углу между ними и периметру.

170. Построить равнобедренную трапецию по отношению боковой стороны к большему основанию, углу между ними и средней линии.

171. Построить четырехугольник $ABCD$, зная, что периметр его равен P, $AB:BC=m:n$, $\angle A=\alpha$; $\angle B=\beta$; $\angle C=\gamma$.

172. В данный треугольник вписать квадрат так, чтобы две его вершины лежали на одной из сторон треугольника, а две другие — на других сторонах.

173. В данный треугольник ABC вписать ромб с данным острым углом α так, чтобы две его вершины лежали на стороне AB треугольника, а две другие вершины — на сторонах AC и BC.

174. В данный полукруг вписать прямоугольник, стороны которого относятся как $m:n$.

175. В данный сегмент вписать квадрат так, чтобы две его вершины принадлежали хорде, а две другие — дуге сегмента.

176. В данный сектор вписать квадрат так, чтобы две вершины его принадлежали дуге сектора, а две другие — радиусам.

177. В данный сектор, дуга которого меньше 90°, вписать квадрат так, чтобы две его вершины принадлежали одному из радиусов, третья — другому радиусу, а четвертая — дуге сектора.

178. Дан острый угол ABC и внутри его точка M. Найти на стороне BC точку, равноудаленную от AB и от точки M.

179. Построить окружность, гомотетичную данной, если даны коэффициент гомотетии и положение центра гомотетии.

180. Построить центр гомотетии двух данных окружностей. Рассмотреть случаи: 1) *когда одна окружность расположена* вне другой, 2) когда окружности касаются.

181. Построить окружность, касающуюся двух пересекающихся прямых и проходящую через данную точку.

§ 9. Геометрические места точек

182. (Устно.) Будет ли дуга окружности геометрическим местом точек на плоскости, находящихся на данном расстоянии r от данной точки O (O — центр дуги, r — радиус)?

183. (Устно.) Можно ли назвать прямую, делящую каждый из двух вертикальных углов пополам, геометрическим местом точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых, образующих эти углы?

184. Даны две параллельные прямые и секущая. Найти точки, равноудаленные от этих трех прямых.

185. Найти точки, равноудаленные от трех данных попарно пересекающихся прямых.

186. (Устно.) Найти геометрическое место вершин треугольников, имеющих общее основание и данную высоту.

187. На данной прямой найти точку, равноудаленную от двух данных точек.

188. Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки A и B.

189. С помощью одного циркуля найти точку, лежащую на продолжении данного отрезка.

190. Построить прямоугольный треугольник по катету b и сумме S гипотенузы с другим катетом.

191. Построить треугольник по стороне a, прилежащему к ней углу B и сумме S двух других сторон.

192. Найти геометрическое место середин равных хорд данного круга.

193. Провести в данном круге хорду данной длины, которая делилась бы пополам данной хордой AB.

194. Найти геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых проходят через две данные точки A и B.

195. Построить треугольник по основанию, высоте и углу при вершине.

196. Построить треугольник по стороне, противолежащему этой стороне углу и медиане, проведенной из вершины данного угла.

197. Найти геометрическое место середин хорд данной окружности, проходящих через одну и ту же точку окружности.

198*. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и медиане боковой стороны.

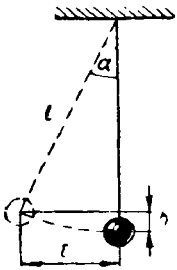
199. На карте указано положение трех маяков: A, B и C. С корабля маяки A и B видны под углом α, а маяки B и C — *под углом* β. *Найти на карте место корабля.*

200. Два маяка A и B, обозначенные на карте, видны с корабля под углом α. После того как корабль прошел некоторый прямолинейный путь, те же маяки стали видны с корабля под углом β. Найти на карте место корабля, если с помощью инструментов, имеющихся на корабле, длина и направление пройденного пути установлены.

201 *. Построить параллелограмм, если даны две стороны параллелограмма и острый угол между диагоналями.

§ 10. Решение прямоугольных треугольников

202. Маятник длины l, совершающий колебания по дуге окружности, при наибольшем отклонении от вертикали на угол α поднимается на высоту h от положения равновесия, причем удаляется на расстояние t от вертикали. Найти зависимость расстояния t от длины l и высоты h. Вычислить t и угол α (по таблицам) при $l \approx 1{,}00$ *м* и $h \approx 10{,}0$ *см* (черт. 11).



Черт. 11.

203. Найти высоту дерева, если при угловой высоте солнца в 50° длина тени дерева 12 *м*.

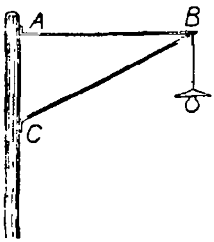
204. На тело действует сила $R = 25{,}37$ *кг*; разложить ее на две взаимно перпендикулярные составляющие P и S, из которых S составляет с R угол в 30°27′. Вычислить P и S.

205. Найти сторону правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса R. Вычислить при $n=5$ и $R=1$.

206. Найти сторону правильного n-угольника, описанного около круга, если радиус круга r.

207. Двадцать шариков диаметром по 16 *мм* находятся в шариковом подшипнике. Найти диаметр внутреннего и внешнего круга катания.

208. Лодка переезжает реку перпендикулярно к берегу за 30 *мин*. Ширина реки 3 *км*, а скорость течения реки 2,1 *км/ч*. Найти собственную скорость лодки и угол между направлением собственной скорости и направлением течения.



Черт. 12.

209. Фонарь весом в 10 *кг* подвешен к столбу при помощи кронштейна, состоящего из двух стержней AB и BC. Найти силу растяжения стержня AB и силу сжатия стержня BC, если угол ACB равен 53° (черт. 12).

210. На наклонной плоскости лежит шарик веса P. Найти силу, которую надо приложить параллельно наклонной плоскости, чтобы удержать шарик от скатывания. Угол наклона α (трение не принимается во внимание). Каково давление тела на плоскость? ($P=10$ *кг*, $\alpha=25°$.)

211. Высота сегмента равна 4 *см*, основание равно 20 *см*. Найти дугу сегмента.

212. В равнобедренном треугольнике ABC $AB=AC$; высота, проведенная из вершины A, равна h; высота, проведенная из вершины B, равна h_1. Найти углы при основании треугольника. ($h=2{,}5$; $h_1=3$.)

213. Найти площадь ромба, угол которого α; диагональ, проведенная из вершины этого угла, равна l.

214. Параллелограмм, один из углов которого α, описан около круга радиуса r. Найти площадь этого параллелограмма.

При каком значении угла α эта площадь будет иметь наименьшую величину?

215. Около круга радиуса R описана равнобедренная трапеция, острый угол которой равен α. Найти периметр и площадь трапеции.

216. Диагональ d равнобедренной трапеции наклонена к основаниям под углом α. Найти площадь трапеции.

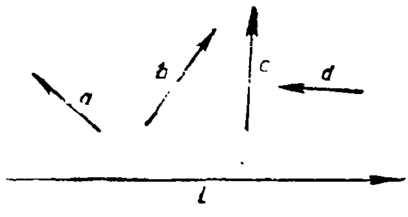
217. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

218. Найти площадь параллелограмма, если диагонали его $d_1=54$ *дм*, $d_2=25$ *дм* и угол между ними $\alpha=42°30'$.

219. В круг радиуса R вписана трапеция, основанием которой служит диаметр круга; диагональ отсекает дугу $\alpha°$. Найти площадь трапеции.

220. Прямая, проходящая через вершину острого угла равнобедренного прямоугольного треугольника, делит его на два равновеликих треугольника. Найти углы между этой прямой и катетами треугольника.

§ 11. Скалярное произведение векторов



Черт. 13.

221. На чертеже 13 даны векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ и ось l. Построить проекцию суммы этих векторов на ось l.

222. (Устно.) Проекции векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ на ось соответственно равны 7, —2, —5. Как расположен вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ относительно оси?

223. Длина вектора a равна 10. Проекция его на ось равна -5. Найти угол между вектором a и осью.

224. (Устно.) Проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на ось l равна 5. Чему равна проекция вектора $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{a}$ на ту же ось?

225. (Устно.) Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l равна 7. Чему будет равна проекция вектора $\overline{AB}$ на ту же ось после выполнения каждого из следующих преобразований вектора $\overline{AB}$: а) параллельного переноса, б) симметрии относительно оси l, в) симметрии относительно точки, являющейся серединой вектора $\overline{AB}$, г) гомотетии с центром в точке A и коэффициентом, равным 4?

226. (Устно.) Проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на ось l равна -4. Какому преобразованию нужно подвергнуть вектор $\boldsymbol{a}$, чтобы проекция преобразованного вектора на ту же ось была равна 28?

227. Тело поступательно движется так, что его центр тяжести перемещается по прямой MN в направлении от M к N. Какую работу при этом произведут силы $\overline{FA}$, $\overline{FB}$, $\overline{FC}$ и $\overline{FD}$, приложенные к центру тяжести F на пути, равном 1 *м*, если

$$\angle AFN = \frac{\pi}{6}, \ |\overline{FA}| = 5 \ кГ,$$

$$\angle BFN = \frac{\pi}{4}, \ |\overline{FB}| = 10 \ кГ, \ \angle CFN = \frac{\pi}{5},$$

$$|\overline{FC}| = 7 \ кГ, \ \angle DFN = \frac{3}{4}\pi, \ |\overline{FD}| = 2 \ кГ?$$

228. (Устно.) Проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на ось, направление которой совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{b}$, равна 15. Найти $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, если $|\boldsymbol{b}| = 3$.

229. (Устно.) Дано $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 200$ и $|\boldsymbol{b}| = 2{,}5$. Найти проекцию вектора $\boldsymbol{a}$ на ось, направление которой совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{b}$.

230. (Устно.) Скалярное произведение двух векторов равно 12. Чему будет равно это произведение, если один из векторов изменит направление на противоположное, а длина его уменьшится вдвое?

231. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол $\alpha = \frac{3}{4}\pi$. Зная, что $|\boldsymbol{a}| = 5$, $|\boldsymbol{b}| = 3$, вычислить: 1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{a}$; 2) $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$; 3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$.

232. Указать, какие из следующих равенств верны и какие неверны и почему:

1) $\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$;
2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2\,\boldsymbol{b}^2$;

3) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$;

4) $\sqrt{a^2} = a$.

233. Доказать, что $-|a| \cdot |b| \leqslant (a, b) \leqslant |a| \cdot |b|$.

При каком условии выполняется знак равенства?

234. Можно ли утверждать, что если $(a, b) = (a, c)$, где $a \neq 0$, то $b = c$?

235. (Устно.) Какому условию должны удовлетворять векторы a и b, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю?

236. Пользуясь понятием скалярного произведения, доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

237. Пользуясь понятием скалярного произведения, доказать, что каждый катет прямоугольного треугольника есть средняя пропорциональная величина между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

238. Доказать справедливость тождества: $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$. Какой вывод следует из этого тождества относительно соотношения между суммой квадратов диагоналей параллелограмма и суммой квадратов его сторон?

239. Пользуясь выводом, полученным из тождества, доказанного при решении предыдущей задачи, вычислить: 1) $|a - b|$, если $|a| = 23$; $|b| = 11$; $|a + b| = 30$; 2) $|a + b|$, если $|a| = 7$; $|b| = 4$; $|a - b| = 7$.

240. Стороны параллелограмма 14 *см* и 8 *см*, одна из диагоналей 18 *см*. Найти другую диагональ.

241. Стороны треугольника 12 *см*, 11 *см* и 7 *см*. Вычислить медиану большей стороны.

242. В равнобедренном треугольнике основание равно $2\sqrt{5}$ и медиана боковой стороны равна $\sqrt{14}$. Вычислить боковую сторону треугольника.

243. Квадрат медианы основания треугольника равен половине суммы квадратов боковых сторон минус квадрат половины основания треугольника. Доказать.

244. Основания трапеции 18 *см* и 6 *см*, боковые стороны 11 *см* и 7 *см*. Вычислить длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.

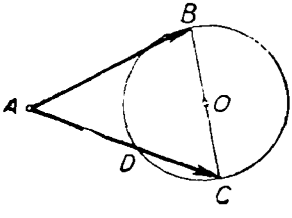
245. Доказать тождество: $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4(a\,b)$. Какой вывод следует из этого тождества относительно соотношения между разностью квадратов диагоналей параллелограмма и произведением его сторон?

246. Доказать тождество: $(a, b) = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$.

247. Даны окружность O и точка A. Доказать, что скалярное произведение векторов, проведенных из точки A к обоим концам диаметра окружности O, есть величина постоянная, не зависящая от положения диаметра.

Рассмотреть различные случаи взаимного положения точки A и окружности O.

248. Из точки A к концам диаметра BC данной окружности проведены два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Доказать:



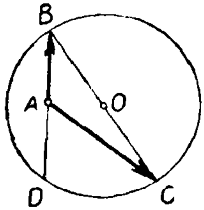
Черт. 14.

1) $(\overline{AB}, \overline{AC}) = AB \cdot AD$, если точка A лежит вне окружности (черт. 14).

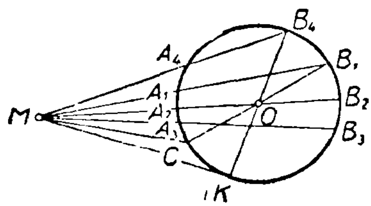
2) $(\overline{AB}, \overline{AC}) = 0$, если точка A принадлежит окружности.

3) $(\overline{AB}, \overline{AC}) = -AB \cdot AD$, если точка A лежит внутри окружности (черт. 15).

249. Если из точки (черт. 16), взятой вне круга, проведены к нему несколько секущих, то произведение каждой секущей на ее внешнюю часть есть число постоянное для всех секущих, равное квадрату касательной, проведенной из той же точки. Доказать.



Черт. 15.



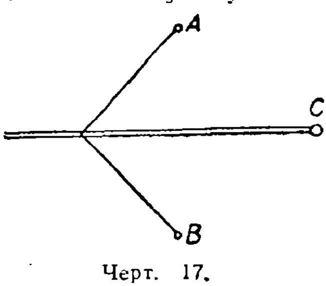
Черт. 16.

250. Если через точку, взятую внутри круга, проведено несколько хорд, то произведение отрезков каждой хорды есть число постоянное для всех хорд. Доказать.

§ 12. Решение косоугольных треугольников

251. (Устно.) В треугольнике ABC $AB = 7$ *см*, $AC = 8$ *см*. Вычислить сторону BC, если: 1) $\angle BAC = 60°$, 2) $\angle BAC = 120°$.

252. От шоссе, идущего к городу C, отходят две дороги: влево — к пункту A и вправо — к пункту B, образующие с осью шоссе угол 53°. (Шоссе и обе дороги прямолинейны, черт. 17.)



Черт. 17.

Перекресток дорог находится от города на расстоянии 4,0 *км*, а от пунктов A и B удален на 3,0 *км*. Вычислить кратчайшее расстояние от пункта A до города и до пункта B.

253. Две машины одновременно выходят из пункта A и движутся по двум прямолинейным дорогам, составляющим угол в 35°: одна — со скоростью 1 *км/мин* и другая — 0,8 *км/мин*. На каком расстоянии друг от друга будут находиться автомашины через 40 *мин*?

254. На берегу озера расположены лодочная станция и пристань. Найти расстояние между лодочной станцией и пристанью, если наблюдатель, удаленный от них на расстояние соответственно 1270 шагов и 900 шагов (с точностью до 10 шагов), видит их под углом 135°. (Ответ выразить в метрах, считая 10 шагов приближенно равным 8 *м*.)

255. Вычислить бо́льшую диагональ параллелограмма, у которого две стороны равны 45 *дм* и 29 *дм* и один из углов 125°.

256. Периметр треугольника равен 66 *см* и один из углов содержит 120°. Бо́льшая сторона треугольника равна 31 *см*. Вычислить две другие стороны.

257. Два пункта A и B, расстояние между которыми 2,1 *км*, видны туристу под углом 60°. На каком расстоянии находится турист от каждого из этих пунктов, если, идя равномерным шагом, он может дойти до пункта A в $2\frac{2}{3}$ раза скорее, чем до B?

258. Дан угол 112°. Внутри угла взята точка, удаленная от его сторон на 7 *см* и 9 *см*. Найти расстояние между проекциями этой точки на стороны угла.

259. Две силы P *кГ* и Q *кГ* действуют на одну и ту же точку тела, образуя своими направлениями угол φ.

Найти равнодействующую этих сил, а также наибольшее и наименьшее значения ее при изменении φ от 0° до 180°.

Вычислить равнодействующую при $P=10$; $Q=12$; $\varphi=64°$.

260. Даны стороны треугольника ABC: $AB\approx 12{,}3$ *см*; $AC\approx 9{,}0$ *см*; $BC=12{,}2$ *см*. Вычислить: 1) больший угол треугольника, 2) меньший угол треугольника.

261. Стороны треугольника относятся как $7:9:12$. Найти углы треугольника.

262. Равнодействующая сила $R\approx 18{,}62$ *кГ*, составляющие $P\approx 13{,}56$ *кГ* и $Q=10{,}72$ *кГ*. Вычислить углы между равнодействующей и каждой из составляющих.

263. Материальная точка под действием сил $F_1=25$ *кГ* $F_2=36$ *кГ* и $F_3=29$ *кГ*, расположенных в одной плоскости, находится в равновесии. Найти углы между силами.

264. Стороны параллелограмма 16 *см* и 18 *см*; одна из диагоналей равна 26 *см*. Найти угол между диагоналями.

265. Основания трапеции равны 21 *см* и 20 *см*, диагонали 9 *см* и 40 *см*. Найти угол между диагоналями.

266. Дана трапеция $ABCD$, в которой $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $BC=6$. $CD=12$; $\angle ADC=60°$. Вычислить угол между диагоналями.

267. Стороны треугольника 48 *см*, 45 *см* и 5 *см*. Вычислить биссектрису большего угла.

268. 1) Пользуясь теоремой косинусов, доказать: квадрат стороны треугольника, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения одной из этих сторон на проекцию на нее другой стороны.

2) Пользуясь теоремой косинусов, доказать: квадрат стороны, лежащей против тупого угла треугольника, равен сумме квадратов двух других сторон, сложенной с удвоенным произведением одной из этих сторон на проекцию на нее другой стороны.

269. (Устно.) Установить вид треугольника, стороны которого: 1) 8, 6, 10; 2) 5, 7, 6; 3) 4, 3, 2.

270. (Устно.) Стороны треугольника, заключающие тупой угол, равны: 1) 3 *см* и 4 *см*, 2) 5 *см* и 7 *см*. Какие значения может принимать длина третьей стороны треугольника в каждом из указанных случаев?

271. (Устно.) Стороны треугольника, заключающие острый угол, равны: 1) 12 *см* и 5 *см*, 2) 6 *см* и 8 *см*. Какие значения может принимать длина третьей стороны треугольника в каждом из указанных случаев?

272. Основание треугольника равно 14 *см*, боковые стороны 13 *см* и 15 *см*. Вычислить проекции боковых сторон на основание.

273. Две стороны треугольника $b=21$ *см* и $c=10$ *см* образуют острый угол. Проекция стороны c на сторону b равна 6 *см*. Построить треугольник и найти третью сторону a.

274. Стороны треугольника $b=4\frac{1}{2}$ *см* и $c=5$ *см* образуют тупой угол. Проекция стороны c на прямую, содержащую сторону b, равна 3 *см*. Построить треугольник и найти третью сторону.

275. В равнобедренном треугольнике ABC дано: $AB=BC=25$, $AC=30$. Найти расстояние между основаниями высот треугольника, проведенных из вершин равных углов.

276. Данного круга касаются два равных меньших круга: один — внутри, другой — извне, причем дуга между точками касания содержит 60°. Радиусы меньших кругов равны r, радиус большего круга равен R. Найти расстояние между центрами меньших кругов.

277. Хорда, стягивающая данную дугу окружности радиуса r, равна a. Найти хорду, стягивающую половину данной дуги.

278. 1) Доказать, что разность квадратов двух сторон треугольника равна удвоенному произведению третьей стороны и проекции на эту сторону ее медианы.

2) Доказать, что сумма квадратов двух сторон треугольника равна удвоенному квадрату половины третьей стороны плюс удвоенный квадрат медианы, проведенной к третьей стороне.

279. Найти углы трапеции, у которой основания равны 16 *дм* и 10 *дм*, а боковые стороны 7 *дм* и 5 *дм*.

280. Решить треугольник, если

1) $a=100$, $\angle A=74°$, $\angle C=44°$;
2) $c=16$, $\angle A=143°8'$, $\angle B=22°37'$;
3) $a=225$, $b=800$ и $\angle C=36°44'$;
4) $в=28$, $c=42$ и $\angle A=124°$.

281. Сила R *кГ* разложена на две составляющие, которые образуют с направлением этой силы углы α и β. Найти составляющие силы.

($R\approx23$; $\alpha\approx46°33'$; $\beta\approx54°14'$.)

282. На горе находится башня высотой a метров. Наблюдая последовательно из ее вершины и основания предмет, находящийся в долине, видят его ниже горизонтальной плоскости на углы α и β. Найти высоту горы.

283. Найти расстояние от данной точки A до дома, если из этой точки верхний край одного из окон дома виден под углом высоты α, а нижний — под углом высоты β и если высота окна равна a *м*.

($a=2$ *м*; $\alpha=50°17'$; $\beta=40°9'$.)

284. Доказать, что в любом треугольнике сторона равна произведению диаметра описанного круга на синус противолежащего угла.

285. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника равна 4,5 *м* и пересекает противоположную сторону под углом $72°48'$ (угол обращен к основанию). Найти радиус круга, описанного около треугольника.

286. Вычислить площадь треугольника, если радиус описанного круга R и два угла треугольника α и β.

287. Основания трапеции a и b $(a>b)$; углы при основании a равны α и β. Найти площадь трапеции.

288. Две стороны треугольника 2 *дм* и 4 *дм*, угол между ними 60°. Найти радиусы вписанного в треугольник и описанного около него кругов.

289. Решить треугольник, если: 1) $a=87$ *дм*; $b=65$ *дм* и $\angle A=75°45'$; 2) $b=360$ *см*, $c=309$ *см* и $\angle C=21°14'$; 3) $a=24$ *см*, $b=83$ *см*, $\angle A=26°45'$; 4) $a=457{,}1$ *дм*, $b=169{,}9$ *см* и $\angle B=21°49'$.

290. В трапеции $ABCD$ параллельные стороны BC и AD соответственно равны 4,2 *м* и 27 *м*; $CD=20{,}5$ *м*, $\angle A=58°7'$. Найти AB.

291. На продолжении диаметра круга, равного 12 *см*, взята точка на расстоянии 10 *см* от центра и через эту точку проведена секущая, составляющая с продолжением диаметра угол в $20°15'$. Найти отрезки секущей.

292. Внутри круга, радиус которого $R=3$ *дм*, взята точка на расстоянии 2 *дм* от центра; через точку проведены диаметр и хорда, составляющие угол в $49°3'$. Найти отрезки хорды.

293. В параллелограмме даны: одна из сторон $a=1{,}5$ *дм*, одна из диагоналей $d=4{,}4$ *дм* и угол $\delta=107°57'$, противолежащий данной диагонали. Найти другую сторону параллелограмма и его площадь.

294*. Наметить план решения треугольника ABC по данным:

1) m_b, a, B;
2) a, c, m_b;
3) B, m_b, h_c;
4) h_a, h_c, m_b.

§ 13. Формула Герона

295. Вычислить площадь треугольника по трем данным его сторонам:

1) 13 *см*; 14 *см*; 15 *см*;
2) 6 *дм*; 25 *дм*; 29 *дм*;
3) 3,0 *м*; 4,0 *м*; 6,0 *м*;
4) 22,0 *см*; 50,0 *см*; 60,0 *см*;
5) $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{13}$ (л. ед.).

296. 1) Стороны треугольника равны 25 *см*, 29 *см* и 36 *см*. Вычислить наименьшую и наибольшую высоты этого треугольника.

2) Стороны треугольника равны 2,6 *см*, 2,8 *см* и 3,0 *см*. Вычислить среднюю по длине высоту треугольника.

297. 1) Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 17 *см* и 39 *см*, а расстояние между центрами — 44 *см*. Вычислить длину общей хорды этих окружностей.

2) Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 65 *мм* и 75 *мм*, а их общая хорда — 120 *мм*. Найти расстояние между центрами этих окружностей.

298. 1) Площадь треугольника равна 144 *см*^{2}, а его стороны относятся как $9:10:17$. Вычислить периметр этого треугольника.

2) Площадь треугольника равна 84 *см*^{2}, а длины его сторон являются последовательными натуральными числами. Вычислить периметр треугольника.

299. Одна из сторон параллелограмма равна 51 *см*, а его диагонали равны 40 *см* и 74 *см*. Вычислить площадь этого параллелограмма (с точностью до 0,01 *м*^{2}).

300. Стороны треугольника равны 27 *см* и 29 *см*, а медиана третьей стороны — 26 *см*. Вычислить площадь треугольника.

301. Вывести формулы: $R=\frac{abc}{4S}$ и $r=\frac{S}{p}$, где R — радиус окружности, описанной около данного треугольника; r — радиус окружности, вписанной в данный треугольник; a, b и c — стороны данного треугольника; S — площадь и p — полупериметр данного треугольника.

302. Вычислить r и R для треугольника со сторонами: 1) 4 *см*, 13 *см* и 15 *см*; 2) 34 *м*, 93 *м* и 65 *м*.

303. Найти площадь трапеции, если основания ее равны 60 *см* и 20 *см*, а боковые стороны — 13 *см* и 37 *см*.

304. Три окружности, радиусы которых приближенно равны 1,0 *см*, 3,0 *см* и 12 *см*, попарно внешне касаются. Вычислить: 1) диаметр окружности, проходящей через центры данных окружностей; 2) диаметр окружности, проходящей через точки касания.

§ 14. Повторение

305. Дан луч, исходящий из точки O. Каждой точке M луча ставится в соответствие точка M_1, удовлетворяющая следующим условиям: а) $MM_1 \perp OM$; б) $OM=MM_1$; в) все точки, соответственные точкам луча при этом преобразовании, лежат по одну сторону от него.

На данном луче взять точки A_1, A_2, A_3 и построить им соответственные в указанном преобразовании. В какую фигуру преобразуется луч O после преобразования всех его точек? Будет ли рассматриваемое преобразование взаимно однозначным?

306. Каждой точке M окружности ставится в соответствие основание перпендикуляра, опущенного из нее на диаметр окружности. Будет ли рассматриваемое преобразование взаимно однозначным?

307. Даны две окружности O и O_1, расположенные по разные стороны прямой AB. Построить отрезок так, чтобы он был перпендикулярен прямой AB, делился ею пополам и концы его принадлежали окружностям O и O_1.

308. Доказать, что прямая, проходящая через середины оснований равнобедренной трапеции, является осью симметрии трапеции.

309. Доказать, что если две окружности имеют только одну общую точку, то эта точка лежит на линии центров этих окружностей, а если имеют только две общие точки, то они расположены симметрично линии центров окружностей.

310. На плоскости даны два произвольно расположенных параллелограмма. Провести прямую так, чтобы каждый из этих параллелограммов разделился на равные части.

311. Доказать, что всякий четырехугольник, имеющий центр симметрии и вписанный в окружность, есть прямоугольник, центр симметрии которого совпадает с центром окружности.

312. Доказать, что всякий четырехугольник, имеющий центр симметрии и описанный около окружности, есть ромб, центр симметрии которого совпадает с центром окружности.

313. Фигуры F и F_1 симметричны относительно начала координат. Составить формулы, связывающие координаты точек фигуры F с координатами соответствующих им точек фигуры F_1.

314. Даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Построить векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ и на чертеже проверить следующие тождества: 1) $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}$; 2) $\frac{\boldsymbol{a}}{2}+\frac{\boldsymbol{b}}{2}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$; 3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}$; 4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}$.

315. Велосипедист едет на север со скоростью 15 *км* в час, а ветер дует с северо-запада со скоростью 10 *км* в час. Найти построением кажущуюся скорость ветра для велосипедиста.

316. Построить трапецию по средней линии, высоте, углу между диагоналями и одной из боковых сторон.

317. На плоскости дана система осей координат и фигура F. Каждая точка M с координатами x и y фигуры F преобразовалась в точку M_1 с координатами $x_1=x+2$ и $y_1=y-3$. Доказать, что выполненное преобразование есть параллельный перенос.

318. Даны фигуры F_1 и F_2. Между точками этих фигур существует такое взаимно однозначное соответствие, при котором любые два соответственных отрезка равны, параллельны и одинаково направлены. Доказать, что фигура F_2 может быть получена из фигуры F_1 с помощью параллельного переноса.

319. Дана система осей координат и два отрезка a_1 и a_2, причем отрезок a_2 получен из отрезка a_1 с помощью параллельного переноса. Выполнив необходимые измерения, составить формулы преобразования координат точек отрезка a_1 в соответственные точки отрезка a_2.

320. Вектор $\overline{AB}$, занимавший горизонтальное положение, повернули вокруг точки A на угол α. Построить начальное и конечное положения вектора $\overline{AB}$ для следующих значений α:
1) 225°, 2) 480°, 3) 1470°, 4) -240°, 5) -390°, 6) -1140°.

321. Угол между двумя направлениями равен 220°. Найти общее выражение угла между ними и угол между теми же направлениями, наименьший по абсолютной величине.

322. Доказать, пользуясь вращением, что если от каждой вершины квадрата на соответствующей стороне в одном и том же направлении отложены равные отрезки, то их концы являются вершинами нового квадрата, центр которого совпадает с центром данного квадрата.

323. Доказать, что если четырехугольник можно повернуть вокруг некоторой точки так, что каждая его вершина совпадет со следующей, то этот четырехугольник является квадратом.

324. Построить прямоугольник по углу между диагоналями и а) сумме диагонали и стороны, б) разности двух сторон.

325. На плоскости дана система осей координат и фигура F. Доказать, что если каждую точку M с координатами x и y фигуры F преобразовать в точку M_1 с координатами $x_1 = 3x$ и $y_1 = 3y$, то получим фигуру F_1, гомотетичную фигуре F относительно начала координат.

326. Даны два параллельных отрезка. С помощью каких геометрических преобразований один отрезок может быть получен из другого?

Рассмотреть случаи, когда данные отрезки равны и когда не равны.

327. (Устно.) На плоскости даны две точки A и A_1. Какие геометрические преобразования определяются этими точками, если точку A_1 рассматривать как образ точки A?

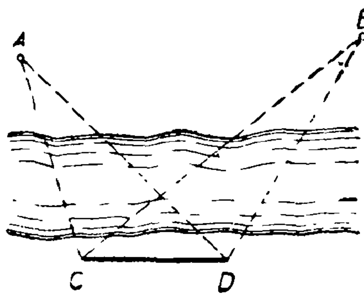
328. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки на прямые, проходящие через другую данную точку B.

329. Внутри треугольника найти точку, из которой его стороны были бы видны под равными углами.

330. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол, равный $\frac{\pi}{6}$. Пользуясь понятием скалярного произведения, найти длины векторов $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, если $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3}$, $|\boldsymbol{b}| = 1$.

331. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют общее начало. Начертить график изменения скалярного произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ при изменении угла между ними от 0 до π, если $|\boldsymbol{a}| = 1$ и $|\boldsymbol{b}| = 2$.

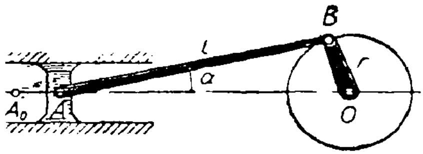
332. Найти расстояние между двумя недоступными пунктами A и B (черт. 18), если с помощью измерений установлено, что базис $CD = 20$ *м*, $\angle BCD = 45°45'$, $\angle CDB = 107°28'$, $\angle CDA = 50°$, $\angle ACD = 69°12'$.



Черт. 18.

333. Под каким углом действуют на одну и ту же точку две равные силы, по 26 *кГ* каждая, если равнодействующая их равна 8 *кГ*?

334. На чертеже 19 изображена схема кривошипного механизма. Длина шатуна $AB = l$, длина кривошипа $OB = r$, $\angle OAB = \alpha$. При $AO = r + l$ точка A занимает положение A_0. Найти длину A_0A при $r = 25$ *см*, $l = 125$ *см*, $\alpha = 63°$.



Черт. 19.

335. Шар весом в a *кГ* катится по наклонной плоскости и давит на нее с силой в b *кГ*. Найти угол наклона плоскости к горизонту.

336. Сторона треугольника делится биссектрисой противоположного угла на отрезки 6 *см* и 4 *см*. Та же сторона делится в точке ее касания со вписанной окружностью в отношении 13 : 7. Вычислить площадь треугольника.

X КЛАСС

§ 15. Аксиомы стереометрии. Взаимное положение прямых. Угол двух скрещивающихся прямых

337. (Устно.) Из некоторой точки исходят три луча. Сколько можно провести плоскостей таких, чтобы по крайней мере два из этих лучей принадлежали построенной плоскости?

Рассмотреть различные случаи.

338. (Устно.) Всегда ли можно через прямую и две точки, лежащие вне этой прямой, провести плоскость?

339. (Устно.) Для проверки точности обработки плоской части изделия столяры и слесари обычно прикладывают к ней в разных направлениях линейку ребром и смотрят, нет ли просветов. На каком геометрическом предложении основан этот прием контроля?

340. Подставки различных приборов обычно бывают треножниками. На каком геометрическом предложении основана и какую практическую цель преследует эта особенность конструкции?

341. (Устно.) Точка D лежит вне плоскости, проходящей через точки A, B и C. Может ли четырехугольник $ABCD$ быть трапецией?

342. Доказать, что все прямые, пересекающие прямую a и проходящие через точку B, не лежащую на прямой a, лежат в одной плоскости.

343. Прямые a и b пересекаются в точке M. Прямая c, не проходящая через точку M, пересекает a и b. Доказать, что прямые a, b и c лежат в одной плоскости.

344. Через концы трех ребер куба, исходящих из одной вершины, проведена плоскость.

Построить линии пересечения этой плоскости с гранями куба.

345. В кубе провести сечение через середины трех ребер, исходящих из одной вершины. Найти площадь сечения, если ребро куба равно a[1].

---

[1] При решении задач, связанных с кубом, следует иметь в виду, что куб можно определить как шестигранник, все грани которого квадраты.

346. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. В плоскости α даны точки A и B так, что прямая AB не параллельна l; в плоскости β дана точка C. Построить линии пересечения плоскости, проходящей через точки A, B и C, с плоскостями α и β.

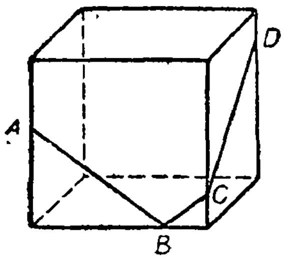
347. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провести сечение через точки K, M, L, данные соответственно на ребрах AA_1, DD_1 и CD, так, что $AK:KA_1 = 1:2$; $DM:MD_1 = 1:1$ и $CL:LD = 1:3$.

348*. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провести сечение через середины ребер AB и AD и точку K, данную на ребре CC_1.

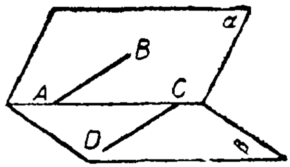
349. Через точку, расположенную вне данной прямой, в пространстве провести прямую, параллельную данной прямой.

350. (Устно.) На модели куба и на чертеже указать скрещивающиеся ребра.

351. (Устно.) На поверхности куба даны три отрезка: AB, BC и CD, расположенные так, как указано на чертеже 20. Можно ли построить плоскость, содержащую все три отрезка?



Черт. 20



Черт. 21.

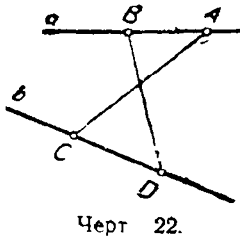
352. Плоскости α и β пересекаются по прямой AC. Прямая AB лежит в плоскости α, прямая CD — в плоскости β. Указать взаимное расположение прямых AB и CD (черт. 21).

353. (Устно.) Из планиметрии известно, что прямая, пересекающая одну из параллельных прямых, пересекает и другую. Будет ли это предложение справедливо и для пространства? (Ответ иллюстрировать на модели.)

354. Даны две параллельные прямые a и b и точка M, не принадлежащая ни одной из них. Лежит ли точка M в одной плоскости с прямыми a и b, если известно, что через M можно провести прямую, пересекающую:

а) только одну из данных прямых;

б) обе данные прямые?



Черт 22.

355. Даны две скрещивающиеся прямые a и b, точки A и B на прямой a, точки C и D на прямой b. Доказать, что прямые AC и BD тоже скрещивающиеся (черт. 22).

356. (Устно.) Может ли плоскость,

проходящая через середины двух сторон треугольника, пересекать его третью сторону?

357. Доказать, что диагонали противоположных граней куба, исходящие из концов одного ребра, параллельны.

358. Доказать, что отрезки, соединяющие середины смежных сторон четырехугольника, вершины которого не лежат в одной плоскости, образуют параллелограмм.

359. Все прямые, пересекающие одну из двух скрещивающихся прямых и параллельные другой, лежат в одной плоскости. Доказать.

360*. Если стороны двух треугольников, лежащих в разных плоскостях, параллельны, то треугольники подобны и прямые, проходящие через соответственные вершины этих треугольников, пересекаются в одной точке или параллельны. Доказать.

361. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти углы между:

1) DD_1 и BC; 2) AA_1 и BC_1; 3) AC и D_1B_1; 4) C_1B и AC.

362. Сколько прямых, перпендикулярных к данной прямой, можно провести:

1) из точки, данной на этой прямой;

2) из точки, данной вне этой прямой?

Как построить эти прямые?

§ 16. Параллельность прямой и плоскости

363. (Устно.) Доказать, что каждое ребро куба параллельно двум его граням.

364. Через точку M, лежащую вне плоскости α, провести прямую, параллельную плоскости α.

365. Даны плоскость и параллельная ей прямая. Через точку, взятую на плоскости, провести в этой плоскости прямую, параллельную данной прямой.

366. (Устно.) Прямая a параллельна плоскости α. Существуют ли на плоскости α прямые, не параллельные a?

367. (Устно.) Две прямые параллельны одной и той же плоскости. Можно ли утверждать, что эти прямые параллельны между собой?

368. Если имеем две параллельные прямые и через каждую из них проходит плоскость, то линия пересечения плоскостей (если она существует) параллельна данным прямым. Доказать.

369. Построить линию пересечения плоскостей двух треугольников, у которых одна вершина общая и стороны, противолежащие этой вершине, параллельны.

370. (Устно.) Прямые a и b параллельны. Как расположена прямая b относительно плоскости α, если прямая a:

1) лежит в плоскости α;

2) пересекает плоскость α;

3) параллельна плоскости α?

(Ответ иллюстрировать на модели.)

371. (Устно.) Прямые a и b пересекаются. Как расположена прямая b относительно плоскости α, если прямая a:

1) лежит в плоскости α;

2) пересекает плоскость α;

3) параллельна плоскости α?

(Ответ иллюстрировать на модели.)

372. (Устно.) Прямые a и b — скрещивающиеся. Как расположена прямая b относительно плоскости α, если прямая a:

1) лежит в плоскости α;

2) пересекает плоскость α;

3) параллельна плоскости α?

(Ответ иллюстрировать на модели.)

373. (Устно.) Две плоскости α и β пересекаются, и прямая a:

1) пересекает плоскость α;

2) параллельна плоскости α;

3) лежит в плоскости α.

Какое положение может занимать в каждом из этих случаев прямая a относительно плоскости β?

(Ответ иллюстрировать на модели.)

374. На данной плоскости провести прямую, пересекающую две данные прямые. При каком расположении данных прямых относительно данной плоскости задача имеет:

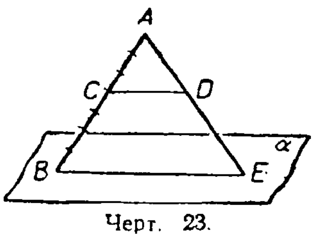
1) одно решение;

2) бесконечное множество решений;

3) не имеет решений?

Возможны ли другие случаи?

375. Конец B отрезка AB принадлежит плоскости α. Точка C делит AB в отношении $3:4$ (от A к B). Отрезок CD параллелен плоскости α и равен 12 *см*. Прямая AD пересекает плоскость α в точке E. Найти расстояние между точками B и E (черт. 23).



Черт. 23.

376. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провести сечение: а) через ребро AA_1 и точку M на ребре B_1C_1; б) через ребро BC и точку пересечения диагоналей грани AA_1D_1D.

377. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провести сечение через середины ребер A_1D_1 и D_1C_1 и вершину A куба. Установить вид сечения и найти его площадь, если ребро куба равно a.

378. Через данную прямую a провести плоскость, параллельную другой данной прямой b.

§ 17. Параллельность плоскостей

379. (Устно.) Доказать, что противоположные грани куба параллельны.

380. (Устно.) Через каждую из двух параллельных прямых проведено по плоскости. Можно ли утверждать, что эти плоскости параллельны?

381. (Устно.) Могут ли пересекаться плоскости, параллельные одной и той же прямой?

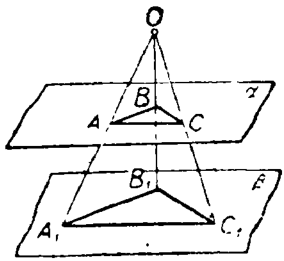
382. (Устно.) Могут ли быть параллельны две плоскости, проходящие через непараллельные прямые?

383. Доказать, что сечение, проведенное в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершины A, D_1 и C, параллельно сечению, проведенному через вершины A_1, B и C_1.

384. Прямая, пересекающая одну из параллельных плоскостей, пересекает и другую. Доказать.

385. Найти геометрическое место точек, принадлежащих прямым, проходящим через данную точку и параллельным данной плоскости.

386. Из точки O, лежащей вне двух параллельных плоскостей α и β, проведены три луча, пересекающие плоскости α и β соответственно в точках A, B, C, и A_1, B_1, C_1 $(OA<OA_1)$. Найти периметр треугольника $A_1B_1C_1$, если $OA=m$; $AA_1=n$; $AB=c$; $AC=b$; $BC=a$ (черт. 24).



Черт. 24

387. Прямая a пересекает плоскость α и: 1) пересекает плоскость β; 2) параллельна плоскости β; 3) лежит в плоскости β. Какое взаимное положение могут занимать плоскости α и β в каждом из этих случаев? (Ответ иллюстрировать на модели.)

388. Доказать, что через две скрещивающиеся прямые можно провести одну и только одну пару параллельных между собой плоскостей.

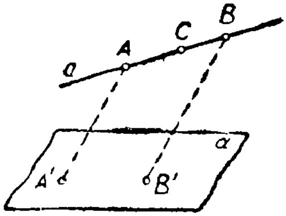
389. 1) Найти геометрическое место точек, делящих в данном отношении (внутренним образом) отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями.

2) Найти геометрическое место точек, делящих в данном отношении (внутренним образом) отрезки всех прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями.

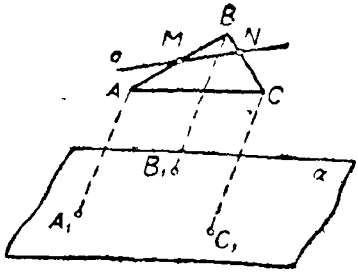
390. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провести сечение через середины ребер AA_1, A_1B_1 и AD. Установить вид сечения и найти его площадь, если ребро куба равно a.

§ 18. Параллельное проектирование

391. Даны плоскость α, прямая a вне ее, точки A и B, принадлежащие этой прямой, и проекции A' и B' точек A и B на плоскость α. Построить проекцию точки C, принадлежащей прямой a, на плоскость α (черт. 25). Имеет ли задача решение, если дана проекция только одной точки, принадлежащей прямой a?



Черт 25



Черт 26.

392. Треугольник ABC расположен вне плоскости α (черт. 26). Даны проекции вершин этого треугольника на плоскость α. Прямая a пересекает стороны AB и BC треугольника ABC соответственно в точках M и N. Построить проекции точек M и N на плоскость α.

393. Даны плоскость α, точки A и B вне ее и их проекции на плоскость α. Построить точку пересечения прямой AB с плоскостью α.

394. Параллельная проекция отрезка равна проектируемому отрезку. Можно ли утверждать, что проектируемый отрезок параллелен плоскости проекций? (Ответ иллюстрировать на модели.)

395. Даны две параллельные прямые. Указать возможные случаи взаимного расположения их проекций на плоскость. (Ответ иллюстрировать на модели).

396. Даны две скрещивающиеся прямые Указать возможные случаи взаимного расположения их проекций на плоскость. (Ответ иллюстрировать на модели.)

Рассмотреть аналогичный вопрос (с иллюстрацией на модели) для двух пересекающихся прямых.

397. Проекцией двух прямых на плоскость является: а) одна прямая, б) пара параллельных прямых, в) пара пересекающихся прямых

Каким образом друг относительно друга могут быть расположены проектируемые прямые в каждом из указанных случаев? (Ответ иллюстрировать на модели.)

398. Даны три прямые, имеющие только одну общую точку. Указать возможные случаи взаимного расположения их проекций на плоскость. (Ответ иллюстрировать на модели).

399. Точки A, B и C являются проекциями трех вершин параллелограмма на плоскость чертежа. Построить проекцию четвертой вершины этого параллелограмма на ту же плоскость. Рассмотреть случаи: 1) A, B и C не лежат на одной прямой; 2) A, B и C лежат на одной прямой.

400. Даны проекции вершин треугольника на плоскость α. Построить: а) проекции медиан проектируемого треугольника на плоскость α, б) проекцию биссектрисы одного из углов проектируемого треугольника на плоскость α, если известно, что стороны его, заключающие этот угол, относятся как $2:3$.

401. Треугольник ABC является параллельной проекцией треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость α. Построить проекцию центра окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$, зная, что $A_1B_1:B_1C_1:A_1C_1 = 2:2:3$.

402. Дан параллелограмм, являющийся изображением ромба в параллельной проекции. Построить изображение прямых, проведенных через точку пересечения диагоналей ромба и перпендикулярных к сторонам ромба, если известно, что острый угол ромба равен 60°.

403. Параллелограмм $ABCD$ является параллельной проекцией ромба на плоскость чертежа. Построить проекции точек касания окружности, вписанной в ромб, со сторонами ромба, если известно, что диагонали ромба относятся как $3:2$.

404. Даны точки A, B, C и их проекции на плоскость α. Провести через точку C прямую, параллельную AB, и найти точку пересечения ее с плоскостью α.

405. Даны параллельные проекции на плоскость α квадрата $ABCD$ и точки M, расположенной внутри этого квадрата. Построить проекции на плоскость α прямых, проведенных через точку M и перпендикулярных сторонам и диагоналям квадрата $ABCD$.

406. Треугольник ABC является параллельной проекцией равностороннего треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость α. Построить проекции на плоскость α прямых, перпендикулярных сторонам треугольника $A_1B_1C_1$ и проведенных через точку M, взятую: а) на одной из сторон треугольника $A_1B_1C_1$, б) внутри треугольника $A_1B_1C_1$.

407. Точки A, B и C являются проекциями трех последовательных вершин правильного шестиугольника на плоскость α. Построить: 1) проекцию центра этого шестиугольника, 2) проекции остальных его вершин.

На основании решения задачи указать возможный способ построения изображения правильного шестиугольника в параллельной проекции.

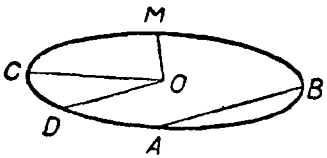
408. На чертеже даны проекции правильных треугольника, четырехугольника и шестиугольника. Как найти проекцию центра каждого из изображенных правильных многоугольников?

409. Какие свойства сторон и диагоналей трапеции сохраняются при параллельном проектировании?

410. Построить изображение равнобедренной трапеции и ее высот, проведенных из вершин тупых углов.

411. Если отношение оснований одной неравнобедренной трапеции равно отношению оснований другой трапеции, то вторая трапеция может быть принята за изображение первой. Доказать.

412. Дана проекция окружности с центром O, лежащей в плоскости, наклонной к плоскости чертежа. Построить проекции: 1) диаметра, перпендикулярного данной хорде AB; 2) биссектрисы центрального угла COD; 3) радиуса, перпендикулярного данному радиусу OM (черт. 27).



Черт 27.

413. Окружность с центром O и вписанным в нее углом ABC спроектирована на плоскость α. Построить проекцию биссектрисы угла ABC на плоскость α.

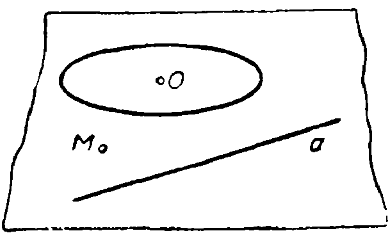
414. Окружность с центром O и вписанным в нее треугольником ABC спроектирована на плоскость α. Построить проекции на плоскость α медианы, биссектрисы и высоты этого треугольника, проведенных из вершины B.

415. Данный эллипс, центр которого на чертеже не указан, является проекцией окружности. Как на чертеже найти положение проекции центра проектируемой окружности?

416. Данный эллипс является изображением окружности. Построить изображение квадратов, вписанного и описанного около окружности.

417. Дано изображение правильного треугольника в параллельной проекции Построить изображение окружности, вписанной в этот треугольник, и окружности, описанной около него.

418. На чертеже 28 дано изображение окружности O, прямой a и точки M, расположенных в одной и той же плоскости Построить изображение перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую a.



Черт 28

419. Плоскость β проходит через точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Проекции точек A, B и C на плоскость α даны Точка D принадлежит плоскости β. Построить ее проекцию на плоскость α.

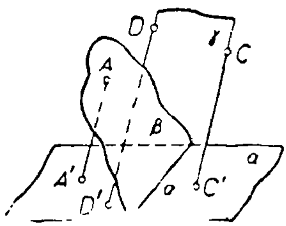
420. Даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой и не принадлежащие плоскости проекций α, и даны их проекции на плоскость α. Построить линию пересечения плоскостей ABC и α.

421. Построить линию пересечения двух проектирующих плоскостей, из которых одна проходит через проектирующие прямые AA_1 и BB_1, а другая — через проектирующие прямые CC_1 и DD_1.

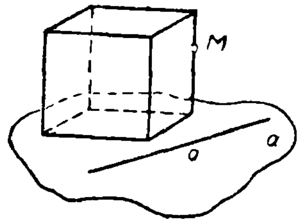
422. На двух противоположных боковых ребрах куба заданы точки M и N. Построить точку пересечения прямой MN с плоскостью, проходящей через два других боковых ребра.

423. Прямая a проходит через точки A и B, проекции которых на плоскость α даны. Найти точку пересечения прямой a с плоскостью, проходящей через проектирующие прямые CC_1 и DD_1.

424. Плоскость β задана следом a и точкой A, проекция которой на плоскость α дана. Найти линию пересечения плоскости β с плоскостью γ, проходящей через проектирующие прямые CC' и DD' (черт. 29).



Черт 29.



Черт 30.

425. Построить сечение куба плоскостью, заданной прямой a, лежащей в плоскости основания куба, и точкой M, принадлежащей одному из боковых ребер куба (черт. 30).

426. Построить сечение куба плоскостью, заданной точкой, принадлежащей верхнему основанию куба, и прямой, лежащей в плоскости нижнего основания куба.

427. Построить сечение куба плоскостью, заданной тремя точками, из которых одна принадлежит нижнему основанию куба, а две другие — двум боковым ребрам, не принадлежащим одной грани.

428. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три точки, принадлежащие трем попарно скрещивающимся ребрам куба.

§ 19. Перпендикулярность прямой и плоскости

429. Доказать, что каждое ребро куба перпендикулярно к двум граням куба.

430. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Указать взаимное расположение ребра D_1C_1 и диагоналей грани BB_1C_1C.

431. (Устно.) Как расположена относительно плоскости треугольника прямая, перпендикулярная к двум его сторонам?

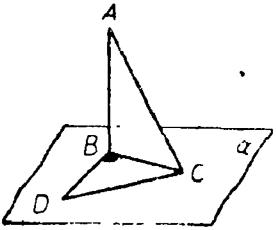
432. Как расположена относительно плоскости круга прямая, перпендикулярная к двум хордам круга? (Два случая.)

433. Вычислить (используя таблицы тригонометрических функций) углы между диагональю куба и его ребрами.

434. (Устно.) При каком взаимном расположении двух прямых через одну из них можно провести плоскость, перпендикулярную к другой?

435. (Устно.) Установить вид треугольника, если через одну из его сторон можно провести плоскость, перпендикулярную к другой стороне.

436. Через сторону BC треугольника ABC проведена плоскость α, перпендикулярная к стороне AB (черт. 31). В плоскости α построен прямоугольный треугольник BCD ($\angle B = 90°$). Как расположена сторона BD относительно плоскости ABC и сторона BC относительно плоскости DBA?



Черт 31.

437. AB и CD — параллельные прямые, расположенные в двух пересекающихся плоскостях; AE — перпендикуляр к линии пересечения плоскостей; AF — перпендикуляр к CD. Доказать, что AB — перпендикуляр к плоскости AEF.

438. Два прямоугольных треугольника ABC и DBC (прямые углы при вершине C) имеют общий катет CB; катет DC одного треугольника перпендикулярен гипотенузе AB другого треугольника. Найти длину отрезка AD, если $CB = a$, $DC = b$ и $AB = c$ (черт. 32).

439. Два отрезка AB и CD, лежащие в плоскости α, в точке пересечения E делятся пополам. Вне плоскости α дана точка L так, что $LA = LB$ и $LC = LD$. Доказать, что LE перпендикулярна к плоскости α.

Черт. 32.

440. Из центра O квадрата $ABCD$ восставлен к его плоскости перпендикуляр OK. Доказать, что прямая AK перпендикулярна к диагонали BD квадрата.

441. Из точки M — середины сторо-

ны AB равностороннего треугольника ABC — восставлен к плоскости треугольника перпендикуляр ML. Точка L соединена с точкой C. Доказать, что CL перпендикулярна к AB.

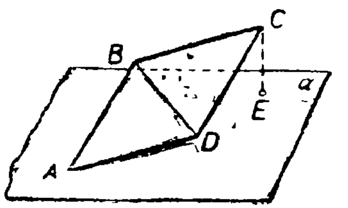
442. Из точки O, взятой на высоте CD треугольника ABC, проведен перпендикуляр OM к плоскости этого треугольника. Доказать, что плоскость α, проходящая через CD и OM, перпендикулярна к AB.

443. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, AK — перпендикуляр к его плоскости. Доказать, что KE перпендикулярна к DE.

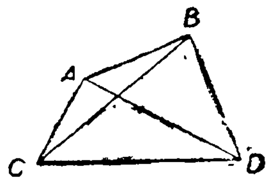
444. 1) Доказать, что диагональ куба перпендикулярна к не пересекающей ее диагонали грани куба.

2) Доказать, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ A_1C перпендикулярна плоскостям AD_1B_1 и BC_1D.

445. Через вершину A ромба $ABCD$ проведена плоскость, параллельная его диагонали BD, а из вершины C на эту плоскость опущен перпендикуляр CE (черт. 33). Доказать, что BD перпендикулярна плоскости ACE.



Черт. 33.



Черт. 34.

446. AB и CD — отрезки скрещивающихся прямых. Доказать, что если $AC = CB$ и $AD = DB$, то прямые AB и CD взаимно перпендикулярны (черт. 34).

447. Точка M лежит вне плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$); $MA \perp AC$; $MC \perp CB$. Доказать, что $MA \perp$ пл. ABC.

448. Через середину каждой стороны треугольника ABC проведена плоскость, перпендикулярная к этой стороне. Доказать, что эти три плоскости проходят через одну прямую, и установить положение этой прямой относительно плоскости треугольника ABC.

449. Два прямых угла расположены в пространстве так, что стороны их соответственно параллельны, одинаково направлены и перпендикулярны к отрезку, соединяющему их вершины. Длина этого отрезка равна a. На стороне одного угла отложен от его вершины отрезок b, а на непараллельной ей стороне другого угла отложен отрезок c. Найти расстояние между концами этих отрезков.

450. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек.

451. На данной прямой найти точку, равноудаленную от двух данных вне этой прямой точек A и B.

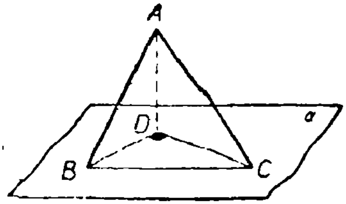
452. Точки A и B лежат вне плоскости α по одну сторону ее. Найти такую точку C на плоскости α, чтобы сумма расстояний AC и CB была наименьшей.

453. На данной плоскости α найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек A и B.

§ 20. Ортогональные проекции точки и прямой. Угол прямой с плоскостью

454. Электрическая лампочка висит на высоте 80,0 *см* над центром квадратного стола, длина стороны которого 120 *см*. Найти наименьшее и наибольшее расстояния от источника света до точек кромки стола.

455. Из данной точки A проведены к данной плоскости α две наклонные AB и AC, равные каждая 2 *см*; угол между наклонными равен 60°, а угол между их проекциями DB и DC прямой (черт. 35). Найти расстояние точки A от плоскости α.



Черт 35.

456. Из некоторой точки A проведены к данной плоскости перпендикуляр AO, равный a, и две наклонные, которые образуют с перпендикуляром углы по 60°, а между собой — угол в 90°. Найти расстояние между основаниями наклонных на плоскости.

457. Из точки A вне плоскости проведены две равные наклонные к плоскости; отрезок, соединяющий основания наклонных, равен a и составляет с наклонной угол α, а с ее проекцией угол β. Найти расстояние точки A от плоскости. Вычислить это расстояние, если $a = 8{,}3$ *дм*; $\alpha = 67°\,19'$; $\beta = 38°\,9'$.

458. Найти геометрическое место точек пространства, равноудаленных от всех точек окружности.

459. Найти геометрическое место точек пространства, равноудаленных от всех вершин: 1) треугольника; 2) равнобедренной трапеции.

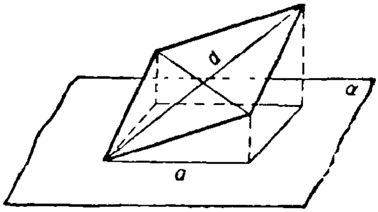
460. Построить точку, равноудаленную от четырех данных точек, не лежащих в одной плоскости.

461. В равнобедренном треугольнике основание и высота содержат по 4 *см*. Данная точка находится на расстоянии 6 *см*

от плоскости треугольника и на равном расстоянии от всех его вершин. Найти это расстояние.

462. Точка A удалена от каждой вершины прямоугольного треугольника на 10 *см*. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12 *см*. Найти расстояние точки A от плоскости треугольника.

463. Через одну из вершин ромба проведена плоскость α параллельно меньшей диагонали ромба. Бóльшая диагональ ромба равна d. Проекция ромба на плоскость α — квадрат, сторона которого a (черт 36). Найти сторону ромба.



Черт. 36.

464. Меньшее основание трапеции лежит в плоскости α, которая отстоит от большего основания трапеции на расстоянии 10 *см;* основания трапеции относятся как 3 : 5. Найти расстояние точки пересечения диагоналей трапеции от плоскости α.

465. Найти геометрическое место точек, удаленных от данной плоскости на данное расстояние a.

466. Найти геометрическое место точек, удаленных от двух пересекающихся плоскостей на расстояние, равное длине данного отрезка.

467. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей.

468. Найти геометрическое место середин отрезков, заключенных между двумя параллельными плоскостями.

469. Плоскость α параллельна плоскости β; из точки A плоскости α опущен перпендикуляр AB на плоскость β; $AB = m$; AC и BD — отрезки, заключенные между плоскостями α и β. E и F — соответственно середины этих отрезков. Найти отрезок CD, если $EF = a$.

470. (Устно.) Прямая a пересекает плоскость α и не перпендикулярна к этой плоскости. Существуют ли в плоскости α прямые, перпендикулярные a?

471. В треугольнике ABC угол B прямой и катет BC равен a. Из вершины A проведен к плоскости треугольника перпендикуляр AD. Найти расстояние от точки D до катета BC, если расстояние между точками D и C равно l.

472. Найти геометрическое место точек пространства, равноудаленных от сторон: 1) треугольника, 2) ромба.

473. Определить вид треугольника, если точка, равноудаленная от его сторон, лежит на перпендикуляре к плоскости этого треугольника, проведенном через центр описанного около него круга.

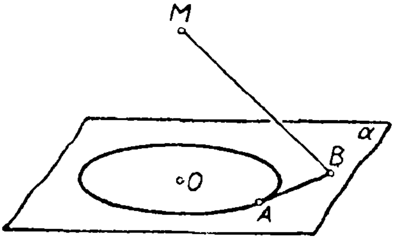
474. Точка L, расположенная вне плоскости правильного треугольника ABC и одинаково удаленная от сторон этого треугольника, соединена с вершиной A. Доказать, что LA перпендикулярна к стороне BC треугольника.

475. Стороны треугольника равны 10 *см*, 17 *см* и 21 *см*. Из вершины большего угла этого треугольника проведен перпендикуляр к его плоскости, равный 15 *см*.

Найти расстояние от конца этого перпендикуляра, лежащего вне плоскости треугольника, до большей стороны треугольника.

476. Катеты прямоугольного треугольника равны 18 *см* и 32 *см*. Из точки N, делящей гипотенузу пополам, восставлен к плоскости треугольника перпендикуляр NK, равный 12 *см*. Найти расстояние от точки K до каждого катета.

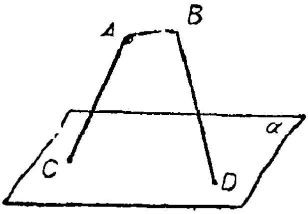
477. В плоскости α через точку A, взятую на данной окружности, проведена к ней касательная, на которой отложен отрезок AB, равный a (черт. 37). Найти расстояние от точки B до точки M, лежащей вне плоскости α и удаленной от всех точек окружности на расстояние b.



Черт 37.

478. AB и CD — параллельные прямые, лежащие в плоскости α на расстоянии 28 *см* одна от другой; EF — прямая, не лежащая в плоскости α, параллельная AB и удаленная от AB на 17 *см*, а от плоскости α на 15 *см*. Найти расстояние между EF и CD. (Два случая.)

479. AB — отрезок, параллельный плоскости α; AC и BD — две равные наклонные к плоскости α, проведенные перпендикулярно к отрезку AB и в разных направлениях от него. Отрезок AB, равный 2 *см*, отстоит от плоскости на 7 *см*, а отрезки AC и BD содержат по 8 *см*. Найти расстояние CD (черт. 38).



Черт. 38

480. Точка, лежащая вне плоскости данного прямого угла, удалена от его вершины на расстояние a, а от каждой из сторон на расстояние b. Найти расстояние точки от плоскости прямого угла.

481. Если из вершины угла провести наклонную к его плоскости так, чтобы она составляла с его сторонами равные углы, то проекция этой наклонной на плоскость будет служить биссектрисой данного угла. Доказать

Сформулировать и доказать обратную теорему.

482. Через вершину квадрата проведена наклонная к его плоскости, составляющая угол α с каждой из сторон квадрата, проходящих через эту вершину. Найти угол между этой наклонной и диагональю квадрата.

483. Доказать, что прямая, составляющая равные углы с тремя пересекающимися прямыми на плоскости, перпендикулярна самой плоскости.

484. Через данную на плоскости α точку A провести в этой плоскости прямую, перпендикулярную к данной прямой l, не лежащей в плоскости α.

485. В плоскости α найти геометрическое место точек, удаленных на данное расстояние l от точки A, лежащей вне плоскости α.

486. Через точку A, лежащую в плоскости α, провести в этой плоскости прямую, удаленную на данное расстояние d от точки B, лежащей вне плоскости α.

487. (Устно.) Под каким углом к плоскости надо провести наклонный отрезок, чтобы его проекция на эту плоскость была вдвое меньше самого отрезка?

488. (*Устно.*) *Может ли* катет равнобедренного прямоугольного треугольника образовать с плоскостью, проходящей через гипотенузу, угол в 60°?

Какова наибольшая величина угла между катетом и этой плоскостью?

489. Две проволочные оттяжки радиомачты, укрепленные на ней в одной точке, образуют между собой прямой угол, а с поверхностью земли углы по 60°. Расстояние между точками закрепления оттяжек на земле — 40,0 *м*. Вычислить длину каждой оттяжки и высоту их укрепления на мачте.

490. Из точки, данной вне плоскости, проведены к ней две наклонные, образующие между собой угол α, а с плоскостью — угол β. Найти угол между их проекциями на данную плоскость.

491. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ построить и вычислить углы:

1) между его диагональю BD_1 и гранью $ABCD$;

2) между диагональю BD_1 и гранью BB_1C_1C;

3) между диагональю AD_1 грани куба и гранью DD_1C_1C.

492. Наблюдатель, стоящий между двумя равновысокими заводскими трубами на прямой, проходящей через их основания, видит верхний конец ближайшей к нему трубы под углом в 60°. Отойдя на 40 *м* по направлению, перпендикулярному к прямой, соединяющей основания труб, он видит верхний конец одной из них под углом 45°, а другой — под углом 30°. Найти высоту труб и расстояние между ними с тонкостью до 0,1 *м*. (Высота угломерного прибора равна 1,4 *м*.)

493. Из точки O пересечения диагоналей ромба к его плоскости восставлен перпендикуляр OD. Найти расстояние DE

точки D от стороны ромба, если острый угол ромба α, бо́льшая диагональ d и ED составляет с плоскостью ромба угол φ.

494. Две параллельные прямые, пересекающие плоскость, составляют с этой плоскостью равные углы. Доказать.

Будет ли справедливо обратное предложение?

495. Если в равнобедренном прямоугольном треугольнике один катет лежит на некоторой плоскости, а другой образует с ней угол в 45°, то гипотенуза образует с этой плоскостью угол в 30°. Доказать.

496. Если наклонная AB составляет с плоскостью α угол в 45°, а прямая AC, лежащая в плоскости α, составляет угол в 45° с проекцией AB на плоскость α, то угол BAC равен 60°. Доказать.

497. Основание равнобедренного треугольника равно a, угол при вершине α; через основание треугольника проведена плоскость, образующая с каждой из его боковых сторон угол β. Найти расстояние этой плоскости от вершины треугольника.

498. Через сторону ромба проведена плоскость, образующая с диагоналями углы α и 2α. Найти острый угол ромба.

499. Отрезок AB параллелен плоскости α и отстоит от нее на расстоянии 5 *см*; на плоскости α дана точка M, расстояние которой от прямой AB равно 6 *см*. Найти длину отрезка AB, если MA и MB образуют с плоскостью α соответственно углы в 30° и 45°.

500. Через одну из параллельных прямых проведена плоскость на расстоянии a от другой прямой; третья прямая, пересекающая параллельные прямые под углом α, наклонена к этой плоскости под углом β. Найти расстояние между параллельными прямыми.

501. Отрезки, заключенные между двумя параллельными плоскостями, относятся как $2:3$ и образуют с плоскостями углы, отношение которых равно 2. Найти эти углы.

502. Если прямая пересекает две плоскости в точках, одинаково удаленных от линии пересечения плоскостей, то она образует с этими плоскостями равные углы. Доказать.

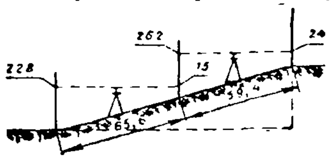
503. Даны две пересекающиеся плоскости. Доказать, что из всех прямых, лежащих в одной из них, наибольший угол с другой образуют те, которые перпендикулярны к линии пересечения плоскостей.

504. Через данную вне плоскости α точку M провести прямую, перпендикулярную к данной прямой a, лежащей в плоскости α, и образующую с плоскостью α данный угол φ.

505. Из центра O правильного треугольника ABC проведен к его плоскости перпендикуляр OK. Точки D и E — середины сторон AB и BC. Построить углы между плоскостью AKE и прямыми KB и KD.

506. Из центра O правильного треугольника проведен к его плоскости перпендикуляр OM, равный h. Из точки M опущены перпендикуляры ME и MF на стороны треугольника. Найти длины ME, MF и стороны треугольника, если угол между MF и плоскостью OMF равен 30°.

507. При нивелировании прямолинейного участка дороги получены данные, указанные на чертеже 39 (отсчеты по рейкам даны в сантиметрах, расстояние между ними — в метрах). Вычислить продольный уклон дороги (в процентах).



Черт. 39.

Примечание. Уклон находится как отношение разности высот двух точек земной поверхности к расстоянию между их проекциями на горизонтальную плоскость.

508. Из центра O правильного треугольника ABC проведен перпендикуляр OM к плоскости этого треугольника. Найти кратчайшее расстояние между прямыми AM и BC, если сторона треугольника равна a, а отрезок OM равен b.

509. Если прямая a параллельна плоскости α, то кратчайшее расстояние от прямой a до всякой прямой плоскости a, не параллельной a, равно расстоянию от a до плоскости α. Доказать.

510. Построить прямую, перпендикулярную к непараллельным диагоналям двух противоположных граней куба и пересекающую обе эти диагонали.

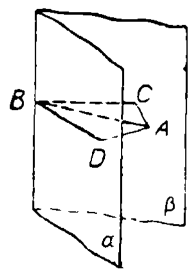
§ 21. Двугранные углы. Перпендикулярность плоскостей

511. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр AM. Точка M соединена со всеми вершинами квадрата. Указать на чертеже линейные углы двугранных углов AB, BC, CD, AD, AM и линейный угол двугранного угла между плоскостями BMC и AMD.

512. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение через ребра B_1B и D_1D. Найти величину двугранного угла, составленного этим сечением с гранью A_1D_1DA.

513. Из точки A, лежащей внутри двугранного угла, опущен на ребро перпендикуляр AB (черт. 40). Доказать, что отрезок AB и его проекции на грани двугранного угла лежат в одной плоскости.

514. Если грани двух двугранных углов соответственно параллельны, то и ребра их параллельны. Доказать.



Черт. 40.

515. Если грани двух двугранных углов соответственно параллельны, то эти двугранные углы или равны, или в сумме составляют 180°. Доказать:

516. Построить двугранный угол, равный данному.

517. Разделить данный двугранный угол пополам.

518. Через гипотенузу длины a равнобедренного прямоугольного треугольника проведена плоскость под углом 30° к плоскости треугольника. Найти расстояние этой плоскости от вершины прямого угла.

519. Два равных прямоугольника имеют общую сторону и наклонены друг к другу под углом 45°. Найти отношение площадей двух фигур, на которые проекция стороны одного прямоугольника разбивает другой.

520. Два равных квадрата имеют общую сторону; их плоскости образуют двугранный угол, равный α. Из общей вершины в каждом из квадратов проведены диагонали. Найти угол между этими диагоналями. Вычислить при $\alpha = 52°$.

521. Двугранный угол равен 120°. От вершины A линейного угла отложены три равных отрезка: AB и AC — по сторонам линейного угла и AD — по ребру двугранного угла. Найти расстояние точки D до прямой BC, если $AB = a$.

522. Равнобедренный треугольник повернут вокруг своего основания на угол α; при этом каждая боковая сторона повернулась на угол β. Найти угол при вершине треугольника.

523. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание, а плоскости их составляют угол в 60°. Общее основание равно 16 *см*, боковая сторона одного треугольника равна 17 *см*, а боковые стороны другого взаимно перпендикулярны. Найти расстояние между вершинами треугольников.

524. Два равнобедренных треугольника ABC и ADC имеют общее основание AC, вершины B и D лежат на перпендикуляре к плоскости треугольника ABC. Под каким углом наклонены плоскости треугольников, если угол ABC равен 72°, а угол ADC равен 36°?

525. Ромб спроектирован на плоскость, проходящую через вершину ромба параллельно одной из его диагоналей; проекция ромба — квадрат со стороной 2 *см*. Угол между плоскостью ромба и плоскостью его проекции равен 45°. Найти: 1) сторону ромба; 2) площадь ромба.

526. Дан острый двугранный угол; в одной его грани проведена прямая под углом 30° к другой грани и под углом 45° к ребру. Найти двугранный угол.

527. В одной из граней двугранного угла, равного α, проведена прямая, образующая угол β с ребром двугранного угла. Найти угол наклона этой прямой к другой грани.

528. Найти геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей.

529. Доказать, что смежные грани куба взаимно перпендикулярны.

530. (Устно.) При возведении каменной стены иногда проверяют перпендикулярность ее к горизонтальной плоскости при помощи отвеса. Каким предложением стереометрии при этом пользуются?

531. Через данную точку A провести плоскость, перпендикулярную к данной плоскости и параллельную данной прямой a.

532. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершину B и каждую из диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$ провести две плоскости α и β и доказать, что плоскость α перпендикулярна к плоскости β.

533. (Устно.) Плоскость α перпендикулярна к плоскости β. Будет ли всякая прямая плоскости α перпендикулярна к плоскости β?

534. (Устно.) Две плоскости взаимно перпендикулярны. Указать возможные случаи расположения прямой, лежащей в одной из этих плоскостей, относительно прямой, лежащей в другой плоскости. (Ответ иллюстрировать на модели.)

535. Доказать, что прямая a и плоскость α, перпендикулярные к одной и той же плоскости, параллельны, если a не лежит в плоскости α.

536. Доказать, что две плоскости параллельны, если они перпендикулярны к третьей плоскости и пересекают эту плоскость по параллельным прямым.

537. Плоскость α параллельна плоскости β и перпендикулярна плоскости γ. Доказать, что плоскость β перпендикулярна плоскости γ.

538. От телефонного столба, стоящего против дома на расстоянии 9,0 *м*, надо протянуть проволоку с наименьшей затратой материала. Проволока на столбе укреплена на высоте 8,0 *м*, а к стене дома ее надо прикрепить на высоте 20,0 *м* от земли. Вычислить необходимую длину проволоки, если на закрепление и провисание ее добавляется 5%.

539. Отрезок прямой, равный a, упирается своими концами в грани прямого двугранного угла, образуя с каждой из них угол α. Найти проекцию этого отрезка на ребро двугранного угла.

540. Найти геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух параллельных прямых.

541. Найти геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух пересекающихся прямых.

§ 22. Многогранные углы

542. (Устно.) Можно ли составить трехгранный угол с такими плоскими углами: 1) 103°, 96°, 78°; 2) 112°, 164°, 95°; 3) 82°, 67°, 151°?

543. (Устно.) Можно ли составить выпуклый четырехгранный угол с такими плоскими углами: 1) 56°, 98°, 139° и 72°; 2) 85°, 112°, 34° и 129°; 3) 43°, 84°, 125° и 101°; 4) 32°, 49°, 78° и 162°.

544. Если в трехгранном угле два плоских угла прямые, то и противоположные им двугранные углы прямые. Доказать.

545. Если в трехгранном угле два двугранных угла прямые, то противоположные им плоские углы прямые. Доказать.

546. В трехгранном угле все плоские углы прямые; на ребрах его от вершины отложены отрезки 2 *см*, 4 *см*, 6 *см* и через их концы проведена плоскость. Найти площадь полученного сечения.

547. В трехгранном угле каждый из плоских углов равен 60°. Через точку A, взятую на одном из ребер угла на расстоянии a от его вершины, проведена плоскость, перпендикулярная к этому ребру и пересекающая два других ребра в точках B и C. Найти периметр треугольника ABC.

548. На модели трехгранного угла построить линии пересечения его граней с плоскостью, перпендикулярной к одному из его ребер. Произведя необходимые измерения, найти двугранные углы между плоскостью сечения и гранями трехгранного угла (используя таблицы тригонометрических функций).

549. Каждый плоский угол трехгранного угла равен 60°. На одном из его ребер от вершины отложен отрезок, равный a, и из конца его опущен перпендикуляр на противолежащую грань. Найти длину этого перпендикуляра.

550. В трехгранном угле два плоских угла по 45°; третий плоский угол 60°. Найти двугранный угол, противолежащий третьему плоскому углу.

551. В трехгранном угле каждый из плоских углов равен α. Найти двугранные углы.

552. Каждый из плоских углов трехгранного угла равен α. Найти угол между ребром и противолежащей гранью.

553. Из вершины трехгранного угла, все плоские углы которого прямые, опущен перпендикуляр на плоскость, пересекающую все ребра. Доказать, что основание этого перпендикуляра является точкой пересечения высот треугольника, полученного в сечении.

554. Доказать, что в трехгранном угле биссекторные плоскости трех двугранных углов пересекаются по одной прямой и что эта прямая является геометрическим местом точек, каждая из которых равноудалена от граней данного трехгранного угла.

§ 23. Призма

555. (Устно.) Какие промежуточные понятия можно вставить последовательно между общим понятием «геометрическое тело» и частным понятием «прямоугольный параллелепипед»?

556. (Устно.) Доказать, что если призма правильная, то двугранные углы между ее смежными боковыми гранями равны между собой. Является ли это условие достаточным для того, чтобы призма была правильной?

557. (Устно.) Доказать, что, для того чтобы призма была прямой, достаточно, чтобы две ее смежные боковые грани были перпендикулярны плоскости основания. Является ли это условие необходимым для того, чтобы призма была прямой?

558. (Устно.) 1) Существует ли призма, у которой только одно боковое ребро перпендикулярно к плоскости основания?

2) Существует ли призма, у которой только одна боковая грань перпендикулярна к плоскости основания?

559. Две боковые грани наклонного параллелепипеда перпендикулярны к плоскости основания.

Какой вид имеют две другие грани, если основанием параллелепипеда служит прямоугольник?

560. Построить развертку и изготовить модель параллелепипеда, удовлетворяющего следующим условиям:

1) основание параллелепипеда — прямоугольник со сторонами 8 *см* и 10 *см*;

2) боковые грани, проходящие через меньшие стороны основания, перпендикулярны к основанию;

3) боковое ребро равно 12 *см* и наклонено к плоскости основания под углом 45°.

561. Основанием наклонной призмы является трапеция. Две боковые грани перпендикулярны к основанию. Через какие стороны основания могут проходить эти грани?

562. В призме только одна боковая грань перпендикулярна к основанию. Может ли основанием этой призмы служить: 1) правильный треугольник, 2) квадрат, 3) правильный пятиугольник, 4) правильный шестиугольник?

563. (Устно.) Чему равна сумма всех двугранных углов при боковых ребрах n-угольной призмы?

564. Чему равна сумма всех двугранных углов: 1) треугольной призмы, 2) четырехугольной, 3) n-угольной?

565. Найти геометрическое место точек, расположенных внутри параллелепипеда, равноудаленных от плоскостей его оснований. Указать положение точки пересечения диагоналей параллелепипеда относительно этого геометрического места точек.

566. Плоскости, делящие пополам углы между боковыми гранями треугольной призмы, пересекаются по одной прямой. Доказать.

567. Доказать, что отрезок, соединяющий центры оснований правильной призмы, есть геометрическое место точек, расположенных внутри призмы и 1) равноудаленных от всех вершин нижнего основания, 2) равноудаленных от всех вершин верхнего основания, 3) равноудаленных от всех боковых граней призмы.

568. Внутри данной правильной призмы найти точку, равноудаленную от всех ее вершин.

569. (Устно.) Сколько диагоналей можно провести: 1) в треугольной призме, 2) в четырехугольной, 3) в пятиугольной, 4) в n-угольной?

570. Найти диагонали прямоугольного параллелепипеда, если три его ребра, исходящие из одной вершины, равны 4 *м*, 6 *м* и 12 *м*.

571. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда 8 *см* и 9 *см*. Диагональ параллелепипеда равна 17 *см*. Найти высоту параллелепипеда и угол, образуемый диагональю с плоскостью основания.

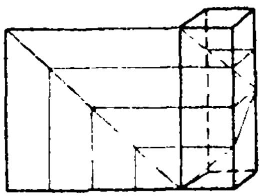
572. Доказать, что диагональ правильной четырехугольной призмы образует равные углы со всеми боковыми гранями призмы.

573. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a; диагональ призмы наклонена к плоскости боковой грани под углом 30°. Найти высоту призмы и угол наклона диагонали призмы к плоскости основания.

574. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 2 и 5 единицам длины, расстояние между меньшими из них 4; боковое ребро $2\sqrt{2}$. Найти диагонали параллелепипеда.

575. Основанием прямой призмы служит ромб. Найти его острый угол, если диагонали призмы образуют с плоскостью основания углы α и β ($\alpha>\beta$).

576. Квадрат с проведенной в нем диагональю свернут в виде боковой поверхности правильной четырехугольной призмы; диагональ квадрата при этом обратилась в ломаную линию (не плоскую). Найти угол между смежными ее отрезками (черт. 41).



Черт. 41.

577. В правильной четырехугольной призме сторона основания a. Найти кратчайшее расстояние от бокового ребра призмы до не пересекающей это ребро диагонали призмы.

578. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 12 *см*, высота призмы — 9 *см*. Найти кратчайшее расстояние от стороны основания до не пересекающей ее диагонали призмы.

579. Линия пересечения диагональных сечений четырехугольной призмы перпендикулярна плоскости основания. Доказать, что эта призма прямая. Сформулировать и доказать обратную теорему.

580*. Если в четырехугольной призме три диагонали пересекаются в одной точке, то эта призма есть параллелепипед. Доказать.

581. В прямом параллелепипеде боковое ребро равно 1 *м*, стороны основания равны 23 *дм* и 11 *дм*, а диагонали основания относятся как 2 : 3. Найти площади диагональных сечений.

582. (Устно.) Площадь боковой грани правильной шестиугольной призмы равна Q. Найти площадь диагонального сечения, проходящего через меньшую диагональ основания.

583. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, сторона которого a и острый угол α. Через меньшую диагональ параллелепипеда и середину бокового ребра, не пересекающего эту диагональ, проведена плоскость. Найти площадь сечения, если угол сечения, через вершину которого проходит меньшая диагональ параллелепипеда, равен β. Вычислить площадь, если $a=15{,}68$ *дм*; $\alpha=73°19'$; $\beta=81°53'$.

584. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$. Через ребро AB, равное a, и вершину C_1 проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол в 60°. Площадь сечения S. Найти высоту призмы.

585. Через сторону основания правильной треугольной призмы под углом 30° к основанию проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро. Вычислить площадь сечения, если сторона основания равна 14 *см*.

586. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна a и острый угол α. Через катет основания, прилежащий к углу α, проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол φ и пересекающая противоположное боковое ребро. Найти площадь сечения.

587. Дана четырехугольная призма. Построить точку пересечения прямой MN с плоскостью основания призмы, если точки M и N заданы: 1) на двух противоположных боковых ребрах призмы, 2) на двух боковых гранях призмы.

588. Дана треугольная призма. Построить точку пересечения прямой MN с плоскостью основания призмы, если M есть точка пересечения медиан верхнего основания, а точка N лежит на боковом ребре.

589. Построить точку пересечения прямой с поверхностью четырехугольной призмы, если прямая задана точкой на верхнем основании призмы и точкой, лежащей в плоскости нижнего основания призмы, вне призмы.

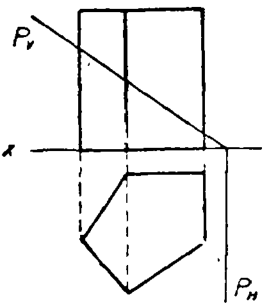
590. Построить сечение треугольной призмы плоскостью, заданной прямой, лежащей в плоскости основания призмы, и точкой, принадлежащей: 1) боковому ребру призмы, 2) боковой грани призмы, 3) верхнему основанию призмы.

591. Дана четырехугольная призма. Построить сечение этой

призмы плоскостью, проходящей через три точки, принадлежащие трем ее боковым ребрам.

592. Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через диагональ AC нижнего основания и точку M, принадлежащую диагонали B_1D параллелепипеда.

593. На эпюре изображена в уменьшенном виде (M 1 : 2) прямая пятиугольная призма (во фронтальной и горизонтальной проекциях), которая пересечена плоскостью P_v, перпендикулярной к фронтальной плоскости проекций (черт. 42). Начертить эпюр в натуральном масштабе, затем построить истинный вид многоугольника сечения и вычислить его площадь.



М 1 2

Черт. 42.

594. Произведя необходимые измерения на модели правильной треугольной призмы, вычислить площадь сечения, проведенного через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания; вычислить углы этого сечения.

595. Через диагональ куба проведена плоскость параллельно одной из диагоналей основания. Найти углы полученного сечения.

596. В правильной четырехугольной призме построить сечение через середины двух смежных сторон основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований. Найти площадь сечения, если сторона основания призмы равна 2 лин. ед., а высота 4 лин. ед.

597. В правильной треугольной призме провести сечение через сторону основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований. Найти площадь сечения и угол между плоскостью сечения и плоскостью основания, если каждое ребро призмы равно a.

598. В правильной шестиугольной призме, каждое ребро которой равно a, построить сечение плоскостью, проходящей через сторону основания и через бо́льшую диагональ призмы, выходящую из конца этой стороны. Найти площадь построенного сечения.

599. Правильная шестиугольная призма пересечена плоскостью, проходящей через меньшую диагональ нижнего основания и наиболее удаленную от нее вершину верхнего основания. Построить сечение и найти его площадь, если каждое ребро призмы равно a.

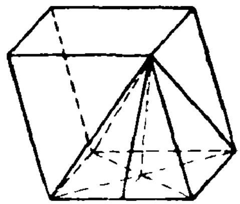
600. Основанием призмы служит прямоугольник. Две смежные боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. Боковое ребро равно l. Найти высоту призмы.

601. Основанием призмы служит четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны. Одно из диагональных сечений перпендикулярно к плоскости основания. Доказать, что другое диагональное сечение — прямоугольник.

602. Основанием призмы служит четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны. Одно из диагональных сечений — прямоугольник. Доказать, что другое диагональное сечение перпендикулярно к плоскости основания.

603. Основанием параллелепипеда служит ромб с углом в 60° Одна из вершин верхнего основания проектируется в точку пересечения диагоналей нижнего основания. Боковое ребро параллелепипеда 13 *см*, высота 12 *см*. Найти площади диагональных сечений. (Два случая.)

604. Основанием параллелепипеда служит квадрат со стороной a. Одна из вершин верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания (черт. 43). Найти площади диагональных сечений параллелепипеда, если боковое ребро его равно l.



Черт. 43

605. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит равнобедренный треугольник ABC $(AB=AC)$ с углом α при вершине A. Высота призмы, опущенная из вершины A_1, попадает в середину ребра BC. Найти двугранный угол при ребре AA_1, если ребра призмы наклонены к плоскости основания под углом β.

606. В основании параллелепипеда лежит квадрат. Одна из вершин верхнего основания проектируется в центр нижнего основания. Доказать, что боковое ребро, исходящее из этой вершины, образует со сторонами основания равные углы.

607. Построить развертку призмы, удовлетворяющей следующим условиям:

1) основание призмы — квадрат, сторона которого 5 *см*;

2) одна из вершин призмы проектируется в центр основания;

3) боковое ребро призмы составляет с плоскостью основания угол в 60°.

Изготовить модель этой призмы.

608. В основании призмы лежит равносторонний треугольник. Одно из боковых ребер с прилежащими сторонами основания составляет равные углы, а с плоскостью основания — угол в 45°. Площадь боковой грани, противолежащей этому ребру, равна Q. Найти площадь сечения, проходящего через это ребро и высоту основания призмы.

609. Построить развертку и изготовить модель параллелепипеда, все грани которого — равные ромбы со стороной 15 *см* и острым углом: 1) 60°; 2) 75°.

610. Грани параллелепипеда — равные ромбы с острым углом в 60° и стороной a. Найти площади диагональных сечений параллелепипеда.

§ 24. Поверхность[1] призмы

611. (Устно.) Вычислить поверхность куба, диагональ которого равна 6 *дм*.

612. (Устно.) Площадь диагонального сечения куба равна Q. Найти поверхность куба.

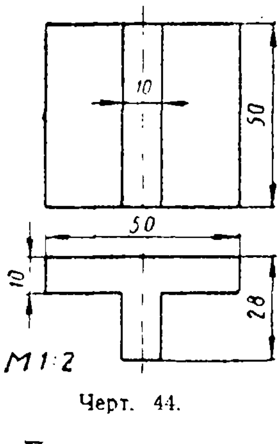
613. (Устно.) Слесарный напильник с прямоугольным поперечным сечением, размером 24 *мм*×6 *мм*, на трех гранях (кроме одной узкой) имеет насечку на длине 200 *мм*. Вычислить площадь поверхности насеченной части.

614. (Устно.) Как изменится боковая поверхность прямоугольного параллелепипеда, если высоту его увеличить в 4 раза, а каждую из сторон основания уменьшить в 2 раза?

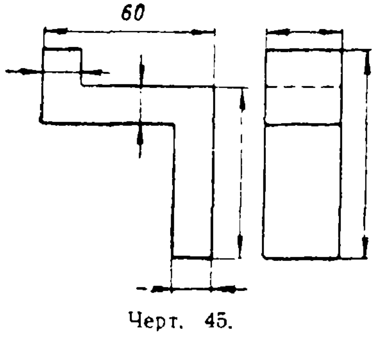
615. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда относятся как 5 : 12. Диагональное сечение — квадрат, площадь которого 169 *см*². Найти полную поверхность параллелепипеда.

616. Диагональ d правильной четырехугольной призмы наклонена к боковой грани под углом α. Найти боковую поверхность призмы.

617. Вычислить полную поверхность детали (ползуна) по размерам, данным на чертеже (во фронтальной и горизонтальной проекциях) (черт. 44).



Черт. 44.



Черт. 45.

618. По указанному размеру детали (кронштейна) установить масштаб чертежа, проставить недостающие размеры (во фронтальной и профильной проекциях), вычислить приближенно площадь полной поверхности детали (черт. 45).

---

[1] Вместо точного термина «площадь поверхности» в дальнейшем для краткости будем употреблять термин «поверхность».

619. Найти боковую поверхность правильной треугольной призмы, если высота основания призмы равна $5\sqrt{3}$, а диагональ боковой грани 26.

620. Расстояние между плоскостями боковых граней правильной шестиугольной призмы, проходящих через параллельные стороны основания, равно 18 *см*. Диагональ боковой грани равна 12 *см*. Найти полную поверхность призмы.

621. Основанием прямой призмы служит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a. Из вершины верхнего основания проведены две диагонали равных боковых граней. Угол между этими диагоналями 60°. Найти боковую поверхность призмы.

622. Основанием прямой призмы с высотой, равной 6 *см*, служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 *см*, а боковая сторона — 10 *см*. Из этой призмы вырезана другая треугольная призма с высотой, равной 6 *см*, так, что стенки полученного полого тела имеют толщину 1 *см*. Найти полную поверхность этого тела.

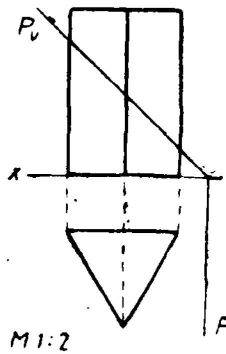
623. Найти боковую поверхность прямого параллелепипеда, основанием которого служит параллелограмм со сторонами 8 *см* и 7 *см* и углом 60°, если площадь диагонального сечения, проходящего через бóльшую диагональ основания, равна 78 *см*^{2}.

624. В правильной треугольной призме сечение, проходящее через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания, составляет с основанием угол в 30°. Найти отношение боковой поверхности призмы к площади этого сечения. Найти общую формулу решения этой задачи для любого допустимого значения угла.

625. На эпюре изображена в уменьшенном виде (M 1 : 2) правильная треугольная призма (во фронтальной и горизонтальной проекциях), которая пересечена плоскостью P_v, перпендикулярной к фронтальной плоскости проекций (черт. 46).

Начертить эпюр в натуральном масштабе, затем построить истинный вид сечения и развертку боковой поверхности с нанесением на нее линии пересечения плоскостью P_v.

Вычислить, в каком отношении секущая плоскость делит боковую поверхность данной призмы.



Черт. 46.

626. (Устно.) Из правильной треугольной призмы, сторона основания которой a, вырезана двумя параллельными сечениями наклонная призма с боковым ребром b. Найти боковую поверхность наклонной призмы.

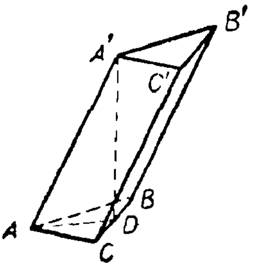
627. В сечении треугольной призмы плоскостью, перпендикулярной к боковому ребру, образуется равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого Q; длина бокового ребра призмы c. Найти боковую поверхность призмы.

628. Площади двух взаимно перпендикулярных боковых граней треугольной призмы равны 40 $м^2$ и 30 $м^2$. Боковое ребро призмы равно 5 $м$. Найти боковую поверхность призмы.

629. Основанием параллелепипеда служит квадрат, сторона которого a. Одна из вершин верхнего основания проектируется в центр нижнего основания. Боковое ребро параллелепипеда b. Найти боковую поверхность параллелепипеда.

630. Основанием призмы служит треугольник ABC, в котором $AB=AC=10$ *см* и $BC=12$ *см*. Ребро $AA_1=13$ *см*. Вершина A_1 равноудалена от вершин A, B и C. Найти полную поверхность призмы.

631. Основанием призмы служит равносторонний треугольник со стороной a. Боковое ребро равно b. Проекция одного из боковых ребер на нижнее основание служит высотой этого основания (черт. 47). Найти боковую поверхность призмы.



Черт. 47.

632. Основанием параллелепипеда служит ромб со стороной a. Одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания углы, равные α, и равно b. Найти боковую поверхность параллелепипеда.

633. Основанием призмы служит квадрат, сторона которого a. Проекции двух боковых ребер призмы на плоскость основания лежат на сторонах квадрата, и длина каждой из них b. Найти боковую поверхность призмы, если боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

634. Основанием призмы служит треугольник ABC, в котором $AB=AC=7$ *см* и $BC=6$ *см*. Боковое ребро AA_1 равно 10 *см* и образует с AB и AC углы в $60°$. Найти боковую поверхность призмы.

§ 25. Пирамида

635. (Устно.) Чему равна сумма всех плоских углов: 1) треугольной пирамиды, 2) четырехугольной, 3) n-угольной?

636. (Устно.) Указать границы изменения двугранного угла при основании правильной n-угольной пирамиды, ее бокового ребра и апофемы, если сторона основания остается постоянной.

637. (Устно.) Дан правильный n-угольник и треугольник ABC, в котором $AB=BC$. При каком условии треугольник ABC

может быть боковой гранью правильной пирамиды, имеющей своим основанием данный n-угольник?

638. (Устно.) В правильной n-угольной пирамиде все ребра равны между собой. При каких значениях n это возможно?

639. (Устно.) Доказать, что, для того чтобы пирамида была правильной, необходимо, чтобы боковые ребра ее были равны, или двугранные углы при основании были равны, или плоские углы при вершине были равны. Является ли каждое из этих условий достаточным, чтобы пирамида была правильной?

640. Для того чтобы пирамида была правильной, необходимо и достаточно, чтобы боковые ребра ее были равны и двугранные углы при основании были равны. Доказать.

641. Даны три равнобедренных треугольника: ABC, DEF, LMN, такие, что $AB=BC$, $DE=EF$, $LM=MN$. Какому условию должны удовлетворять углы и стороны этих треугольников, для того чтобы они могли быть боковыми гранями треугольной пирамиды с плоскими углами при вершине, соответственно равными углам B, E, M?

642. Даны три разносторонних треугольника: ABC, DEF и LMN. При каком условии данные треугольники могут быть боковыми гранями треугольной пирамиды с плоскими углами при вершине, соответственно равными B, E, M?

643. Построить развертку и изготовить модель треугольной пирамиды, боковые грани которой — неравные между собой разносторонние треугольники.

644. При каком условии данные четыре треугольника: ABC, DEF, KLM и NPR — могут быть гранями треугольной пирамиды с плоскими углами при одной из вершин, соответственно равными B, E, L?

645. Построить модель треугольной пирамиды, все боковые грани которой — равные между собой разносторонние треугольники. Указать простейший способ построения развертки такой пирамиды.

646. (Устно.) Сколько диагональных сечений можно провести: 1) в четырехугольной пирамиде, 2) в пятиугольной, 3) в n-угольной?

647. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания a, двугранный угол при основании α. Найти апофему пирамиды.

648. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно b и наклонено к плоскости основания под углом φ. Найти сторону основания пирамиды.

649. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине α. Найти высоту пирамиды. Вычислить при $a=10{,}3$ *дм* и $\alpha=62°30'$.

650. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании α. Найти угол наклона бокового ребра к основанию.

651. Дана правильная четырехугольная пирамида. Найти на поверхности пирамиды геометрическое место точек: 1) равноудаленных от двух смежных вершин основания; 2) равноудаленных от двух противоположных вершин основания.

652. Внутри правильной шестиугольной пирамиды построить геометрическое место точек: 1) равноудаленных от всех вершин основания; 2) равноудаленных от плоскостей двух противоположных боковых граней.

653. Доказать, что высота правильной пирамиды есть геометрическое место точек, расположенных внутри пирамиды и равноудаленных от боковых граней ее.

654. Доказать, что в правильной треугольной пирамиде противоположные ребра взаимно перпендикулярны.

655. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро перпендикулярно к одной из диагоналей основания. Доказать.

656. Доказать, что три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер треугольной пирамиды, пересекаются в одной точке и делятся в этой точке пополам.

657. Доказать, что плоскость, проходящая через высоту пирамиды и высоту боковой грани, перпендикулярна к плоскости боковой грани.

658. Высота правильной треугольной пирамиды 40 *см*, апофема основания 30 *см*. Найти расстояние вершины основания от противолежащей грани.

659. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковое ребро b. Найти кратчайшее расстояние между двумя противоположными ребрами.

660. Если все боковые ребра пирамиды равны между собой, то: 1) они одинаково наклонены к плоскости основания; 2) основанием служит многоугольник, около которого можно описать окружность; 3) вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности. Доказать.

Сформулировать и доказать обратные теоремы.

661. (Устно.) В пирамиде все боковые ребра равны. 1) Какого вида треугольник; 2) какого вида параллелограмм; 3) какого вида трапеция может служить основанием пирамиды?

662. (Устно.) Боковые ребра пирамиды равнонаклонены к основанию. Определить вид треугольника, служащего основанием пирамиды, если вершина пирамиды проектируется в точку, лежащую: 1) внутри этого треугольника, 2) вне этого треугольника, 3) на стороне треугольника.

663. Построить развертку и изготовить модель пятиугольной пирамиды, не являющейся правильной, все боковые ребра которой равны между собой. Произведя необходимые измерения, вычислить угол между высотой этой пирамиды и ее боковым ребром.

664. Основанием пирамиды служит треугольник, одна из сторон которого равна c, а прилежащие к ней углы α и β. Все боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом φ. Найти высоту пирамиды.

665. В основании пирамиды лежит равнобедренный прямоугольный треугольник; боковые ребра равны между собой. Доказать, что один из двугранных углов при основании прямой, а два другие равны между собой.

666. Если все двугранные углы при основании пирамиды равны между собой, то: 1) вершина пирамиды равноудалена от всех сторон основания; 2) основанием служит многоугольник, в который можно вписать окружность; 3) вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности. Доказать.

Сформулировать и доказать обратные теоремы.

667. (Устно.) В пирамиде все двугранные углы при основании равны. 1) Какого вида треугольник и какого вида параллелограмм может служить основанием пирамиды? 2) Каким свойством должен обладать всякий четырехугольник, служащий основанием этой пирамиды?

668. Построить развертку пирамиды, каждый двугранный угол при основании которой равен 60°, основание — четырехугольник, три последовательные стороны которого соответственно равны 4 *см*, 5 *см* и 7 *см*, а угол, заключенный между меньшими из них, равен 120°.

669. (Устно.) Все двугранные углы при основании пирамиды равны; основанием служит равнобочная трапеция. Доказать, что боковая сторона этой трапеции равна ее средней линии.

670. Основанием пирамиды служит ромб, высота которого равна b. Расстояние от вершины пирамиды до каждой из сторон основания на a больше высоты пирамиды. Найти высоту пирамиды.

671. В основании пирамиды лежит ромб с острым углом α. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β. Найти углы, составляемые с плоскостью основания боковыми ребрами.

672. (Устно.) Основание пирамиды — ромб с углом в 60°. Высота пирамиды проходит через вершину тупого угла ромба. Сколько равных боковых ребер имеет пирамида?

673. (Устно.) Основание пирамиды — равносторонний треугольник. Одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания. Найти углы, образуемые каждой из боковых граней с основанием, если высота пирамиды равна высоте ее основания.

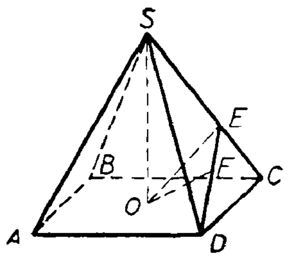
674. Основанием пирамиды служит квадрат. Два боковых ребра, лежащие в одной грани, равны между собой. Доказать, что две боковые грани равнонаклонены к основанию.

675. В основании пирамиды лежит квадрат. Одна из боковых граней перпендикулярна к плоскости основания, две смежные с нею боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. Найти угол наклона к плоскости основания четвертой боковой грани.

676. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник; боковые грани, проходящие через равные стороны этого треугольника, равнонаклонены к основанию. Доказать, что третья боковая грань есть равнобедренный треугольник.

677. В правильной шестиугольной пирамиде двугранный угол при основании α. Расстояние от центра основания до боковой грани равно b. Найти апофему и высоту пирамиды.

678. Из центра основания правильной четырехугольной пирамиды опущены перпендикуляры на боковую грань и боковое ребро, лежащее в этой грани (черт. 48). Доказать, что основания этих перпендикуляров лежат на высоте боковой грани.



Черт. 48

679. В правильной четырехугольной пирамиде расстояние от центра основания до боковой грани равно m, а до бокового ребра — n. Найти сторону основания пирамиды.

680. Двугранный угол между двумя боковыми гранями правильной треугольной пирамиды с основанием ABC и вершиной S равен 120°. Расстояние от вершины B основания до ребра AS равно b. Найти апофему пирамиды.

681. Двугранный угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равен α. Сторона основания равна a. Найти боковое ребро и высоту пирамиды.

682. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине 2α. Найти двугранный угол при боковом ребре.

683. Дана четырехугольная пирамида. Построить точку пересечения прямой MN с плоскостью основания пирамиды, если точки M и N заданы: 1) на одной боковой грани пирамиды; 2) на двух несмежных ребрах пирамиды; 3) на двух боковых гранях пирамиды.

684. Построить точку пересечения прямой MN с плоскостью основания данной четырехугольной пирамиды, если точка M лежит на высоте пирамиды, а точка N — на боковой грани пирамиды.

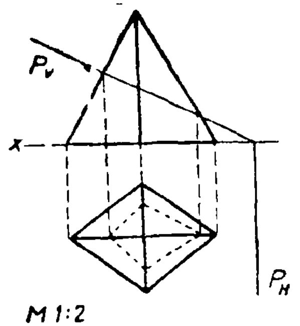
685. Даны правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ и точки K и L в грани ASD. Построить точки пересечения прямой KL с плоскостью основания пирамиды и плоскостью грани SBC.

686. Построить сечение треугольной пирамиды плоскостью, заданной прямой, расположенной в плоскости основания пирамиды, и точкой: 1) принадлежащей боковому ребру пирамиды; 2) принадлежащей боковой грани пирамиды.

687. Построить сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, заданной тремя точками, из которых две принадлежат двум боковым ребрам пирамиды, не лежащим в одной грани, а третья — основанию пирамиды.

688. Построить сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, заданной тремя точками, принадлежащими трем ее боковым граням.

689. На эпюре изображена в уменьшенном виде (M 1 : 2) четырехугольная пирамида (во фронтальной и горизонтальной проекциях), которая пересечена плоскостью P_v, перпендикулярной к фронтальной плоскости проекций (черт. 49). Начертить эпюр в натуральном масштабе, затем построить истинный вид сечения. Вычислить его площадь.



Черт 49

690. (Устно.) Высота пирамиды разделена на четыре равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Площадь основания равна Q. Найти площади полученных сечений.

691. (Устно.) На каком расстоянии от вершины пирамиды с высотой h надо провести сечение параллельно основанию, чтобы площадь сечения равнялась: 1) половине площади основания; 2) $\frac{1}{n}$ площади основания?

692. В правильной пирамиде с основанием ABC и вершиной S проведено сечение через ребро SA и высоту пирамиды. Угол между ребром SB и плоскостью сечения равен 30°. Найти боковое ребро пирамиды, если высота ее равна h.

693. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна a, высота h. При каком соотношении между a и h площадь сечения, проходящего через вершину пирамиды и большую диагональ основания, меньше площади сечения, проходящего через вершину пирамиды и меньшую диагональ основания?

694. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро, равное b, образует с плоскостью основания угол α. Построить сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания параллельно боковому ребру, и найти площадь сечения.

695. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна h, двугранный угол при основании равен α. Найти площадь сечения, проведенного через середину высоты параллельно боковой грани. Вычислить при $h=3{,}06$ *дм*, $\alpha=41°17'$.

696. Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через середины двух смежных сторон основания и середину высоты. Сторона основания равна a, боковое ребро равно l. Найти площадь сечения.

697. В правильной треугольной пирамиде построить сечение плоскостью, проходящей через центр основания, параллельно двум противоположным ребрам. Найти площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна a, боковое ребро b.

698. Доказать, что правильную треугольную пирамиду можно пересечь плоскостью так, что в сечении получится квадрат.

699. Данную треугольную пирамиду пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм, одна из сторон которого равна a. При каком условии задача имеет решение?

700. Основанием правильной пирамиды служит квадрат, сторона которого равна a; боковое ребро наклонено к основанию под углом α; через одну из вершин основания проведена плоскость, перпендикулярная к противолежащему боковому ребру. Найти площадь сечения.

§ 26. Поверхность пирамиды

701. (Устно.) В правильной треугольной пирамиде боковое ребро перпендикулярно к боковой грани и равно b. Найти боковую поверхность пирамиды.

702. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине α. Найти полную поверхность пирамиды и вычислить при $a=32{,}7$ *дм*, $\alpha=52°30'$.

703. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро, равное l, наклонено к основанию под углом α. Найти боковую поверхность пирамиды.

704. Найти полную поверхность правильной пятиугольной пирамиды, если высота ее равна H и образует с боковой гранью угол β.

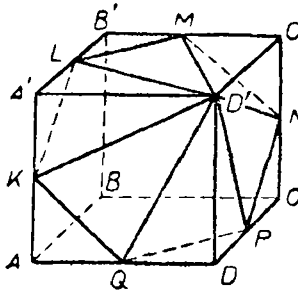
705. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол между плоскостями двух противоположных боковых граней, обращенный к плоскости основания, равен 60°, апофема равна k. Найти полную поверхность пирамиды.

706. В правильной шестиугольной пирамиде сечение, проведенное через вершину и меньшую диагональ основания, является равносторонним треугольником со стороной a. Найти боковую поверхность пирамиды.

707. Центр одной из граней куба и середины сторон противоположной грани служат вершинами пирамиды. Найти ее боковую поверхность, если ребро куба равно a.

708. Боковая поверхность треугольной пирамиды, все ребра которой равны, развернута на плоскости. Диагональ полученного четырехугольника равна a. Найти полную поверхность пирамиды.

709. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение через середины ребер AA_1, A_1B_1 и B_1C_1. Доказать, что пирамида, вершиной которой является точка D_1, а основанием — многоугольник, полученный в сечении, является правильной (черт. 50). Найти полную поверхность этой пирамиды, если ребро куба равно a.



Черт. 50.

710. В правильной треугольной пирамиде проведено сечение через боковое ребро и высоту пирамиды. Апофема пирамиды равна k и составляет с плоскостью сечения угол в 30°. Найти полную поверхность пирамиды.

711. Найти боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, если площадь сечения, проведенного через центр основания параллельно боковой грани, равна Q.

712. В правильной треугольной пирамиде площадь сечения, проведенного через середину высоты пирамиды параллельно боковой грани, равна Q. Найти боковую поверхность пирамиды.

713. (Устно.) Высота пирамиды h; найти расстояние от вершины до плоскости сечения, параллельного основанию, которое делит площадь боковой поверхности пополам.

714. В правильной четырехугольной пирамиде всякая плоскость, проходящая через высоту пирамиды, делит ее боковую поверхность на две равновеликие части. Доказать.

715. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a и угол между боковыми гранями равен φ. Найти боковую поверхность пирамиды и вычислить при $a=11$ *дм*; $\varphi=80°36'$.

716. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с катетами 2 *см* и 4 *см*. Боковые ребра равны между собой. Высота пирамиды — 2 *см*. Найти боковую поверхность.

717. Основанием пирамиды служит трапеция, параллельные стороны которой равны b и $2b$, а один из острых углов 60°. Найти боковую поверхность пирамиды, если ее высота равна $\frac{b}{2}$, а боковые ребра одинаково наклонены к основанию.

718. Доказать, что боковая поверхность пирамиды, имеющей при основании равные двугранные углы, равна половине произведения периметра основания на высоту какой-либо боковой грани, проведенную из вершины пирамиды.

719. Ромб, у которого сторона равна 10 *дм*, а высота 6 *дм*, служит основанием пирамиды. Расстояние от вершины пирамиды до каждой из сторон основания на 2 *дм* больше высоты пирамиды. Найти полную поверхность пирамиды.

720. Основанием пирамиды служит прямоугольная трапеция, непараллельные стороны которой равны 2,4 *м* и 2,5 *м*; все двугранные углы при основании пирамиды равны между собой. Найти полную поверхность пирамиды, если высота ее равна 3,5 *м*.

721. Если двугранные углы при основании пирамиды равны, то $S_{бок} = \frac{Q}{\cos\alpha}$ и $S_{полн} = \frac{2\,Q\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$,

где S — поверхность, Q — площадь основания, α — двугранный угол при основании. Доказать.

722. (Устно.) Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a; двугранный угол при основании равен 60°. Найти боковую поверхность.

723. (Устно.) Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, катеты которого 6 *см* и 8 *см*. Каждый из двугранных углов при основании пирамиды равен 45°. Найти боковую поверхность пирамиды.

724. В основании пирамиды лежит ромб с острым углом φ. Каждый из двугранных углов при основании пирамиды равен α. Высота пирамиды H. Найти полную поверхность пирамиды.

725. В основании пирамиды лежит равнобочная трапеция, диагональ которой равна l и составляет с большим основанием угол α. Каждый из двугранных углов при основании пирамиды равен φ. Найти полную поверхность пирамиды.

726. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с катетами 6 *м* и 8 *м*. Боковые грани, проходящие через катеты, перпендикулярны к плоскости основания. Высота пирамиды равна 3,6 *м*. Найти полную поверхность пирамиды

727. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной 8 *дм*; одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания и равно 15 *дм*. Найти полную поверхность пирамиды.

728. Основанием пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC, в котором катет $AC=12$ *см*, катет $BC=5$ *см*, ребро SA перпендикулярно к плоскости основания и равно 9 *см*. Найти полную поверхность пирамиды.

729. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a Одна из боковых граней перпендикулярна к плоскости основа-

ния; две смежные с ней грани образуют с плоскостью основания углы в 60°. Найти боковую поверхность пирамиды.

730. Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник со стороной a. Одна из боковых граней — также равносторонний треугольник — перпендикулярна к плоскости основания. Найти боковую поверхность пирамиды.

731. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 5 *м* и 4 *м*, а одна из диагоналей — 3 *м*. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 2 *м*. Найти полную поверхность пирамиды.

§ 27. Усеченная пирамида

732. Два произвольных подобных и неравных многоугольника расположены в разных плоскостях так, что их сходственные стороны соответственно параллельны. Доказать, что, соединив концы сходственных сторон непересекающимися отрезками, получим усеченную пирамиду. Какой получим многогранник, если заданные многоугольники будут равны?

733. Построить развертку и изготовить модель правильной усеченной четырехугольной пирамиды, стороны оснований которой и высота относятся как $10:4:3\sqrt{7}$.

734. Если от правильной треугольной призмы отделить часть плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и пересекающей продолжение противоположного бокового ребра, то оставшаяся часть призмы будет усеченной пирамидой. Доказать.

Будет ли верным такое заключение для правильной n-угольной призмы при $n>3$? Почему?

735. Доказать, что отрезок, соединяющий центры оснований правильной усеченной пирамиды, перпендикулярен основаниям.

736. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде все диагонали пересекаются в одной точке, лежащей на прямой, проходящей через центры оснований. Доказать.

737. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований a и b $(a>b)$. Найти боковое ребро этой пирамиды, если оно образует с основанием угол α.

738. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде диагонали, проведенные в одном диагональном сечении, взаимно перпендикулярны. Найти высоту пирамиды, если диагональ пирамиды равна 5 *дм*.

739. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды a и b $(a>b)$, двугранный угол при большем основании равен α. Найти высоту пирамиды.

740. Нижнее основание усеченной пирамиды — правильный треугольник, сторона которого 8 *см*. Одна из боковых граней перпендикулярна к плоскости основания; противолежащее ей боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45° и одинаково наклонено к прилежащим ребрам основания. Периметр верхнего основания этой пирамиды равен 12 *см*. Найти высоту пирамиды.

741. Построить сечение правильной треугольной усеченной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и точку, лежащую на отрезке, соединяющем центры оснований пирамиды. Как будет изменяться форма сечения, если точка будет перемещаться вверх по отрезку от нижнего основания?

742. Дана четырехугольная усеченная пирамида $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построить ее сечение плоскостью, заданной двумя точками, принадлежащими грани AA_1D_1D, и точкой, принадлежащей ребру B_1C_1.

743. В правильной треугольной усеченной пирамиде провести сечение через боковое ребро и высоту основания. Найти площадь сечения, если стороны оснований соответственно равны a и b $(a>b)$, а боковое ребро образует с основанием угол в 45°.

744. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 5 *см* и 2 *см*, высота — 1 *см*. Через сторону меньшего основания провести плоскость параллельно противоположному боковому ребру. Найти площадь полученного сечения.

745. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде провести сечение через конец диагонали верхнего основания перпендикулярно к этой диагонали. Сторона верхнего основания вдвое меньше стороны нижнего основания. Доказать, что площадь полученного сечения втрое меньше площади диагонального сечения.

746. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде двугранный угол при основании равен α, сторона большего основания равна a. Найти площадь сечения, проведенного через противоположные стороны верхнего и нижнего оснований, если плоскость сечения перпендикулярна к боковой грани.

747. В правильной шестиугольной усеченной пирамиде сторона верхнего основания вдвое меньше стороны нижнего основания. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и центр верхнего, и определить вид полученного сечения. Найти угол, составляемый плоскостью сечения и плоскостью основания, в том случае, когда стороны сечения равны между собой.

748. Если в усеченной пирамиде площади оснований соответственно равны P_1 и P_2, а площадь параллельного сечения, проведенного через середину высоты, равна M, то $\sqrt{M} = \frac{\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}}{2}$. Доказать.

749. Высота усеченной пирамиды разделена на три равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основаниям. Найти площади полученных сечений, если площади оснований Q и q.

§ 28. Поверхность усеченной пирамиды

750. Найти полную поверхность правильной усеченной пирамиды: треугольной, четырехугольной, шестиугольной, если даны: высота h и стороны оснований a и b $(a>b)$.

751. Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению апофемы пирамиды на периметр сечения, проведенного через середину высоты пирамиды перпендикулярно к высоте. Доказать.

752. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны a и b, а боковая поверхность равновелика сумме оснований. Найти высоту пирамиды.

753. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 6 *см* и 10 *см*. Площадь сечения, проходящего через боковое ребро и середину противоположной стороны основания, равна 16 $см^2$. Вычислить боковую поверхность пирамиды.

754. Доказать, что площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды $S_{бок}=\frac{Q-q}{\cos\alpha}$, где Q и q — площади большего и меньшего оснований пирамиды и α — угол наклона боковой грани к плоскости большего основания.

755. (Устно.) Стороны основания правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны a и $2a$, двугранный угол при большем основании пирамиды равен 60°. Найти боковую поверхность пирамиды.

756. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде площади оснований относятся как 1 : 4, двугранный угол при большем основании равен α и высота равна H. Найти боковую поверхность пирамиды.

757. Диагональ правильной усеченной четырехугольной пирамиды делит отрезок, соединяющий центры оснований, в отношении 1 : 3 и составляет с ним угол α. Найти боковую поверхность пирамиды, если сторона меньшего основания равна a.

758. Основанием усеченной пирамиды служит квадрат. Две боковые грани перпендикулярны к основанию, а две другие наклонены к основанию под углом 45°. Найти боковую поверхность пирамиды, если высота ее равна h, а сторона большего основания — b.

759. Трехгранный угол, каждый плоский угол которого прямой, пересечен двумя параллельными плоскостями так, что в сечениях получились правильные треугольники со сторонами

a и b $(a>b)$. Найти полную поверхность полученной усеченной пирамиды.

760. В параллелепипеде проведены два сечения: одно — через концы трех ребер, исходящих из одной вершины, другое — через середины тех же ребер. Доказать, что многогранник, отсекаемый этими плоскостями, является усеченной пирамидой и что ее боковая поверхность составляет $\frac{3}{16}$ полной поверхности параллелепипеда.

761. Измерения прямоугольного параллелепипеда: 2 *дм*, 4 *дм* и 6 *дм*. Найти полную поверхность усеченной пирамиды, отсекаемой от параллелепипеда двумя плоскостями, одна из которых проходит через концы трех ребер, исходящих из одной вершины, а другая — через середины тех же ребер.

762. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде построить внутреннюю пирамиду, принимая за ее основание верхний квадрат, а за вершину — центр нижнего квадрата. Чему равна высота пирамид (данной усеченной и внутренней полной), если их боковые поверхности равновелики, а стороны оснований усеченной пирамиды соответственно равны a и b $(a>b)$.

§ 29. Правильные многогранники

763. Две правильные пятиугольные пирамиды, боковые грани которых — правильные треугольники, имеют общее основание. Вершины этих пирамид расположены по разные стороны от их общего основания. Представляет ли тело, составленное из этих пирамид, правильный многогранник?

764. В кубе из одной вершины D проведены диагонали DK, DL, DM трех граней, сходящихся в этой вершине Концы этих диагоналей соединены отрезками. Доказать, что многогранник $DKLM$ — правильный тетраэдр.

765. Три равных взаимно перпендикулярных отрезка пересекаются в одной точке и в этой точке делятся пополам. Доказать, что многогранник, вершинами которого являются концы этих отрезков, есть правильный октаэдр.

766. Доказать, что многогранник, вершинами которого являются центры граней куба, есть правильный октаэдр.

767. Какой вид имеет многогранник, вершинами которого являются центры граней правильного тетраэдра? Найти ребра этого многогранника, если ребро данного тетраэдра равно a.

768. Выразить поверхность каждого из пяти правильных многогранников через его ребро a.

769. Доказать, что четыре высоты правильного тетраэдра равны между собой и пересекаются в одной точке, в которой каждая высота делится в отношении $3:1$, считая от вершины.

770. Противоположные грани правильного октаэдра попарно параллельны, и отрезок, соединяющий центры этих граней, перпендикулярен к ним. Доказать.

771. Ребро правильного октаэдра равно a. Найти расстояние между центрами двух смежных граней.

772. Вычислить двугранные углы правильных тетраэдра, октаэдра, икосаэдра и додекаэдра.

§ 30. Цилиндр

773. Найти геометрическое место точек пространства, удаленных от прямой на данное расстояние.

774. Если прямая имеет больше двух общих точек с цилиндрической поверхностью, то эта прямая совпадает с одной из образующих цилиндрической поверхности. Доказать.

775. Доказать, что осевое сечение цилиндра есть прямоугольник [1].

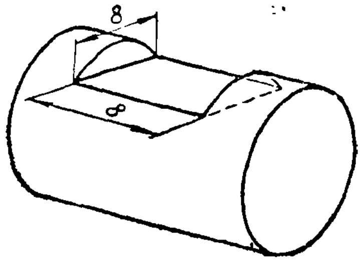
776. Если отрезок, ограниченный боковой поверхностью цилиндра, пересекает его ось, то такой отрезок делится осью пополам. Доказать.

777. Доказать, что сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси, есть прямоугольник.

778. В цилиндре, радиус основания которого равен R и образующая l, проведено сечение, параллельное оси. Кратчайшее расстояние между диагональю прямоугольника, образовавшегося в сечении, и осью цилиндра равно a. Найти площадь сечения.

779. Внутри цилиндра с радиусом основания 4 *дм* и высотой 6 *дм* расположен отрезок так, что его концы лежат на окружностях обоих оснований. Найти кратчайшее расстояние отрезка от оси, если длина его равна 8 *дм*.

780. Сечение равностороннего цилиндра плоскостью, параллельной оси, есть прямоугольник, диагональ которого составляет с осью цилиндра угол α. Найти угол между радиусом основания цилиндра, проведенным в вершину сечения, и плоскостью сечения.



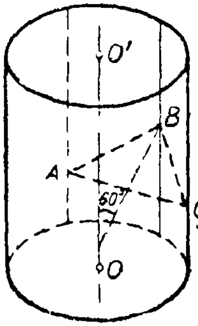
Черт. 51.

781. В цилиндрической чурке толщиной 10 *см* требуется выпилить поперечный, параллельный оси цилиндра паз, дно которого должно быть квадратом со стороной 8 *см* (черт. 51). Какой должна быть глубина запила?

[1] В этой и во всех последующих задачах имеется в виду цилиндр вращения.

782. В цилиндр наклонно к оси вписан квадрат так, что все его вершины лежат на окружностях оснований. Вычислить площадь квадрата, зная, что высота цилиндра равна 2 *см*, а радиус основания — 7 *см*. Можно ли в этот же цилиндр вписать квадрат другой площади так, чтобы его вершины лежали на окружностях оснований?

783. Все вершины равнобедренного треугольника с основанием 6 *см* и высотой 2 *см* лежат на боковой поверхности цилиндра, ось которого перпендикулярна к основанию треугольника и образует с его плоскостью угол в 60° (черт. 52). Найти радиус основания цилиндра.



Черт 52

784. Осевое сечение цилиндра, проходящее через прямую прикосновения касательной плоскости к цилиндру, перпендикулярно к этой плоскости. Доказать.

785. На поверхности цилиндра найти геометрическое место точек, равноудаленных от плоскостей двух его осевых сечений.

786. На поверхности цилиндра найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух его образующих.

787. 1) Чтобы около призмы можно было описать цилиндр, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямой и основанием ее служил многоугольник, около которого можно описать окружность. Доказать.

2) Чтобы в призму можно было вписать цилиндр, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямой и основанием ее служил многоугольник, в который можно вписать окружность. Доказать.

788. Если в прямой четырехугольной призме суммы площадей противоположных граней равны, то в эту призму можно вписать цилиндр. Сформулировать и доказать обратную теорему.

789. Если в прямой четырехугольной призме сумма двугранных углов при противоположных боковых ребрах равна $2d$, то около этой призмы можно описать цилиндр.

Сформулировать и доказать обратную теорему.

§ 31. Поверхность цилиндра

790. Среднее количество тепла, которое дает 1 $м^2$ поверхности нагрева при паровом отоплении низкого давления, считается равным 550 тепловым единицам в час. Сколько погонных метров труб диаметром 34 *мм* нужно установить в помещении, для отопления которого по расчетам требуется 4500 единиц тепла в час?

791. Шлифовальный круг диаметром 350 *мм* и толщиной 60 *мм* за время работы уменьшился в диаметре на 4,5 *мм*. На сколько уменьшилась при этом его рабочая (цилиндрическая) поверхность?

792. На цилиндрический барабан подъемной машины, диаметр которого 750 *мм* и ширина 350 *мм*, наматывается стальной трос толщиной 20 *мм*. Сколько метров каната помещается в один ряд на поверхности барабана, если ее рабочая часть составляет 80%?

793. Длину дуги l сегмента по его хорде d и высоте (стреле) h можно вычислить по такой приближенной формуле:

$$l \approx \sqrt{d^2 + \frac{16}{3}h^2}.$$

Свод потолка подвального помещения имеет цилиндрическую поверхность. Пол помещения — квадрат со стороной 5,2 *м*. Высота (стрела) равна 1,5 *м*. Найти площадь кривой поверхности свода.

Вычислить относительную погрешность результата, найденного по приближенной формуле, по сравнению с полученным при помощи точной формулы длины дуги.

794. Плоскость, параллельная оси цилиндра, делит окружность основания в отношении 1 : 5. Площадь образовавшегося сечения равна 10 $м^2$. Вычислить боковую поверхность цилиндра.

795. Основанием четырехугольной призмы, описанной около равностороннего цилиндра, служит прямоугольная трапеция с острым углом α и периметром P. Найти боковую поверхность цилиндра.

796. Площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, вписанной в цилиндр, равна 45 $дм^2$. Вычислить площадь части боковой цилиндрической поверхности, заключенной между двумя ближайшими боковыми ребрами призмы.

797. В цилиндр вписана треугольная призма, две боковые грани которой взаимно перпендикулярны. Площадь боковой грани призмы, проходящей через бо́льшую сторону основания, равна M. Найти боковую поверхность цилиндра.

798. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, вписанной в цилиндр, $AB=c$, $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$. Угол между диагональю AB_1 грани AA_1B_1B и гранью AA_1C_1C равен φ. Найти боковую поверхность цилиндра.

799. В правильную четырехугольную пирамиду, каждое ребро которой равно a, вписан равносторонний цилиндр так, что одно основание его расположено на основании пирамиды, а окружность верхнего основания касается боковых граней пирамиды. Найти поверхность этого цилиндра.

§ 32. Конус.

800. Доказать, что если все образующие конуса равны между собой, то этот конус есть конус вращения. Сформулировать обратную теорему.

801. Доказать, что всякая точка оси конуса равноудалена от всех его образующих [1].

802. На боковой поверхности конуса заданы две точки A и B. Построить точку пересечения прямой AB с плоскостью основания конуса.

803. Точка A задана на оси конуса, точка B задана на плоскости основания конуса, вне основания. Найти точку пересечения прямой AB с поверхностью конуса.

804. Построить сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, точку, заданную на образующей, и точку, заданную на основании конуса.

805. Образующая конуса равна 13 *см*, высота — 12 *см*. Конус этот пересечен прямой, параллельной основанию; расстояние ее от основания равно 6 *см*, а от высоты — 2 *см*. Вычислить длину отрезка этой прямой, ограниченного поверхностью конуса.

806. Высота конуса равна 24 *см*, радиус основания — 12 *см*. В этот конус параллельно высоте вписан квадрат так, что одна его сторона лежит на основании конуса, а концы стороны, ей противоположной, принадлежат боковой поверхности конуса. Сторона квадрата равна 6 *см*. Вычислить расстояние плоскости квадрата от высоты конуса.

807. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Под каким углом наклонена к плоскости основания плоскость, проходящая через две образующие, составляющие угол β?

808. В конусе, радиус основания которого равен R и угол при вершине осевого сечения равен α, проведена плоскость через вершину конуса под углом β к высоте. Найти площадь полученного сечения.

809. Радиус основания конуса равен 3 *дм*, высота — 12 *дм*. В конус вписан равносторонний цилиндр так, что одно основание его лежит на основании конуса, а окружность другого — на боковой поверхности конуса. Вычислить высоту цилиндра.

810. Найти необходимое и достаточное условие, при котором около прямой призмы можно описать конус так, чтобы одно основание призмы лежало на основании конуса, а вершины другого основания — на образующих конуса.

811. Радиус основания конуса равен 1 *дм*, высота равна 1 *дм*. В конус вписан куб так, что одно основание его лежит

---

[1] В этой и во всех последующих задачах имеется в виду конус вращения.

на основании конуса, а вершины другого принадлежат боковой поверхности конуса. Найти ребро куба.

812. Доказать:

1) что около пирамиды с равными боковыми ребрами можно описать конус;

2) если пирамида вписана в конус, то ее боковые ребра равны.

813. Образующая конуса наклонена к основанию под углом α. В конус вписана пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник с острым углом β. Найти двугранные углы при основании пирамиды.

814. Доказать, что существует плоскость, содержащая только одну образующую данного конуса (эта плоскость называется касательной плоскостью).

815. Доказать, что если плоскость α содержит только одну образующую данной конической поверхности, то плоскость α перпендикулярна осевому сечению этой конической поверхности, содержащему указанную образующую.

816. Доказать:

1) если двугранные углы при основании пирамиды равны, то в такую пирамиду можно вписать конус;

2) если пирамида описана около конуса, то двугранные углы при ее основании равны.

817. Около конуса, радиус основания которого равен R, а угол в осевом сечении равен α, описана пирамида, основанием которой служит равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной b. Найти боковую поверхность этой пирамиды.

818. Доказать, что угол развертки боковой поверхности конуса равен $360^\circ \cos \alpha$, где α — угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

819. Произведя необходимые измерения на модели конуса, вычислить угол наклона образующей к плоскости основания и угол развертки его боковой поверхности.

820. В конусе отношение радиуса основания к образующей равно $\frac{4}{9}$. Вычислить угол развертки боковой поверхности конуса.

821. Развертка боковой поверхности конуса есть четверть круга. Найти отношение радиуса основания конуса к высоте.

822. Развертка боковой поверхности конуса есть сектор с углом в 144° радиуса 10 *см*. Построить: 1) развертку полной поверхности конуса; 2) на развертке — ребра правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в этот конус; 3) высоту и апофему этой пирамиды.

823. Два конуса имеют общую высоту и параллельные основания. Доказать, что линия пересечения их боковых поверхностей есть окружность.

824. Два конуса имеют общую высоту и параллельные основания, радиусы которых R и r. Найти длину окружности, по которой пересекаются их боковые поверхности.

§ 33. Поверхность конуса

825. (Устно.) Осевое сечение конуса есть равносторонний треугольник со стороной a. Найти боковую поверхность этого конуса.

826. Найти боковую поверхность конуса по площади его основания m и площади n сечения, проведенного через ось.

827. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол α. Хорда, вписанная в основание конуса и равная a, видна из центра основания под углом 2β. Найти полную поверхность конуса. Вычислить при $a=12{,}62$, $\alpha=58°19'$, $\beta=20°53'$.

828. Конус и цилиндр имеют общее основание, площадь которого равна 4π, и общую высоту. Отношение боковой поверхности первого к боковой поверхности второго равно $5:6$. Вычислить образующие данных тел.

829. Радиус основания конуса равен r. Через две образующие конуса, составляющие угол β, проведена плоскость, пересекающая основание конуса по хорде, стягивающей дугу в $\alpha° < 180°$. Найти полную поверхность конуса.

830. Концы отрезка CD, проходящего через неподвижную точку A, скользят по двум параллельным плоскостям. Найти отношение расстояний точки A от данных плоскостей, если площади поверхностей, описываемых отрезками AC и AD, относятся как $1:2$.

831. Прямоугольный треугольник, катеты которого 3 *дм* и 4 *дм*, вращается около оси, параллельной гипотенузе и проходящей через вершину прямого угла. Найти поверхность тела вращения.

832. В конус вписана правильная n-угольная пирамида, каждый из плоских углов которой при вершине равен α. Определить боковую поверхность конуса, если радиус основания его r.

833. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого a и высота, проведенная из вершины прямого угла, h. Угол между боковым ребром пирамиды и ее высотой вдвое больше одного из углов основания пирамиды. Найти боковую поверхность конуса, описанного около данной пирамиды.

834. В конус вписана призма так, что нижнее основание ее лежит на основании конуса, а вершины верхнего принадлежат боковой поверхности конуса. Основание призмы есть прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Диагональ большей боковой грани призмы равна $4\sqrt{13}$. Вычислить боковую поверхность конуса, если образующая его составляет с плоскостью основания угол в 60°.

835. В равносторонний конус вписан равносторонний цилиндр. Найти боковую поверхность конуса, если боковая поверхность цилиндра равна Q.

836. Хорда основания конуса, равная a, стягивает дугу в 120° и удалена от образующей, ей перпендикулярной, на расстояние l. Найти боковую поверхность конуса. (Два случая.)

837. (Устно.) Боковая поверхность конуса равна 45 $м^2$. Через точку, делящую высоту на две равные части, проведена плоскость параллельно основанию. На какие части разделилась боковая поверхность?

838. Образующая конуса равна 2. На каком расстоянии от вершины на образующей нужно взять точку, чтобы плоскость, проходящая через нее и параллельная основанию, делила бы боковую поверхность на две равновеликие части?

839. Конус катится по плоскости, вращаясь вокруг своей неподвижной вершины. Высота конуса равна h, образующая — l. Найти площадь поверхности, описываемой высотой конуса.

840. Конус катится по плоскости, вращаясь вокруг своей неподвижной вершины. Первый раз он пришел в первоначальное положение, сделав 5 оборотов и описав при этом на плоскости круг, площадь которого равна 64π. Вычислить радиус основания конуса.

§ 34. Усеченный конус

841. Доказать, что отрезок, соединяющий центры оснований усеченного конуса, перпендикулярен плоскостям оснований.

842. Высота усеченного конуса равна $3\sqrt{3}$ *см*. Радиус верхнего основания равен 4 *см*. Образующая усеченного конуса составляет с плоскостью основания угол в 60°. Найти радиус нижнего основания и образующую конуса.

843. Вычертить развертку и изготовить модель усеченного конуса, образующая которого равна 20 *см*, а диаметры оснований — 8 *см* и 24 *см*.

844. Диагонали осевого сечения усеченного конуса взаимно-перпендикулярны; высота конуса равна h. Найти площадь среднего сечения, параллельного основанию.

845. S — вершина полного конуса, из которого образован данный усеченный конус. Плоскость, проходящая через точку S, отсекает от окружности верхнего основания усеченного конуса дугу в $n°$.

Доказать, что эта плоскость отсекает от окружности нижнего основания дугу также в $n°$.

846. Из концов образующей усеченного конуса проведены две параллельные хорды оснований конуса. Доказать, что эти хорды отсекают от окружности оснований дуги, содержащие соответственно одинаковое число градусов.

847 *. По одну сторону от данного осевого сечения усеченного конуса проведены две параллельные хорды верхнего и нижнего оснований, отсекающие от них дуги одинакового числа градусов. Доказать, что плоскость, проходящая через эти хорды, пересекает боковую поверхность усеченного конуса по образующим.

848. Радиусы оснований усеченного конуса R и r $(R>r)$. Сечение этого конуса плоскостью, проходящей через две образующие, составляющие угол β, отсекает от окружности основания дугу α. Найти площадь сечения.

849. Доказать, что около всякой усеченной пирамиды, боковые ребра которой равны, можно описать усеченный конус.

850. Доказать, что если усеченный конус описан около усеченной пирамиды, то ее боковые ребра равны.

851. Доказать, что во всякую усеченную пирамиду с равными двугранными углами при основании можно вписать усеченный конус.

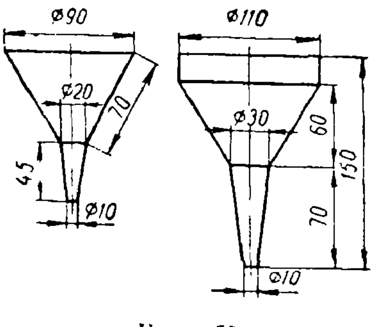
852. Доказать, что если усеченный конус вписан в усеченную пирамиду, то ее двугранные углы при основании равны.

853. Радиус верхнего основания усеченного конуса равен 1,5 *дм*, высота равна 12 *дм*. Найти радиус нижнего основания, если центр этого основания удален от образующей на расстояние, равное 6 *дм*.

854. На окружностях верхнего и нижнего оснований усеченного конуса по разные стороны от данного осевого сечения даны точки A и B. Построить (на проекционном чертеже) точку пересечения прямой AB с осевым сечением конуса.

§ 35. Поверхность усеченного конуса

855. Вычислить количество жести, необходимой на изготовление воронок, по данным на чертеже 53 размерам в миллиметрах. На швы добавить жести для первой воронки 5%, а для второй — 10%.



Черт. 53.

856. К вытяжной трубе требуется приделать колпак в форме усеченного конуса, высота которого 30 *см*, а диаметры оснований 100 *см* и 20 *см*. 1) Сколько квадратных метров листового железа понадобится для его изготовления, если на соединительные швы надо добавить около 2%? 2) Можно ли изготовить развертку такого усеченного конуса из одного листа жести, имеющего стандартные размеры 0,7 $м \times 1,4$ $м$?

857. Радиусы оснований усеченного конуса R и r $(R>r)$; угол, составляемый образующей с плоскостью основания, равен α. Найти боковую поверхность конуса.

858. Боковая поверхность усеченного конуса равна 28π. Диаметры его оснований 5 и 3. Найти диагональ осевого сечения.

859. Равносторонний конус пересечен плоскостью, параллельной основанию. Найти площадь осевого сечения образовавшегося усеченного конуса, если его боковая поверхность равна S.

860. Отношение площадей оснований усеченного конуса равно 1 : 36. Высота усеченного конуса 21 *см*. Через его ось проведена плоскость. Диагональ четырехугольника, полученного в сечении, 35 *см*. Вычислить поверхность этого конуса.

861. Диагональ осевого сечения усеченного конуса, равная d, составляет с плоскостью основания конуса угол α и перпендикулярна к образующей конуса, принадлежащей этому сечению. Найти боковую поверхность усеченного конуса.

862. Ромб, сторона которого a и острый угол 60°, вращается вокруг оси, лежащей в его плоскости, проходящей через вершину острого угла и перпендикулярной к стороне. Найти поверхность тела вращения.

863. Правильный шестиугольник со стороной a вращается вокруг стороны. Найти поверхность тела вращения.

864. В правильном тетраэдре проведено сечение параллельно основанию через середину высоты. Найти боковую поверхность усеченного конуса, вписанного в образовавшуюся усеченную пирамиду, если ребро тетраэдра равно a.

865. Большее основание усеченной пирамиды, вписанной в усеченный конус, есть трапеция, один из углов которой равен 60°. Диагональ трапеции равна $2\sqrt{3}$. Площади оснований пирамиды относятся как 1 : 4.

Вычислить поверхность усеченного конуса, если его образующая равна 5.

866. Радиусы оснований усеченного конуса 4 и 16; высота, равная 9, разделена на 3 равные части, и через точки деления проведены плоскости параллельно основаниям. На какие части разделится боковая поверхность?

867. Радиусы оснований усеченного конуса 1 *см* и 7 *см*, высота равна 6 *см*. Найти расстояние от нижнего основания до параллельного сечения, которое делит боковую поверхность на равновеликие части.

868. Боковая поверхность усеченного конуса равна 9π, образующая равна 3, диаметр одного из оснований вдвое больше

диаметра другого основания. Найти угол развертки боковой поверхности полного конуса, из которого получен данный усеченный конус.

§ 36. Шар

869. (Устно.) На сфере проведена замкнутая линия. При каком условии она будет окружностью?

870. Найти геометрическое место центров сфер данного радиуса, проходящих через заданную точку.

871. Найти геометрическое место центров сфер, проходящих через три данные точки, не лежащие на одной прямой.

872. Сколько сфер данного радиуса проходит через три данные точки, не лежащие на одной прямой? Как определить положение центров этих сфер?

873. Существует одна и только одна сфера, проходящая через четыре данные точки, не лежащие в одной плоскости. Доказать.

874. В пространстве по величине и положению задан отрезок. Найти геометрическое место вершин прямых углов, опирающихся на этот отрезок.

875. Радиус шара равен R. Через конец радиуса, лежащий на поверхности шара, проведена плоскость под углом 60° к этому радиусу. Найти площадь сечения шара этой плоскостью.

876. (Устно.) Вершины прямоугольного треугольника лежат на сфере. Найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если его гипотенуза равна c, а радиус сферы равен R.

877. а) Принимая Землю за шар, радиус которого R, найти длину параллели, широта которой α.

б) На какой широте параллель в два раза меньше экватора?

878. Задачи по карте.

1) Вычислить длину дуги меридиана в 1 *мин*, принимая Землю за шар, радиус которого $R \approx 6370$ *км*.

2) Вычислить длину параллели, на которой находится город Ленинград.

3) Вычислить расстояние по параллели между городами Симферополь и Ставрополь, зная, что разность долгот этих городов около 8°, и принимая их широты приближенно равными.

879. Найти геометрическое место точек, удаленных от сферы радиуса R на данное расстояние a $(a \leqslant R)$.

880. (Устно.) На плоскости, касательной к сфере, взята точка M на расстоянии 3 *см* от точки касания. Найти наибольшее и наименьшее расстояние от точки M до сферы, если радиус сферы 4 *см*.

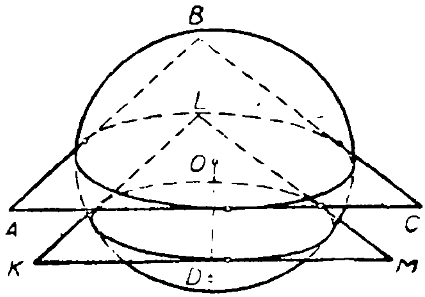
881. На какое расстояние может видеть глаз наблюдателя с маяка высотой H над поверхностью океана?

882. (Устно.) Две взаимно перпендикулярные плоскости касаются шара. Расстояние между точками касания равно l. Найти расстояние от центра шара до линии пересечения плоскостей.

883. Шар радиуса R касается граней трехгранного угла, все плоские углы которого прямые. Найти расстояние от центра шара до вершины угла.

884. Найти геометрическое место центров шаров данного радиуса r, касающихся данной плоскости.

885. Найти отношение площадей двух правильных треугольников, стороны которых касаются сферы, если плоскость первого проходит через центр сферы, а плоскость второго отстоит от ее центра на расстоянии, равном половине радиуса (черт. 54).



Черт. 54.

886. Через точку, взятую на поверхности шара, проведены две плоскости: первая — касательная к шару, вторая — под углом α к первой. Найти площадь сечения шара второй плоскостью, если радиус шара равен R.

887. Известен такой практический способ для вычисления диаметра d шара при помощи циркуля: на сфере произвольным радиусом r описывают окружность, на этой окружности берут три произвольные точки A, B и C и измеряют расстояние между ними: a, b, c. Искомый диаметр шара находится по формуле:

$$b = r^2 : \sqrt{r^2 - \left[\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}\right]^2},$$

где $2p = a + b + c$.

Доказать справедливость этой формулы.

888. На сфере даны две равные пересекающиеся окружности, лежащие в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Найти радиусы этих окружностей, если их общая хорда равна 2 *см*, а радиус сферы — 7 *см*.

889. Линия пересечения двух сфер есть окружность, центр которой лежит на прямой, проходящей через центры данных сфер. Доказать.

890. Две сферы, радиусы которых r и $2r$, расположены так, что центр меньшей сферы лежит на большей. Найти длину линии, по которой пересекаются сферы.

891 *. Через данную прямую провести плоскость, касательную к данному шару.

892 *. Четыре равных шара радиуса r расположены так, что каждый касается трех других. Найти расстояние от центра одного из них до плоскости, касательной к трем другим.

§ 37. Поверхность шара и его частей

893. (Устно.) Чему равна полная поверхность полушара радиуса R?

894. (Устно.) Как изменится поверхность шара, если радиус его увеличить вдвое, втрое, в n раз?

895. Если принять за единицу диаметр Земли, то диаметр Луны будет $\frac{3}{11}$, а диаметр Солнца 112 таких единиц.

Найти отношения поверхностей Луны и Солнца к поверхности Земли.

896. Сколько кожи потребуется для изготовления покрышки футбольного мяча диаметром 20 *см*, если на его обрезки и швы расходуется 8% сверх расчетной площади?

897. Крыша здания имеет форму полушарового купола, окружность которого приближенно равна 30 *м*. Сколько олифы пойдет на окраску крыши, если на 1 *кв. м* поверхности требуется около 0,25 *кГ* олифы?

898. (Устно.) Гипотенуза и катеты прямоугольного треугольника служат диаметрами трех шаров. Какая существует зависимость между их поверхностями?

899. Сферическая поверхность сегмента в 1,5 раза больше площади основания сегмента. Найти высоту сегмента, если радиус шара, от которого отсечен сегмент, равен R.

900. Найти площадь сечения шара плоскостью, которая делит поверхность шара на две части: 4 $см^2$ и 12 $см^2$.

901. Высота сегмента h. Дуга в осевом сечении сегмента α. Найти кривую поверхность сегмента.

902. Какую площадь земной поверхности охватывает глаз летчика-наблюдателя, находящегося на высоте H? Радиус земной поверхности R.

903. На каком расстоянии от центра шара радиуса R следует поместить светящуюся точку, чтобы она освещала $\frac{1}{4}$ часть поверхности шара?

904. Через точку, данную на поверхности шара радиуса R, проходят три взаимно касательные окружности, которые делят поверхность шара на 4 равновеликие части. Найти длины этих окружностей.

905. Двояковыпуклое стекло состоит из двух равных шаровых сегментов; площадь их общего основания равна Q, а дуга в осевом сечении каждого сегмента 2α. Найти поверхность этого стекла.

906. Если полуокружность, разделенная на 3 равные части, вращается вокруг диаметра, то поверхность, описанная средней дугой, равна сумме поверхностей, описанных крайними дугами. Доказать.

907. Радиус круга R; сегмент, дуга которого 2α, вращается вокруг диаметра, параллельного его основанию. Найти поверхность тела вращения.

908. Найти полную поверхность шарового сектора, если дуга осевого сечения сектора 120°, а радиус шара равен R.

909. Равносторонний конус и сегмент с общим основанием вместе составляют сферический сектор, полная поверхность которого 39 *см*^{2}. Найти площадь осевого сечения сектора.

§ 38. Вписанный и описанный шары

910. Доказать, что около любого цилиндра можно описать шар.

911. В шар радиуса R вписан цилиндр, у которого радиус основания относится к высоте, как $m:n$. Найти полную поверхность цилиндра.

912. В шар радиуса r вписан цилиндр, диагональ осевого сечения которого наклонена к плоскости основания цилиндра под углом α. Найти боковую поверхность цилиндра.

913. Доказать, что в любой цилиндр, высота которого равна диаметру основания, можно вписать шар. Сформулировать и доказать обратную теорему.

914. Найти поверхность шара, если полная поверхность описанного около него цилиндра равна Q.

915. Доказать, что около любого конуса можно описать шар и что в любой конус можно вписать шар.

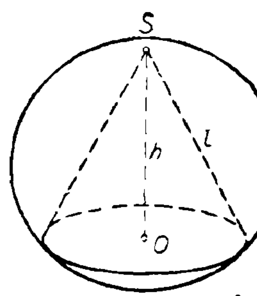
916. (Устно.) Радиус основания конуса равен r, угол при вершине в осевом сечении — α. Найти радиус описанного шара.

917. Высота конуса h, образующая l. Найти радиус описанного шара (черт. 55).

918. Найти поверхность конуса, если центр вписанного в него шара делит его высоту на две части: 5 *см* и 3 *см*.

919. Найти отношение полной поверхности конуса к поверхности вписанного в него шара, зная, что образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α.

920. Около шара радиуса r описан конус, наибольший угол между образующими которого прямой. Найти полную поверхность конуса.



Черт. 55.

921. В конусе длина окружности основания равна C и угол между образующей и высотой равен α. Найти длину линии касания боковой поверхности конуса с поверхностью шара, вписанного в этот конус.

922. Треугольник, стороны которого относятся как $13:14:15$, вращается вокруг средней по величине стороны. Доказать, что в полученное тело вращения можно вписать шар. Найти отношение поверхности этого шара к поверхности тела вращения.

923. Доказать, что около всякого усеченного конуса можно описать шар.

924. Доказать, что в усеченный конус можно вписать шар в том и только в том случае, если образующая конуса равна сумме радиусов оснований.

925. Образующая усеченного конуса равна 4 *см*, радиусы оснований равны 1 *см* и 3 *см*. Найти радиус шара, описанного около этого конуса.

926. В шар радиуса R вписан усеченный конус, основания которого отсекают от поверхности шара два сегмента с дугами в осевом сечении соответственно α и β. Найти боковую поверхность усеченного конуса.

Вычислить при $\alpha=45°46'$, $\beta=135°37'$, $R=15{,}18$ *см*.

927. В усеченный конус вписан шар радиуса R. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол α. Найти боковую поверхность усеченного конуса.

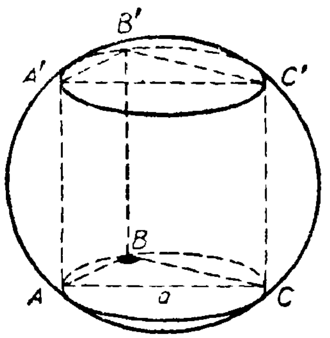
928. В усеченный конус, радиусы оснований которого r_1 и r_2 $(r_1>r_2)$, вписан шар. Найти: 1) поверхность шара, 2) угол между образующей конуса и плоскостью основания.

929. Может ли боковая грань призмы, вписанной в шар, быть косоугольным параллелограммом?

930. Для того чтобы около призмы можно было описать шар, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямая и чтобы около ее основания можно было описать окружность. Доказать.

931. (Устно) Измерения прямоугольного параллелепипеда: a, b, c. Найти радиус описанного шара.

932. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна a. Радиус шара, описанного около призмы, равен R (черт. 56). Найти высоту призмы.



Черт. 56

933. В призму вписан шар. Доказать, что радиусы шара, проведенные в точки касания его с боковыми гранями призмы, лежат в плоскости, перпендикулярной боковому ребру.

934. Для того чтобы в призму можно было вписать шар необходимо и достаточно, чтобы в перпендикулярное сечение призмы можно было вписать окружность и чтобы высота призмы равнялась диаметру этой окружности. Доказать.

935. (Устно.) Найти радиус шара, вписанного в правильную шестиугольную призму, сторона основания которой равна 8 *см*.

936. В призму вписан шар радиуса R. Найти площадь перпендикулярного сечения призмы, если боковая поверхность призмы равна S, а боковое ребро равно a.

937. Для того чтобы около пирамиды можно было описать шар, необходимо и достаточно, чтобы около ее основания можно было описать окружность. Доказать.

938. (Устно.) Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h, диагональное сечение — прямоугольный треугольник. Найти поверхность шара, описанного около этой пирамиды.

939. Вычислить радиус шара, описанного около правильной n-угольной пирамиды, если сторона основания равна a, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

940. Найти радиус шара, описанного около треугольной пирамиды, в которой стороны основания равны соответственно a, b, c и каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

Вычислить при $a=13$ *см*, $b=14$ *см*, $c=15$ *см*, $\alpha=24°18'$.

941. Основанием пирамиды служит прямоугольник, диагональ которого равна d. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания; их общее ребро равно a. Найти поверхность шара, описанного около этой пирамиды.

942. В треугольной пирамиде два боковых ребра образуют с плоскостью основания угол β; третье ребро перпендикулярно к ней и равно b; угол основания при этом ребре равен α. Найти радиус шара, описанного около этой пирамиды.

943. Для того чтобы в пирамиду можно было вписать шар, достаточно, чтобы двугранные углы при основании пирамиды были равны между собой. Доказать. Является ли это условие необходимым?

944. Если вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание, то центр шара, вписанного в эту пирамиду, лежит на ее высоте, а точки касания шара с боковыми гранями лежат на высотах боковых граней, проведенных из вершины пирамиды. Доказать.

945. (Устно.) Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h; угол между противоположными боковыми гранями равен 60°. Найти радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

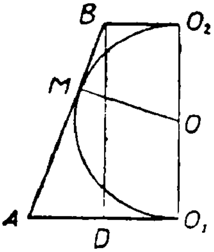
946. Найти радиус шара, вписанного в правильную n-угольную пирамиду, сторона основания которой a, а двугранный угол при основании равен φ.

947. Высота пирамиды равна 12 *см*; вершина ее удалена от каждого ребра основания на 13 *см*. Вычислить радиус вписанного шара.

948. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α; каждый двугранный угол при основании равен φ. Найти радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

949. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, каждая из боковых сторон которого равна b. Боковые грани, соответствующие равным сторонам основания, перпендикулярны к плоскости основания и образуют между собой угол α; угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания равен также α. Найти радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

950. Доказать, что около усеченной пирамиды можно описать шар, если около оснований пирамиды можно описать окружности, центры которых лежат на одном перпендикуляре к основаниям. Сформулировать и доказать обратную теорему.



Черт. 57.

951. В правильную усеченную пирамиду вписан шар (черт. 57). Радиусы окружностей, вписанных в основания пирамиды, соответственно равны r и r_1. Доказать, что: 1) радиус шара $R=\sqrt{rr_1}$; 2) апофема пирамиды $k=r+r_1$.

952. В правильную усеченную треугольную пирамиду вписан шар. Найти радиус шара, если стороны оснований пирамиды равны 3 *см* и 4 *см*.

§ 39. Повторение

953. Дано изображение окружности в параллельной проекции. Построить изображение правильного треугольника, вписанного в эту окружность, и правильного треугольника, описанного около нее.

954. Крыша силосной башни имеет форму конуса, высота которого 2,0 *м* и диаметр основания 6,0 *м*. Сколько листов кровельного железа потребовалось для покрытия крыши, если лист имеет стандартные размеры 0,7 *м* $\times$ 1,4 *м*, а на швы и отходы пошло около 10% сверх расчетной площади.

955. Даны окружность и точка вне ее плоскости. Где должна лежать точка, чтобы через нее и окружность можно было провести поверхность: 1) цилиндра вращения, 2) конуса вращения, 3) шара?

956. Из вершины прямого угла как из центра радиусом, равным r, описана дуга. Точки пересечения этой дуги со сторонами угла соединены отрезком прямой. Найти поверхность тела, полученного от вращения образовавшегося сегмента около оси, совпадающей с одной из сторон прямого угла.

957. В правильной треугольной призме две вершины верхнего основания соединены с серединами противоположных сторон нижнего основания. Угол между полученными прямыми, обращенный к плоскости основания, равен α. Сторона основания равна a. Найти боковую поверхность призмы.

958. Две правильные треугольные пирамиды имеют общее основание, сторона которого a. Около одной из этих пирамид, имеющей боковое ребро, равное b, описан шар. Найти боковое ребро другой пирамиды, если ее вершина лежит в центре этого шара.

959. Перпендикулярное сечение призматической поверхности есть квадрат. Доказать, что всякое сечение этой поверхности плоскостью, параллельной диагонали квадрата, есть ромб.

960. В конусе, высота которого h, через две образующие, составляющие угол β, проведена плоскость под углом α к основанию конуса. Найти площадь сечения.

Вычислить при $h=24$ *дм*, $\beta=34°19'$, $\alpha=52°25'$.

961. Доказать, что сечение правильного октаэдра плоскостью, проходящей через его центр и параллельной одной из его граней, есть правильный шестиугольник.

962. Прямоугольник вращается около оси, проходящей через его вершину, перпендикулярно к его диагонали. Найти поверхность тела вращения, если угол между диагоналями прямоугольника α. Бо́льшая сторона прямоугольника равна a.

963. Отрезки, соединяющие вершины треугольной пирамиды с центрами тяжести противолежащих граней, пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 1 : 3, считая от грани. Доказать.

964. Три взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через центр шара, рассекают шар на части, полная поверхность каждой из которых равна $\frac{5}{4}\pi R^2$. Доказать.

965. Дан правильный тетраэдр $SABC$. На грани ACS задана точка D. Опустить перпендикуляр из точки D на грань SBC. (Построение выполнить на проекционном чертеже.)

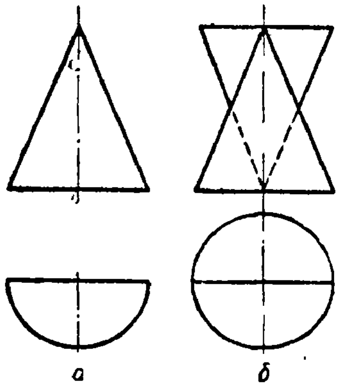
966. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. Найти двугранный угол при боковом ребре.

967. Ребро правильного тетраэдра равно a. Найти радиусы шаров, описанного около этого тетраэдра и вписанного в него.

968. Угол при вершине осевого сечения конуса равен α. Через вершину конуса проведена плоскость под углом β к плоскости основания. Образовавшееся сечение конуса удалено от центра основания на расстояние, равное a. Найти полную поверхность конуса.

969. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, площадь которого S и острый угол α; высота пирамиды проходит через вершину угла α, одна из боковых граней пирамиды наклонена к основанию под углом β. Найти полную поверхность пирамиды.

970. Радиус основания конуса равен r, образующая составляет с плоскостью основания угол α. Найти расстояние от плоскости основания конуса до центра шара, описанного около этого конуса.



Черт 58

971. На чертеже 58, *а* и *б* изображены две модели в одинаковых масштабах и проекциях (во фронтальной и горизонтальной). Вычислить площади полных поверхностей этих моделей.

972. Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α. Призма пересечена плоскостью так, что в сечении получился квадрат с вершинами на боковых ребрах призмы. Найти угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы.

973. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены три сечения. Одно из них проходит через вершины A, D_1 и C, второе — через вершины A_1, B и C_1, третье — через середины ребер AA_1, A_1D_1 и D_1C_1. Найти отношение периметров этих сечений и отношение их площадей.

974. В правильной четырехугольной призме проведены два параллельных сечения: одно проходит через диагональ основания призмы, параллельно ее диагонали, другое — через середины двух смежных сторон основания. Площадь первого сечения Q. Найти площадь второго сечения. (Два случая.)

975. 1) Построить развертку и изготовить модель четырехугольной пирамиды, две противоположные боковые грани которой перпендикулярны к плоскости основания, высота равна 20 *см*, а основанием служит равнобедренная трапеция, боковая сторона и одно из оснований которой равны по 10 *см*, а острый угол 60°.

2) В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SA перпендикулярно к плоскости основания и $SA=BC$. В пирамиде проведено сечение параллельно SA и BC. Определить вид сечения и доказать, что периметр сечения при различных положениях его остается постоянным.

976. Основанием призмы служит равнобедренный прямоугольный треугольник. Проекцией бокового ребра, проходящего через вершину острого угла основания, на плоскость основания служит катет основания. Найти боковую поверхность призмы, если боковое ребро равно l и составляет с плоскостью основания угол в 45°.

977. В основании пирамиды лежит квадрат со стороной a Две грани составляют с плоскостью основания угол α, две другие — угол β $(\alpha \neq \beta)$. Найти боковую поверхность пирамиды.

978. Найти угол в осевом сечении сферического сектора, если плоскость, проведенная через середину среднего радиуса перпендикулярно к нему, делит коническую его поверхность пополам.

979. Каждый из двугранных углов трехгранного угла равен α; внутри его дана точка на расстоянии d от каждого ребра Найти расстояние этой точки от каждой грани.

XI КЛАСС

§ 40. Объем призмы

980. (Устно.) 1) Объем куба 27 $м^3$. Найти его поверхность.

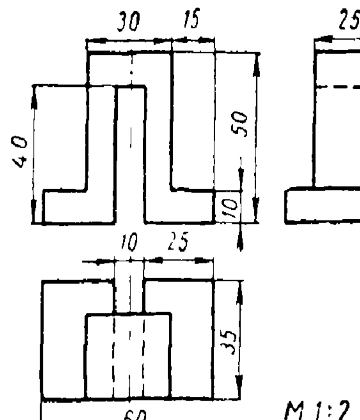
2) Поверхность куба 150 $м^2$. Найти его объем.

3) Найти ребро такого куба, у которого полная поверхность и объем численно равны.

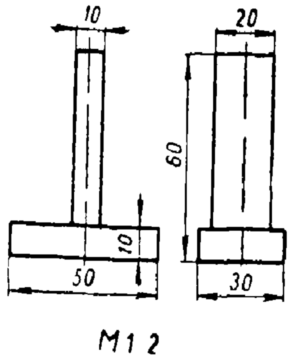
981. (Устно.) Во сколько раз увеличится объем куба при увеличении его ребра в b раз?

982. Три латунных куба с ребрами 30 *мм*, 40 *мм* и 50 *мм* переплавлены в один куб. Вычислить (при помощи таблиц кубов): 1) длину ребра этого куба, если не учитывать потерю металла при переплавке; 2) длину ребра куба, учитывая потерю 5% металла при переплавке.

983. Вычислить вес детали по размерам, данным на чертеже 59 (во фронтальной, горизонтальной и профильной проекциях), если удельный вес $\approx 7{,}8 \frac{Г}{см^3}$.



Черт. 59



Черт 60

984. Вычислить объем детали (стойки) по размерам, данным на чертеже 60 (во фронтальной и профильной проекциях).

985. Плот сколочен из 42 балок прямоугольного сечения, каждая из которых имеет длину 10 *м*, ширину 20 *см* и толщину 15 *см*. Удельный вес дерева 0,6. Можно ли на этом плоту переправить через реку грузовую автомашину весом 5 *Т*? Изменится ли грузоподъемность плота, если ширина каждой балки будет уменьшена на n *см*, а ее толщина одновременно увеличена на столько же сантиметров?

986. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2 *м*, 3 *м* и 6 *м*. Вычислить ребро такого куба, чтобы объемы этих многогранников относились между собой, как их поверхности

987. Объем прямоугольного параллелепипеда равен v. Найти диагональ параллелепипеда, если она составляет с одной из боковых граней угол α, а с другой — угол β.

988. В прямом параллелепипеде стороны основания равны $2\sqrt{2}$ и 5 и образуют угол в 45°. Меньшая диагональ параллелепипеда равна 7. Найти его объем.

989. В прямом параллелепипеде с основанием $ABCD$ ребро AB равно 50 *см*; перпендикуляр B_1E, опущенный из вершины B_1 на ребро AD, равен 41 *см* и делит AD на отрезки $AE=30$ *см* и $ED=18$ *см*. Найти объем параллелепипеда.

990. (Устно.) По стороне основания a и боковому ребру b найти объем правильной призмы: 1) треугольной, 2) четырехугольной, 3) шестиугольной.

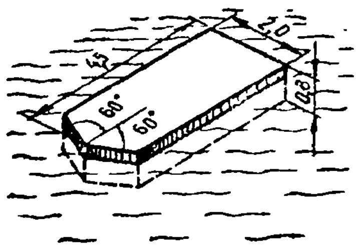
991. Из листа латуни толщиной 5,0 *мм* требуется отштамповать пластинки весом около 100 *Г* каждая (удельный вес латуни 8,5). Вычислить длину стороны основания пластинки, если оно будет: 1) квадратом, 2) правильным треугольником, 3) правильным шестиугольником.

992. Найти объем и боковую поверхность правильной треугольной призмы, если боковое ребро ее равно a и площадь сечения, проходящего через боковое ребро и середину противолежащей стороны основания, равна Q.

993. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник с основанием a и углом α при основании. Боковая поверхность призмы равна сумме площадей оснований. Найти объем призмы. Вычислить при $a=25{,}75$ *дм*; $\alpha=59°24'$.

994. В правильной треугольной призме, высота которой 30 *см* и сторона основания 18 *см*, проведены три сечения, параллельные боковым граням. Каждое из сечений удалено от соответствующей грани на расстояние, вдвое большее, чем от противолежащего ей ребра. Вычислить объем призмы, ограниченной сечениями.

995. Понтон весом около 0,8 *Т* имеет форму прямой пятиугольной призмы высотой 0,8 *м*, основание которой представляет две прямоугольные трапеции, сложенные большими основаниями длиной 4,5 *м*, причем каждая из этих трапеций имеет высоту 1 *м* и острый угол в 60°. Вычислить осадку этого пон-



Черт. 61.

тона без нагрузки и его предельную грузоподъемность при высоте бортов над ватерлинией 0,2 *м* (черт. 61)[1].

996. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция. В эту призму вписан куб так, что его вершины расположены в серединах сторон оснований призмы. Доказать, что объем призмы равен удвоенному объему куба.

997. Основанием прямой призмы служит равнобочная трапеция. Боковая сторона ее, равная меньшему основанию, равна a. Один из углов трапеции равен 60°. Через боковое ребро и диагональ основания проведена плоскость. Площадь четырехугольника, полученного в сечении, равна P. Найти полную поверхность и объем призмы.

998. Доказать, что всякая плоскость, проходящая через точку пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда и параллельная стороне основания, делит параллелепипед на равновеликие части.

999. Объем прямой призмы, описанной около шара, равен V, периметр основания P. Найти радиус шара.

1000. Основанием прямой призмы, описанной около шара, служит прямоугольный треугольник, в котором перпендикуляр, проведенный из вершины прямого угла на гипотенузу, равен h и составляет с одним из катетов угол α. Найти объем призмы. Вычислить при $h=1{,}725$ *м*, $\alpha=20°$.

1001. Диагонали прямой четырехугольной призмы образуют с основанием углы α и β. Угол между диагоналями основания γ; высота призмы равна h. Найти объем призмы.

1002. Основанием прямой призмы служит трапеция. Через параллельные стороны оснований призмы проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол α. Каждая из диагоналей сечения равна d, а угол между ними, обращенный к основаниям, равен β. Найти объем призмы.

1003. Провести плоскость, параллельную одной из граней параллелепипеда, так, чтобы параллелепипед разделился на части, объемы которых относятся как $m:n$.

1004. Основанием призмы служит равносторонний треугольник со стороной, равной 6. Боковое ребро наклонено к плоско-

[1] Понтонами называются плоскодонные лодки с высокими вертикальными бортами, которые используются для плавучих опор мостов или паромов. Высота подводной части понтона называется его *осадкой*. *Линия на борту понтона, до которой он углубляется в воду при наибольшей нагрузке, т. е. при максимальной допустимой осадке, называется ватерлинией.*

сти основания под углом 60° Диагонали одной из боковых граней 12 и $8\sqrt{2}$. Вычислить объем призмы.

1005. Основанием параллелепипеда служит ромб со стороной a и острым углом α. Боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом β, а диагональ одной из боковых граней перпендикулярна к плоскости основания. Найти объем параллелепипеда.

1006. Основанием параллелепипеда служит квадрат. Одна из боковых граней — ромб с диагоналями 6 *дм* и 8 *дм*. Плоскость этой грани перпендикулярна к плоскости основания. Найти объем и полную поверхность параллелепипеда.

1007. Основанием параллелепипеда служит квадрат, сторона которого равна a. Одно из боковых ребер образует с каждой из прилежащих сторон основания угол в 60° и равно $2a$. Найти объем параллелепипеда.

1008. Грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной a и острым углом α. Найти объем параллелепипеда.

1009. Основанием параллелепипеда служит прямоугольник со сторонами a и b. Одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания угол α и равно c. Найти объем параллелепипеда, боковую поверхность и угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

1010. Основанием наклонной призмы служит четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны. Диагональ BD равна 16 *дм* и перпендикулярна к боковому ребру. Площадь диагонального сечения AA_1C_1C равна 250 *дм*^{2}. Найти объем призмы.

1011. Одна из боковых граней треугольной призмы перпендикулярна к основанию, а другая имеет вид прямоугольника. Высота призмы h, наибольшая из сторон основания b, а две другие стороны относятся как $2:1$. Найти объем призмы.

1012. (Устно.) Площадь основания наклонной призмы Q, высота H, боковое ребро a. Найти площадь сечения, перпендикулярного боковому ребру.

1013. (Устно.) В треугольной призме проведена плоскость через боковое ребро и медиану перпендикулярного сечения. Найти отношение объемов двух получившихся призм.

1014. Боковое ребро призмы равно 3 *дм*, стороны перпендикулярного сечения равны 9 *дм*, 10 *дм* и 17 *дм*. Найти объемы двух тел, на которые рассекается призма плоскостью, делящей пополам меньший из двугранных углов при боковых ребрах призмы.

1015. Доказать, что объем треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние ее от противоположного ребра.

1016. (Устно.) Боковое ребро наклонной треугольной призмы равно a и отстоит от противолежащей боковой грани на расстоянии b. Расстояние между другими боковыми ребрами равно c. Найти объем призмы.

1017. Объем призмы, основанием которой является трапеция, равен произведению полусуммы площадей параллельных боковых граней на расстояние между ними. Доказать.

1018. На трех данных параллельных прямых, не лежащих в одной плоскости, отложены три равных между собой отрезка Доказать, что объем призмы, боковыми ребрами которой являются эти отрезки, не зависит от положения отрезков на данных прямых.

1019. В наклонном параллелепипеде боковое ребро равно a. Две боковые грани, площади которых Q_1 и Q_2, образуют между собой двугранный угол α. Найти объем параллелепипеда.

1020. Плоскости двух боковых граней параллелепипеда образуют угол в 135°. Площадь меньшей из этих граней $50\sqrt{2}$ а боковое ребро равно 10. Расстояние общего ребра этих граней до общего ребра двух других боковых граней — 13. Вычислить объем параллелепипеда.

§ 41. Объем цилиндра

1021. Прямоугольный лист жести, имеющий размеры 0,7 *м*$\times$1,4 *м*, можно согнуть в трубку двояким образом: в первом случае длина трубки будет 1,4 *м*, во втором — 0,7 *м*. Найти отношение объемов этих трубок.

1022. С какой средней скоростью движется нефть по трубопроводу, диаметр которого 45 *см*, если в течение часа протекает около 800 *м*^{3} нефти?

1023. Образующая одного цилиндра в 4 раза больше образующей другого. Найти отношение боковых поверхностей цилиндров, если объемы их равны.

1024. Радиус основания одного цилиндра вдвое больше радиуса основания другого. Найти отношение их объемов, если их боковые поверхности равновелики.

1025. Прямоугольник, отношение сторон которого равно 3 : 5, вращается вокруг меньшей стороны. Объем тела, полученного от вращения, равен 75 *л*. Найти стороны прямоугольника.

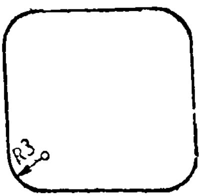
1026. Через хорду основания цилиндра, стягивающую дугу, длина которой равна радиусу, проведено сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра. Радиус основания цилиндра R. Площадь построенного сечения S. Найти объем цилиндра.

1027. Стеклянная цилиндрическая трубка весит 80 *Г*, если она пуста, и 140 *Г*, если в нее введен столбик ртути длиной 40 *мм*. Удельный вес ртути 13,6. Вычислить внутренний диаметр трубки.

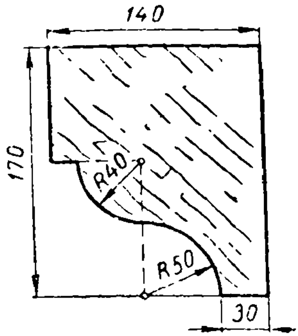
1028. Развертка боковой поверхности цилиндра представляет собой прямоугольник, диагонали которого пересекаются под углом α. Найти объем цилиндра, если диагональ прямоугольника равна d. Вычислить при $\alpha=35^\circ$ и $d=5$.

1029. Радиус основания цилиндра R, высота H. На расстоянии $\frac{R}{2}$ от оси цилиндра проведена параллельно ей плоскость, делящая цилиндр на две части. Найти объем каждой части.

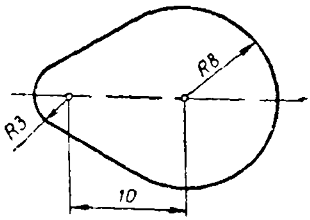
1030. В каждый из углов квадрата со стороной 16 *см* вписана дуга окружности радиуса 3 *см*. Фигура (черт. 62), обра-



Черт. 62.



Черт. 63



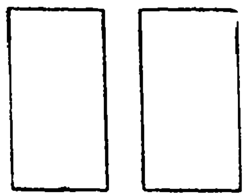
Черт. 64.

зованная дугами этих окружностей и заключенными между ними отрезками сторон квадрата, есть основание прямого цилиндра. Найти боковую поверхность и объем этого цилиндра, если его высота равна 5 *см*.

1031. Сколько весит погонный метр карниза, поперечный профиль и размеры которого (в миллиметрах) даны на чертеже 63, если удельный вес материала 2,2?

1032. К двум окружностям с радиусами 8 *см* и 3 *см* и расстоянием между центрами 10 *см* проведены две общие касательные. Полученная таким образом фигура (черт. 64) есть основание прямого цилиндра. Вычислить полную поверхность и объем цилиндра, если высота его 6 *см*.

1033. По двум данным проекциям (фронтальной и профильной) начертить горизонтальные проекции геометрических тел, объемы которых относятся как $2:4:\pi$ (черт. 65).



Черт 65.

1034. Найти объем цилиндра, если объем правильной четырехугольной призмы, вписанной в этот цилиндр, равен V.

1035. Найти объем цилиндра, описанного около шара радиуса R.

1036. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, бо́льшая сторона основания которого равна a; диагональ параллелепипеда составляет с основанием угол α, а с большей боковой гранью — угол β. Найти боковую поверхность и объем цилиндра.

1037. Около правильного октаэдра описан цилиндр. Две вершины октаэдра лежат в центрах оснований цилиндра, а остальные четыре — на боковой поверхности его. Найти объем цилиндра, если ребро октаэдра равно a.

1038. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b и составляет с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан равносторонний цилиндр так, что его основание лежит в плоскости основания пирамиды. Найти объем цилиндра.

1039. Основанием пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC, в котором гипотенуза $AB=a$ и $\angle A=\alpha$. Боковые грани, проходящие через катеты, перпендикулярны к плоскости основания. Эта пирамида вписана в цилиндр так, что ее основание вписано в основание цилиндра, а вершина S находится на другом основании цилиндра. Найти объем цилиндра, если угол между его осевым сечением, проходящим через точку A, и гранью ASB пирамиды равен φ.

1040. Дан куб с ребром a. Найти объем прямого кругового цилиндра, центры оснований которого совпадают с двумя противоположными вершинами данного куба, а боковая поверхность проходит через все остальные вершины куба.

§ 42. Объем пирамиды

1041. Найти геометрическое место вершин равновеликих пирамид, имеющих общее основание.

1042. Построить треугольную пирамиду, равновеликую данной, имеющую общее с данной пирамидой основание и равные между собой боковые ребра.

1043. Построить пирамиду, равновеликую данной, у которой боковых граней на одну меньше, чем у данной.

1044. В треугольной пирамиде провести сечение через боковое ребро так, чтобы плоскость сечения разделила пирамиду на две части, объемы которых относятся как $m:n$.

1045. (Устно.) Диагональное сечение правильной четырехугольной пирамиды — равносторонний треугольник со стороной a. Найти объем пирамиды.

1046. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Угол между высотой пирамиды и боковой гранью равен α. Найти объем пирамиды.

1047. Все боковые грани четырехугольной пирамиды — правильные треугольники. Расстояние от центра боковой грани до плоскости основания равно b. Найти объем пирамиды.

1048. В правильной четырехугольной пирамиде противоположные боковые грани взаимно перпендикулярны. Найти объем пирамиды, если сторона основания равна a.

1049. Равновеликие деревянные модели правильной пирамиды и куба с ребром a, имеющие равные основания, плавают в воде. Удельный вес дерева, из которого изготовлены модели, равен 0,7. Чему равна та часть высоты каждой из этих моделей, которая выступает над поверхностью воды?

1050. (Устно.) Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и равны a, b и c. Найти объем пирамиды.

1051. Куб, ребро которого равно a, срезан по углам плоскостями, проведенными через середины каждых трех сходящихся ребер. В полученном многограннике указать число и вид граней, число и длину ребер, число вершин. Найти поверхность и объем многогранника.

1052. Одно ребро треугольной пирамиды равно 4 *дм*, каждое из остальных равно 3 *дм*. Найти объем пирамиды.

1053. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, катеты которого равны a и $a\sqrt{3}$. Каждое из боковых ребер образует с плоскостью основания угол в 30°. Найти объем пирамиды.

1054. В основании пирамиды лежит треугольник с углами α и β. Высота пирамиды h, боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ. Найти объем пирамиды. Вычислить при $h = 10{,}3$ *см*, $\alpha = 37°28'$, $\beta = 54°19'$, $\varphi = 65°20'$.

1055. Основанием пирамиды служит трапеция, диагональ которой составляет с боковой стороной прямой угол; основания трапеции равны a и $2a$. Каждое из боковых ребер пирамиды равно $3a$. Найти объем пирамиды.

1056. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 *см*, а боковая сторона 10 *см*. Каждый из двугранных углов при основании равен 45°. Найти объем пирамиды.

1057. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого a, острый угол α. Каждый из двугранных углов при основании равен β. Найти объем и боковую поверхность пирамиды.

1058. Основанием пирамиды служит ромб, сторона которого 25, а одна из диагоналей 30. Вершина пирамиды удалена от каждой из сторон основания на $12\sqrt{2}$. Найти объем пирамиды.

1059. Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция, параллельные стороны которой равны a и b. Каждый из двугранных углов при основании пирамиды равен 45°. Найти объем пирамиды.

1060. Основанием пирамиды служит ромб, одна из диагоналей которого равна стороне ромба. Высота пирамиды проходит через вершину острого угла ромба и равна H. Две грани образуют с плоскостью основания углы в 45°. Найти объем пирамиды.

1061. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 26 *см*, 28 *см* и 30 *см*. Боковое ребро, противолежащее средней по величине стороне основания, перпендикулярно к основанию и образует с боковой гранью угол в 45°. Найти объем пирамиды.

1062. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого a, острый угол α. Боковая грань, проходящая через гипотенузу, перпендикулярна к плоскости основания, а каждая из других боковых граней образует с плоскостью основания угол β. Найти объем пирамиды.

1063. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a; все диагональные сечения равновелики. Найти объем пирамиды.

1064. В пирамиде $MABC$ ребра MC и AB взаимно перпендикулярны; вершины M и C одинаково удалены от ребра AB; двугранный угол при ребре AB равен 60°. Найти объем пирамиды, если $AB=a$ и $MC=l$.

1065. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Двугранный угол при боковом ребре равен 90°. Найти боковую поверхность и объем пирамиды.

1066. Основанием пирамиды служит правильный треугольник. Два боковых ребра, каждое длиной b, наклонены к основанию под углом 30°. Грань, содержащая эти ребра, наклонена к основанию под углом 45°. Найти объем пирамиды.

1067. Основанием пирамиды служит квадрат. Одна из боковых граней наклонена к основанию под углом 60°, а два боковых ребра, лежащие в этой грани, наклонены к основанию под углом 45°. Высота пирамиды H. Найти объем пирамиды.

1068. Основанием пирамиды служит квадрат. Два боковых ребра равны между собой, а грань, содержащая эти ребра, образует с основанием угол $\alpha > 90°$. Противоположная ей грань образует с основанием угол β. Высота пирамиды H. Найти объем пирамиды и углы, образованные двумя другими боковыми гранями с основанием.

1069. В правильной треугольной пирамиде сторона основания a, боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом φ. Через сторону основания проведена плоскость под углом β к плоскости основания. Найти объем отсеченной части, прилежащей к основанию пирамиды.

Вычислить при $a=30{,}7$ *м*, $\varphi=70°45'$, $\beta=31°12'$.

1070. Правильная четырехугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через сторону основания перпендикулярно противолежащей боковой грани. Сторона основания равна a; боковые грани образуют с плоскостью основания угол α. Найти объем отсеченной пирамиды.

1071. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с катетами a и b. Высота пирамиды равна h и проходит через вершину прямого угла основания. Через середину высоты пирамиды проведены две плоскости: одна — параллельно основанию, а другая — параллельно боковой грани. Найти объем каждого из трех тел, на которые рассекают пирамиду проведенные плоскости.

1072. Через середину одного из боковых ребер треугольной пирамиды проведены две плоскости: одна — параллельно основанию, другая — параллельно двум непересекающимся ребрам. Найти объемы трех многогранников, на которые рассекается данная пирамида этими плоскостями, если ее объем равен V.

1073. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом α между диагоналями, а боковые ребра образуют с плоскостью основания угол φ. Найти объем этой пирамиды, если радиус описанного около нее шара равен R.

1074. Даны три параллельные прямые, не лежащие в одной плоскости. На одной из них отложен отрезок AB, на двух других взяты произвольные точки C и D. Доказать, что объем пирамиды $ABCD$ остается постоянным при любом положении точек C и D.

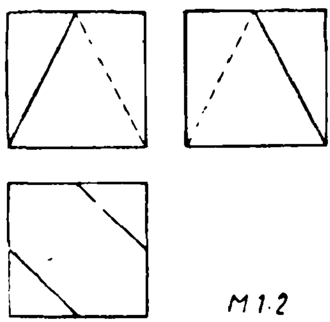
1075*. Боковые ребра треугольной пирамиды равны a, b, c. От этой пирамиды плоскостью, не параллельной основанию, отсечена верхняя часть так, что боковые ребра отсеченной пирамиды равны m, n, l. Доказать, что отношение объемов отсеченной пирамиды и данной равно $\frac{mnl}{abc}$.

1076. Вычислить площадь полной поверхности и объем многогранника, изображенного в уменьшенном виде (M 1 : 2) в прямоугольных проекциях (черт. 66).

1077. Найти объемы правильных гексаэдра, тетраэдра и октаэдра, если ребро каждого из них равно a.

1078. Найти отношение объема куба к объему правильного тетраэдра, вершинами которого служат четыре вершины куба.

1079. Найти отношение объема куба к объему правильного октаэдра, вершинами которого служат центры граней куба.



Черт. 66.

§ 43. Объем конуса

1080. Угол при вершине осевого сечения конуса, высота которого равна 3 *дм*, равен 120°. Вычислить объем конуса.

1081. (Устно.) Найти отношение объема цилиндра к объему конуса, если их основания и высоты соответственно равны.

1082. (Устно.) Как изменится объем конуса, если: 1) радиус основания увеличить в 2 раза, высоту уменьшить в 4 раза; 2) если радиус основания и высоту уменьшить в 2 раза?

1083. Треугольник, площадь которого Q, вращается вокруг стороны, равной a. Найти объем тела вращения.

1084. В прямоугольной трапеции основания a и b $(a<b)$. Найти отношение объемов тел, образованных вращением трапеции вокруг оснований.

1085. Площадь осевого сечения конуса равна S, а угол при вершине равен α. Найти полную поверхность и объем конуса.

1086. Треугольник вращается вокруг оси, проведенной через вершину параллельно основанию; найти объем тела вращения, если площадь треугольника равна Q, а углы при основании α и β.

1087. (Устно.) Дана правильная n-угольная пирамида. Один конус описан около нее, а другой вписан в нее. Найти отношение их объемов при: 1) $n=3$; 2) $n=4$.

1088. В конус, высота которого равна 1 *м*, вписан цилиндр. Найти высоту цилиндра, если: 1) объем цилиндра равен объему расположенного над ним отсеченного конуса; 2) объем цилиндра втрое больше объема отсеченного конуса.

1089. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник. Грань, проходящая через гипотенузу,— правильный треугольник со стороной a. Найти объем конуса, описанного около этой пирамиды.

1090. Основанием пирамиды служит треугольник, два угла которого α и β, а высота, проведенная из вершины третьего угла, равна h. Каждое боковое ребро этой пирамиды наклонено к плоскости основания под углом γ. Найти объем конуса, описанного около этой пирамиды. Вычислить при $\alpha=32°16'$, $\beta=58°19'$, $h=8{,}25$, $\gamma=35°30'$.

1091. В конус вписан шар радиуса r. Радиус, проведенный в точку касания, образует с высотой конуса угол α. Найти объем конуса.

1092. Высота данного конуса разделена на три равные части; точки деления служат вершинами двух конических поверхностей, образующие которых параллельны образующим данного конуса и пересекают его основание. В каком отношении делится объем данного конуса?

1093. Высота конуса H. Две взаимно перпендикулярные образующие делят окружность основания в отношении $1:2$. Найти объем конуса.

1094. Через вершину конуса проведена плоскость под углом α к его высоте, пересекающая основание по хорде, которая видна из центра основания конуса под углом β. Найти объем конуса, зная, что расстояние плоскости сечения от центра основания равно k.

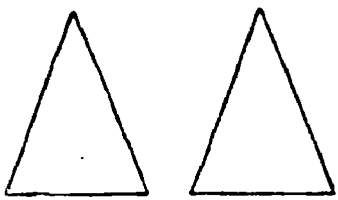
1095. Боковая поверхность конуса, развернутая на плоскости, образует сектор в $120°$; радиус этого сектора равен l. Найти объем данного конуса.

1096. Высота конуса 12, а его объем 324. Вычислить угол сектора развертки боковой поверхности этого конуса.

1097. Объем конуса равен V, угол между образующей и высотой конуса равен α. Найти полную поверхность конуса.

1098. Найти отношение объема конуса к объему описанной около него пирамиды, если основанием пирамиды служит прямоугольная трапеция с острым углом в $30°$.

1099. По двум данным проекциям (фронтальной и профильной) начертить горизонтальные проекции геометрических тел, объемы которых относятся как $2:4:\pi$ (черт. 67).



Черт. 67.

1100. В конус, объем которого V, вписан цилиндр. Вычислить объем цилиндра в следующих случаях:

1) отношение диаметров оснований конуса и цилиндра равно $\frac{10}{9}$;

2) отношение высот конуса и цилиндра равно $\frac{10}{9}$.

1101. Если два равных конуса имеют общую высоту и параллельные основания, то объем их общей части составляет $\frac{1}{4}$ объема каждого из них. Доказать.

1102. Конус с высотой, равной 7, пересечен цилиндрической поверхностью, у которой ось совпадает с осью конуса, а диаметр равен 4. Объем части конуса, заключенной внутри цилиндрической поверхности, равен 20π. Вычислить диаметр основания конуса.

1103. Два конуса расположены так, что основания их параллельны и вершина каждого из них расположена в центре основания другого. Найти объем общей части конусов, если образующая одного из них равна a и составляет с высотой угол β, а наибольший угол между образующими другого конуса α.

1104. Треугольник, углы при основании которого α и β ($\alpha>\beta$), биссектрисой l угла при вершине делится на два треугольника, которые, вращаясь вокруг данной биссектрисы, образуют два тела вращения. Найти объем их общей части. Вычислить при $l=24{,}73$ *м*, $\alpha=64°19'$, $\beta=40°02'$.

§ 44. Объем усеченной пирамиды

1105. Показать, что формулы объема призмы и пирамиды являются частными случаями формулы объема усеченной пирамиды.

1106. По боковому ребру l и сторонам оснований a и b найти объем правильной усеченной пирамиды: треугольной, четырехугольной, шестиугольной.

1107. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны a и b ($a>b$). Найти объем этой пирамиды, если острый угол ее боковой грани равен α.

1108. Гранитный обелиск имеет вид правильной усеченной четырехугольной пирамиды, верхнее основание которой служит основанием полной пирамиды. Высота усеченной пирамиды 6 *м*, сторона нижнего основания 1 *м*, верхнего — 0,8 *м*. Высота пирамиды 2 *м*. Удельный вес гранита 2,6. Вычислить давление, оказываемое обелиском на фундамент.

1109. Высота усеченной пирамиды равна 4; основания пирамиды — равнобедренные треугольники. Неравные стороны одного треугольника 6,1 и 2,2, меньшая сторона другого 1,1. Вычислить объем пирамиды.

1110. Боковая грань правильной треугольной усеченной пирамиды образует с основаниями двугранные углы, разность которых равна 90°. Стороны оснований равны a и b ($a>b$). Найти объем пирамиды.

1111. Каждое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно a. Плоскость, параллельная плоскости основания данной пирамиды, отсекает от нее усеченную пирамиду. Найти объем усеченной пирамиды, если сторона сечения равна b.

1112. Трехгранный угол, в котором все плоские углы прямые, пересечен двумя параллельными плоскостями так, что в сечениях получились равносторонние треугольники, стороны которых 6 *дм* и 10 *дм*. Вычислить объем образовавшейся усеченной пирамиды.

1113. Стороны меньшего основания треугольной усеченной пирамиды 7 *см*, 5 *см* и 3 *см*. Каждое из боковых ребер наклонено к плоскости основания под углом 45°. Высота усеченной пирамиды в $1\frac{1}{2}$ раза меньше высоты соответствующей полной пирамиды. Вычислить объем усеченной пирамиды.

1114. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами a и b. Ребро, проходящее через вершину прямого угла, равно c и перпендикулярно к плоскости основания. Пирамида рассечена плоскостью параллельно основанию; периметр сечения вдвое меньше периметра основания. Найти объем полученной усеченной пирамиды.

1115. Большее основание усеченной пирамиды представляет собой прямоугольный треугольник с катетами a и b. Каждое боковое ребро наклонено к плоскости этого основания под углом α. Периметр меньшего основания в n раз меньше периметра большего основания. Найти объем пирамиды. Вычислить при $a=6$ *см*, $b=8$ *см*, $\alpha=55°17'$, $n=2$.

1116. Из правильной четырехугольной усеченной пирамиды вырезана часть ее в виде двух пирамид, имеющих общую вершину в точке пересечения диагоналей, а основаниями — ее основания. Найти объем оставшейся части усеченной пирамиды, если ее высота равна h, а стороны оснований a и b.

1117. Правильная четырехугольная усеченная пирамида разделена на 3 части двумя плоскостями, проведенными через две противоположные стороны меньшего основания перпендикулярно к плоскости большего основания. Найти объем каждой части, если в усеченной пирамиде высота равна 4 *см*, а стороны основания 2 *см* и 5 *см*.

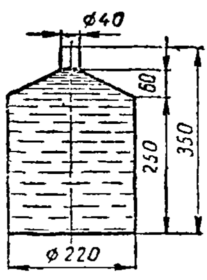
1118. В шар вписана правильная четырехугольная усеченная пирамида, основания которой находятся по одну сторону от центра. Радиус шара равен 25 *см*. Высота усеченной пирамиды 9 *см*, а площадь меньшего основания 98 *см*^{2}. Вычислить объем этой пирамиды.

§ 45. Объем усеченного конуса

1119. Показать, что формулы объема конуса и цилиндра являются частным случаем формулы объема усеченного конуса.

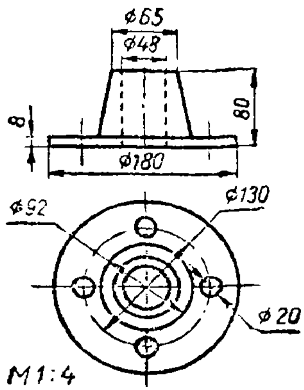
1120. Радиусы оснований усеченного конуса R и r $(R>r)$, а образующая составляет с плоскостью основания угол α. Найти объем этого конуса.

1121. Бидон, размеры которого даны на чертеже 68 в миллиметрах, наполнен керосином до горлышка (как показано штриховкой). Керосин был налит при температуре 5° и поставлен в помещение, где температура 20°. Коэффициент объемного расширения керосина 0,001. Выльется ли керосин через горлышко бидона? (Расширение бидона не учитывать.)

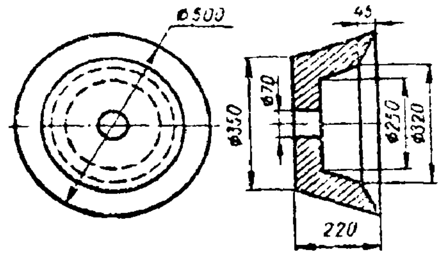


Черт 68.

1122. Вычислить объем детали (фланца) по размерам, данным на чертеже 69 (во фронтальной и горизонтальной проекциях).



Черт 69



Черт. 70

1123. Вычислить объем детали (шлифовального круга) по размерам, данным на чертеже 70 (во фронтальной проекции при профильном разрезе).

1124. Ромб, одна из диагоналей которого равна стороне, вращается вокруг оси, лежащей в его плоскости и проходящей вне его параллельно большей диагонали на расстоянии h от ближайшей вершины ромба. Сторона ромба a. Найти поверхность и объем тела вращения.

1125. Радиусы оснований усеченного конуса 3 *дм* и 5 *дм*. Найти отношение объемов частей конуса, на которые он разделится средним сечением.

1126. Вычислить объем усеченного конуса, если радиусы концентрических окружностей, образующих развертку усеченного конуса, равны соответственно 10 *см* и 5 *см* и каждая из дуг развертки содержит 216°.

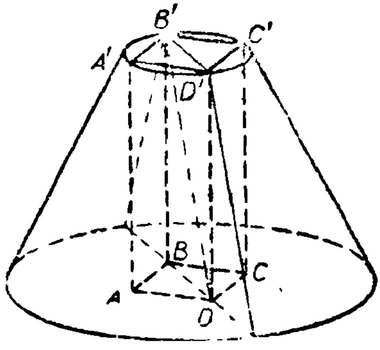
1127. Каждая из двух данных концентрических окружностей разделена двумя радиусами большей из них в отношении 1 : 2. Образовавшиеся части кольца служат развертками боковых поверхностей двух усеченных конусов. Вычислить отношение объемов этих конусов.

1128. Диагональ осевого сечения усеченного конуса, равная d, составляет с отрезком, соединяющим центры оснований конуса, острый угол α и делит этот отрезок в отношении 2 : 1. Найти объем усеченного конуса.

1129. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью нижнего основания угол α и равна l. Найти объем и полную поверхность этого конуса.

1130. Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник. Проекция вершины пирамиды делит высоту основания в отношении 1 : 2, считая от соответствующей вершины. Меньшее боковое ребро пирамиды равно 6 *дм* и образует с плоскостью основания угол в 60°. Найти объем усеченного конуса, окружность одного из оснований которого описана около основания пирамиды, а окружность другого проходит через вершину пирамиды.

1131. Около правильной четырехугольной призмы описан усеченный конус так, что окружность его меньшего основания описана около основания призмы, высота призмы служит высотой этого конуса и одна из его образующих параллельна диагонали призмы (черт. 71). Найти объем усеченного конуса, если сторона основания призмы равна a и высота — b.



Черт. 71.

§ 46. Призматоид

1132. Тело, основаниями которого служат две любые прямолинейные фигуры, лежащие в параллельных плоскостях, а боковыми гранями являются треугольники или четырехугольники, вершинами которых служат вершины фигур оснований, называется призматоидом. Объем призматоида вычисляется по формуле Ньютона—Симпсона:

$$v = \frac{1}{6} H(S_1 + S_2 + 4S_{ср}),$$

где H — высота призматоида;

S_1 и S_2 — площади его оснований;

$S_{ср}$ — площадь сечения, равноудаленного от оснований. Проверить пригодность формулы Ньютона—Симпсона для вычисления объема призмы, пирамиды и усеченной пирамиды.

1133. Призматоид, основаниями которого служат прямоугольники с соответственно параллельными сторонами, называется понтоном. Вычислить объем понтона, у которого высота h, стороны нижнего основания — a и b, стороны верхнего — a_1 и b_1.

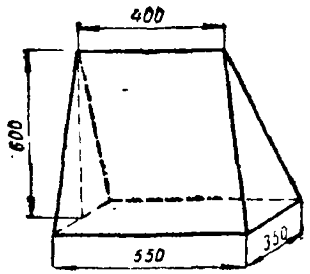
1134. Ящик для известкового раствора имеет форму понтона, у которого стороны нижнего основания 1 *м* и 0,7 *м*, верхнего — 1,2 *м* и 0,8 *м*, а глубина — 0,2 *м*. Он заполнен раствором, удельный вес которого 1,8. Вычислить вес находящегося в ящике раствора.

1135. Гранитный пьедестал имеет прямоугольные основания с размерами снизу 10 *дм* × 8 *дм* и сверху 9 *дм* × 6 *дм*, длина каждого из его боковых ребер около 1,51 *м*. Найти объем пьедестала.

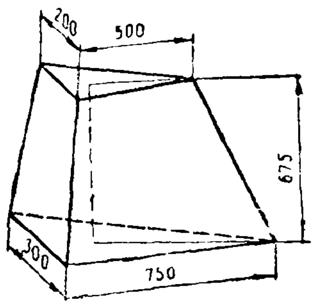
1136. Многогранник, ограниченный призматической поверхностью и двумя пересекающими ее непараллельными плоскостями, называется усеченной призмой. Треугольная усеченная призма обычно называется клином. Доказать, что объем клина равен произведению площади перпендикулярного сечения на среднее арифметическое длин трех боковых ребер.

1137. Здание, длина которого 24 *м* и ширина 12 *м*, имеет четырехскатную крышу с уклоном скатов 45°. Вычислить объем чердачного помещения.

1138. Найти объем клина, форма и размеры которого (в миллиметрах) даны на чертеже 72. (В основании лежит прямоугольник; ребро, противолежащее основанию, параллельно основанию.)



Черт. 72.



Черт. 73

1139. Найти объем клина, форма и размеры которого (в миллиметрах) даны на чертеже 73. (Верхнее и нижнее основания — прямоугольные треугольники; длина их катетов указана на этом чертеже.)

1140. Дана усеченная правильная четырехугольная призма, у которой сторона основания равна a, два смежных боковых ребра имеют длину b и два других — длину c. Найти объем и боковую поверхность этой усеченной призмы.

§ 47. Объем шара и его частей

1141. (Устно.) Найти отношение диаметров двух шаров, если отношение их объемов равно 1 : 1000.

1142. (Устно.) Если радиусы трех шаров относятся как 1 : 2 : 3, то объем большего шара в 3 раза больше суммы объемов меньших шаров. Доказать.

1143. (Устно.) Сколько металлических шаров диаметром 2 *см* можно отлить, расплавив шар диаметром 10 *см*?

1144. (Устно.) Поверхность одного шара в 4 раза больше поверхности другого. Во сколько раз объем первого больше объема второго?

1145. Медный полый шар весит в воздухе 264 *Г*, а в воде — 221 *Г*. Удельный вес меди 8,8. Вычислить толщину стенок этого шара.

1146. Полый металлический шар, внешний радиус которого R, плавает, будучи наполовину погруженным в воду. Удельный вес металла d. Вычислить толщину стенок шара.

1147. Найти отношение объемов двух шаров, вписанного в куб и описанного около этого куба.

1148. Отношение объемов шара и описанного около него усеченного конуса равно отношению площадей их поверхностей. Доказать.

1149. В сосуде, который имеет вид вертикально стоящего на вершине равностороннего конуса, лежит шар радиуса r и налита вода. Шар полностью покрыт водой. Найти: 1) объем находящейся в сосуде воды, 2) до какого уровня опустится вода, если шар вынуть из сосуда.

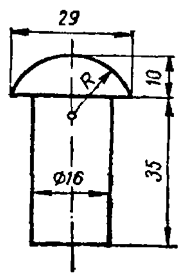
1150. Отрезок AB служит диаметром полуокружности радиуса r. Центр полуокружности — точка O. Отрезки OA и OB служат диаметром новых полуокружностей. Найти объем тела, полученного от вращения фигуры, заключенной между проведенными полуокружностями, около оси, совпадающей с отрезком AB.

1151. Плоскость, перпендикулярная к диаметру шара, делит диаметр на две части: 3 *см* и 9 *см*. На какие части делится объем шара?

1152. Дуга сегмента в осевом сечении сферического сектора α, хорда, ее стягивающая, b. Найти объем сектора и вычислить при $b=25{,}13$ *дм*, $\alpha=63^\circ17'$.

1153. Радиусы поверхностей двояковыпуклой линзы 10 *см* и 17 *см*. Расстояние между их центрами 21 *см*. Найти объем этой линзы.

1154. Для соединения частей металлических конструкций часто употребляются стальные заклепки, одна из которых изображена на чертеже 74 (размеры даны в *мм*). Вычислить вес 1000 таких заклепок при удельном весе стали 7,5.



Черт 74.

1155. Объем шара v. Найти объем его сектора, у которого центральный угол в осевом сечении α.

1156. На полуокружности радиуса R от конца ее диаметра AB отложена дуга BmC в 60° и точка C соединена с точкой A. Фигура, ограниченная диаметром AB, хордой AC и дугой BmC, вращается вокруг AB. Найти объем и поверхность тела вращения.

1157. Из внешней точки проведены к кругу радиуса r касательная и центральная секущие; угол между ними 30°. Фигура, ограниченная касательной, внешней частью секущей и дугой между ними, вращается вокруг секущей. Найти поверхность и объем тела вращения.

1158. Конус и сферический сегмент имеют общее основание, равные объемы и вместе составляют сферический сектор. Найти угол в осевом сечении сектора.

1159. Радиус сферического сектора R, наибольший угол между радиусами α. Найти объем и поверхность шара, вписанного в сектор.

§ 48. Повторение

1160. Перечислить геометрические преобразования, при которых сохраняется: а) расстояние между двумя точками, б) угол между двумя прямыми, в) параллельность прямых, г) ориентация треугольника.

1161. На плоскости даны два равных треугольника, имеющие одинаковую ориентацию. Доказать, что один из другого может быть получен с помощью параллельного переноса или вращения.

1162. На плоскости даны два равных треугольника, имеющие противоположную ориентацию. Доказать, что один из другого может быть получен с помощью: а) осевой симметрии, или б) осевой симметрии и параллельного переноса, или в) осевой симметрии и вращения.

1163. Фигура F_2 получена из фигуры F_1 с помощью параллельного переноса. Фигура F_3 получена из фигуры F_2 также с помощью параллельного переноса. Доказать, что фигура F_3 может быть получена из фигуры F_1 с помощью параллельного переноса.

1164. Построить треугольник ABC по медиане, проведенной из вершины A, и двум острым углам, образуемым этой медианой с двумя другими медианами этого треугольника.

1165. Построить четырехугольник по трем сторонам a, b, c и двум углам α и β, прилежащим к неизвестной стороне.

1166. Точка A, последовательно отражаясь от двух данных прямых, преобразовалась в точку A_1. При каком взаимном расположении этих прямых положение точки A_1 не зависит от того, какая из них будет принята за ось первого отражения?

1167. В данный параллелограмм вписать равнобедренный треугольник с данным углом при вершине так, чтобы вершины его углов лежали на трех различных сторонах параллелограмма.

1168. Через данную точку A провести прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между двумя концентрическими окружностями, имел данную длину.

1169. В данный треугольник вписать прямоугольник с данным отношением сторон.

1170. Построить треугольник по двум углам и сумме радиусов окружностей, вписанной в этот треугольник и описанной около него.

1171. На плоскости даны две окружности. Доказать, что если два радиуса этих окружностей движутся, оставаясь параллельными, то прямая, проходящая через концы их, пересекает прямую, проходящую через центры окружностей, в одной и той же точке.

1172. Из данной точки окружности проведены различные хорды и каждая из них продолжена на длину, равную ей. Найти геометрическое место концов образовавшихся отрезков.

1173. Построить параллелограмм по стороне, углу между диагоналями и высоте, опущенной на данную сторону.

1174. На поверхности шара построить геометрическое место точек, каждая из которых удалена на расстояние, равное половине радиуса шара, от данной прямой, проходящей через центр шара.

1175. На поверхности куба построить геометрическое место точек, каждая из которых одинаково удалена от концов одной и той же диагонали куба.

1176. Трехгранный угол пересекается плоскостью по треугольнику ABC. Найти геометрическое место центров тяжести треугольников ABC, если вершины A и B закреплены.

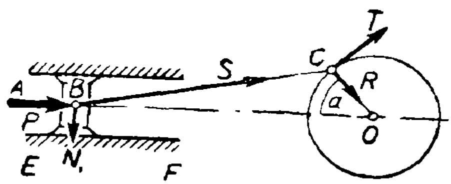
1177. Четырехугольник $ABCD$ вписан в круг. Показать, что

$$\frac{(\overline{AB}\cdot\overline{AD})}{(\overline{CB}\cdot\overline{CD})} = -\frac{AB\cdot AD}{CB\cdot CD}.$$

1178. При каких условиях $(\boldsymbol{ab})^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$;
$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2$?

1179. Показать, что скалярное произведение двух векторов, идущих от одной вершины треугольника к двум другим, может быть выражено через длины сторон треугольника.

1180. Поршневой шток AB паровой машины (черт. 75) передает головке B шатуна BC давление $P = 5000$ *кГ*. Определить давление N на направляющую EF ползуна, давление S — на штангу BC шатуна, давление R — в направлении кривошипа CO и величину T силы, действующей по направлению касательной к окружности маховика в точке C. Вычислить при $BC = 150$ *см*, $CO = 30$ *см* и 1) $\alpha = 0°$ и 2) $\alpha = 40°$.



Черт. 75

1181. Даны три прямые, из которых две параллельны. Указать возможные случаи взаимного расположения их проекций на плоскость. Ответ иллюстрировать на модели.

1182. Внутри пятиугольной призмы даны точки A и B и их проекции на плоскость основания призмы. (Направление проектирующих лучей совпадает с направлением боковых ребер призмы.) Построить точки пересечения прямой AB с поверхностью призмы.

1183. Построить сечение пятиугольной призмы плоскостью, заданной точкой, принадлежащей ее боковой грани и прямой, лежащей в плоскости основания призмы вне призмы.

1184. Треугольник $A_1B_1C_1$ является параллельной проекцией прямоугольного треугольника ABC ($\angle B=90°$) на плоскость α. Построить проекцию высоты треугольника ABC, проведенной из вершины B, на плоскость α, если известно, что $AB:BC=2$.

1185. Треугольник ABC является изображением равнобедренного треугольника, у которого высота равна основанию. Построить изображение высот треугольника и центра окружности, вписанной в этот треугольник.

1186. Найти кратчайшее расстояние между скрещивающимися диагоналями двух смежных граней куба, если ребро куба равно a.

1187. Площадь основания параллелепипеда равна Q, боковое ребро l наклонено к основанию параллелепипеда под углом α. Сечение, перпендикулярное боковому ребру,— квадрат. Найти боковую поверхность параллелепипеда.

1188. Основанием параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб $ABCD$ с углом $A=\alpha$. Вершина A проектируется в точку пересечения диагоналей нижнего основания. Боковое ребро равно b. Плоский угол A_1AB равен α. Найти объем параллелепипеда.

1189. В треугольную прямую призму вписан цилиндр, объем которого равен V. В основании призмы угол A равен α, угол B равен β. Найти объем призмы.

1190. Основанием прямой призмы служит треугольник, два угла которого равны соответственно α и β. Найти объем этой призмы, если радиус шара, вписанного в нее, равен R.

1191. Основанием правильной призмы служит квадрат $ABCD$, сторона которого a. Через сторону AB и середину оси проведена плоскость; через AD и середину оси проведена вторая плоскость; двугранный угол между ними, обращенный к основанию, равен 2α. Найти объем призмы.

1192. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение через диагональ A_1C боковой грани параллельно высоте основания, проходящей через вершину B. Найти объем призмы и площадь сечения, если сторона основания призмы равна a и сечение наклонено к основанию под углом α.

1193. Радиус шара, описанного около правильной треугольной призмы, равен R. Прямая, соединяющая центр шара с вершиной призмы, составляет с боковой гранью угол α. Найти объем призмы.

1194. Сторона ромба равна a, острый угол α. Через две противоположные стороны ромба проведены две плоскости перпендикулярно к плоскости ромба, через две другие стороны ромба проведены две плоскости под углом β к плоскости ромба. Найти объем полученного пятигранника.

1195. Шар касается всех ребер куба. Найти объем части шара, заключенной внутри куба, если ребро куба равно a.

1196. Каждое ребро правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно a. Призма пересечена плоскостью, проходящей через середины ребер AA_1, A_1B_1 и AC. Построить сечение и найти его площадь.

1197. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, большая сторона которого равна a и острый угол $60°$. Площадь сечения, делящего пополам острый двугранный угол при боковом ребре, равна Q. Найти объем параллелепипеда.

1198. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого a, проведены два сечения: сечение Q — через диагональ A_1C параллельно BD и сечение P — через диагональ C_1A параллельно BD. Эти сечения рассекают куб на четыре части. Найти объем каждой части.

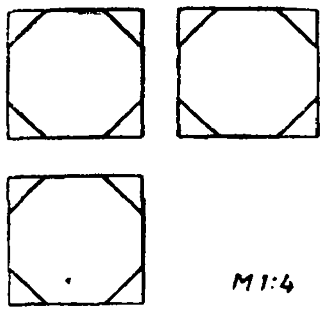
1199. Даны три прямые в пространстве. Как образовать параллелепипед, три непересекающихся и непараллельных ребра которого лежат на этих прямых?

1200. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найти радиус сферы, проходящей через концы ребра AA_1 и касающейся граней двугранного угла с ребром CC_1.

1201. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом γ при вершине. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания угол φ. Найти углы наклона боковых граней к плоскости основания.

1202. В основании пирамиды лежит параллелограмм со сторонами a и b и острым углом γ. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания. Боковая грань, проходящая через сторону основания, равную a, образует с основанием угол α. Найти объем пирамиды.

1203. Вычислить площадь полной поверхности и объем многогранника, изображенного в уменьшенном виде (M 1 : 4) в прямоугольных проекциях (черт. 76).



Черт. 76.

1204. Если две пирамиды имеют общее основание, а вершины лежат по разные стороны этого основания, то отрезок, соединяющий вершины, делится плоскостью основания в отношении, равном отношению объемов пирамид. Доказать.

1205. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом α между диагоналями, а каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол φ. Определить объем этой пирамиды, если радиус описанного около нее шара равен R.

1206. Основанием правильной пирамиды с вершиной S служит квадрат $ABCD$. Расстояние от вершины B до бокового ребра AS равно 2 *см*. Угол между двумя смежными боковыми гранями равен 120°. Вычислить боковую поверхность пирамиды.

1207. В треугольной пирамиде два непересекающихся ребра равны между собой и равны a; каждое же из остальных ребер равно b. Найти объем пирамиды.

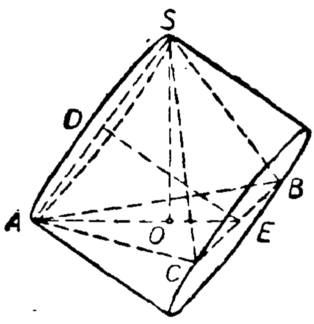
1208. Радиус шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, равен r; двугранный угол при боковом ребре равен α. Найти объем пирамиды, имеющей вершину в центре шара, а вершины основания — в точках касания шара с боковыми гранями пирамиды.

1209. Высота правильной четырехугольной пирамиды H; двугранный угол при боковом ребре α. Найти объем пирамиды.

1210. Площадь основания пирамиды равна Q, а каждый двугранный угол при основании равен α; эта пирамида пересечена плоскостью, проведенной через центр вписанного шара параллельно основанию. Найти площадь сечения.

1211. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Найти двугранный угол при боковом ребре. Вычислить при $\alpha = 50°30'$.

1212. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a; двугранный угол при основании α; в этой пирамиде дан куб; нижняя грань куба вписана в основание пирамиды так, что середины сторон основания пирамиды служат вершинами нижней грани куба, верхняя грань куба пересекает боковые грани пирамиды. Найти объем внешней части куба. При каких значениях α задача имеет решение?



Черт. 77.

1213. Доказать, что около правильного тетраэдра можно описать цилиндр так, что два противоположных ребра тетраэдра будут служить диаметрами оснований цилиндра (черт. 77). Найти объем этого цилиндра, если ребро тетраэдра равно a.

1214. Если в треугольной пирамиде две высоты пересекаются, то два скрещивающихся ребра ее взаимно перпендикулярны. Доказать.

1215. Доказать, что если в треугольной пирамиде две высоты пересекаются, то пересекаются и две другие.

1216. На двух данных скрещивающихся прямых отложены соответственно два отрезка. Доказать, что объем треугольной пирамиды, вершинами которой служат концы этих отрезков, не изменится, если отрезки, не изменяя их длины, перемещать по данным прямым.

1217. Если вершины треугольной пирамиды проектируются в ортоцентр ее основания, то сумма квадратов любой пары скрещивающихся ребер есть величина постоянная. Доказать.

1218. В ромбе $ABCD$ диагональ AC равна $2a$, а диагональ BD равна $2b$. В концах диагонали AC восставлены к плоскости ромба (по одну сторону от нее) перпендикуляры $AE=h$; $CF=h'$. Найти объем пирамиды $FBDE$.

1219. Дан прямоугольник $ABCD$; перегибают его по диагонали AC, пока плоскость треугольника DAC не примет положения, перпендикулярного к плоскости треугольника ABC; точку D соединяют с точкой B. Найти объем пирамиды $DABC$, если $AB=b$ и $AD=a$.

1220. В правильной четырехугольной пирамиде проведена плоскость через вершину основания перпендикулярно к противолежащему боковому ребру, которое она делит пополам. Доказать, что проведенное сечение делит боковую поверхность пирамиды на две равновеликие части.

1221. Образующая конуса составляет с его высотой угол α. Найти объем этого конуса, если радиус шара, описанного около него, равен R.

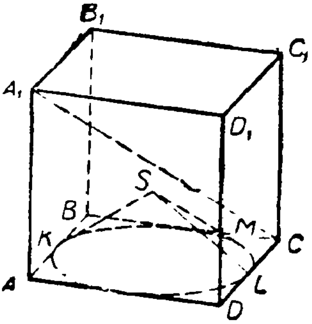
1222. В конус вписан шар радиуса r. Найти высоту конуса, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная к одной из образующих конуса, отстоит от его вершины на расстоянии d.

1223. Равнобедренный треугольник вращается вокруг основания; высота, опущенная на боковую сторону, при этом вращении образует поверхность, которая делит объем полученного тела пополам. Найти угол при основании треугольника.

1224. Параллелограмм последовательно вращается вокруг каждой из сторон a и b. Найти отношение объемов полученных тел.

1225. Прямоугольный треугольник, катеты которого a и b, вращается вокруг гипотенузы. Найти отношение объема тела вращения к объему вписанного в это тело шара.

1226. В кубе с ребром a сделано 6 одинаковых конических углублений, удовлетворяющих следующим условиям: основание конической поверхности — окружность, вписанная в соответствующую грань куба, и каждая коническая поверхность имеет



Черт. 78.

образующую, параллельную одной и той же диагонали куба. Найти поверхность образовавшегося тела. (На чертеже 78 изображено одно из конических углублений.)

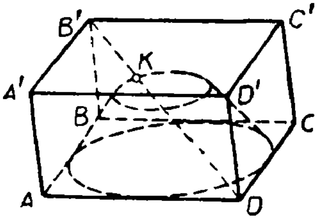
1227. На плоскости лежат n равных конусов с общей вершиной; каждый из них касается двух рядом лежащих. Определить угол при вершине их осевого сечения.

1228. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде провести сечение через диагональ пирамиды параллельно диагонали основания. Найти площадь сечения, если стороны оснований пирамиды равны b и $3b$, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол в $45°$.

1229. В правильной треугольной усеченной пирамиде проведено сечение через вершину большего основания параллельно стороне этого основания под углом α к его плоскости. Найти площадь сечения и боковую поверхность пирамиды, если стороны оснований a и b $(a>b)$, а плоскость сечения перпендикулярна к боковой грани и пересекает эту грань.

1230. Большее основание усеченной пирамиды есть треугольник, одна сторона которого равна a и прилежащие к ней углы равны соответственно α и β. Найти объем этой пирамиды, если известно, что площади ее оснований относятся как $1:9$ и каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом γ. Вычислить при $a=30{,}6$ *см*, $\alpha=47°23'$, $\beta=64°12'$, $\gamma=56°33'$.

1231. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a, высота призмы $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Найти боковую поверхность усеченного конуса, одно основание которого вписано в нижнее основание призмы, а окружность другого проходит через точку, делящую одну из диагоналей призмы в отношении $1:3$, считая от вершины верхнего основания (черт. 79).



Черт. 79.

1232. От октаэдра, ребро которого a, отсечены углы плоскостями так, что из каждой грани его образовались правильные шестиугольники. Определить поверхность и объем полученного тела.

1233. Доказать, что в правильный октаэдр можно вписать цилиндр так, что окружности его оснований будут вписаны в противоположные грани октаэдра. Найти объем этого цилиндра, если ребро правильного октаэдра равно a.

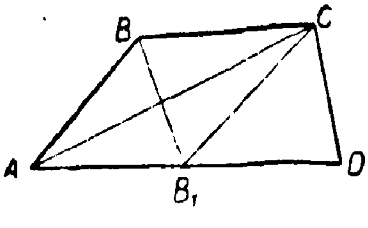
1234. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α; высота конуса служит диаметром шара, поверхность которого делится боковой поверхностью конуса на две части. Найти их отношение.

1235. Четыре равных шара радиуса r расположены так, что каждый касается трех других. Найти поверхность шара, описанного около данных шаров.

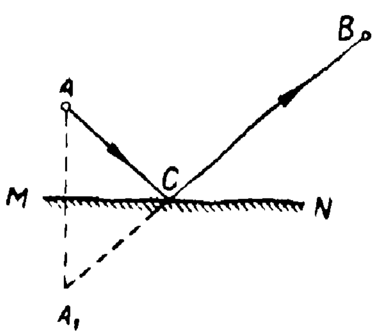
1236. Центральный угол в осевом сечении сферического сектора 2α; сферическая поверхность его равна S. Найти поверхность шара, вписанного в этот сектор.

ОТВЕТЫ

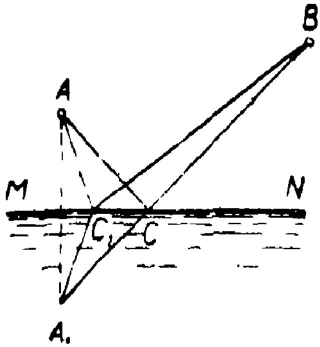
4. Точки, принадлежащие оси симметрии, ось симметрии и прямые, ей перпендикулярные. 6. а) Одну; б) одну; в) одну, если прямые параллельны, и две, если прямые пересекаются; г) бесконечное множество; д) бесконечное множество. 7. Три, четыре, шесть, пять. 8. 1) Треугольники, имеющие только две равные стороны (1); 2) равносторонние треугольники (3); 3) косоугольные ромбы (2); 4) квадраты (4); 5) неравносторонние прямоугольники (2); 6) равнобедренные трапеции (1). 11. *Указание*. Пусть две пересекающиеся прямые a и b симметричны относительно прямой s. Обозначим точку пересечения прямых a и b через M, а симметричную ей точку относительно прямой s — через M_1. Так как $M \in a$, то $M_1 \in b$. С другой стороны, $M \in b$ и поэтому $M_1 \in a$. Таким образом, точка M_1 является общей для прямых a и b и поэтому является точкой их пересечения. Следовательно, точки M и M_1 совпадают. При симметрии относительно прямой преобразуются в себя только те точки, которые принадлежат оси симметрии. Поэтому $M \in s$. 13. а) Да; б) нет; в) нет; г) да. 14. Да. 15. а) Нет; б) да; в) нет. 16. Сохраняется. 27. *Указание*. (Черт. 80.) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$ и диагональ AC делит



Черт. 80.

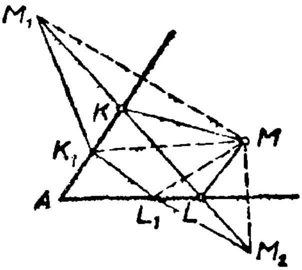


Черт. 81.

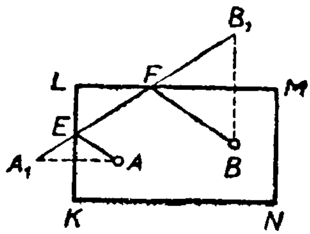


Черт. 82.

угол A пополам. Построим точку B_1, симметричную точке B относительно AC. Тогда $AB_1=AB$, $CB_1=CB$. Треугольник CB_1D построить можно по трем сторонам ($CB_1=b$; $B_1D=d-a$; $CD=c$). Чтобы найти положение вершины A искомого четырехугольника, достаточно от точки B_1 на продолжении DB_1 отложить отрезок $B_1A=a$. Вершина B найдется как точка, симметричная точке B_1 относительно AC 28. *Указание.* (Черт. 81.) Построим: 1) точку A_1, симметричную точке A относительно прямой MN; 2) точку C пересечения прямых MN и A_1B. Тогда $\angle ACM=\angle BCN$. Следовательно, направление AC является искомым. **29.** *Указание.* (Черт. 82) Рассмотрим случай, когда селения A и B расположены по одну сторону от канала MN. Обозначим место, занимаемое водонапорной башней, через C_1. Решение задачи сводится к отысканию на прямой MN такой точки C, чтобы длина ломаной ACB была наименьшая. Построим точку A_1, симметричную A относительно MN. Длина ломаной AC_1B равна длине ломаной A_1C_1B. Поэтому при перемещении точки C_1 по прямой MN длина ломаной AC_1B достигнет наименьшей длины тогда, когда наименьшей длины достигнет ломаная $A_1C_1B_1$. Следовательно, искомая точка C определится как точка пересечения прямых MN и A_1B. Длина ломаной ACB меньше длины ломаной AC_1B. **30.** *Указание.* (Черт. 83.) На сторонах угла A возьмем две произвольные точки K_1 и L_1. Построим точки M_1 и M_2, симметричные точке M относительно сторон угла. Периметр треугольника MK_1L_1 равен периметру

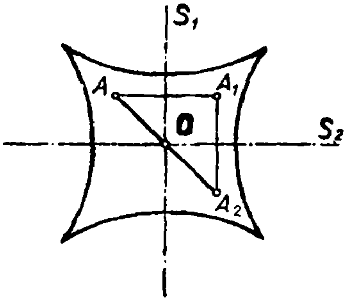


Черт 83



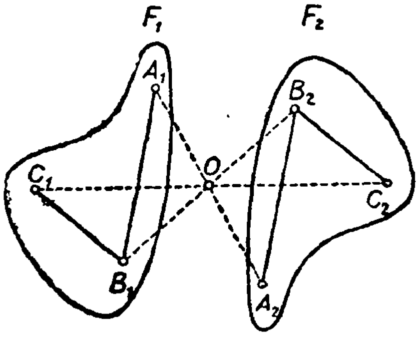
Черт 84

ломаной $M_1K_1L_1M_2$. При перемещении точек K_1 и L_1 на сторонах угла A периметр треугольника MK_1L_1 тогда достигнет наименьшей длины, когда наименьшей длины достигнет ломаная $M_1K_1L_1M_2$. Следовательно, точки K и L пересечения прямой M_1M_2 со сторонами угла A являются вершинами искомого треугольника MKL. **31.** *Указание.* (Черт. 84.) Допустим, что шар A, отразившись от бортов KL и LM прямоугольного бильярда $KLMN$, попал в шар B. Построим точку A_1, симметричную точке A относительно KL, и точку B_1, симметричную точке B относительно LM. Точки пересечения прямой A_1B_1 со сторонами KL и LM прямоугольника $KLMN$ обозначим соответственно через E и F. AE — искомое направление удара, а $AEFB$ — траектория движения шара A. **38.** Центр симметрии и прямые, проходящие через него. **41.** Можно. **44.** 1) Да (1); 2) да (бесконечное множество); 3) да (1); 4) да (1); 5) нет, 6) да (1). **53.** *Указание.* (Черт. 85) Допустим, что фигура F имеет две взаимно перпендикулярные оси

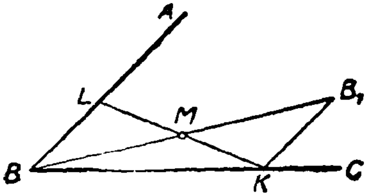


Черт. 85.

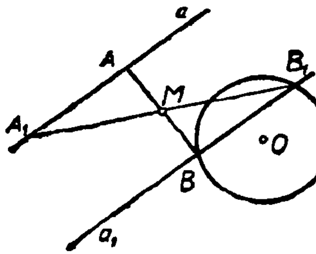
симметрии s_1 и s_2, пересекающиеся в точке O. Возьмем произвольную точку A фигуры F. Пусть A_1 — точка, симметричная точке A относительно s_1, и A_2 — точка, симметричная точке A_1 относительно s_2. Используя свойства симметрии относительно оси, докажем, что $OA = OA_2$ и $\angle AOA_2 = 180°$. Следовательно, точки A и A_2 симметричны относительно точки O. Точка A фигуры F была взята произвольно. Значит, для любой точки фигуры F найдется точка той же фигуры, симметричная ей относительно точки O. **56.** *Указание.* (Черт. 86.) Пусть даны фигуры F_1 и F_2, обладающие тем свойством, что любые два соответственных отрезка A_1B_1 и A_2B_2 этих фигур равны, параллельны и противоположно направлены. Четырехугольник $A_1B_1A_2B_2$ — параллелограмм. Пусть O — точка пересечения диагоналей этого параллелограмма. Отрезки A_1B_1 и A_2B_2 симметричны относительно точки O. Покажем, что любые две соответственные точки C_1 и C_2 фигур F_1 и F_2 симметричны относительно точки O. Из условия задачи следует, что отрезки B_1C_1 и B_2C_2 равны, параллельны и противоположно направлены. $B_1C_1B_2C_2$ — параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке O. Следовательно, точки C_1 и C_2 симметричны относительно точки O. **58.** *Указание.* (Черт. 87.) Построим: 1) точку B_1, симметричную точке B относительно точки M; 2) $B_1K \parallel AB$; 3) отрезок KML. Отрезок KML искомый. **59.** *Указание.* (Черт. 88.) Допустим, что отрезок AB является искомым: концы его A и B принадлежат соответственно данным прямой a



Черт. 86.

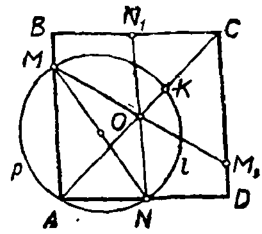


Черт 87.

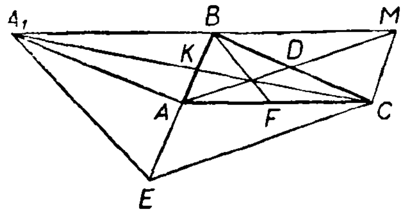


Черт. 88.

и окружности O и середина его расположена в данной точке M. Точка B определится как точка пересечения окружности O и прямой a_1, симметричной прямой a относительно точки M. 61. *Указание.* (Черт. 89.) Пусть точки M и N принадлежат двум смежным сторонам AB и AD, квадрата $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Тогда две другие стороны квадрата проходят через точки M_1 и N_1, симметричные точкам M и N относительно точки O. Построим окружность $MpNl$ с диаметром MN. Тогда вершина A искомого квадрата будет принадлежать полуокружности MpN. Диагональ AC делит полуокружность MlN в точке K пополам. Таким образом, вершина A искомого квадрата есть точка пересечения полуокружности MpN и прямой OK. 62. Векторные величины: сила, вес, скорость, ускорение. Остальные величины скалярные. 63. $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{AB}=-\overline{DC}$. 64. Нет. $\overline{AB}=-\overline{CD}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$. 65. $|c| \geq |a|$ 67. $\overline{AC}=a+b$, $\overline{CA}=-(a+b)$, $\overline{BD}=b-a$, $\overline{DB}=a-b$. 69. В том случае, когда векторы a и b одинаково направлены. 70. При условии, что векторы a и b имеют одинаковое или противоположное направление, иначе говоря, лежат на одной прямой или параллельных прямых. 71. В том случае, когда векторы a и b не лежат на одной прямой или параллельных прямых и имеют равные длины. 72. $\overline{Q}=\overline{P}+\overline{T}$, $|\overline{T}| \approx 98$ *кГ*, $|\overline{P}| \approx 63$ *кГ*. 76. 6 78. Да. 79. Да. 80. 1) a; 2) $a \pm 2R$; 3) $a \pm \sqrt{4R^2-b^2}$. 83. $|a| = 2d$, где a — вектор, определяющий указанный параллельный перенос, и d — расстояние между осями. 84. 1) $y=\frac{1}{2}x+7$; 2) $y=\frac{1}{2}x+3{,}5$. 85. $y=\sqrt{3}x+12$. *Указание.* Прямая, получившаяся в результате преобразования графика данной функции, перпендикулярна вектору a и удалена от начала координат на расстояние, равное 6 ед. 86. $y=x^2-6x+5$. 87. $\overline{OA}$, где O — начало координат; $A(1,-4)$. 88. $\frac{5a^2\sqrt{3}}{8}$. 95. 5 *см*. 97. 900 *см*^{2}. 98. *Указание.* (Черт. 90.) 1) Построим $BA_1=AC$, $BA_1 \parallel AC$ и $AE=AB$. Пусть отрезки AD, BF и CK — медианы треугольника ABC. AD — средняя линия треугольника BEC. Поэтому $CE=2AD$. На продолжении AD отложим отрезок $DM=AD$, имеем: $AM \parallel EC$ и $AM=EC$. Значит, $EAMC$ — параллелограмм. Тогда F — середина диагонали AC параллелограмма $AMCE$. Поэтому точки E, F и M лежат на одной прямой. Так как $MC \parallel AB$ и

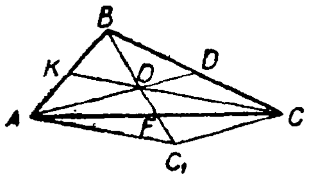


Черт. 89.

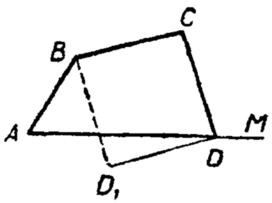


Черт. 90.

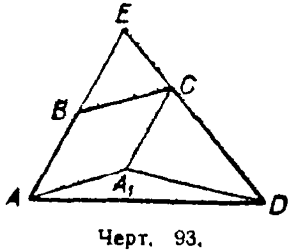
$MC = AB$, то $ABMC$ — параллелограмм и, следовательно, $BM \parallel AC$. Так же $A_1B \parallel AC$. Следовательно, точки A_1, B и M лежат на одной прямой. BF — средняя линия треугольника A_1ME. Поэтому $A_1E = 2BF$. 2) EK — медиана треугольника EA_1C, причем $EA : AK = 2 : 1$. Следовательно, A — центр тяжести треугольника A_1EC. 99. *Указание*. Рассмотрим два способа решения задачи: 1) Используем решение задачи 98. Допустим, что треугольник ABC является искомым (черт. 90) Каждая сторона треугольника A_1CE равна удвоенной медиане искомого треугольника. Построив треугольник A_1CE по трем сторонам, найдем его центр тяжести A. Отложив на продолжении EA отрезок $AB = EA$, найдем вершину B искомого треугольника ABC. Заметим, что каждая сторона искомого треугольника равна $\frac{2}{3}$ соответствующей медианы треугольника A_1CE. 2) (Черт. 91.) Пусть треугольник ABC искомый и AD, BF и CK — его медианы. O — центр тяжести треугольника ABC. Выполним преобразование параллельного переноса отрезка OC, определяемое вектором $\overline{OA}$. Пусть C_1 — образ точки C в указанном преобразовании. Треугольник AOC_1 построить можно по трем сторонам (каждая сторона этого треугольника равна $\frac{2}{3}$ соответствующей медианы искомого треугольника). Построив на продолжении отрезка C_1O отрезок $OB = \frac{1}{2}OC_1$, найдем вершину B искомого треугольника. Подвергнув преобразованию параллельного переноса отрезок AC_1, определяемому вектором $\overline{AO}$, найдем третью вершину C треугольника. 100. *Указание*. (Черт. 92). Допустим, что четырехугольник $ABCD$ искомый: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $\angle BAD = \alpha$ и $\angle ADC = \beta$. Выполним преобразование параллельного переноса отрезка CD, определяемое вектором $\overline{CB}$. Пусть BD_1 — образ отрезка CD в указанном преобразовании. Тогда $\angle ABD_1 = 180° - (\alpha + \beta)$. Треугольник ABD_1 построить можно по двум сторонам и углу между ними. Вершина D искомого четырехугольника определится как точка пересечения луча AM, образующего с AB угол α, и окружности с центром в точке D_1 радиуса b. Вершина C есть точка пересечения окружности с центром в точке B радиуса b и окружности с центром в точке D радиуса c. 101. *Указание*. (Черт. 93) Допустим, что четырехугольник $ABCD$ искомый $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$ и угол AED между продолжениями сторон AB и CD равен α. Подвергнем отрезок AB преобразованию параллельного переноса, определяемого



Черт. 91.

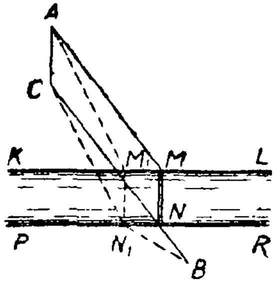


Черт. 92.



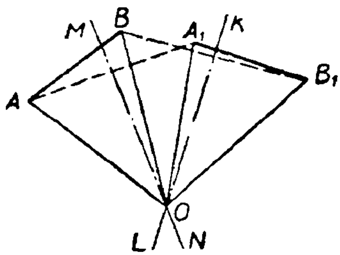
Черт. 93.

вектором $\overline{BC}$. Пусть CA_1 — образ отрезка AB в указанном преобразовании Треугольник A_1CD построить можно по двум сторонам и углу между ними ($\angle A_1CD=\alpha$). Вершина A искомого четырехугольника определится как точка пересечения окружности с центром в точке D радиуса d и окружности с центром в точке A_1 радиуса b. Подвергнув отрезок CA_1 преобразованию параллельного переноса, определяемого вектором A_1A, найдем четвертую вершину B искомого четырехугольника. **102.** *Указание.* (Черт. 94.) $PKLR$ — участок канала с параллельными берегами. Пусть мост занимает положение M_1N_1. Построим отрезок AC, равный и параллельный M_1N_1. Заметим, что при любом положении моста путь от A до B будет содержать отрезок, равный AC. Длины ломаных AM_1N_1B и ACN_1B равны. Длина ломаной AM_1N_1B при перемещении точки N_1 по прямой PR будет наименьшей тогда, когда наименьшей будет сумма AM_1+N_1B. Последняя же сумма будет наименьшей тогда, когда будет наименьшей сумма CN_1+N_1B. Следовательно, положение N начала моста определится как точка пересечения отрезка CB и прямой PR, MN — искомое положение моста Длина ломаной $AMNB$ меньше длины ломаной AM_1N_1B.



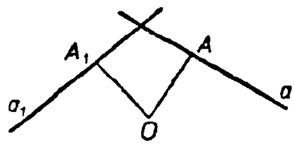
Черт. 94.

103. *Указание.* Построим вектор n параллельный прямой a, имеющий данную длину и одно из двух возможных направлений Допустим, что концы A и B отрезка AB, имеющего данную длину и параллельного прямой a, лежат соответственно на данной окружности O и прямой b Подвергнув прямую b (окружность O) преобразованию параллельного переноса, определяемого вектором n, получим прямую b_1 (окружность O_1). Тогда точка пересечения прямой b_1 и окружности O (окружности O_1 и прямой b) будет являться одним из концов искомого отрезка. **104.** а) Часовая стрелка... 45°; минутная стрелка... 540°; б) часовая стрелка... 156°; минутная стрелка... 1872°. **105.** 1080°; 10 800°. **106.** Второе колесо вращается в отрицательном направлении; а) в отрицательном направлении, б) в положительном направлении. **107.** а) 120°; 240°; 300°; б) $-240°$; $-300°$; в) нет. **108.** 360°. **109.** 1) 435°; 2) 795°; 3) $75°+360°\,n$. **110.** 235°. **111.** а) 83°; 803°; $-997°$, б) $-637°$; $-277°$; 83°; 443°. **113.** а) График следует повернуть вокруг точки A (0; 3) на угол $-30°$; б) график следует повернуть вокруг точки A (0; 3) на угол 75°. **119.** Для построения образа четырехугольника $ABCD$ достаточно построить четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, равный четырехугольнику $ABCD$ и имеющий ту же ориентацию. Соответственными вершинами будут A и A_1, B и B_1, C и C_1, D и D_1. **120.** *Указание.* (Черт. 95.) Пусть отрезки AB и A_1B_1 равны и не параллельны. Центр вращения, переводящего точку A в точку A_1, лежит на симметрали MN отрезка AA_1. Центр вращения, переводящего точку B в точку B_1, лежит на симметрали KL отрезка BB_1. Для того чтобы доказать, что точка O пересечения прямых MN и KL является центром вращения, переводящего отрезок AB в отрезок A_1B_1, достаточно доказать, что $\angle AOA_1=\angle BOB_1$. Треуголь-

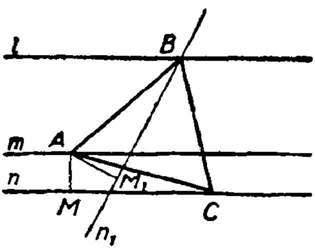


Черт. 95.

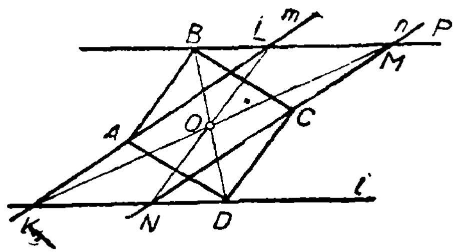
ники AOB и A_1OB_1 равны между собой ($AB=A_1B_1$, $AO=A_1O$, $BO=B_1O$). Поэтому $\angle AOB=\angle A_1OB_1$. Прибавив к обеим частям последнего равенства $\angle BOA_1$, получим: $\angle AOA_1=\angle BOB_1$. **122.** $4a$. **123.** $8a\ (2-\sqrt{2})$. **125.** $180°$. **126.** Из центра вращения O опустим перпендикуляр OA на прямую a. Пусть отрезок OA_1 есть результат поворота отрезка OA вокруг точки O на угол φ. Тогда прямая a_1, перпендикулярная отрезку OA_1 в точке A_1, будет образом прямой a в рассматриваемом преобразовании. *Указание.* (Черт. 96.) Пусть задано вращение центром O и углом поворота φ. Прямая a_1 является образом прямой a в рассматриваемом преобразовании. Построим $OA\perp a$. Так как при вращении угол преобразуется в равный ему угол, то поэтому отрезок OA преобразуется в отрезок, перпендикулярный прямой a_1. Точка A прямой a преобразуется в точку A_1 прямой a_1. Следовательно, образом отрезка OA при заданном вращении является отрезок OA_1. Поэтому $\angle AOA_1=\varphi$. **127.** Каждая точка, принадлежащая биссектрисе любого из четырех углов, образованных данными пересекающимися прямыми, является центром вращения, пере-



Черт. 96.



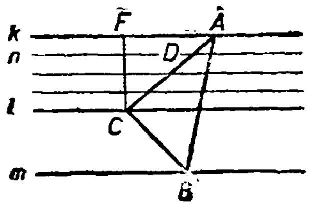
Черт. 97.



Черт. 98.

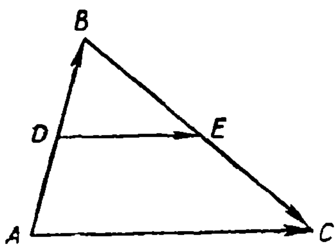
водящего прямую a в прямую b. **131.** *Указание.* (Черт. 97.) Допустим, что равносторонний треугольник ABC является искомым: его вершины принадлежат трем данным параллельным прямым l, m и n. При построении искомого треугольника можно, например, вершину A взять произвольно на прямой m и затем прямую n повернуть вокруг точки A на угол в $60°$. Точка пересечения прямой l и образа n_1 прямой n после ее поворота вокруг точки A на угол в $60°$ определит положение вершины B искомого треугольника. Вершина C определится как точка пересечения окружности с центром в точке A радиуса AB и прямой n. Заметим, что для осуществления поворота прямой n вокруг точки A на угол в $60°$ достаточно построить: 1) $AM\perp n$; 2) $AM_1=AM$, $\angle MAM_1=60°$; 3) $n_1\perp AM_1$,

$M_1 \in n_1$. Задача имеет два решения. 133. *Указание.* (Черт. 98.) Пусть даны две параллельные прямые m и n, пересеченные двумя другими параллельными прямыми p и l. Допустим, что квадрат $ABCD$ является искомым: его вершины принадлежат данным прямым m, n, p, l. Пусть O — центр симметрии параллелограмма $KLMN$. Так как $BC=AD$, $\angle MBC=\angle ADK$, $\angle KAD=\angle BCM$, то $\triangle AKD=\triangle BMC$ и поэтому $BM=KD$. Вычитая из обеих частей последнего равенства равные отрезки LM и KN, получим $BL=ND$. Так как, кроме того, отрезки LB и ND параллельны и различно направлены от точек L и N, то эти отрезки симметричны относительно середины отрезка NL — точки O. Таким образом, точка O является центром симметрии искомого квадрата $ABCD$. Вершина B искомого квадрата есть точка пересечения прямой p и прямой n, повернутой вокруг точки O на угол в $90°$. 134. *Указание.* (Черт. 99.) Допустим, что задача решена и треугольник ABC искомый: его вершины лежат на данных параллельных прямых k, l, m, причем $BC:CA:AB=3:4:5$. Отрезок CF, концы которого лежат на прямых k, l и перпендикулярный прямой k, разделим на 4 равные части и через точки деления проведем прямые, параллельные прямой k. Ту из этих прямых, которая отрезок AC делит в точке D так, что $CD:DA=3:1$, обозначим через n. Точку C на прямой l можно взять произвольно. Вершина B искомого треугольника определится как точка пересечения прямой m и прямой n, повернутой вокруг точки C на угол $90°$. 135. $-2a$.



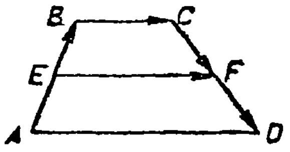
Черт. 99.

137. $\overline{BD}:\overline{OD}=2$; $\overline{AC}:\overline{CO}=-2$. 138. $\overline{MC}=\frac{1}{2}(a+b)$; $\overline{MA}=-\frac{1}{2}(a+b)$; $\overline{MB}=\frac{1}{2}(a-b)$; $\overline{MD}=\frac{1}{2}(b-a)$. 140. $\overline{AD_1}=\frac{1}{4}(3c+b)$; $\overline{AD_2}=\frac{1}{2}(c+b)$; $\overline{AD_3}=\frac{1}{4}(3b+c)$. 141. $\overline{AM}=c+a\frac{|c|}{|c|+|b|}$. 142. *Указание.* (Черт. 100.) Пусть дан треугольник ABC и его средняя линия DE. Стороны треугольников ABC и DBE будем рассматривать как векторы. Пусть $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ и $\overline{DB}+\overline{BE}=\overline{DE}$. Имеем: $\overline{DB}+\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AC}$. Следовательно, $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AC}$, и поэтому $DE \parallel AC$ и $DE=\frac{1}{2}AC$.



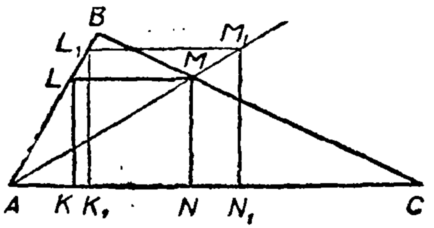
Черт. 100.

143. *Указание.* (Черт. 101.) Пусть даны трапеция $ABCD$ и ее средняя линия EF. Будем рассматривать стороны четырехугольников $ABCD$ и $EBCF$ как векторы. Пусть $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{AD}$ (1) и $\overline{EB}+\overline{BC}+\overline{CF}=\overline{EF}$ (2). Выразим век-



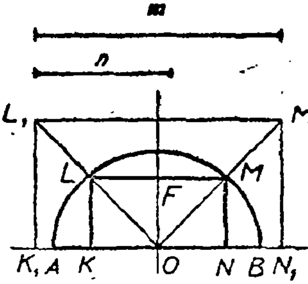
Черт 101.

тор EF в зависимости от векторов BC и AD. Из равенства (1) имеем: $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}-\overline{BC}$. Тогда $\overline{EB}+\overline{CF}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})=\frac{1}{2}(\overline{AD}-\overline{BC})$. Подставляя последнее значение суммы $\overline{EB}+\overline{CF}$ в равенство (2), найдем: $\frac{1}{2}(\overline{BC}+\overline{AD})=\overline{EF}$. Так как $BC \parallel AD$, то из последнего равенства следует, что $EF \parallel BC$ и $EF=\frac{1}{2}(BC+AD)$. **147.** 1) Один, если отрезки равны, и два, если отрезки не равны; 2) бесконечное множество; 3) не имеют; 4) бесконечное множество. **148.** Не зависят. **149.** Достаточно найти точку пересечения двух прямых, каждая из которых проходит через пару соответственных вершин данных треугольников. **152.** Четырехугольник, представляющий план данного участка в масштабе 1 : 5000, подвергнуть преобразованию гомотетии с произвольным центром и коэффициентом, равным $\frac{1}{3}$. **154.** На прямой OA, где O — центр гомотетии. **155.** Нет. **157.** Два ромба, имеющие общий угол, гомотетичны. Два неравносторонних прямоугольника, имеющие общий угол, вообще говоря, не гомотетичны. Два неравносторонних треугольника, имеющие общий угол, вообще говоря, не гомотетичны. **158.** Центр гомотетии совпадает с центром симметрии. Коэффициент гомотетии равен — 1. **159.** Три пары. Центрами гомотетии являются точка, взятая на диагонали параллелограмма, и концы этой диагонали. **162.** 1) $\triangle PQZ \sim \triangle PLF$, так как $\frac{PQ}{PL}=\frac{QZ}{LF}$ и $\angle PQZ=\angle PLF$. Поэтому $\angle QPZ=\angle LPF$ и, следовательно, точки P, Z и F лежат на одной прямой. 2) Карандаш нужно поместить во 2-е отверстие рейки QO, считая от отверстия Q. Тогда отношение указанных отрезков будет равно 4. 3) При перемещении штифта и карандаша сохраняются равенства отношений: $\frac{PZ_1}{PF_1}=\frac{PZ_2}{PF_2}=\frac{PZ_3}{PF_3}=\frac{PZ_4}{PF_4}$. **172.** *Указание.* (Черт. 102.) Допустим, что квадрат $KLMN$ является искомым; он вписан в треугольник ABC. Выполним преобразование гомотетии квадрата $KLMN$ с центром гомотетии в точке A и произвольным коэффициентом гомотетии. Так получим квадрат $K_1L_1M_1N_1$, который построить можно. (Из произвольной точки L_1 луча AB следует опустить перпендикуляр L_1K_1 на прямую AC и принять его за сторону квадрата $K_1L_1M_1N_1$.) Точка M пересечения луча AM_1 со стороной BC данного треугольника является вершиной M искомого квадрата. Зная положение верши-



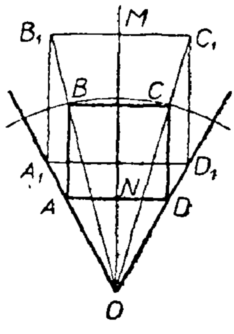
Черт. 102.

ны M искомого квадрата, можно построить и сам квадрат. Если дан остроугольный треугольник, то задача может иметь три решения (разносторонний треугольник), два решения (равнобедренный треугольник), одно решение (равносторонний треугольник). Если дан прямоугольный треугольник, задача имеет *два решения.* В случае тупоугольного треугольника задача имеет одно решение. 174. *Указание.* (Черт. 103.) Допустим, что в данный полукруг вписан прямоугольник $KLMN$, стороны которого KN и MN относятся как $m:n$ (m и n — данные отрезки). Покажем, что центр полукруга O совпадает с серединой стороны KN искомого прямоугольника. Перпендикуляр OF, опущенный из центра O круга на хорду LM, разделит ее в точке F пополам. Поэтому прямая OF является осью симметрии прямоугольника $KLMN$, и, следовательно, точка O служит серединой стороны KN искомого прямоугольника. Прямоугольник $KLMN$ подвергнем преобразованию гомотетии с центром гомотетии O и произвольным коэффициентом. Так получим прямоугольник $K_1L_1M_1N_1$, который можно построить по отношению его сторон. На луче OB от точки O отложим отрезок $ON_1 = \frac{m}{2}$ и построим отрезок M_1N_1, перпендикулярный ON_1 и равный n. Вершина M искомого прямоугольника найдется как точка пересечения луча OM_1 и дуги полуокружности. Зная положение вершины M искомого прямоугольника, можно построить и сам прямоугольник.



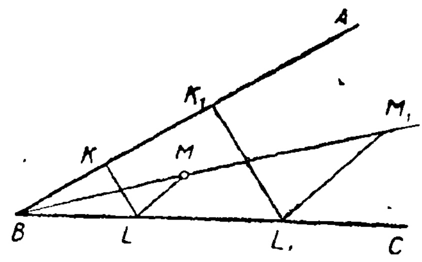
Черт. 103.

176. *Указание.* (Черт. 104.) Допустим, что квадрат $ABCD$ является искомым; две его вершины принадлежат дуге сектора с центром O, а две другие — радиусам, ограничивающим его. Построим $OM \perp BC$. Так как радиус, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, то поэтому OM является осью симметрии квадрата. Следовательно, прямая OM сторону AD квадрата делит в точке N пополам. Так как в треугольнике OAD отрезок ON служит медианой и высотой, то поэтому $OA = OD$. Подвергнем квадрат $ABCD$ преобразованию гомотетии с центром гомотетии в точке O и произвольным коэффициентом. Так получим квадрат $A_1B_1C_1D_1$, гомотетичный искомому. Сторона A_1D_1 квадрата $A_1B_1C_1D_1$ есть отрезок, соединяющий точки A_1 и D_1, одинаково удаленные от точки O и принадлежащие радиусам, ограничивающим сектор, или их продолжениям. Точка C пересечения луча OC_1 и дуги сектора есть вершина искомого квадрата.



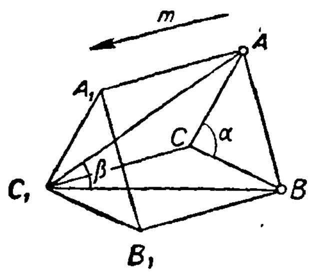
Черт. 104.

178. *Указание.* (Черт. 105.) Допустим, что точка L является искомой. Построим $LK \perp AB$. Тогда $LK = LM$. Подвергнем ломаную KLM преобразованию гомотетии с центром в точке B и произвольным коэффициентом. Так получим



Черт. 105.

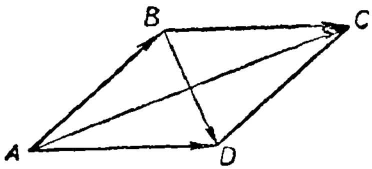
ломаную $K_1L_1M_1$, гомотетичную ломаной KLM. Ломаную $K_1L_1M_1$ построить можно. Для этого построим: 1) луч BM, 2) произвольную точку L_1 на луче BC, 3) $L_1K_1 \perp BA$, 4) $M_1 = BM \times$ окр. (L_1, L_1K_1). Точка пересечения луча BC и луча ML, параллельного M_1L_1, является искомой. Задача имеет два решения. **182.** Нет. **183.** Нет. **197.** *Указание.* Пусть точка A принадлежит окружности с центром O. Искомое геометрическое место точек есть окружность, одним из диаметров которой является радиус OA данной окружности. Точка A искомому геометрическому месту точек не принадлежит. Действительно, середина любой хорды, проведенной из точки A, лежит на окружности с диаметром AO, и, обратно, каждая точка этой окружности, кроме точки A, является серединой соответствующей хорды. **198.** *Указание.* Использовать геометрическое место точек, из которых отрезок виден под данным углом, и геометрическое место точек, найденное при решении задачи 197. **200.** (Черт. 106.) *Указание.* В силу условия задачи можно на карте построить вектор m, определяющий длину и направление пути, пройденного кораблем. Пусть маяки A и B с корабля, расположенного в первоначальном пункте C, видны под углом α. После того как корабль прошел путь CC_1, те же маяки из пункта C_1 стали видны под углом β. (На чертеже $\overline{CC_1} = m$.) Выполним преобразование параллельного переноса отрезка AB, определяемое вектором m. В результате этого преобразования отрезок AB займет положение A_1B_1. Так как $AA_1 = CC_1$, $AA_1 \parallel CC_1$, то четырехугольник C_1A_1AC — параллелограмм и, следовательно, $A_1C_1 \parallel AC$. Так же докажем, что $B_1C_1 \parallel BC$. $\angle A_1C_1B_1 = \angle ACB$, как углы с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами. Поэтому $\angle A_1C_1B_1 = \alpha$. Таким образом, точка C_1 есть точка пересечения геометрического места точек из которых отрезок AB виден под углом β, и геометрического места точек, из которых отрезок A_1B_1 виден под углом α. **201.** *Указание.* Точка пересечения диагоналей параллелограмма расположена в точке пересечения геометрического места точек, из которых меньшая сторона параллелограмма видна под данным углом, и геометрического места точек, удаленных от середины меньшей стороны на расстояние, равное половине большей стороны.



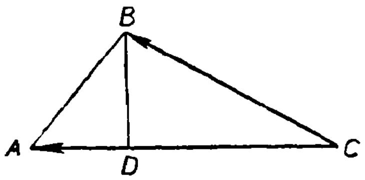
Черт. 106.

202. $t = h\sqrt{2\frac{l}{h} - 1} \approx 43{,}6$ *см*; $\alpha \approx 25°50'$. **203.** ≈ 14 *м*. **204.** $S \approx 21{,}87$ *кг*; $P \approx 12{,}86$ *кг*. **205.** $a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$; $a_5 \approx 1{,}2$; $a_7 \approx 0{,}87$. **206.** $b_n = 2r\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$.

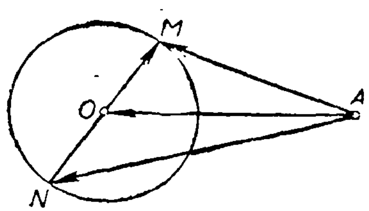
207. ≈ 86 *мм*; ≈ 118 *мм*. 208. $\approx 6{,}4\frac{км}{ч}$; $\approx 109^\circ$. 209. ≈ 13 *кг*; ≈ 17 *кг*. 210. $\approx 4{,}2$ *кг*; $\approx 9{,}1$ *кг*. 211. $\approx 87^\circ$. 212. $\approx 53^\circ$. 213. $S=\frac{l^2}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 214. $S=\frac{4r^2}{\sin\alpha}$. Площадь имеет наименьшую величину при $\alpha=90^\circ$. 215. $P=\frac{8R}{\sin\alpha}$; $S=\frac{4R^2}{\sin\alpha}$. 216. $S=d^2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{d^2}{2}\sin 2\alpha$. 218. $S\approx 456$ *дм²*. 219. $S=R^2\sin^2\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 220. $\approx 27^\circ$. 222. Перпендикулярно. 223. 120°. 224. -15. 225. а) 7, б) 7, в) -7, г) 28. 226. Гомотетии с коэффициентом, равным -7. 227. $\approx 15{,}65$. 228. $(\mathbf{a}, \mathbf{b})=45$. 229. 80. 230. -6. 231. 1) $\approx 14{,}39$; 2) $\approx 130{,}0$; 3) 12,79. 232. 1) В левой части имеем вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$ или противоположно ему, а в правой части — вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\mathbf{c}$ или противоположно ему. В общем случае равенство неверно. 2) Равенство имеет место только в том случае, если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ одинаково или противоположно направлены. 3) Равенство верно. 4) Так как $\mathbf{a}^2=a^2$, то $\sqrt{\mathbf{a}^2}\neq\mathbf{a}$. 233. Знак равенства слева выполняется в том случае, когда векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ противоположно направлены, и знак равенства справа выполняется в том случае, когда векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ одинаково направлены. 234. Нет. 235. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ перпендикулярны или по крайней мере один из них равен нулю. 236. *Указание.* (Черт. 107.) Стороны ромба $ABCD$ и его диагонали будем рассматривать как векторы. Примем, что $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AD}$ и $\overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}$. Тогда $\overline{AC}\cdot\overline{BD}=(\overline{AD}+\overline{AB})(\overline{AD}-\overline{AB})=AD^2-AB^2=0$. Следовательно, $\overline{AC}\perp\overline{BD}$. 237. *Указание.* (Черт. 108.) Пусть в треугольнике ABC $\angle ABC=90^\circ$ и $BD\perp AC$. Стороны CB и CA будем рассматривать как векторы $\overline{CB}$ и $\overline{CA}$. Тогда $(\overline{CB}\cdot\overline{CA})=CA\cdot CD=CB^2$. 238. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. 239. 1) 20; 2) 9. 240. 14 *см*. 241. 7 *см*. 242. 4.



Черт. 107.



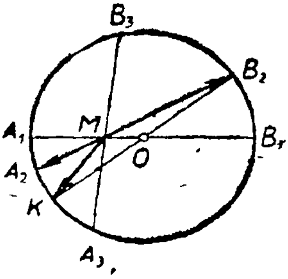
Черт. 108.



Черт. 109.

244. 7 *см*. 245. Разность квадратов диагоналей параллелограмма равна учетверенному произведению двух смежных сторон на косинус угла между ними. 247. *Указание.* (Черт. 109.) Рассмотрим случай, когда точка A лежит вне данного круга O. Векторы, соединяющие точку A с концами од-

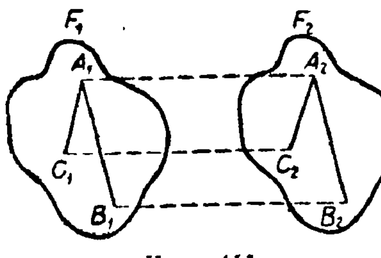
ного из диаметров, обозначим через $\overline{AM}$ и $\overline{AN}$. Имеем $\overline{AM}+\overline{AN}=2\overline{AO}$; $\overline{AM}-\overline{AN}=\overline{NM}$. Используем тождество, приведенное в задаче 246: $(\overline{AM}\cdot\overline{AN})=$ $=\left(\frac{2\overline{AO}}{2}\right)^2-\left(\frac{\overline{NM}}{2}\right)^2=AO^2-NO^2$. Таким же образом можно рассмотреть случай, когда точка A расположена внутри круга. **249.** *Указание.* (Черт. 16.) Пусть дана точка M, расположенная вне круга O, секущие окружности MA_1B_1, MA_2B_2, ... и касательная MK. Через точку B_1 секущей MB_1 проведем диаметр B_1C. Тогда в силу равенства (1), приведенного в задаче 248, имеем. $(\overline{MB_1}\cdot\overline{MC})=MB_1\cdot MA_1$. В силу тождества, приведенного в задаче 246, имеем $(\overline{MB_1}\cdot\overline{MC})=MO^2-\frac{B_1C^2}{4}=\text{const}$. Сопоставляя последние два равенства, найдем: $MB_1\cdot MA_1=MO^2-\frac{B_1C^2}{4}=$ $=\text{const}$. Через точку K проведем диаметр KB_4. Вторую точку пересечения секущей MB_4 с окружностью обозначим через A_4. Имеем $(\overline{MB}\cdot\overline{MK})=$ $=MA_4\cdot MB_4$. В то же время $(MB_4\cdot MK)=MK^2$. Следовательно, $MA_1\cdot MB_1=MA_2\cdot MB_2=\ldots=MK^2$.



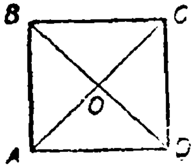
Черт. 110

250. *Указание.* (Черт. 110.) Пусть внутри круга O даны точка M и хорды A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ..., проходящие через точку M. Через точку B_2 проведем диаметр B_2K и точку K соединим с точкой M. Тогда $(\overline{MB_2}\cdot\overline{MK})=-MA_2\cdot MB_2$ и $(\overline{MB_2}\cdot$ $\cdot\overline{MK})=MO^2-\frac{KB_2^2}{4}=\text{const}$. Поэтому $MA_2\cdot MB_2=$ $=\text{const}$. Если отрезки A_1M и MB_1 расположены на диаметре, то $MA_1\cdot MB_1=(OA_1-OM)(OB_1+$ $+OM)=\frac{KB_2^2}{4}-OM^2$. Следовательно, $MA_1\cdot MB_1=$ $=MA_2\cdot MB_2=\ldots=\text{const}$. **251.** 1) $\sqrt{57}\approx7{,}6$; 2) 13 *см*. **252.** $AC\approx3{,}3$ *км*; $AB\approx4{,}8$ *км*. **253.** ≈23 *км*. **254.** ≈1610 *м*. **255.** ≈66 *дм*. **256.** 24 *см*, 11 *см*. **257.** 0,9 *км*; 2,4 *км*. **258.** ≈9 *см*. **259.** $R=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\varphi}$, наибольшее значение $R=P+Q$ при $\varphi=0°$, наименьшее значение $R=|P-Q|$ при $\varphi=180°$; $R\approx18{,}7$ *кг*. **260.** $\approx69°$; $\approx43°$. **261.** $\approx35°26'$; $\approx48°11'$; $\approx96°23'$. **262.** $\approx34°36'$; $\approx45°55'$. **263.** $\approx126°52'$; $\approx96°44'$; $\approx136°24'$. **264.** $\approx96°50'$. **265.** $\approx90°$. **266.** $\approx79°$. **267.** 4,2 *см*. **269.** 1) Прямоугольный, 2) остроугольный, 3) тупоугольный. **270.** x — длина третьей стороны. 1) $5<x<7$; 2) $\sqrt{74}<x<12$. **271.** x — длина третьей стороны, 1) $7<x<13$; 2) $2<x<10$. **272.** 9 *см* и 5 *см*. **273.** 17 *см*. **274.** 8,5 *см*. **275.** 8,4 *см*. **276.** $\sqrt{R^2+3r^2}$. **277.** $\sqrt{2r^2-2r\sqrt{r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}$. **279.** $\approx44°25'$; $\approx135°35'$; $\approx78°28'$; $\approx101°32'$. **280.** 1) $c\approx72{,}3$; $b\approx91{,}8$; $\angle B=62°$; 2) $b\approx25$, $a\approx39$; $\angle C=14°15'$, 3) $a\approx225$; $b\approx800$; $\angle C\approx36°44'$; 4) $b\approx28$; $c\approx42$; $\angle A\approx124°$. **281.** ≈17 *кг*; ≈19 *кг*. **282.** $\frac{a\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. **283.** $\frac{a\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$; ≈56 *м*. **285.** $\approx3{,}8$ *м*. **286.** $2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$. **287.** $\frac{(a^2-b^2)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha-\beta)}$. **288.** $R\approx2$ *дм*, $r\approx0{,}7$ *дм*. **289.** 1) $c\approx76$ *дм*, $\angle B\approx46°24'$, $\angle C\approx57°51'$.

$S \approx 2394$ *дм*^{2}; 2) $a \approx \begin{cases} 55{,}42 \text{ см} \\ 615{,}7 \text{ см}, \end{cases}$ $\angle A \approx \begin{cases} 3°44' \\ 133°48', \end{cases}$ $\angle B \approx \begin{cases} 155°2' \\ 24°58', \end{cases}$ $S \approx \begin{cases} 3613 \text{ см}^2 \\ 40\,150 \text{ см}^2; \end{cases}$ 3) задача не имеет решения; 4) $C \approx 433{,}8$ *дм*, $\angle A \approx 90°$, $\angle C \approx 68°11'$, $S \approx 36\,850$ *дм*^{2} **290.** $\approx 18{,}8$ *м* или $\approx 5{,}3$ *м*. **291.** $\approx 4{,}5$ *см*; $\approx 9{,}8$ *см*. **292.** $\approx 3{,}9$ *дм*; $\approx 1{,}3$ *дм* **293** $\approx 3{,}7$ *дм*, $S \approx 5{,}3$ *дм*^{2}. **294.** 1) Достроить треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$, диагональ которого $DB = 2m_b$. Из треугольника BCD найти DC, затем решить треугольник ABC по двум сторонам и углу между ними. 2) Достроить треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$. Из треугольника DCB найти $\angle DCB$, затем решить треугольник ABC. 3) Из прямоугольного треугольника BCE, в котором $EC = h_c$ и $\angle CBE = \beta$, найти CB. Затем задача решается так же, как и задача (1). 4) Достроить треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$, диагональ которого $BD = 2m_b$. Из прямоугольного треугольника DBE, в котором гипотенуза $BD = 2m_b$, катет $DE = h_a$, найти $\angle DBE$; из прямоугольного треугольника DBL, в котором гипотенуза $BD = 2m_b$ и катет $DL = h_c$, найти $\angle DBL$; затем решить треугольник ABC. **295.** 1) 84 *см*^{2}, 2) 60 *дм*^{2}; 3) $\approx 5{,}3$ *м*^{2}; 4) 528 *см*^{2}; 5) 3,5 (кв. ед.). **296.** 1) 20 *см*, 28,8 *см*; 2) 2,4 *см* **297.** 1) 30 *см*; 2) 70 *мм*. **298.** 1) 18 *см*, 20 *см*, 34 *см*; 2) 42 *см*. **299.** $\approx 0{,}12$ *м*^{2} **300.** 270 *см*^{2}. **302.** 1) $r = 1{,}5$ *см*; $R = 8\frac{1}{8}$ *см*. 2) $r = 7\frac{3}{4}$ *м*; $R = 69\frac{1}{16}$ *м*. **303.** 480 *см*^{2}. **304.** $16\frac{1}{4}$ *см*; 3 *см*. **305.** Луч O преобразуется в луч. Рассматриваемое преобразование является взаимно однозначным. **306.** Рассматриваемое преобразование не является взаимно однозначным. **310.** *Указание.* Искомая прямая проходит через центры симметрии данных параллелограммов. **311.** *Указание.* Всякий четырехугольник, имеющий центр симметрии, есть параллелограмм. (Смотри задачу 45.) Всякий же параллелограмм, вписанный в окружность, есть прямоугольник. **313.** $x_1 = -x$; $y_1 = -y$, где (x, y) — координаты произвольной точки фигуры F и $(x_1 y_1)$ — координаты соответствующей ей точки фигуры F_1. **318.** *Указание.* (Черт. 111.) Пусть фигуры F_1 и F_2 удовлетворяют условию задачи. Допустим, что отрезки A_1B_1 и A_2B_2 являются соответственными. Тогда $A_1B_1 = A_2B_2$ и $A_1B_1 \| A_2B_2$. Следовательно, четырехугольник $B_1A_1A_2B_2$ — параллелограмм, и поэтому $A_1A_2 \| B_1B_2$ и $A_1A_2 = B_1B_2$ Это значит, что отрезок A_2B_2 может быть получен из отрезка A_1B_1 с помощью параллельного переноса, определяемого вектором $\overline{A_1A_2}$. Покажем, что произвольная точка C_2 фигуры F_2 может быть получена из соответственной точки C_1 фигуры F_1 с помощью параллельного переноса, определяемого вектором $\overline{A_1A_2}$. Так как отрезки A_1C_1 и A_2C_2 являются соответственными, то $A_1C_1 \| A_2C_2$ и $A_1C_1 = A_2C_2$. Следовательно, $C_1C_2 = A_1A_2$ и $C_1C_2 \| A_1A_2$. Кроме того, отрезки A_1A_2 и C_1C_2 одинаково направлены. Следовательно, $\overline{C_1C_2} = \overline{A_1A_2}$. **321.** $\alpha = 360° n + 220°$; $-140°$. **323.** *Указание.* (Черт. 112.) Допустим, что точка O обладает тем свойством, что



Черт. 111.



Черт. 112.

при повороте вокруг нее четырехугольника $ABCD$ вершина A займет положение вершины B, вершина B займет положение вершины C и т. д. Это значит, что $OA=OB=OC=OD$ (1) и $\angle AOB=\angle BOC=$ $=\angle COD=\angle DOA$ (2). Из равенств (1) и (2) следует, что линии AOC и BOD являются равными отрезками перпендикулярных прямых. Четырехугольник $ABCD$ — квадрат, так как его диагонали равны и перпендикулярны **326.** Если отрезки равны и одинаково направлены, то один из другого может быть получен с помощью параллельного переноса или в частном случае с помощью преобразования осевой симметрии. Если отрезки равны и противоположно направлены, то один из другого может быть получен с помощью симметрии относительно точки вращения или гомотетии с внутренним центром гомотетии. Если отрезки не равны, один из другого может быть получен с помощью гомотетии с внутренним или внешним центром в зависимости от того, различно или одинаково направлены отрезки **327.** Параллельный перенос, осевая симметрия, центральная симметрия. **330.** $|a+b|=\sqrt{7}$; $|a-b|=1$. **332.** $\approx 27{,}15$. **333.** $\approx 162°18'$. **334.** $\approx 43{,}8$ *см.* **335.** $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$. **336.** $\approx 26{,}66$. **337.** Одну или три. **338.** Не всегда. **341.** Не может. **345.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **351.** Нет. **352.** AB и CD — скрещивающиеся прямые. **354.** а) Нет; б) да. **356.** Нет. **361.** 1) 90°; 2) 45°; 3) 90°; 4) 60°. **362.** 1) Бесконечное множество; 2) бесконечное множество, но только одна пересекает данную прямую **366.** Да. **367.** Нет. **374.** 1) Если данные прямые пересекают данную плоскость в различных точках; 2) если: а) обе прямые пересекают плоскость в одной точке; б) обе лежат в плоскости; в) одна прямая лежит в плоскости, а другая пересекает плоскость; 3) если хотя бы одна из данных прямых параллельна данной плоскости. **375.** 28 *см.* **377.** $\dfrac{9a^2}{8}$. **380.** Нельзя. **381.** Да. **382.** Да. **385.** Плоскость, проходящая через данную точку и параллельная данной плоскости. **386.** $\dfrac{(a+b+c)(m+n)}{m}$. **389.** Плоскость, параллельная данным плоскостям. **390.** $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **431.** Перпендикулярно. **432.** Перпендикулярна, если хорды не параллельны. **433.** $\operatorname{tg} x=\sqrt{2}$; $x\approx 54°44'$. **435.** Прямоугольный. **438.** $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$. **440.** *Указание.* Доказать, что BD перпендикулярна к двум прямым плоскости AOK. **446.** *Указание.* В треугольниках ABC и ABD провести высоты на сторону AB. **449.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **450.** Плоскость, перпендикулярная к отрезку, соединяющему данные точки, и проходящая через середину этого отрезка. **452.** *Указание.* Построить точку A_1, симметричную точке A относительно плоскости α. **454.** 100 *см*; ≈ 117 *см.* **455.** $\sqrt{2}$ *см* $\approx 1{,}4$ *см.* **456.** $2a\sqrt{2}$. **457.** $\dfrac{a}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta}\cdot\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}\approx$ $\approx 9{,}38$ *дм.* **458.** Прямая, проходящая через центр окружности и перпендикулярная к ее плоскости. **460.** *Указание.* См. задачи 458 и 450. **461.** 6,5 *см.* **462.** 8 *см.*

463. $\frac{1}{2}\sqrt{d^2+2a^2}$. 464. 3,75 *см* 465. Две плоскости, параллельные данной плоскости. 466. Четыре прямые, параллельные линии пересечения данных плоскостей. 467. Плоскость, проходящая через любую из точек, равноудаленную от данных плоскостей, и параллельная данным плоскостям. 469. $\sqrt{4a^2+m^2}$. 470. Да. 471. $\sqrt{l^2-a^2}$. 472. Прямая, проходящая через центр окружности, вписанной в многоугольник, и перпендикулярная к плоскости многоугольника. 473. Правильный треугольник. 475. 17 *см*. 476. 15 *см* и 20 *см*. 477. $\sqrt{a^2+b^2}$. 478. 25 *см* или 39 *см*. 479. 8 *см*. 480. $\sqrt{2b^2-a^2}$. 482. $\arccos(\sqrt{2}\cos\alpha)$. 485. Окружность, центром которой служит основание перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость α. 487. 60°. 488. Нет. Наибольшая величина угла 45°. 489. $\approx 28,3$ *м*; $\approx 24,5$ *м*. 490. $2\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\right)$. 491. $\approx 35°16'$; $\approx 35°16'$; 45°. 493. $\frac{d\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\varphi}$. 497. $\frac{a\sin\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. 498. $2\,\mathrm{arcctg}\,(2\cos\alpha)$. 499. $8+\sqrt{14}\approx 11,7$ (*см*) или $8-\sqrt{14}\approx 4,3$ (*см*). 500. $\frac{a\sin\alpha}{\sin\beta}$. 501. $\arccos\frac{3}{4}\approx 41°24'$; $2\arccos\frac{3}{4}\approx 82°50'$. 506. Сторона треугольника равна $h\sqrt{6}$; $ME=MF=\frac{h\sqrt{6}}{2}$. 507. $\approx 4\%$. 508. $\frac{3ab}{2\sqrt{3b^2+a^2}}$. 512. 45°. 518. $\frac{a}{4}$. 519. $1:(\sqrt{2}-1)$. 520. $2\arcsin\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}}\approx 36°6'$. 521. $\frac{a}{2}\sqrt{5}$. 522. $2\arccos\left(\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$. 523. 13 *см*. 524. $\arccos(\mathrm{ctg}\,36°\cdot\mathrm{tg}\,18°)\approx 63°26'$. 525. 1) $\sqrt{6}$ *см* $\approx 2,4$ *см*; 2) $4\sqrt{2}$ *см*² $\approx 5,7$ *см*². 526. 45°. 527. $\arcsin(\sin\alpha\cdot\sin\beta)$. 528. Две биссекторные плоскости двугранных углов, образованных пересекающимися плоскостями. 538. ≈ 16 *м*. 539. $a\sqrt{\cos 2\alpha}$ 540. Плоскость, перпендикулярная к плоскости, определяемой данными прямыми, и пересекающая ее по прямой, равноудаленной от данных прямых. 541. Две плоскости, перпендикулярные к плоскости, определяемой данными прямыми, и делящие пополам углы между данными прямыми. 542. 1) Да; 2) нет; 3) нет. 543. 1) Нет; 2) нет; 3) да; 4) нет. 546. 14 *см*². 547. $2a(1+\sqrt{3})$. 549. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. 550. 90°. 551. $\arccos\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha\right)$. 552. $\arccos\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$. 555. Многогранник, призма, параллелепипед, прямой параллелепипед. 556. Нет. 557. Да. 558. 1) Нет; 2) да. 559. Прямоугольники. 561. Через основания трапеции. 562. 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) нет. 563. $2d\,(n-2)$. 564. 3) $4d\,(n-1)$. 565. Часть плоскости, проходящей параллельно основаниям параллелепипеда через точку пересечения его диагоналей, ограниченная призматической поверхностью. 568. Середина отрезка, соединяющего центры оснований. 569. 4) $n\,(n-3)$. 570. 14 *м*. 571. 12 *см*; $\approx 44°54'$. 573. $a\sqrt{2}$; 45°. 574. 5; 7. 575. $2\,\mathrm{arctg}\,(\mathrm{ctg}\,\alpha\times\mathrm{tg}\,\beta)$. 576. 120°. 577. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 578. 7,2 *см*. 581. 200 *дм*²; 300 *дм*². 582. $Q\sqrt{3}$. 583. $2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\approx 364,8$ *дм*². 584. $\frac{S\sqrt{3}}{2a}$. 585. 98 *см*². 586. $\frac{a^2\sin 2\alpha}{\cos\varphi}$.

595. $2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{6}}{3}$, $2\,\mathrm{arc\,ctg}\,\frac{\sqrt{6}}{3}$. 596. 9 кв. ед. 597. $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$; 60°. 598. $3a^2$.

599. $\frac{5a^2\sqrt{39}}{12}$. 600. $\frac{l\cdot\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$ 603. 120 *см*² и $\frac{130\sqrt{3}}{3}$ *см*² ≈ 75 *см*² или 120 *см*² и $130\sqrt{3}$ *см*² ≈ 225 *см*². 604. $a/\sqrt{2}$; $a\sqrt{2l^2-a^2}$. 605. $2\,\mathrm{arc\,ctg}\,(\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta)$.

608. $\frac{Q\sqrt{6}}{4}$. 610. a^2; $a^2\sqrt{2}$. 611. 72 *дм*². 612. $3Q\sqrt{2}$. 613. 108 *см*².
614. Увеличится в два раза. 615. 562 *см*. 616. $4d^2\sin\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$ 617. 88 *см*².
618. М 1 : 2; ≈93 *см*². 619. 720. 620. $540\sqrt{3}$ *см*² ≈ 935 *см*². 621. $a^2(2+\sqrt{2})$.
622. $373\frac{1}{3}$ *см*². 623. 180 *см*². 624. 3 : 1; $6\sin\alpha : 1$. 626. $3ab$. 627. $2c\sqrt{Q}\,(1+\sqrt{2})$.

628. 120 *м*². 629. $2a\sqrt{4b^2-a^2}$ при $b > \frac{a\sqrt{2}}{2}$. 630. 492 *см*². 631. $ab+\frac{a}{2}\sqrt{16b^2-9a^2}$ при $b>\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 632. $4ab\sin\alpha$. 633. $2ab\,\mathrm{ctg}\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$. 634. $10\,(6+7\sqrt{3})$ *см*² ≈ 180 *см*². 635. 3) $360°(n-1)$. 636. Двугранный угол всегда острый. Боковое ребро больше радиуса основания, апофема пирамиды больше апофемы основания. 637. Сторона AC должна быть равна стороне правильного многоугольника. 638. При $n=3$; $n=4$; $n=5$. 639. Нет. 641. Сумма углов B, E и M должна быть меньше 360°, и каждый из них — меньше суммы двух других. Необходимо, чтобы $AB=BC=ED=EF=LM=MN$. 642. Углы B, E и M должны удовлетворять тем же условиям, как и в задаче 641. Стороны одного треугольника, например ABC, могут быть произвольными. Тогда в другом треугольнике DEF одна из сторон, заключающих угол E, например DE, должна равняться или AB, или BC. Если $DE=AB$, то в треугольнике LMN должно быть $LM=EF$ и $MN=BC$. 646. 3) $\frac{n(n-3)}{2}$. 647. $\frac{a\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$. 648. $b\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}$. 649. $\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos\alpha}$. 650. $\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)$.

651. 1) Линия пересечения поверхности данной пирамиды с плоскостью, проходящей через середину стороны основания, которая заключена между заданными вершинами, и через высоту пирамиды. 2) Линия пересечения поверхности пирамиды с плоскостью диагонального сечения, проходящего через другие вершины основания. 658. 72 *см*. 659. $\frac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{2b}$. 661. 1) Любой треугольник; 2) прямоугольник; 3) равнобедренная трапеция. 662. 1) Остроугольный; 2) тупоугольный; 3) прямоугольный. 664. $\frac{c\cdot\mathrm{tg}\,\varphi}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

667. 1) Любой треугольник; равносторонний параллелограмм; 2) четырехугольник, у которого сумма противоположных сторон равна сумме двух других сторон. 670. $\frac{b^2-4a^2}{8a}$. 671. $\mathrm{arc\,tg}\,(\mathrm{tg}\,\beta\cdot\sin\frac{\alpha}{2})$; $\mathrm{arc\,tg}\,(\mathrm{tg}\,\beta\cdot\cos\frac{\alpha}{2})$.

672. 3 ребра. 673. 45°; 90°; 90°. 675. $\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\gamma\right)$. 677. $\frac{2b}{\sin 2\alpha}$; $\frac{b}{\cos\alpha}$.

679. $\frac{mn\sqrt{2}}{\sqrt{n^2-m^2}}$. 680. $\frac{b\sqrt{6}}{4}$. 681. $\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{-2\cos\alpha}}$. $\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{-2\cos\alpha}}$. 682. $2\arcsin\left(\frac{1}{2\cos\alpha}\right)$. 690. $\frac{9Q}{16}$; $\frac{Q}{4}$; $\frac{Q}{16}$. 691. 1) $\frac{h\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{h\sqrt{n}}{n}$. 692. $\frac{h\sqrt{6}}{2}$.

693. $\frac{h}{a} < \frac{\sqrt{3}}{2}$. 694. $\frac{b^2}{2}\cos\alpha$. 695. $\frac{15h^2\cos\alpha}{16\sin^2\alpha}$. 696. $\frac{5al\sqrt{2}}{16}$. 697. $\frac{2ab}{9}$.

699. Если хотя бы одно из ребер пирамиды больше a. 700. $-a^2\cos 2\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$.

701. $\frac{3b^2}{2}$. 702. $\frac{a^2\sin(45^\circ+\frac{\alpha}{2})}{\sin 45^\circ\sin\frac{\alpha}{2}}$. 703. $\frac{3l^2\sqrt{3}\cos\alpha}{4}\sqrt{4-3\cos^2\alpha}$.

704. $5H^2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}36^\circ\operatorname{ctg}(45^\circ-\frac{\beta}{2})$. 705. $3k^2$. 706. $\frac{a^2\sqrt{11}}{2}$. 707. $\frac{3a^2}{2}$.

708. $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. 709. $\frac{3a^2(3+\sqrt{3})}{4}$. 710. $k^2\cdot(3+\sqrt{3})$. 711. $\frac{16Q}{3}$. 712. $\frac{108Q}{25}$.

713. $\frac{h\sqrt{2}}{2}$. 715. $\frac{3a^2}{8\sqrt{\sin(\frac{\varphi}{2}-30^\circ)\sin(\frac{\varphi}{2}+30^\circ)}}\approx 1100$ *дм*^{2}. 716. $2(2\sqrt{5}+\sqrt{2})$ *см*$^2\approx 11{,}8$ *см*^{2}. 717. $2b^2$. 719. 125 *дм*^{2}. 720. 20,01 *м*^{2}. 722. $2a^2$.

723. $12\sqrt{2}$ *см*^{2}. 724. $\frac{4H^2\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi}$. 725. $\frac{l^2\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$. 726. 79,2 *м*^{2}.

727. 320 *дм*^{2}. 728. 180 *см*^{2}. 729. $\frac{a^2}{4}(4+\sqrt{3}+\sqrt{7})$. 730. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5})$.

731. $2(11+\sqrt{34})$ *м*$^2\approx 33{,}7$ *м*^{2}. 734. Нет. 737. $\frac{(a-b)\sqrt{2}}{2\cos\alpha}$. 738. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ *дм* $\approx 3{,}5$ *дм*. 739. $\frac{(a-b)\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha$. 740. $2\sqrt{3}$ *см* $\approx 3{,}5$ *см*. 743. $\frac{a^2-b^2}{4}$.

744. 4 *см*^{2}. 746. $a^2\sin^3\alpha$. 749. $\frac{Q+4\sqrt{Qq}+4q}{9}$; $\frac{q+4\sqrt{Qq}+4Q}{9}$. 750. $S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[a^2+b^2+(a+b)\sqrt{12h^2+(a-b)^2}\right]$; $S_4=a^2+b^2+(a+b)\sqrt{4h^2+(a-b)^2}$; $S_6=\frac{3}{2}\left[a^2\sqrt{3}+b^2\sqrt{3}+(a+b)\sqrt{4h^2+3(a-b)^2}\right]$. 752. $\frac{ab}{a+b}$. 753. $16\sqrt{15}$ *см*$^2\approx 62$ *см*^{2}.

755. $6a^2$. 756. $\frac{12H^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$. 757. $8a^2\sqrt{1+8\operatorname{ctg}^2\alpha}$. 758. $h(2b-h)(1+\sqrt{2})$.

759. $\frac{\sqrt{3}}{4}\left[a^2+b^2+(a^2-b^2)\sqrt{3}\right]$. 762. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a(2b^2-a^2)}{2b+a}}$. 763. Нет. 767. Правильный тетраэдр с ребром $\frac{a}{3}$. 768. $S_4=a^2\sqrt{3}$, $S_6=6a^2$; $S_8=2a^2\sqrt{3}$, $S_{12}=3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$; $S_{20}=5a^2\sqrt{3}$. 771. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. 772. $\approx 70^\circ 32'$; $\approx 109^\circ 21'$; $\approx 138^\circ 12'$; $\approx 116^\circ 34'$. 778. $2l\sqrt{R^2-a^2}$. 779. 3 *дм*. 780. $\arccos(\operatorname{tg}\alpha)$. 781. 2 *см*.
782. 100 *см*^{2}. Площадь второго квадрата равна 4 *см*^{2}. 783. $2\sqrt{3}$ *см* $\approx 3{,}5$ *см*.

790. ≈ 77 *м*. 791. $\approx 8{,}5$ *см*^{3}. 792. ≈ 33 *м*. 793. $\approx 0{,}6\%$. 794. 2π *м*$^2 \approx 62{,}8$ *м*^{2}.

795. $\dfrac{\pi P^2\sin^2\alpha}{16\cos^4(45^\circ-\frac{\alpha}{2})}$. 796. $2{,}5\pi$ *дм*$^2 \approx 7{,}85$ *дм*^{2}. 797. πM. 798. $\dfrac{\pi c^2\sqrt{\sin(\alpha+\varphi)\cdot\sin(\alpha-\varphi)}}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\varphi}$.

799. $\frac{3}{2}(3-2\sqrt{2})\pi a^2$. 805. 3 *см*. 806. $6\sqrt{2}$ *см* $\approx 8{,}5$ *см*. 807. $\arcsin\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}\right)$.

808. $\dfrac{R^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin(\frac{\alpha}{2}+\beta)\sin(\frac{\alpha}{2}-\beta)}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\beta}$. 809. 4 *дм*. 811. $(2-\sqrt{2})$ *дм* $\approx 0{,}6$ *дм*.

813. 90°; $\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta}\right)$; $\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta}\right)$. 817. $\dfrac{2bR}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. 820. 160°. 821. $1:\sqrt{15}$.

824. $\dfrac{2\pi Rr}{r+R}$. 825. $\dfrac{\pi a^2}{2}$. 826. $\sqrt{m^2+\pi^2n^2}$. 827. $\dfrac{\pi a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\beta\cos\alpha}$; ≈ 2859. 828. 2,5; 1,5.

829. $\dfrac{2\pi r^2\sin\frac{\beta+\alpha}{4}\cos\frac{\beta-\alpha}{4}}{\sin\frac{\beta}{2}}$. 830. $1:\sqrt{2}$. 831. $40{,}8\pi$ *дм*$^2 \approx 128$ *дм*^{2}.

832. $\dfrac{\pi r^2\sin\frac{180^\circ}{n}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. 833. $\dfrac{\pi a^3}{8h}$. 834. $242\pi \approx 760$. 835. $\dfrac{Q}{6}(7+4\sqrt{3})$.

836. $\dfrac{\pi a^3}{\sqrt{9a^2-12l^2}}$; $\dfrac{\pi a^3}{3\sqrt{a^2-12l^2}}$. 837. $11\frac{1}{4}$ *м*^{2}; $33\frac{3}{4}$ *м*^{2}. 838. $\sqrt{2}\approx 1{,}4$.

839. $\dfrac{\pi h^3}{l}$. 840. 1,6. 842. 7 *см*; 6 *см*. 844. $\dfrac{\pi h^2}{4}$. 848. $(R^2-r^2)\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$.

853. 6,5 *дм*. 855. ≈ 150 *см*^{2}; 300 *см*^{2}. 856. 1) $\approx 0{,}96$ *м*^{2}; 2) практически невозможно. 857. $\dfrac{\pi(R^2-r^2)}{\cos\alpha}$. 858. 8. 859. $\dfrac{S\sqrt{3}}{2\pi}$. 860. 1404π *см*$^2 \approx 4410$ *см*^{2}.

861. $\pi d^2\sin\alpha$. 862. $6\pi a^2$. 863. $6\pi a^2\sqrt{3}$. 864. $\dfrac{3\pi a^2}{16}$. 865. $20\pi \approx 62{,}8$.

866. $60\pi \approx 189$; $100\pi \approx 314$; $140\pi \approx 440$. 867. 2 *см*. 868. 120°.

869. При условии, что все точки линии лежат в одной плоскости. 870. Сфера данного радиуса с центром в заданной точке. 871. Прямая, перпендикулярная плоскости, проходящей через три данные точки, и пересекающая эту плоскость в центре окружности, содержащей данные точки. 872. Пусть O — центр окружности, проходящей через данные точки A, B, C, и R — данный радиус. Тогда, если $R>OA$, — два решения, если $R=OA$,— одно решение и, если $R<OA$,— нет решения. 875. Все точки сферы с центром в середине данного отрезка и радиусом, равным половине его, за исключением двух точек — концов отрезка. 876. $\dfrac{\pi R^2}{4}$. 877. $\sqrt{R^2-\dfrac{c^2}{4}}$.

878. 1) $\approx 1{,}85$ *км*; 2) $\approx 20\,000$ *км*; 3) ≈ 630 *км*. 879. 1) Если $a<R$,— две сферы, центры которых совпадают с центром данной сферы, радиус одной из них $R+a$, другой $R-a$; 2) если $a=R$,— совокупность центра данной сферы и сферы, центр которой совпадает с центром данной сферы, а радиус равен $2R$. 880. 1 *см*; 9 *см*. 881. $\sqrt{H(2R+H)}\approx\sqrt{2RH}$, где R—радиус земного шара. 882. l. 883. $R\sqrt{3}$. 884. Две плоскости, параллельные данной

плоскости и удаленные от нее на расстояние r. **885.** 4 : 3. **886.** $\pi r^2 \sin^2\alpha$ **888.** 5 *см*. **890.** $\frac{\pi r^2\sqrt{15}}{2}$. **892.** $\frac{r}{3}(2\sqrt{6}+3)$; $\frac{r}{3}(2\sqrt{6}-3)$. **893.** $3\pi R^2$. **894.** Увеличится в 4 раза, в 9 раз, в n^2 раз. **895.** $\approx 0{,}07$; $\approx 12\,500$. **896.** ≈ 1360 *см*². **897.** ≈ 36 *кг*. **898.** Бо́льшая поверхность равновелика сумме двух других. **899.** $\frac{2R}{3}$. **900.** 3 *см*². **901.** $\frac{\pi h^2}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}$. **902.** $\frac{2\pi R^2H}{R+H}$. **903.** $2R$.

904. $\pi R\sqrt{3}$; $2\pi R$; $\pi R\sqrt{3}$. **905.** $\frac{2Q}{\cos^2\alpha}$. **907.** $8\pi R^2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **908.** $\frac{1}{2}\pi R^2\times(2+\sqrt{3})$. **909.** $5+2\sqrt{3}\approx 8{,}5$ (*см*²). **911.** $\frac{8\pi R^2 m(m+n)}{4m^2+n^2}$. **912.** $2\pi r^2\sin 2\alpha$.

914. $\frac{2Q}{3}$. **916.** $\frac{r}{\sin\alpha}$. **917.** $\frac{l^2}{2h}$. **918.** 96π *см*² ≈ 302 *см*². **919.** $\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha}$.

920. $\pi r^2(7+5\sqrt{2})$. **921.** $2c\cdot\sin\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$. **922.** 3 : 7. **925.** $\frac{2}{3}\sqrt{21}$ *см* $\approx 3{,}06$ *см*.

926. $2\pi R^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{4}$; ≈ 1339 *см*. **927.** $\frac{4\pi R^2}{\sin^2\alpha}$ **928.** $4\pi r_1 r_2$; $\arccos\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}$. **931.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **932.** $\sqrt{4R^2-a^2}$. **935.** $4\sqrt{3}$ *см* ≈ 7 *см*.

936. $\frac{RS}{2a}$. **938.** $\frac{4}{3}\pi h^3$. **939.** $\frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}\sin 2\alpha}$. **940.** $\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\sin 2\alpha}$, где $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$; $\approx 10{,}82$ *см*. **941.** $\pi(a^2+d^2)$. **942.** $\frac{b}{2}\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\beta\sec^2\frac{\alpha}{2}}$.

945. $\frac{h}{3}$. **946.** $\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}$. **947.** $3\frac{1}{3}$ *см*. **948.** $\frac{a}{2}\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. **949.** $b\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$.

952. 1 *см*. **954.** ≈ 38 литров. **955.** 1) На перпендикуляре к плоскости данного круга, пересекающем окружность; 2) на перпендикуляре к плоскости данного круга, не пересекающем окружность; 3) точка может быть расположена в пространстве произвольно. **956.** $\pi r^2(2+\sqrt{2})$.

957. $\frac{9a^2\sqrt{\sin\left(60°+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60°-\frac{\alpha}{2}\right)}}{4\sin 60°\sin\frac{\alpha}{2}}$. **958.** $\frac{b^2}{2\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}}$. **960.** $\frac{h^2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\sin^2\alpha}$; ≈ 283 *дм*².

962. $\frac{2\pi a^2\sin\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos 45°}$. **966.** $2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)$. **967.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; $\frac{a\sqrt{6}}{12}$.

968. $\frac{\pi a^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\beta}$. **969.** $\frac{2S\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\beta\sin\frac{\alpha}{2}}$. **970.** $-r\operatorname{ctg}2\alpha$, если $\alpha>45°$; O, если $\alpha=45°$; $r\operatorname{ctg}2\alpha$, если $\alpha<45°$. **972.** $\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$. **973.** Периметры равны, площади относятся как 2 : 2 : 3. **974.** $0{,}25\,Q$ *или* $1{,}75\,Q$.

976. $\frac{l^2}{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$. **977.** $\frac{a^2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$. **978.** 90°. **979.** $d\sin\frac{\alpha}{2}$. **980.** 1) 54 *м*²;

1121. Выльется около 100 $см^3$. **1124.** $4\pi a(a+2h)$; $\frac{\pi a^2\sqrt{3}(a+2h)}{2}$.
1125. 37 : 61. **1126.** 84π $см^3 \approx 264$ $см^3$. **1127.** $1:\sqrt{10}$. **1128.** $\frac{7}{27}\pi d^3 \cos\alpha \sin^2\alpha$.
1129. $\frac{1}{12}\pi l^3 \sin\alpha(2-\cos 2\alpha)$; $2\pi l^2 \sin\frac{\alpha+30^\circ}{2}\cos\frac{\alpha-30^\circ}{2}$. **1130.** $63\pi\sqrt{3}$ $дм^3 \approx$ ≈ 343 $дм^3$. **1131.** $\frac{13\pi a^2 b}{6}$. **1133.** $\frac{1}{6}h[(2a+a_1)b+(2a_1+a)b_1]$. **1134.** $\approx 0{,}3$ *т.*
1135. ≈ 1 $м^3$. **1137.** 720 $м^3$. **1138.** $\approx 52{,}5$ $дм^3$. **1139.** $\approx 53{,}4$ $дм^3$. **1140.** $\frac{1}{2}a^2(b+c)$; $2a(b+c)$. **1141.** 1 : 10. **1143.** 125 шаров. **1144.** В 8 раз. **1145.** $\approx 0{,}71$ *см.*
1146. $R-R\sqrt[3]{1-\frac{1}{2d}}$. **1147.** $1:3\sqrt{3}\approx 0{,}19$. **1149.** 1) $\frac{5\pi r^3}{3}$; 2) $r\sqrt[3]{15}$;
1150. πr^3. **1151.** 45π $см^3$; 243π $см^2$. **1152.** $\frac{\pi b^3 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{12\sin^2\frac{\alpha}{2}}$; ≈ 4564 $дм^3$. **1153.** 204π.
1154. ≈ 82 *кГ.* **1155.** $V\sin^5\frac{\alpha}{4}$. **1156.** $\frac{7}{12}\pi R^3$; $\frac{5}{2}\pi R^2$. **1157.** $\frac{5\pi R^2}{2}$; $\frac{\pi r^3}{6}$.
1158. $2\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **1159.** $\frac{\pi R^3 \sin^3\frac{\alpha}{2}}{6\cos^6\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$; $\frac{\pi R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^4\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$. **1180.** Результаты даны в тоннах: 1) $S=5$; $N=0$; $T=0$; $R=5$; 2) $S\approx 5{,}042$; $N\approx 0{,}6480$; $T\approx 3{,}710$; $R\approx 3{,}413$. **1186.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **1187.** $4l\sqrt{Q\sin\alpha}$. **1188.** $\frac{2b^3\cos^2\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{3}{2}\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}}{\cos^3\frac{\alpha}{2}}$.
1189. $\frac{V}{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$. **1190.** $R^3\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$. **1191.** $\frac{a^3\sqrt{2}\cos\alpha}{\sqrt{-\cos 2\alpha}}$.
1192. $\frac{a^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{4}$; $\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$. **1193.** $12R^3\sin^2\alpha\sqrt{3\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)}$.
1194. $\frac{a^3}{4}\sin^2\alpha\operatorname{tg}\beta$. **1195.** $\frac{\pi a^3}{12}(15-8\sqrt{2})$. **1196.** $\frac{3a^2\sqrt{15}}{16}$. **1197.** $\frac{aQ}{2}$.
1198. $\frac{a^3}{3}$; $\frac{a^3}{3}$; $\frac{a^3}{6}$; $\frac{a^3}{6}$. **1200.** $\frac{a(4\pm\sqrt{7})}{2}$. **1201.** $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\gamma}\right)$; $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin\frac{\gamma}{2}}\right)$.
1202. $\frac{1}{6}ab^2\sin^2\gamma\operatorname{tg}\alpha$. **1205.** $\frac{2}{3}R^3\sin^3 2\varphi\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha$. **1206.** $6\sqrt{2}$ $см^2\approx 8{,}5$ $см^2$.
1207. $\frac{a^2}{6}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$. **1208.** $\frac{4}{3}r^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\cos\alpha}$. **1209.** $-\frac{2H^3\cos\alpha}{3\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.
1210. $\frac{Q}{4}\sec^4\frac{\alpha}{2}$. **1211.** $2\arcsin\frac{\sqrt{2(1+\cos^2\alpha)}}{2}$; $\approx 113^\circ52'$.
1212. $\frac{1}{3}a^3\sqrt{2}\operatorname{ctg}^2\alpha$. **1213.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$. **1218.** $\frac{ab(h+h')}{3}$. **1219.** $\frac{a^2b^2}{6\sqrt{a^2+b^2}}$
1221. $\frac{2}{3}\pi R^3\sin^2 2\alpha\cos^2\alpha$. **1222.** $r+\sqrt{(d+r)^2+r^2}$, или $r+\sqrt{(d-r)^2+r^2}$.

1223. $\arccos\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$. **1224.** $b:a$. **1225.** $\frac{(a+b)^3}{4ab\sqrt{a^2+b^2}}$. **1226.** $\frac{3a^2}{4}(8-2\pi+\pi\sqrt{6})$.
1227. $2\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sin\frac{180^\circ}{n}\right)$. **1228.** $\frac{3b^2\sqrt{5}}{2}$. **1229.** $S_{\text{сеч}}=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}\cos(1-3\sin^2\alpha)$;
$S_6=\frac{(a^2-b^2)\sqrt{3}}{2\sin\alpha}$. **1230.** $\frac{13a^3\sin\alpha\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma}{162\sin^2(\alpha+\beta)}$; ≈ 266 *см*^{3}. **1231.** $\frac{a^2\pi}{16}(3\sqrt{2}+2)$.
1232. $\frac{2a^2}{3}(1+2\sqrt{3})$; $\frac{8a^3\sqrt{2}}{27}$. **1233.** $\frac{\pi a^3}{6\sqrt{6}}$. **1234.** $\mathrm{tg}^2\alpha$. **1235.** $2\pi r^2(5+2\sqrt{6})$.
1236. $\frac{S\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^4\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

IX КЛАСС

X КЛАСС

XI КЛАСС

Зинаида Яковлевна Квасникова, Алексей Иванович Поспелов, Евгения Николаевна Ермолаева, Николай Михайлович Калиткин

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

Редактор *Г. С. Уманский* Переплет художников *В. А. Галацкого* и *Н. А. Чуракова*
Художественный редактор *А. В. Сафонов*
Технический редактор *В. Л. Коваленко.* Корректор *Г. С. Попкова*

Сдано в набор 9/IV 1964 г. Подписано к печати 22/X 1964 г. 60 90.
Печ. л. 9. Уч.-изд. л. 8,88. Тираж 83 000 экз. (тем. план 1964 г. № 156). Заказ 5403.

Издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по печати. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Типография им. Смирнова Смоленского облуправления по печати, г. Смоленск, пр. им. Ю. Гагарина, 2.

Цена без переплета 24 к., переплет 10 к.