К. С. БОГУШЕВСКИЙ и К. П. СИКОРСКИЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ к ПРЕПОДАВАНИЮ АЛГЕБРЫ и ГЕОМЕТРИИ в VIII классе

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва — 1958

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Настоящее пособие составлено на основе педагогического опыта учителей-методистов К. С. Богушевского и К. П. Сикорского. Рекомендуемая в настоящем пособии дозировка и изложение материала, тексты контрольных работ являются примерными.

Рукопись рецензировалась кандидатом педагогических наук К. С. Барыбиным и учителем П. М. Эрдниевым.

Все замечания и пожелания по данному пособию просьба направлять по адресу: Москва, Чистые пруды, 6, Учпедгиз.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Новая программа по математике в значительной мере отличается от ранее действовавшей программы. Особенно это отличие заметно в курсе VIII класса. В программу введены целые новые разделы, как например: в геометрии—гомотетия, равносоставленность и равновеликость фигур, практические работы; в алгебре—действия над степенями с любыми рациональными показателями и др. Естественно, что и изложение материала будет в значительной мере отличаться от учебников Киселева.

Все это приводит к тому, что по крайней мере часть учителей будет нуждаться в известных методических указаниях по вопросам преподавания.

Настоящее пособие является попыткой оказать посильную помощь отдельным учителям при переходе на преподавание математики в VIII классе по новой программе.

Применительно к новой программе по геометрии написан учебник Н. Н. Никитина и А. И. Фетисова «Геометрия», ч. I, кроме того, местами, весьма близкими по материалу и системе изложения к новой программе, оказываются учебники Н. А. Глаголева «Геометрия» (планиметрия) и А. П. Киселева «Геометрия», ч. I. Эти учебники весьма ценные в качестве пособий для учителя. Поэтому в настоящем методическом пособии в целях сокращения его объема будут вместо полного изложения тех или иных вопросов допускаться ссылки на соответствующие места этих учебников. В качестве задачника используется «Сборник задач по геометрии», ч. I, Н. Рыбкина.

В указаниях к изучению алгебры использован «Сборник задач по алгебре, для VIII—X классов» П. А. Ларичева (издание восьмое, 1957 г.).

Когда настоящие «Методические указания» были уже набраны, вышли из печати пробные учебники алгебры (II часть) А. Н. Барсукова и коллектива авторов под редакцией А. И. Маркушевича и учебник геометрии для VIII и IX классов (издание второе, переработанное) А. И. Фетисова. Эти руководства поэтому не могли быть использованы авторами «методических указаний».

АЛГЕБРА

ПЛАН РАБОТЫ

Число часов: на данный вопрос	Число часов: с начала учебного года	Содержание учебного материала	Повторение	Номера упражнений по «Сборнику задач по алгебре», ч. II, П. А. Ларичева [1]
1	2	3	4	5
		Первое полугодие *(по четыре урока в неделю)*		
2	2	Организационные вопросы	Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители	1—8, 17—19
2	4	Возведение в квадрат целых чисел и десятичных дробей. Таблицы квадратов чисел — точных и приближенных	Преобразование алгебраических дробей. Решение систем двух уравнений первой степени с двумя неизвестными с числовыми коэффициентами	13 (1,3), 14 (2,4), 24 (1), 26 (1), 39, 40, 78, 82
1	5	Проверочная работа по курсу VII класса		15 (1), 16 (1)
		1. Степени и корни		
3	8	Извлечение квадратного корня из положительного числа, представляющего точный квадрат. Извлечение квадратного корня из чисел с точностью до $\frac{1}{10^n}$	Решение уравнений первой степени с буквенными коэффициентами	25 (1,2), 30 (2), 84, 85 (выборочно), 86—88 (выборочно)
1	9	Решение неполных квадратных уравнений вида $ax^2 + c = 0$ $(c < 0)$		98

[1]) Рекомендуемые упражнения решаются частично в классе, а остальные даются на дом.

Продолжение

1	2	3	4	5
1	10	Четырехзначные таблицы квадратных корней и обратных чисел, нахождение приближенных корней неполных квадратных уравнений		89, 99, 349
4	14	Решение полных квадратных уравнений вида $x^2 + px + q = 0$ и $ax^2 + bx + c = 0$ и решение простейших задач на составление квадратных уравнений	Решение неравенств первой степени	31, 101, 348, 361, 364, 365, 430, 435, 437
1	15	Контрольная работа № 1. Решение квадратных уравнений с числовыми коэффициентами		438
3	18	Развитие понятия о числе: от натурального числа до любого рационального. Теорема: «не существует рационального числа, квадрат которого равен 2». Понятие об иррациональном числе. Действительные числа, изображение их на числовой оси	Решение задач на составление квадратных уравнений	439, 457, 458, 91, 92, 93, 95, 97
2	20	Действия над действительными числами на примере сложения (определение суммы и произведения, вычитания и деления)	Решение задач и уравнений	374 (1), 440, 94, 96
3	23	Степени с натуральным показателем. Степень произведения, дроби, степени. Действия со степенями, в частности с числовым основанием. Таблица кубов чисел	Решение задач и уравнений	20, 375(1), 486, 478, 105, 106, 108, 112—119
2	25	Степени с нулевым и отрицательным показателем и действия с ними	Решение уравнений	382 (1,4), 124—126, 128, 129, 130, 134—138, 140
1	26	Контрольная работа № 2. Действия со степенями с целыми показателями		141 (1,3)
4	30	Определение корня n-й степени. Определение арифметического корня из неотрицательного числа. Корень нечетной степени из отрицательного числа Извлечение арифметического корня из произведения, дроби, степени и корня	Решение задач и действия со степенями	120 (1,2), 141 (2,4), 478, 479, 144—147, 148, 150, 151, 154, 157—161, 293, 295 (1—2)

1	2	3	4	5
4	34	Главное свойство арифметического корня. Вынесение множителя из-под знака радикала и введение его под знак радикала. Приведение радикалов к простейшей форме	Решение задач и действия со степенями	460, 461, 481, 142, 152 (1,2), 162—165, 168, 174, 175, 180, 186, 187, 191, 193, 197, 198
1	35	Контрольная работа № 3. Извлечение корня и приведение радикалов к простейшему виду		188 (1,2), 193 (1,2)
4	39	Подобные радикалы. Сложение и вычитание радикалов Умножение и деление радикалов с одинаковыми показателями	Решение задач и действия со степенями	143, 463, 473, 200—205, 209, 210, 211, 215, 218, 228—231, 248, 249
4	43	Степени с дробными показателями и действия над ними Умножение, деление и возведение в степень радикалов путем перехода к степеням с дробными показателями	Решение задач	470, 433, 214, 239 (1,3), 259—269, 271, 279, 280
1	44	Контрольная работа № 4. Действия с радикалами и степенями с дробными показателями		272 (1,2), 287 (1,3)
3	47	Приведение к рациональному виду числителей или знаменателей дробных иррациональных выражений (вида $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$)	Решение задач	432, 441, 272 (3,4), 285 (2, 4), 296 (1, 2, 3), 302, 303, 305, 308, 309, 314
3	50	Различные преобразования на действия с радикалами и степенями с любыми рациональными показателями		217 (1), 221, 239 (2, 4), 241 (1,2) 273, 264, 287 (3,4), 291 (1,2), 313, 317
1	51	Контрольная работа № 5. Различные преобразования радикалов и действия со степенями с любыми рациональными показателями		291 (3, 4), 315 (1)

2. Уравнения второй степени и приводимые к ним

1	2	3	4	5
3	54	Полные и неполные квадратные уравнения. Вывод (повторение) формул корней квадратного уравнения. Решение квадратных уравнений с числовыми и буквенными коэффициентами	Действия с радикалами и со степенями с различными рациональными показателями	324 (1), 330, 345 (2), 347—353 (выборочно), 361, 362 (1,4), 365, 384, 387 (1,4)

1	2	3	4	5
4	58	Решение задач на составление квадратных уравнений	Действия с радикалами	324 (2), 325 (2), 331, 346 (1), 374 (3), 388 (1), 436, 442, 445, 449, 471, 472, 681 (1), 480
1	59	Контрольная работа № 6. Решение задач на составление квадратных уравнений		324 (4), 346 (5)
3	62	Выражение суммы и произведения корней квадратного уравнения через его коэффициенты (теорема Виета)	Действия с радикалами	388 (2), 346 (2, 3), 446, 443, 393, 395, 397, 401, 402, 404
1	63	Контрольная работа № 7. Свойства корней квадратного уравнения		345
1	64	Общий обзор пройденного по теме «Квадратные уравнения»		

***Второе полугодие** (по три урока в неделю)*

3	67	Разложение квадратного трехчлена на множители и другие упражнения на теорему Виета	Действия с радикалами	325 (3,4), 334, 412, 414, 417, 408, 405
3	70	Исследование корней квадратного уравнения. Биквадратные уравнения		327 (1), 419—421, 423, 424, 426, 531, 532
1	71	Контрольная работа № 8. Исследование корней квадратного уравнения, разложение квадратного трехчлена на множители; биквадратные уравнения		
3	74	Решение задач на составление уравнений	Арифметический корень. Возведение в степень радикалов	474, 476, 447, 448, 449, 482, 496, 498, 651, 337, 188, 290
1	75	Контрольная работа № 9. Решение задач на составление квадратных уравнений		153
5	80	Решение иррациональных уравнений, приводящихся к линейным и квадратным уравнениям. Случаи потери корней и появления новых корней	Действия с радикалами. Построение графиков $y = kx$ и $y = ax + b$	49, 53, 66 (1,2), 253, 257, 372, 540—543, 545, 547, 550, 551
1	81	Контрольная работа № 10. Решение иррациональных уравнений		553 (1,2)

Продолжение

1	2	3	4	5
		3. Функции и графики		
3	84	Переменные величины. Понятие о функциональной зависимости; аргумент и функция. Способы задания функции. График функции	Понятие об иррациональном числе	44, 45, 48, 50, 57, 62, 63, 299 (2,3), 300, 319 (1)
3	87	Линейная функция $y = ax + b$. Системы уравнений $y = a_1x + b_1$; $y = a_2x + b_2$	Действия с иррациональными числами	326 (2), 346 (4), 490, 491, 64—67, 72, 76,
5	92	Трехчлен второй степени, его свойства и график	Действия с радикалами и решение задач	94—97, 182, 183, 557, 560, 561—563, 566, 567, 570, 571, 578—581, 585, 591
1	93	Контрольная работа № 11. Понятие о функции, линейная и квадратная функции		
		4. Системы уравнений второй степени		
3	96	Системы уравнений, из которых одно уравнение первой степени и одно второй степени	Степени с отрицательными и дробными показателями	264, 339, 594, 601—605, 608 (1,2)
3	99	Системы уравнений вида $\begin{cases} ax + by = c, \\ xy = p; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ xy = b. \end{cases}$ Графическое решение некоторых систем	Действия со степенями с любыми рациональными показателями	340, 612, 618, 620, 615, 622, 651, 654
1	100	Контрольная работа № 12. Решение систем уравнений		658, 660
3	103	Решение систем уравнений вида $\begin{cases} a\dfrac{x}{y} + b\dfrac{y}{x} = c, \\ mx^2 + nxy + py^2 + kx + \\ + ly + t = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = k_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = k_2. \end{cases}$	Развитие понятия о числе: действительные числа	624—628, 639, 655, 656
2	105	Контрольная работа № 13. Преобразование радикалов и некоторые вопросы теории иррациональных чисел		617 (3,4)
4	109	Решение задач и преобразование радикалов, особенно на свойства арифметического корня		166, 167, 653, 666, 668, 669, 675 (1,2), 679, 681, 684
2	111	Контрольная работа № 14. Заключительная работа по курсу VIII класса		
1	112	Заключительная беседа об основных ошибках в контрольной работе № 14		

Примечание. Работа по алгебре спланирована на 32 полные учебные недели. Учебный год продолжается несколько больше времени; время остающееся сверх 112 час., целесообразно использовать на закрепление понятия функции, а также на решение задач и упражнений из главы VI «Сборника задач по алгебре», ч. II, П. А. Ларичева.

Глава I

СТЕПЕНИ И КОРНИ

§ 1. Введение

Отличительной особенностью этой темы в связи с введением новой программы по алгебре в VIII классе является: 1) перенесение из курса VII класса извлечения квадратного корня из чисел и решения неполных квадратных уравнений; 2) включение в программу степеней с нулевым, отрицательным и дробным показателями; 3) указание на обязательность использования таблиц квадратов чисел, кубов чисел, квадратных корней из чисел и таблицы обратных чисел. В остальном существенных изменений в новой программе по сравнению с программой 1955/56 учебного года нет.

В целях более раннего ознакомления учащихся с решением квадратных уравнений (потребности физики и отчасти геометрии) и приобретения лучших навыков в решении задач в последующих указаниях рекомендуется вывести формулу корней квадратного уравнения в начале первой четверти и начать решение задач на составление квадратных уравнений до начала систематического курса квадратных уравнений.

После того как на первом уроке будет разрешен ряд организационных вопросов (названы учебники, задачники, таблицы, установлен порядок ведения тетрадей для классных и домашних работ, для контрольных работ), надо повторить формулы сокращенного умножения, обратив внимание на то, что $(a+b)^2 = (-a-b)^2$; $(a-b)^2 = (b-a)^2$. Полезно дать формулировку «квадрат двучлена» вместо обычно применяемых формулировок «квадрат суммы двух чисел» и «квадрат разности». Затем повторить основные приемы разложения многочленов на множители, действия с алгебраическими дробями, решение уравнений первой степени и систем двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

Курс алгебры в VIII классе согласно программе начинается с извлечения квадратного корня из чисел.

Однако мы считаем, что уже на первых уроках (например, начиная с третьего) следует наряду с повторением преобразования целых и дробных алгебраических выражений рассмотреть возведение в квадрат целых чисел и десятичных дробей.

Вначале следует записать таблицу квадратов однозначных чисел, затем, возводя в квадрат двузначные числа, установить, что квадраты их являются или трехзначными, или четырехзначными числами. Точно так же установить, что квадраты трехзначных чисел есть числа пяти- или шестизначные.

Разобрав несколько случаев возведения в квадрат десятичных дробей, заметить, что квадраты любой десятичной дроби содержат четное число десятичных знаков.

Затем вспомнить правила знаков при возведении чисел в квадрат: квадрат положительного числа — число положительное, квадрат нуля равен нулю, квадрат отрицательного числа — число положительное; короче: квадрат любого числа — число неотрицательное.

После этого следует познакомить учащихся, как пользоваться таблицами квадратов чисел (см. «Четырехзначные математические таблицы» В. М. Брадиса). Правила пользования таблицами изложены в текстовых пояснениях к этим таблицам. Следует обратить внимание на то, что математические таблицы дают возможность получать квадраты чисел только приближенные (см. главы «Квадраты чисел» и «Правила подсчета цифр»). По этим таблицам можно получить точные квадраты лишь чисел, записанных двумя значащими цифрами.

На четвертом или пятом уроке можно дать проверочную работу по курсу VII класса (варианты этой работы, как и последующих контрольных работ, приведены на стр. 58—68).

§ 2. Извлечение точного квадратного корня из положительного числа

Для вычисления площади квадрата ($S = a^2$), площади круга ($S = \pi r^2$), нахождения пути при равноускоренном движении $\left(S = \frac{1}{2} qt^2\right)$ и для решения многих других задач приходится возводить числа в квадрат. Поставим обратную задачу: вычислить сторону квадрата, если известна его площадь. Так, например, площадь квадрата равна 49 *м*², 100 *м*², 900 *см*². Чему равна сторона каждого из них? Находим исходя из формулы площади: 7 *м*, 10 *м*, 30 *см*. Задача нахождения числа по его квадрату называется извлечением квадратного корня или корня второй степени и обозначается $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{900} = 30$. Мы находим число, квадрат которого равен заданному числу.

Потом объяснить известный алгоритм извлечения квадратного корня. В дальнейшем требовать от учащихся объяснения этого алгоритма не следует. Достаточно добиться того, чтобы учащийся знал правило извлечения квадратного корня.

Последовательность упражнений может быть такой: извлекаются квадратные корни из чисел: 169; 576; 3969; 324; 140 625; 48 400; 826 281. Затем перейти к извлечению квадратного корня из десятичных дробей: 6,76; 0,0729; 0,003721 и т. п. Обратить внимание, что точный квадратный корень может извлекаться только из такой десятичной дроби, в которой число десятичных знаков четное, не считая нулей, стоящих справа от последней цифры, отличной от нуля. Это условие необходимое, но не достаточное.

Заметить также, что число десятичных знаков в корне в два раза меньше, чем число десятичных знаков в подкоренном числе.

§ 3. Извлечение приближенного квадратного корня из чисел

Пусть надо найти сторону квадрата, площадь которого равна 21 *кв. см.* Сторона этого квадрата, очевидно, более 4 *см*, так как $4^2 = 16$, но менее 5, так как $5^2 = 25$. Записываем $4 < \sqrt{21} < 5$. Говорят: $\sqrt{21} \approx 4$ с точностью до 1 с недостатком и $\sqrt{21} \approx 5$ с точностью до 1 с избытком. Если при решении той или иной задачи точность до 1 не достаточна, то можно поставить вопрос о вычислении $\sqrt{21}$ с точностью до 0,1; тогда, помня о том, что квадратный корень может извлекаться только из дробей с четным числом десятичных знаков, запишем данное число в таком виде: 21,00. Извлекая корень из 21,00 известным уже способом, получим 4,5 и в остатке 0,75. Тогда $4{,}5 < \sqrt{21} < 4{,}6$, так как $4{,}5^2 = 20{,}25$, а $4{,}6^2 = 21{,}16$. Говорят: $\sqrt{21} \approx 4{,}5$ с точностью до 0,1 с недостатком и $\sqrt{21} \approx 4{,}6$ с точностью до 0,1 с избытком.

Чтобы вычислить еще один десятичный знак (сотые доли) числа $\sqrt{21}$, надо иметь в подкоренном числе уже десятитысячные доли, то есть надо извлекать $\sqrt{21{,}0000}$. Для вычисления $\sqrt{21}$ с точностью до 0,001 извлекают $\sqrt{21{,}000000}$ и т. д.

Приближенный квадратный корень может быть вычислен с какой угодно степенью точности. Применяя известные правила округления приближенных чисел, практически берут квадратный корень или с недостатком, или с избытком.

Для получения приближенного корня до 0,1 находят второй десятичный знак, затем, применяя правило округления, отбрасывают сотые доли. Найденный таким образом приближенный корень с точностью до 0,1 отличается от истинного менее чем на 0,05.

Для получения приближенного корня до 0,01 находят третий десятичный знак, затем округляют до 0,01, т. е. фактически приближенный корень отличается от истинного менее чем на 0,005.

Вывод. При извлечении приближенного корня практически его вычисляют с точностью до половины десятичного знака указываемой точности.

Примеры. $\sqrt{21} = 4{,}58\ldots \approx 4{,}6$; $\sqrt{44} = 6{,}63\ldots \approx 6{,}6$; $\sqrt{21} = 4{,}582\ldots \approx 4{,}58$; $\sqrt{45} = 6{,}708\ldots \approx 6{,}71$.

Полезно показать, что $4{,}6^2 = 21{,}16$ ближе к 21, чем $4{,}5^2 = 20{,}25$. Во втором примере: $6{,}6^2 = 43{,}56$ ближе к 44, чем $6{,}7^2 = 44{,}89$. Если надо извлечь квадратный корень из точного числа, то его можно извлекать с какой угодно степенью точности. При извлечении же квадратного корня из приближенных чисел следует руководствоваться «правилом подсчета цифр» (см. гл. XXI «Четырехзначных математических таблиц» В. М. Брадиса):

При извлечении квадратного корня из приближенных чисел в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное (приближенное) число.

Так, $\sqrt{18{,}7} \approx 4{,}32$; $\sqrt{0{,}0296} \approx 0{,}172$; $\sqrt{2786} \approx 52{,}79$. В этих примерах числа 18,7 и 0,0296 приближенные, они имеют по три значащие цифры, 2786 — приближенное число с четырьмя значащими цифрами.

§ 4. Решение неполных квадратных уравнений вида $ax^2 + c = 0$

Вывод приемов решения этого квадратного уравнения начинается с простейшего примера: найти число, квадрат которого равен 49. Задача приводит к решению уравнения $x^2 = 49$.

Ответ. Существует два числа, квадрат которых равен 49: $+7$ и -7. Но так как $\sqrt{49}$ — число положительное, поэтому решение уравнения $x^2 = 49$ следует записать: $x_{1,2} = \pm\sqrt{49}$, а затем $x_1 = 7$ и $x_2 = -7$. После решения нескольких уравнений вида $ax^2 = m$ ($a > 0$ и $m > 0$) указывается, что принято записывать рассматриваемое квадратное уравнение в виде $ax^2 + c = 0$, причем $a > 0$. Приводя к такому виду уже решенные ранее уравнения, устанавливаем, что уравнение $ax^2 + c = 0$ имеет решение только при условии, что $c < 0$. В самом деле, например уравнение $x^2 + 16 = 0$ не имеет корней, так как среди действительных чисел нет числа, квадрат которого был бы равен -16.

При решении конкретных задач (нахождение длины стороны квадрата по его площади, времени движения при равноускоренном движении и т. п.) один из корней уравнения $ax^2 + c = 0$, именно отрицательный, часто не удовлетворяет смыслу задачи, поэтому конкретные задачи, приводящие к решению уравнения $ax^2 + c = 0$, имеют, вообще говоря, только одно решение.

При решении рассматриваемого неполного квадратного уравнения следует приступить к использованию таблицы квадратных корней в сборнике «Четырехзначные математические таблицы» В. М. Брадиса, правила пользования которыми указаны в тексте этого сборника.

Могут встретиться следующие случаи:

1) c и a — точные числа и каждое из них представляет точный квадрат, тогда $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ — точный квадрат.

Пример. $16x^2 = 0{,}0729$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{0{,}0729}{16}} = \pm\frac{0{,}27}{4} = \pm 0{,}0675$.

2) c и a — точные числа, но по крайней мере одно из них (например, a), а может быть и оба не являются точными квадратами. Тогда знаменатель и числитель умножают на такое число, чтобы знаменатель стал точным квадратом. Затем извлекают из числителя приближенный корень с какой угодно сте-

пенью точности, а из знаменателя — точный квадр...
Разделив первый результат на второй, получают частное, кот... рое можно взять затем с точностью до любого десятичного знака (поскольку действия производились с точными числами).

Пример. $\sqrt{\frac{1,5}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1,73205...}{2} = 0,86602...$

Возможно, конечно, и такое вычисление $\sqrt{\frac{1,5}{2}} = \sqrt{0,75} = 0,8660...$

3) c и a — приближенные числа. Тогда следует вычислить с допустимой точностью частное — $\frac{c}{a}$ (см. гл. XXI) и по таблицам извлечь квадратный корень опять также с допустимой точностью.

Пример. Пусть площадь круга $S \approx 17,37$ *кв. м*, тогда радиус $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{17,37}{3,142}}$.

На этом примере выясняется необходимость приближенного деления на число, записанное четырьмя значащими цифрами. Показывается целесообразность замены деления умножением на обратное число. Отсюда, $\frac{17,37}{3,142} = 17,37 \cdot \frac{1}{3,142} \approx 17,37 \cdot 0,3183 \approx 5,529$ и затем $\sqrt{5,529} \approx 2,351$.

Так, на решении конкретных задач учащийся должен научиться пользоваться таблицей извлечения квадратных корней из чисел и таблицей обратных чисел и понять их назначение.

§ 5. Решение квадратного уравнения общего вида

На тему «Степени и корни» по программе отведено 44 часа, то есть почти $\frac{3}{4}$ первого полугодия, поэтому на протяжении значительного периода времени нет материала для решения текстовых задач. Вследствие этого мы предпочитаем, как говорилось и раньше, формулу корней квадратного уравнения приведенного и общего вида дать значительно раньше с тем, чтобы иметь возможность решать задачи на составление уравнений уже с первого месяца учебного года.

Вывод формул корней квадратного уравнения производится обычным способом, то есть вначале решаются уравнения приведением левой части к квадрату линейного относительно x двучлена; после чего извлекается квадратный корень из обеих частей уравнения, если только в правой части неотрицательное число.

...ой стадии изучения квадратных уравнений следует ре... ...с числовыми коэффициентами, но как ...следует отказываться также ...ями. На такого

ние несложных ...
зом задач, в которых данные ...
связаны между собой уравнением $y = ax$.

Эти задачи весьма целесообразно решать, предварительно записывая условие задачи, включая число, принятое за неизвестное, в таблицу. Приведем примеры.

Задача 435[1]). Колхоз должен был засеять 200 *га* к определенному сроку, но он засевал ежедневно на 5 *га* больше, чем намечалось по плану, и поэтому закончил сев на 2 дня раньше срока. Во сколько дней был закончен сев?

	Время работы в днях	Площадь засева в один день в гектарах	Засеянная площадь в гектарах	Уравнение
По плану	$\boxed{4}$ $x+2$	$\boxed{6}$ $\frac{200}{x+2}$	$\boxed{1}$[2]) 200	$\frac{200}{x} - \frac{200}{x+2} = 5$
Фактически	$\boxed{3}$ x	$\boxed{5}$ $\frac{200}{x}$	$\boxed{2}$ 200	

Задача 441. Расстояние между пристанями по реке равно 80 *км*. Пароход проходит этот путь туда и обратно за 8 час. 20 мин. Определить скорость парохода в стоячей воде.

Обозначим скорость парохода в стоячей воде через x *км* в час. Тогда:

	Скорость движения в *км* в час	Время движения в часах	Пройденный путь в километрах	Уравнение
По течению	$\boxed{3}$ $x+4$	$\boxed{5}$ $\frac{80}{x+4}$	$\boxed{1}$ 80	$\frac{80}{x+4} + \frac{80}{x-4} = 8$
Против течения	$\boxed{4}$ $x-4$	$\boxed{6}$ $\frac{80}{x-4}$	$\boxed{2}$ 80	

---

[1]) Из «Сборника задач по алгебре», ч. II, П. А. Ларичева.

[2]) Эти цифры показывают порядок заполнения таблицы.

§ 6. Понятие об иррациональных числах

В конце четвертой недели начинается изучение иррациональных чисел. Прежде всего дается краткий очерк развития понятия о числе (натуральные числа, нуль, дробные числа; положительные и отрицательные числа). Надо особенно подчеркнуть, что как практические потребности, так и потребности математики заставляют вводить все новые и новые числа; указать, как задачи, не разрешимые в множестве одних чисел, становятся разрешимыми в расширенном множестве.

Беседу о развитии понятия о числе можно проводить по следующему плану. В начальной школе учащиеся начинают изучение арифметики с натуральных чисел (1, 2, 3, ...). Натуральное число возникает как результат счета однородных предметов. Арифметические действия (сложение и умножение) с натуральными числами выполнимы во всех случаях: сумма и произведение натуральных чисел есть число натуральное.

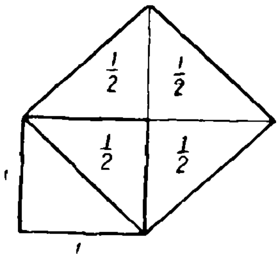
Но обратные действия (вычитание и деление) в множестве натуральных чисел не всегда выполнимы, поэтому в множестве натуральных чисел не могут быть решены уравнения: $5+x=5$; $5+x=3$; $3x=11$ и т. д. Однако уже такие элементарные задачи, как разделить добычу на охоте поровну между несколькими лицами, измерить длину отрезка, площади участка, то есть задачи, которые встали уже в весьма давние времена, не могли быть решены при помощи натуральных чисел. Возникла необходимость ввести новые числа — нуль, положительные дробные числа. В множестве натуральных чисел, 0 и дробных положительных чисел возможно решить огромное количество и теоретических и практических задач.

Но математик не может отказаться от решения уравнения, например $5+x=3$, да и многие вопросы практики (измерение температуры, определение уровня поверхности суши относительно уровня моря и др.) побуждают расширить понятие числа. Так вводятся отрицательные числа. Множество положительных чисел, 0 и отрицательных чисел составляет множество рациональных чисел. Рациональные числа могут быть изображены конечной десятичной дробью или бесконечной периодической. В множестве рациональных чисел без ограничения производятся сложение, вычитание, умножение и деление (кроме деления на 0), возведение в степень, когда показатель — целое число. Результат во всех случаях представляет собой также рациональное число. Но уже более тонкие случаи измерения и ряд математических задач поставили перед математиками необходимость дальнейшего расширения понятия числа.

К моменту введения понятия об иррациональном числе на уроках алгебры учащиеся уже знакомы с понятием бесконечной непериодической десятичной дроби как отношения несоизмеримых отрезков. На уроках алгебры надо выяснить другие случаи происхождения иррациональных чисел. Без введения их невозможно, например, решение таких уравнений, как $x^2=2$; $x^3=6$ и т. п. Надо показать в свою очередь, что такое уравнение, как $x^2=2$, не плод фантазии математиков, а вполне реальная задача.

Например, пусть сторона квадрата равна 1, значит, его площадь равна 1 квадратной единице. Найти сторону квадрата, построенного на диагонали данного квадрата.

Площадь такого квадрата, как это нетрудно видеть из чертежа 1, равна 2 квадратным единицам, а следовательно, сторона построенного квадрата должна выражаться числом, квадрат которого равен 2. Но среди целых и дробных чисел (то есть рациональных) такого числа нет. Итак, найден отрезок, длину которого нельзя выразить рациональным числом.



Черт. 1.

После этого становится несколько более понятным смысл доказательства, что $\sqrt{2}$ — число не целое и не дробное. Встает необходимость введения новых чисел. Нужно показать учащимся прием доказательства, что и $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{2}$ и т. п.— числа не целые и не дробные. Вводится термин «иррациональные числа». Учащиеся знают, что $\sqrt{2}$ может быть представлен в виде десятичной дроби, теперь имеем право утверждать, что в виде «бесконечной непериодической десятичной дроби». Надо привести примеры других иррациональных чисел: $\pi=3,14159...$; 2,718281828459...; 7,030330333... и т. п., указать, что множество рациональных и иррациональных чисел составляют множество действительных чисел, любое из которых может быть изображено на числовой оси и обратно: любой точке числовой оси соответствует некоторое действительное число.

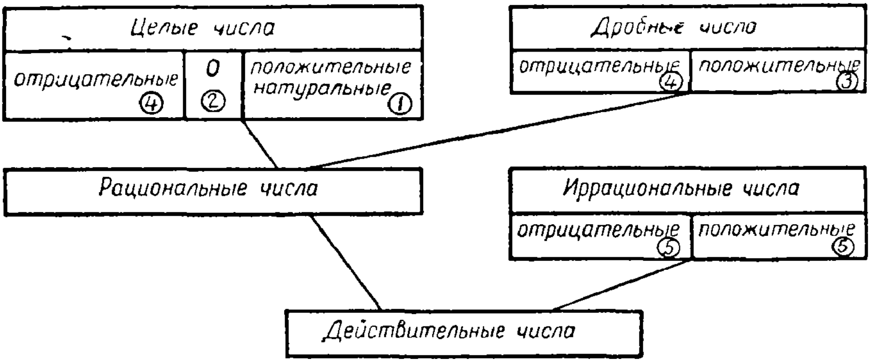
Достаточно подробно надо выяснить понятие равенства чисел: натуральных, дробных, отрицательных, иррациональных. При сообщении определения суммы двух иррациональных чисел надо разобрать определение сумм: 1) двух натуральных чисел (эта сумма может быть изображена наглядно, например на палочках); 2) натурального числа и 0; 3) двух дробных чисел (сумма двух дробных чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ есть такое третье дробное число, которое составлено так: $\frac{ad+bc}{bd}$, то есть по известному правилу сложения дробей с разными знаменателями); 4) двух любых положительных и отрицательных чисел (надо подчеркнуть, что в данном случае нельзя определить сумму без введения особого понятия — абсолютной величины числа). Необходимо указать, что при указанных определениях сохраняются переместительный и сочетательный законы сложения и все остальные свойства сложения.

При таком подходе к выяснению понятия суммы двух чисел учащийся лучше начинает понимать, что и сумму иррациональных чисел надо определить. Определение суммы двух иррациональных чисел надо иллюстрировать на числовой прямой.

Кратко, без подробного рассмотрения формулируется определение произведения, а следовательно, и степени с натуральным показателем.

Определение вычитания и деления, ранее данное для любых рациональных чисел, принимается и для иррациональных чисел.

При таким образом сформулированных определениях сохраняются все свойства действий, зависимость между компонентами действий, изменение результатов действий при изменении отдельных компонентов, правило знаков и т. д.



Черт. 2.

Полезно дать схему развития понятия о числе (черт. 2), как это развитие складывается при изучении математики в средней школе (номера в таблице показывают постепенность введения чисел).

Для закрепления понятия об иррациональных числах надо перед учащимися ставить в дальнейшем возможно чаще вопросы, связанные с новыми терминами. Вот некоторые из этих вопросов.

Какие числа получаются в результате счета одинаковых предметов?

Какие числа получаются в результате сложения и умножения натуральных чисел?

Отличается ли определение произведения натуральных чисел от определения произведения натурального числа на 0?

Всегда ли может быть частное от деления двух натуральных чисел (разность при вычитании) выражено натуральным числом?

Какой десятичной дробью может быть выражено частное от деления двух натуральных чисел? (Ответ. Или конечной десятичной дробью, или бесконечной периодической: $\frac{17}{40} = 0{,}425$; $\frac{7}{12} = 0{,}58333...$)

Результат измерения каких отрезков выражается рациональным числом?

Каким числом выражается отношение несоизмеримых отрезков?

Какой десятичной дробью может выражаться рациональное число? Привести из геометрии примеры получения этих десятичных дробей в результате измерения. (В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°, отношение меньшего катета к гипотенузе равно 0,5. В треугольнике ABC проведены медианы AD и BF, пересекающиеся в точке M, отношение $DM : MA = 0{,}5$, отношение $AM : AD = 0{,}666...$)

Какие числа получаются в результате извлечения квадратного корня из рациональных положительных чисел?

Как при помощи построения на числовой прямой точек, выражающих приближенные значения $\sqrt{3}$ с недостатком и с избытком, показать что иррациональному числу $\sqrt{3}$ соответствует точка на числовой прямой? (Надо построить последовательность значений $\sqrt{3} = 1{,}732058...$ с недостатком и с избытком: 1 и 2; 1,7 и 1,8; 1,73 и 1,74. Сближающиеся точки создают уверенность, что существует точка, соответствующая $\sqrt{3}$.) Построить прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2. На числовой прямой (за единицу масштаба принять меньший катет) от ее начала отложить отрезок, равный гипотенузе.

Затем построить точки, соответствующие приближенным значениям $\sqrt{5}$ с избытком и с недостатком. Убедиться тем самым в реальности утверждения: бесконечной непериодической десятичной дроби 2,23606... соответствует точка на числовой прямой (этот пример может быть разобран уже после того, как изучена теорема Пифагора).

§ 7. Степени с натуральным показателем и действия с ними

Понятие о степени, когда показатель — любое натуральное число, у учащихся уже есть: оно было дано еще в VI классе (см. «Алгебру», ч. 1, А. Н. Барсукова).

Необходимо напомнить определение степени с натуральным показателем.

Произведение n одинаковых сомножителей, из которых каждый равен a, называется n-й степенью числа a.

$$a^n = aa \; ... \; a$$

(n сомножителей)

Примечание. Принимается $a^1 = a$.

Напомнить правило знаков при возведении в степень отрицательного числа.

Далее, доказать теоремы об умножении и делении степеней с одинаковыми основаниями и о возведении степени в степень.

Теорема. **Чтобы перемножить степени с одинаковыми основаниями, надо основание степени оставить то же, а показатели сложить.**

Требуется доказать, что $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Доказательство. На основании определения степени с натуральным показателем имеем:

$$a^m = aa \ldots a$$
(m сомножителей);
$$a^n = aa \ldots a$$
(n сомножителей).

Отсюда:

$$a^m \cdot a^n = aa \ldots a$$
($m + n$ сомножителей).

На основании опять-таки определения степени с натуральным показателем в правой части этого равенства имеем:

$$aa \ldots a = a^{m+n}$$
($m + n$ сомножителей).

Итак, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Аналогично доказываются и другие теоремы о действиях со степенями с натуральными показателями.

При выводе формулы деления $a^m : a^n$ особо подчеркивается обязательность условия $m > n$; если $m \leqslant n$, то частное нельзя выразить в виде степени числа a с натуральным показателем. В частности, $a^m : a^m = 1$.

Надо обратить внимание на то, что сумма $a^m + a^n$ и разность $a^m - a^n$ не могут быть, вообще говоря, выражены в виде степени основания a.

Например: 1) $2^3 + 2^5 = 8 + 32 = 40$, что нельзя представить в виде степени числа 2;

2) $3^8 - 3^7 = 6561 - 2187 = 4384$, что не может быть представлено в виде степени числа 3.

Затем доказываются теоремы о возведении в степень произведения, дроби, степени.

Приводим доказательство одной из этих теорем: **чтобы возвести в степень произведение нескольких сомножителей, надо возвести в эту степень каждый сомножитель и полученные результаты перемножить** (иначе: **степень произведения нескольких сомножителей равна произведению степеней отдельных сомножителей с тем же показателем**).

Доказательство. На основании определения степени с натуральным показателем $(abc)^n$ равно произведению n сомножителей $(abc)(abc)\ldots(abc)$. Применяя правило умножения чисел на произведение, а также переместительный и сочетательный законы умножения, получим:

$$(abc)^n = abc\,abc\ldots abc = aa\ldots abb\ldots bcc\ldots c = \\ = (aa\ldots a)(bb\ldots b)(cc\ldots c),$$

а теперь на основании определения степени с натуральным показателем имеем:

$$(abc)^n = a^n b^n c^n.$$

Аналогично доказываются теоремы о возведении в степень дроби *и степени*.

При решении упражнений на действия со степенями надо подробно остановиться на разборе таких упражнений, как $(-2)^3$; -2^3; $(-2)^4$; $-(-2)^4$. («Сборник задач по алгебре», ч. II, Ларичева[1], № 105, 106.)

Для лучшего закрепления теорем о действиях со степенями полезно разобрать упражнения на все действия со степенями с числовыми основаниями, как-то:

$$(15\cdot 3^7 + 4\cdot 3^8) : 9^5;\quad \frac{5\cdot(3^{15}+2\cdot 3^{13})}{(81^6-12\cdot 3^{19})\cdot 1215};$$

$$12\cdot 5^{n-1} + 13\cdot 5^{n+1};\quad \frac{5\cdot 4^{2n-3} - 10\,(2^{n-2})^4}{16^{n-2}};\quad \frac{2^{19}\cdot 27^3 + 15\cdot 4^9\cdot 9^4}{6^9\cdot 2^{10} + 12^{10}}.$$

В порядке устных упражнений следует познакомить учащихся с таблицей кубов чисел по «Таблицам» Брадиса, обратить внимание на положение запятой при вычислении. Например: $1{,}2^3$; 12^3; 120^3; $0{,}12^3$; $0{,}012^3$.

§ 8. Степени с нулевым и целым отрицательным показателями

Подобно тому как устанавливается смысл (определяется) такого выражения, как a^3; x^7; x^1 и т. п., придается смысл и таким степеням: a^0; a^{-3}; a^{-n}; (где n — целое положительное число).

Устанавливаются следующие определения:

1) **Нулевая степень всякого числа, кроме 0, равна 1.** Короче: **при** $a \neq 0$ $a^0 = 1$.

2) **Всякое число, кроме нуля, в степени с целым отрицательным показателем равно дроби, числитель которой равен 1, а знаменатель равен той же степени с показателем, равным абсолютной величине отрицательного показателя.** Короче: **при** $a \neq 0$ **и целом** n $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Обращается внимание на целесообразность этих определений. После их введения деление $a^m : a^n = a^{m-n}$ возможно при любых целых m и n. Обратить внимание, что правила знаков при воз-

[1]) В дальнейшем ссылки на этот «Сборник» будут обозначаться буквой «Л».

ведении в степень с отрицательным показателем сохраняются. Например: $(-5)^{-2}=\frac{1}{25}$; $(-2)^{-3}=-\frac{1}{8}$. Также $(-3)^0=+1$ (нуль— целое, четное число!), но $-3^0=-1$.

Теоремы о действиях со степенями одного и того же основания с нулевым и целым отрицательным показателями остаются теми же, что и теоремы о действиях со степенями с натуральными показателями. Справедливость этих утверждений должна быть показана на доказательстве теорем о произведении и частном степеней с различными показателями, а также о возведении степени в степень. Доказательство этих теорем может быть проведено следующим образом.

В классе доказывается: произведение $a^{-m}\cdot a^{-n}$ равно $a^{-m+(-n)}$, где m и n — любые натуральные числа, $a\neq 0$.

На основании определения степени с целым отрицательным показателем имеем: $a^{-m}\cdot a^{-n}=\frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{a^n}$.

Пользуясь определением произведения двух дробей и теоремой о произведении степеней с одинаковыми основаниями и натуральными показателями, получаем: $\frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^{m+n}}$. Применяя определение степени с целым отрицательным показателем и определение суммы двух отрицательных чисел, получаем:

$$\frac{1}{a^{m+n}}=a^{-(m+n)}=a^{-m+(-n)}.$$

Итак, $a^{-m}\cdot a^{-n}=a^{-m+(-n)}$.

Другие теоремы, как $a^{-m}:a^{-n}=a^{-m-(-n)}$; $a^0\cdot a^{-m}=a^{0+(-m)}$; $a^m:a^{-n}=a^{m-(-n)}$ и т. п., можно давать учащимся для самостоятельной работы дома, в классе при устном опросе, а может быть даже и в качестве отдельных упражнений на контрольных работах.

Доказанные теоремы о действиях со степенями с отрицательными показателями позволят производить эти действия без перехода к степеням с положительными показателями.

Примеры. 1) $8a^3b^{-4}c^{-3}:5a^{-1}b^{-3}c^2=1{,}6a^4b^{-1}c^{-5}$;

2) $(a^{-2}-b^{-2}):(a^{-1}+b^{-1})=(a^{-1}-b^{-1})(a^{-1}+b^{-1}):(a^{-1}+b^{-1})=a^{-1}-b^{-1}$;

3) $(x^{-3}-2x^{-4}+x^{-5}):(x^{-5}-x^{-6})=x^{-5}(x^2-2x+1):x^{-6}(x-1)=x(x-1)$.

Закрепление понятия степени с отрицательным показателем лучше производить на числовых примерах (Л., № 124—126 и аналогичных, которые без труда составит сам учитель). Заметим, что

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Приведем примеры записи как очень больших, так и очень малых некоторых физических величин при помощи степеней с натуральным и с целым отрицательным показателем: число молекул в одной грамм-молекуле $6{,}024 \cdot 10^{23}$; масса одного атома водорода $1{,}673 \cdot 10^{-24}$ *г*; радиус одного атома $5 \cdot 10^{-9}$ *см*; масса Земли $5{,}98 \cdot 10^{21}$ *т*.

§ 9. Арифметический корень и действия с радикалами.

В объяснительной записке к программе по математике на 1956/57 учебный год сказано: «В первой теме VIII класса „Степени и корни" сосредоточено все учение о степенях с рациональными показателями. При этом действия над степенями с дробными положительными показателями рассматриваются совместно с действиями над радикалами не только в целях упрощения изложения, но и для того, чтобы замену радикалов степенями с дробными показателями внедрить в практику при выполнении преобразований радикалов и действий над ними».

Однако в самой программе эта идея не нашла полного развития. В переработанном «Сборнике задач по алгебре», ч. II, П. А. Ларичева очень большое внимание уделено действиям над радикалами, но не действиям со степенями с дробными показателями. Таких упражнений с радикалами, где было бы целесообразно производить замену их действиями над степенями с дробными показателями, в «Сборнике задач» немного.

Исходя из всего этого, авторы настоящей работы следуют в данном вопросе как прежде всего за программой, так и за развитием учебного материала в «Сборнике задач».

Сначала дадим определение корня степени n из действительного числа.

Корнем степени n из действительного числа a называется такое число x, что $x^n = a$.

Так, корень третьей степени из 125 равен 5, так как $5^3 = 125$; корень четвертой степени из 81 равен $+3$, а также -3, так как $(+3)^4 = 81$ и $(-3)^4 = 81$. Нельзя указать квадратного корня из -36, так как среди действительных чисел нет такого, квадрат которого равен -36.

При изучении действий с вещественными (действительными) числами, то есть в частности, в курсе алгебры VIII класса средней школы, имеют в виду более ограниченное понятие корня, а именно: арифметический корень.

Арифметическим корнем степени n (n—натуральное число не менее 2) из положительного числа a называется такое положительное число x, n-я степень которого равна a.

Арифметический корень степени n из числа 0 равен 0.

Принимаем без доказательства утверждение:

1) **Арифметический корень любой степени из любого положительного числа существует.** Обозначение его $\sqrt[n]{a}$; по определению $\sqrt[n]{a} = x$, $x > 0$ при $a > 0$ и $\sqrt[n]{0} = 0$;

2) Корень нечетной степени из отрицательного числа a равен противоположному значению арифметического корня той же степени из абсолютной величины (модуля) числа, то есть, $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$, где $a < 0$ и n — нечетное число.

Корня четной степени из отрицательного числа среди действительных чисел не существует.

Примеры. $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt[4]{81} = 3$; $\sqrt[5]{32} = 2$; $\sqrt[7]{-128} = -\sqrt[7]{128} = -2$; $\sqrt{m^2} = m$, если $m \geqslant 0$, и $\sqrt{m^2} = -m$, если $m < 0$; вообще $\sqrt{m^2} = |m|$.

В «Сборнике задач по алгебре», ч. II, Ларичева имеется достаточно упражнений для закрепления понятия арифметического корня: № 147, 148, 150—154 и ряд других. Нет необходимости их решать сразу все подряд. К ним надо возвращаться по мере изучения действий с радикалами.

Последующие теоремы об извлечении корня из произведений и степеней (то есть из одночленов) и дробных выражений относятся только к арифметическим корням.

Прежде чем доказывать эти теоремы, надо добиться твердого усвоения тождеств, основанных на определении арифметического корня:

если $a \geqslant 0$ и $n = 2, 3, 4, \ldots$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$;

если $a < 0$ и $n = 3, 5, 7, \ldots$ (нечетному числу), то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(-\sqrt[n]{-a}\right)^n = -(-a) = a$;

если $a < 0$ и n — четное число, то в области действительных чисел выражение $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n$ смысла не имеет.

Приведем для примера доказательство теоремы об извлечении корня из произведения.

Чтобы извлечь корень из произведения двух или нескольких положительных чисел, надо извлечь корень той же степени из каждого сомножителя в отдельности и полученные результаты перемножить.

Дано: $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$; $n = 2, 3, 4, \ldots$

Требуется доказать: $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$.

Доказательство производится проверкой:

На основании теоремы о возведении в степень произведения имеем: $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \left(\sqrt[n]{c}\right)^n$, а на основании определения арифметического корня $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \left(\sqrt[n]{c}\right)^n = abc$, причем $abc > 0$. Каждое из чисел $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ и $\sqrt[n]{c}$ как арифметический корень — число положительное, следовательно, $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$ есть арифметический корень n-й степени из abc.

Итак, доказано, что n-я степень произведения $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$ равна подкоренному числу $\sqrt[n]{abc}$, а это и значит, что

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\ .$$

Если n — нечетное число и хотя бы один из сомножителей отрицательное число, то в доказательство вносится небольшое изменение, а именно: подкоренное выражение делается положительным числом.

Пример. Дано: $a>0$; $b<0$; $c>0$ и $n=3,\ 5,\ 7,\ldots$

Требуется найти: $\sqrt[n]{abc}$.

На основании ранее данного определения корня нечетной степени из отрицательного числа имеем:

$$\sqrt[n]{abc}=-\sqrt[n]{a(-b)c}\,.$$

Теперь $a(-b)c>0$, а следовательно, как уже доказано, $\sqrt[n]{a(-b)c}=$ $=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{-b}\cdot\sqrt[n]{c}$.

Итак, имеем:

$$\sqrt[n]{abc}=-\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{-b}\cdot\sqrt[n]{c}\ .$$

Этот случай в школе можно и не доказывать, но на частных *примерах показать обязательно.*

При доказательстве теоремы об извлечении корня из степени следует подчеркнуть, что $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, если только $a>0$ и $\frac{m}{n}$ — целое число.

Если же n — нечетное число и $a^m<0$, то $\sqrt[n]{a^m}=-\sqrt[n]{|a|^m}=$ $=-|a|^{\frac{m}{n}}$.

Примеры. 1) $\sqrt{9a^4b^8}=3a^2b^4$;

2) $\sqrt[4]{(-16)(-81)}=\sqrt[4]{16\cdot 81}=2\cdot 3=6$;

3) $\sqrt[3]{(-27)\cdot 8}=\sqrt[3]{-(27\cdot 8)}=-\sqrt[3]{27\cdot 8}=-3\cdot 2=-6$.

Полезно указать, что $\sqrt[3]{a^6+b^6}$ или $\sqrt[3]{a^2-b^2}$ и вообще $\sqrt[n]{a^m\pm b^m}$ нельзя записать при помощи степеней чисел a и b.

После того как будет выполнен ряд упражнений на извлечение корня с положительным показателем, следует показать, что теоремы об извлечении корня справедливы и для случаев, когда или показатель корня, или показатель степени подкоренного выражения, или тот и другой одновременно — отрицательные числа. Делается это так же, как и раньше при доказательстве теоремы о возведении в отрицательную степень произведения и дроби.

Прежде всего установим, что принимается $\sqrt[-n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$, где n — любое натуральное число не менее 2, $a > 0$.

Теперь докажем, например, что $\sqrt[-n]{a^m} = a^{-\frac{m}{n}}$, где m и n натуральные числа не менее 2, $a > 0$ и $\frac{m}{n}$ — целое число.

По определению $\sqrt[-n]{a^m} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$, но так как ранее доказано, что $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, имеем $\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$, или на основании определения $a^{-\frac{m}{n}}$.

Итак, $\sqrt[-n]{a^m} = a^{-\frac{m}{n}}$.

Соответствующие примеры: $\sqrt[-3]{8a^{-6}} = 2^{-1}a^2 = \frac{1}{2}a^2$ и др. (Л., № 161).

Прежде чем переходить к преобразованиям радикалов, доказывается основное свойство арифметического корня.

Величина арифметического корня не изменяется, если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же целое число (кроме нуля) при условии, что при делении получается целое число.

Доказывается, следовательно, следующее:

1) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\kappa]{a^{m\kappa}}$, если $|n| = 2, 3, \ldots$; $|m| = 0, 1, 2, 3, \ldots$; $|\kappa| = 1, 2, 3, \ldots$; $a > 0$ и обратно:

2) $\sqrt[n\kappa]{a^{m\kappa}} = \sqrt[n]{a^m}$ при тех же ограничениях значений m, n, κ и a[1]).

3) Если $a > 0$, то есть $-a < 0$, m — нечетное число, n — также нечетное число (абсолютная величина которого не менее 3), κ — любое целое число, кроме 0, то $\sqrt[n]{(-a)^m} = -\sqrt[n\kappa]{a^{m\kappa}}$.

Вначале доказывается основное свойство при условии, что m, n и κ — целые положительные числа и $a > 0$.

По определению арифметического корня при возведении в $(n\kappa)$-ю степень $\sqrt[n\kappa]{a^{m\kappa}}$ получим: $(\sqrt[n\kappa]{a^{m\kappa}})^{n\kappa} = a^{m\kappa}$. При возведении в ту же степень арифметического корня $\sqrt[n]{a^m}$ получим: $(\sqrt[n]{a^m})^{n\kappa} = [(\sqrt[n]{a^m})^n]^\kappa = a^{m\kappa}$, то есть при возведении в одну и

---

[1]) Теорема верна и для $a = 0$ при $n = 2, 3, 4, \ldots$ и любых натуральных значениях m и κ, но практического значения этот случай не имеет.

ту же степень положительных чисел $\sqrt[n]{a^m}$ и $\sqrt[nk]{a^{mk}}$ получили один и тот же результат, следовательно, $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$.

Прочитав это равенство справа налево, имеем: **показатель арифметического корня и показатель степени подкоренного выражения, когда основание степени — положительное число, можно разделить на одно и то же число.**

Доказательство основного свойства арифметического корня при любых целых m, n и k можно в школе не разбирать, а рассмотреть лишь на частных примерах.

Примеры. При приведении радикалов к общему показателю возможны следующие случаи:

1) $\sqrt{6} = \sqrt[6]{6^3}$;

2) $\sqrt[3]{-6} = -\sqrt[3]{6} = -\sqrt[6]{6^2}$;

3) $\sqrt[4]{a-b} = \sqrt[12]{(a-b)^3}$, если $a \geqslant b$;

4) $\sqrt[3]{b-a} = -\sqrt[3]{a-b} = -\sqrt[12]{(a-b)^4}$, если $a \geqslant b$.

Сокращение показателей:

1) $\sqrt[8]{81} = \sqrt{3}$;

2) $\sqrt[9]{-8} = -\sqrt[9]{8} = -\sqrt[3]{2}$;

3) если $a \geqslant b$, то $\sqrt[4]{a^2 - 2ab + b^2} = \sqrt{a-b}$;

4) $\sqrt[4]{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{1-x}$, если $x \leqslant 1$, и $\sqrt[4]{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{x-1}$, если $x > 1$;

5) нельзя сократить показатели $\sqrt[4]{-2^6}$, но 6) $\sqrt[4]{(-2)^6} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$.

При решении дальнейших упражнений на вынесение рациональных множителей за радикал и внесение множителей под радикал следует внимательно следить за тем, чтобы учащийся не забывал, что все действия производятся только с арифметическими корнями.

1) $\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$ только при $a \geqslant 0$;

2) $-3\sqrt{2} = -\sqrt{18}$;

3) $\sqrt[5]{-64} = -2\sqrt[5]{2}$, но верно также и $\sqrt[5]{-64} = 2\sqrt[5]{-2}$;

4) $(1-\sqrt{2})\sqrt{1+\sqrt{2}} = -(\sqrt{2}-1)\sqrt{\sqrt{2}+1} = -\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{2}+1)} = -\sqrt{\sqrt{2}-1}$;

5) $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}=\sqrt[6]{(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt[6]{7-4\sqrt{3}}$;

6) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}=-\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}=-\sqrt[6]{7-4\sqrt{3}}$;

7) $\sqrt[4]{-64}$ нельзя преобразовать.

Вынесение множителя из-под радикала и внесение множителя под радикал позволяет упрощать некоторые приближенные вычисления. Так, например, пусть надо вычислить при помощи таблиц $3\sqrt{2}$ с точностью до 0,001 (предполагается, что 3 и 2 — точные числа, а следовательно, допустима любая степень точности при вычислении $3\sqrt{2}$). На основании правила: при вычислении промежуточных результатов следует брать одной цифрой больше, чем требуется в окончательном результате, имеем: $3\sqrt{2}\approx \approx 3\cdot 1{,}4142\approx 4{,}243$. Если же ввести предварительно 3 под радикал, получим: $\sqrt{18}\approx 4{,}243$. Такой прием вычислений, то есть путем введения множителя под радикал, особенно полезен, когда перед радикалом более чем однозначное число. Например, надо вычислить $325\sqrt{3}$ с точностью до 1. Так как 325 имеет три цифры, а $1<\sqrt{3}<2$, следовательно, $325\sqrt{3}$ с точностью до 1 будет иметь три цифры, поэтому $325\sqrt{3}\approx 325\cdot 1{,}732\approx 563$.

Если же ввести 325 под радикал, получим: $325\sqrt{3}\approx \approx\sqrt{105600\cdot 3}\approx\sqrt{316800}\approx 563$. Вычисление этим способом проще. Если надо вычислить $\sqrt{\frac{17}{12}}$ с точностью до 0,001, то можно поступить одним из следующих способов: 1) $\sqrt{\frac{17}{12}}=\frac{1}{6}\sqrt{51}\approx \approx\frac{7{,}141}{6}\approx 1{,}190$, или 2) $\sqrt{\frac{17}{12}}\approx\sqrt{1{,}417}\approx 1{,}190$.

Упражнения на доказательство подобия корней самостоятельного значения не имеют, поэтому после того как будет дано определение подобных корней, решено 3—4 упражнения, следует перейти к сложению и вычитанию корней, где будет ясна целесообразность получения подобных корней.

Перед тем как начать упражнения на сложение корней, надо напомнить определение суммы иррациональных чисел и указать, что ответ на вопрос о возможности существования суммы, например $3\sqrt{2}+7\sqrt{5}$, может быть дан только после определения суммы иррациональных чисел.

Не следует сразу решать все помещенные в задачнике упражнения на сложение и вычитание радикалов подряд. После решения нескольких упражнений с числовыми данными, а затем с буквенными надо перейти к умножению и делению радикалов с одинаковыми показателями.

Умножение и деление корней (и притом только арифметических) производится на основании следующих теорем.

Произведение арифметических корней с одинаковыми показателями равно корню той же степени из произведения подкоренных выражений данных корней, то есть $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$, если $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$.

Точно так же: $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, где $a\geqslant 0$ и $b>0$.

Надо особенно подчеркнуть, что действия производятся только с арифметическими корнями.

Примеры. 1) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{6}=\sqrt[4]{8\cdot 6}=2\sqrt[4]{3}$;

2) $\sqrt[3]{-9}\cdot\sqrt[3]{6}=-\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{6}=-3\sqrt[3]{2}$;

3) $5\cdot\sqrt{-2}$ и $\sqrt[4]{-3}\cdot\sqrt[4]{-27}$ нельзя перемножить, так как $\sqrt{-2}$, $\sqrt[4]{-3}$ и $\sqrt[4]{-27}$ не существуют в множестве действительных чисел.

4) $\sqrt{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}$ также нельзя перемножить, так как $2-\sqrt{5}<0$;

5) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+2}=-\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}=$
$=-\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=-1.$

Хотя в примерах 2 и 5 можно было бы произвести умножение и не преобразуя предварительно радикалы, однако из методических соображений это лучше сделать так, как показано.

Умножение и деление корней с разными показателями сначала производится на нескольких простейших случаях. Опять указывается, что действия производятся только с арифметическими корнями, поэтому можно пользоваться основным свойством корня.

Примеры. 1) $2\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{4}=2\sqrt[6]{6^3}\cdot\sqrt[6]{4^2}=2\sqrt[6]{2^3\cdot 3^3\cdot 2^4}=$
$=4\sqrt[6]{54}$;

2) $3\sqrt[3]{-25}:\sqrt{5}=-3\sqrt[3]{25}:\sqrt{5}=-3\sqrt[6]{25^2}:\sqrt[6]{5^3}=-3\sqrt[6]{5^4:5^3}=$
$=-3\sqrt[6]{5}$.

3) $\sqrt[3]{\sqrt{19}-3\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{19}+3\sqrt{3}}=$
$=-\sqrt[6]{(3\sqrt{3}-\sqrt{19})^2(3\sqrt{3}+\sqrt{19})^3}=-2\sqrt[6]{3\sqrt{3}+\sqrt{19}}.$

4) Произвести деление, считая $-1 < a \leqslant 1$:

$$\sqrt[3]{a^2-1} : \sqrt{1+a} = -\sqrt[3]{(1-a)(1+a)} : \sqrt{1+a} =$$
$$= -\sqrt[6]{(1-a)^2(1+a)^2 : (1+a)^3} = -\sqrt[6]{\frac{(1-a)^2}{1+a}}.$$

§ 10. Степени с дробными показателями.

Ранее было установлено, что $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, если $a > 0$, m и n — целые числа, $\frac{m}{n}$ также целое число. Если же $a^m < 0$ и n — нечетное число, то $\sqrt[n]{a^m} = -\left|a\right|^{\frac{m}{n}}$.

В то же время были даны определения степени a^x, когда x — любое целое число, включая и $x = 0$.

Установим теперь новые определения: если $a > 0$ и m и n — числа натуральные, то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Точно так же: если $a > 0$ и m и n — любые рациональные числа, то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Надо заметить, что замена иррациональных выражений степенями с дробными показателями не является превращением иррационального выражения в рациональное. Числа $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2^2}$, записанные как $2^{\frac{1}{2}}$ и $2^{\frac{2}{3}}$, и в той и в другой форме записи являются иррациональными числами.

Примеры. 1) $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$;

2) выражение $(-25)^{\frac{1}{2}}$ в множестве действительных чисел смысла не имеет, но $-25^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{25} = -5$;

3) $\sqrt[3]{-5^2} = -\sqrt[3]{5^2} = -5^{\frac{2}{3}}$;

4) $-0{,}001^{\frac{4}{3}} = -\sqrt[3]{0{,}001^4} = -0{,}0001$;

5) $-2{,}56^{-0,5} = -\frac{1}{\sqrt[10]{2{,}56^5}} = -\frac{1}{\sqrt{2{,}56}} = -\frac{1}{1{,}6} = -\frac{5}{8}$;

6) $(a^2-2a+1)^{\frac{1}{2}} = a-1$, если $a \geqslant 1$; $(a^2-2a+1)^{\frac{1}{2}} = 1-a$, если $a < 1$.

Основное свойство дроби $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$, каково бы ни было $k \neq 0$, в применении к степени с дробным показателем дает следующее свойство: $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}$.

В самом деле, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ по определению степени с дробным показателем.

Применяя основное свойство арифметического корня, получим $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$, а это можно записать в виде $a^{\frac{mk}{nk}}$, то есть имеем: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = a^{\frac{mk}{nk}}$.

Примеры. 1) $169^{\frac{3}{6}} = 169^{\frac{1}{2}} = \sqrt{169} = 13$;

2) $-1^{\frac{4}{6}} = -1^{\frac{2}{3}} = -\sqrt[3]{1^2} = -1$;

3) $(-1)^{\frac{4}{6}}$ — в множестве действительных чисел это выражение не имеет смысла;

4) $(a^2 - 4a + 4)^{0,25} = (a-2)^{0,5}$, если $a \geqslant 2$ и $(a^2 - 4a + 4)^{0,25} = (2-a)^{0,5}$, если $a < 2$.

Действия со степенями с любыми рациональными показателями производятся по тем же правилам, что и действия со степенями с целыми показателями.

Покажем на одном примере доказательство соответствующих теорем.

Доказать, что $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \left(-\frac{p}{q}\right)}$ ($a > 0$; m, n, p и q — натуральные числа).

На основании определения степени с дробным и отрицательным показателем имеем:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ и } a^{-\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{-p}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}.$$

Значит, $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}}$. Применяя основное свойство корня и теорему о делении корней, получим:

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{pn}}} = \sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{pn}}}.$$

По теореме о делении степеней с одинаковыми основаниями и целыми показателями и применяя опять определение степени с дробным показателем, получим:

$$\sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{pn}}} = \sqrt[nq]{a^{mq-pn}} = a^{\frac{mq-pn}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} - \frac{pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \left(-\frac{p}{q}\right)}.$$

Это и требовалось доказать.

Введение понятия степени с дробным показателем позволяет действия с радикалами — умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня — производить в ряде случаев несколько проще.

Примеры. 1) $\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[q]{a^p}=a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq+pn}{nq}}$;

2) $2\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}=2\cdot3^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{2}{3}}=2\cdot3^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}=2\cdot3\cdot3^{\frac{1}{6}}=6\sqrt[6]{3}$;

3) $(\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt{x})(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x})=(x^{\frac{3}{4}}-2x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{2}})\times$ $\times(x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{2}})=x^{\frac{17}{12}}-2x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{7}{6}}-2x^{\frac{5}{4}}+4x^{\frac{7}{6}}+8x=x^{\frac{17}{12}}-$ $-2x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{5}{4}}+8x$, но результат можно записать и так: $x\sqrt[12]{x^5}-$ $-2x\sqrt[3]{x}-2x\sqrt[4]{x}+8x$, хотя эта запись не обязательна.

4) $(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{27})^2=\left(3^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot3^{\frac{3}{4}}\right)^2=3-3^{\frac{5}{4}}+\frac{1}{4}\cdot3^{\frac{3}{2}}=$

$=3-3\sqrt[4]{3}+\frac{3}{4}\sqrt{3}$;

5) $\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3}}}=\left[x\cdot(x^2\cdot x^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{8}}=x^{\frac{23}{24}}=\sqrt[24]{x^{23}}$;

6) $(x^{1,5}-a^{1,5}):(x+\sqrt{ax}+a)=(x^{0,5}-a^{0,5})\cdot(x+a^{0,5}x^{0,5}+a):$ $:(x+a^{0,5}x^{0,5}+a)=x^{0,5}-a^{0,5}=\sqrt{x}-\sqrt{a}$.

Последним по времени преобразованием радикалов является приведение к рациональному виду числителей или знаменателей дробных иррациональных выражений.

Программа ограничивает эти преобразования простейшими.

1) В знаменателе $\sqrt[n]{a}$. Фактически это преобразование уже было произведено раньше. Теперь оно рассматривается как особое и состоит в том, что и числитель и знаменатель умножают (основное свойство дроби) на такое простейшее выражение, чтобы из знаменателя (реже числителя) извлекался корень.

Пример. $\frac{1}{\sqrt[5]{4a^3}}=\frac{\sqrt[5]{8a^2}}{\sqrt[5]{4a^3\cdot8a^2}}=\frac{\sqrt[5]{8a^2}}{2a}$.

Надо добиться, чтобы такие преобразования, как $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{4}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{6}{\sqrt{3}}$ и т. п. учащиеся умели делать устно.

2) Прежде чем переходить к преобразованию освобождения от иррациональности вида $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, надо сделать несколько упражнений на нахождение произведений $(2\sqrt{3}+3)(2\sqrt{3}-3)$; $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ и т. п., а также на возведение в квадрат сумм и разностей вида $\sqrt{x}+\sqrt{a}$, $\sqrt{a}-\sqrt{x}$, $2\sqrt{3}-\sqrt{11}$. После того как учащиеся убедятся, что произведение суммы на разность одних и тех же квадратных радикалов представляет

собой рациональное число, а квадрат суммы или разности двух квадратных радикалов сумму *или разность* рационального числа и квадратного радикала, можно переходить к преобразованию приведения к рациональному виду *знаменателя или числителя.*

Надо показать целесообразность этих преобразований, когда требуется получить приближенный результат.

Пример. Вычислить $\frac{18}{\sqrt{5}-1}$ с точностью до 0,01 (воспользоваться таблицами квадратных корней и обратных чисел):

$$\frac{18}{\sqrt{5}-1} \approx \frac{18}{2{,}236-1} \approx \frac{18}{1{,}236} \approx 18 \cdot 0{,}8091 \approx 14{,}56.$$

Если же привести знаменатель к рациональному виду, то

$$\frac{18(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{9}{2}(\sqrt{5}+1) \approx \frac{9}{2} \cdot 3{,}236 \approx 14{,}56.$$

Нетрудно видеть, что второй способ вычисления проще.

3) В программу не входит освобождение от иррациональности в знаменателе вида $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$. Но так как подобные преобразования встречаются в IX классе при изучении правильных многоугольников, мы считаем целесообразным сделать несколько подобных преобразований, а именно:

1) $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2(2-\sqrt{2})}$;

3) $\frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} = 0{,}1\sqrt{5(5+\sqrt{5})}$.

Действия с радикалами на этом заканчиваются. Однако, так как упражнения на действия с радикалами сложны и требуют достаточной тренировки, то в настоящем методическом указании упражнения на радикалы распределены на весь учебный год. Очень полезно почти на каждом уроке давать небольшие упражнения на радикалы и, в частности, устные.

По нашему распределению, как уже указано выше, в начале изучения курса алгебры в VIII классе даются формулы решения квадратного уравнения и предлагается решать несложные задачи на составление квадратных уравнений в течение всего первого полугодия. При таком положении тема «Степени и корни» заканчивается примерно к 1 декабря.

В первом полугодии считаем целесообразным провести семь контрольных работ (не считая проверочной работы по курсу VII класса), из них по теме «Степени и корни» — пять.

Глава II

УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ И ПРИВОДИМЫЕ К НИМ

§ 11. Решение квадратных уравнений с числовыми и буквенными коэффициентами

Учащиеся уже знают, что многие задачи, в частности и задачи из геометрии и из физики, приводят к квадратным уравнениям.

Например, в прямоугольном треугольнике высота, проведенная на гипотенузу, равна 4,8 *см*, гипотенуза 10 *см*. Найти проекции катетов на гипотенузу.

Применяя первый признак подобия треугольников и обозначая одну из искомых проекций через x, получим уравнение:

$$x : 4,8 = 4,8 : (10 - x),$$

или после преобразований:

$$x^2 - 10x + 23,04 = 0.$$

Общий вид квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a > 0$ (если a отрицательное, то после умножения всех членов уравнения на -1 получим коэффициент при x^2 положительным), b и c — любые действительные числа.

Систематический курс квадратных уравнений лучше начать с решения неполного квадратного уравнения вида: $ax^2 + c = 0$ ($b = 0$; $c \neq 0$).

Если $c < 0$, то $-c > 0$ и, следовательно, c можно представить как $-(-c) = -(\sqrt{-c})^2$. Точно так же положительное число $a = (\sqrt{a})^2$. Тогда данное уравнение можно представить так: $(\sqrt{a} \cdot x - \sqrt{-c})(\sqrt{a} \cdot x + \sqrt{-c}) = 0$. Произведение двух множителей равно нулю, когда хотя бы один из них равен 0.

Отсюда: 1) $\sqrt{a} \cdot x - \sqrt{-c} = 0$ или 2) $\sqrt{a} \cdot x + \sqrt{-c} = 0$, или $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Если $c > 0$, то, очевидно, уравнение $ax^2 + c = 0$ не имеет действительных корней.

Практически применяемый способ решения уравнения указан в § 4.

Для решения неполного квадратного уравнения $ax^2 + bx = 0$ ($b \neq 0$; $c = 0$) надо представить левую часть в виде произведения: $x(ax + b) = 0$. Рассуждая, как выше, получим: 1) $ax + b = 0$ или 2) $x = 0$; отсюда $x_1 = -\frac{b}{a}$; $x_2 = 0$.

Далее, ввести понятие приведенного квадратного уравнения: $x^2 + px + q = 0$, где $p = \frac{b}{a}$ и $q = \frac{c}{a}$. Преобразуя левую часть путем выделения полного квадрата, найдем: $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2 = 0$, если только $\frac{p^2}{4}-q$ — неотрицательное число.

Затем $\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=0$.

Отсюда $x_1 = -\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$; $x_2 = -\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

Формула корней квадратного уравнения общего вида выводится путем замены $p=\frac{b}{a}$ и $q=\frac{c}{a}$.

Подчеркнуть, что выведенные формулы таковы, что по ним можно решать и неполные квадратные уравнения.

Следует обратить внимание, что перед решением того или иного квадратного уравнения, его надо привести к нормальному виду, то есть к такому виду, чтобы коэффициент при x^2 был положительным целым числом.

Решение уравнений, содержащих неизвестные в знаменателе, часто приводит к квадратным уравнениям. При приведении уравнения к целому виду, приходится умножать все члены уравнения на выражение, содержащее неизвестное, что, как известно, может привести к уравнению, не равносильному данному. Поэтому полученные корни необходимо подставить в то выражение, на которое были умножены все члены уравнения. Если тот или иной из найденных корней обращает это выражение в 0, этот корень является посторонним для исходного уравнения (см. «Алгебру» Барсукова, ч. I, § 67).

Пример. $\frac{2}{2x+5}+\frac{2}{2x-5}=\frac{4x^2-45}{4x^2-25}$.

При решении этого уравнения умножаем все его члены на $4x^2-25$ и после соответствующих преобразований получим квадратное уравнение, корнями которого являются $x_1=-2{,}5$; $x_2=4{,}5$. Многочлен $4x^2-25$ при $x=-2{,}5$ обращается в 0, следовательно, $-2{,}5$ является посторонним корнем для исходного уравнения. При $x=4{,}5$ многочлен $4x^2-25\neq 0$, следовательно, данное уравнение имеет единственный корень 4,5.

Решение уравнений с буквенными коэффициентами требует, как правило, исследований. Так, например, при решении уравнения из Л. № 391 (2)

$$\frac{2a+m}{a+x}-\frac{2a-m}{a-x}=\frac{2a}{m}$$

недостаточно указать, что решение производится при условии $x\neq\pm a$ и $m\neq 0$. Решение уравнения приводит к $x=m\pm a$. Подстановка этих корней в общий знаменатель $m(a+x)(a-x)$ дает дополнительное условие: $m\neq\pm 2a$.

Однако получение этих дополнительных условий для параметров в большинстве случаев непосильно учащимся VIII класса, а потому достаточно ограничиться только нахождением условий, при которых общий знаменатель не равен 0.

Следует также решить несколько уравнений с приближенными коэффициентами, а следовательно, и с приближенными корнями; необходимо при этом пользоваться математическими таблицами Брадиса.

Пусть надо найти с допустимой точностью корни уравнения:

$$1{,}274x^2 - 0{,}8753x - 5{,}328 = 0.$$

Так как коэффициенты выражены четырьмя значащими цифрами, то и в результате нужно взять также четыре значащие цифры.

Если применить общую формулу корней квадратного уравнения, то без таблиц придется произвести умножение $4 \cdot 1{,}274 \cdot 5{,}328$ и два деления на 2,548, которые можно заменить умножением на обратное число.

Если же прежде всего разделить все члены уравнения на 1,274 (что приводит к двум умножениям на обратное число), получим уравнение $x^2 - 0{,}6870x - 4{,}178 = 0$. При решении этого уравнения по формуле приведенного все вычисления (если не говорить о сложении и вычитании) производятся уже по таблицам: одно возведение в квадрат (0,3435) и одно извлечение квадратного корня (из 4,296). Получим $x_1 \approx 2{,}415$ и $x_2 \approx -1{,}728$.

Как видим, при нахождении приближенных корней квадратного уравнения целесообразно представить его в виде приведенного.

§ 12. Решение задач на составление квадратных уравнений

Нет каких-либо принципиальных отличий в решении задач на составление уравнений первой степени и квадратных. Решение задач на составление уравнений, вообще говоря, производится по следующей схеме: 1) выбор неизвестного; 2) использование выбранного неизвестного и данных задачи для выражения в математических формулах зависимостей между величинами, встречающимися в условии задачи; 3) обоснование составления уравнения; 4) решение уравнения; 5) если при решении уравнения все его члены были умножены на выражение, содержащее неизвестное (неизвестное было в знаменателе), то обязательна проверка: являются ли найденные корни корнями составленного по условию задачи уравнения; 6) исследование соответствия найденных корней смыслу задачи (проверка решения задачи по ее условию); 7) ответ на вопрос задачи.

Основная масса задач, помещенных в стабильном задачнике на составление уравнений, содержит величины, зависимость между которыми может быть выражена уравнением $y = ax$. Это задачи на движение, на работу и др.

Для анализа условия в таких задачах очень полезно, как указывалось раньше, применять табличную схему. Покажем использование ее и на решении более сложных задач.

Задача Л. № 480. Паровоз, пройдя первый перегон в 24 *км*, был задержан некоторое время, а потому следующий перегон проходил со скоростью, большей прежней на 4 *км* в час. Несмотря на то, что второй перегон был длиннее первого на 15 *км*, паровоз прошел его за время только на 20 мин. большее, чем потребовалось на прохождение первого перегона. Определить первоначальную скорость паровоза.

Вот как, по нашему мнению, учащийся должен решать эту задачу в домашней тетради:

	Скорость движения в *км/час*	Время движения в часах	Пройденный путь в километрах
Первый перегон	[3] x	[5] $\frac{24}{x}$	[1] 24
Второй перегон	[4] $x+4$	[6] $\frac{39}{x+4}$	[2] 39

По условию задачи $\frac{39}{x+4}$ час. больше $\frac{24}{x}$ час. на $\frac{1}{3}$ часа (20 мин.), поэтому имеем уравнение:

$$\frac{39}{x+4} - \frac{24}{x} = \frac{1}{3};$$

$$117x - 72x - 288 = x^2 + 4x;$$

$$x^2 - 41x + 288 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 1152}}{2}; \quad x_1 = 32; \quad x_2 = 9.$$

При $x_1 = 32$ и $x_2 = 9$ $\quad x(x+4) \neq 0$.

Проверка. 1) $\frac{24}{32} = \frac{3}{4}$ (часа) или 45 мин. на первый перегон;

2) $\frac{39}{32+4} = \frac{39}{36} = 1\frac{1}{12}$ (часа), или 1 час 5 мин. на второй перегон.

1 час 5 мин. больше 45 мин. на 20 мин. Так и в условии задачи. Если считать, что движение на перегонах происходило в условиях обычного режима, то второе решение $x = 9$ не удовлетворяет смыслу задачи.

Ответ. Первоначальная скорость паровоза 32 *км* в час.

Однако при выполнении отдельных письменных работ, в частности контрольных, учитель должен требовать от учащихся подробного связного мотивированного изложения решения задачи.

Задача Л. № 477. Два туриста идут друг другу навстречу: один из пункта A, другой — из B. Первый выходит из A

на 6 час. позже, чем второй из B. При встрече оказывается, что он прошел на 12 *км* меньше второго. Продолжая после встречи дальнейший путь с той же скоростью, первый приходит в B через 8 час., а второй — в A через 9 час. Определить расстояние от A до B и скорость каждого туриста.

Вначале ученик составляет черновик решения и нумерует последовательность заполнения отдельных клеток таблицы.

	Скорость движения в *км/час*	Время движения в часах	Пройденный путь в километрах
До встречи			
Первый из A	$\boxed{9}$ $\frac{x+12}{8}$	$\boxed{11}$ $\frac{8x}{x+12}$	$\boxed{1}$ x
Второй из B	$\boxed{10}$ $\frac{x}{9}$	$\boxed{12}$ $\frac{9(x+12)}{x}$	$\boxed{2}$ $x+12$
После встречи			
Первый из A	$\boxed{7}$ $\frac{x+12}{8}$	$\boxed{4}$ 8	$\boxed{3}$ $x+12$
Второй из B	$\boxed{8}$ $\frac{x}{9}$	$\boxed{6}$ 9	$\boxed{5}$ x

$$\frac{9(x+12)}{x} - \frac{8x}{x+12} = 6.$$

Далее, ученик пишет решение задачи так.

Обозначаю через x *км* путь, пройденный первым туристом до встречи со вторым. Тогда путь, пройденный вторым до встречи, выразится через $(x+12)$ *км*, так как этот путь по условию задачи больше пути первого на 12 *км*. Все расстояние от A до B при этом обозначении составит $(2x+12)$ *км*.

После встречи первый турист прошел $(x+12)$ *км* за 8 час., а второй — x *км* за 9 час., отсюда скорость движения первого туриста $\frac{x+12}{8}$ *км* в час, а скорость второго — $\frac{x}{9}$ *км* в час. По условию задачи скорость движения каждого туриста оставалась неизменной, то есть и до встречи первый шел со скоростью $\frac{x+12}{8}$ *км* в час, а второй со скоростью $\frac{x}{9}$ *км* в час. Следовательно, первый на путь до встречи затратил $x : \frac{x+12}{8}$ или $\frac{8x}{x+12}$ час., а второй — $(x+12) : \frac{x}{9}$, или $\frac{9(x+12)}{x}$ час.

По условию задачи первый вышел на 6 час. позже, значит, до момента встречи со вторым он шел на 6 час. меньше, чем второй, отсюда имеем уравнение:

$$\frac{9(x+12)}{x} - \frac{8x}{x+12} = 6.$$

Далее ученик решает уравнение и получает $x_1 = 36$ и $x_2 = -7{,}2$ и продолжает писать.

Найденные корни квадратного уравнения не обращают в 0 $x(x+12)$ — общий знаменатель исходного уравнения, следовательно, являются корнями и исходного уравнения. Но $x_2 < 0$, а потому не удовлетворяет смыслу задачи (расстояние между пунктами выражается только положительным числом).

Все расстояние между A и B равно $(2x+12)$ *км*, то есть $2 \cdot 36 + 12$, или 84 *км*. Скорость первого $\frac{36+12}{8} = 6$ (*км* в час), скорость второго $\frac{36}{9} = 4$ (*км* в час).

Проверка. По условию задачи первый турист вышел позже второго на 6 час. и на путь после встречи затратил времени на 1 час (9—8) меньше второго. Следовательно, на весь путь от A до B первый турист затратил на 7 час. меньше второго.

Найденные значения дают:

Первый на весь путь затратил $\frac{84}{6} = 14$ (час.).

Второй на тот же путь затратил $\frac{84}{4} = 21$ (час), то есть в действительности на 7 час. больше первого, следовательно, задача решена правильно.

Ответ. Между A и B 84 *км*. Скорость первого туриста 6 *км* в час, второго — 4 *км* в час.

При составлении таблицы с записью условия задачи после того, как выбрано неизвестное, мы рекомендуем пользоваться такими указаниями. В первой графе каждой таблицы должны быть указаны «субъекты условия задачи», то есть о ком, или то, о чем говорится в условии задачи. В последующих графах указываются элементы уравнения $y = ax$, причем мы рекомендуем значения y писать в последней графе, то есть в последней графе записывать произведение чисел предыдущих двух граф.

Наименования граф определяются использованным в задаче материалом: а) количество, цена, стоимость, б) число рабочих, выработка одного рабочего в единицу времени, общая выработка; в) время работы, производительность (доля работы, выполняемая в единицу времени), выполненная работа и т. п.

Решение ряда других задач оформляется проще.

Задача Л. № 460. Через несколько точек, расположенных на плоскости так, что никакие три из них не лежат на одной прямой, проведены все прямые, соединяющие эти точки попарно. Определить, сколько было точек, если число проведенных прямых оказалось равным 45.

Решение. Пусть на плоскости находится n точек, удовлетворяющих условию задачи. Соединим одну из них с каждой из остальных, получим $(n-1)$ прямую. Это можно сделать с каждой из данных точек; таким образом, будет проведено $n(n-1)$ прямых. Однако при таком счете каждая прямая подсчитана дважды, следовательно, различных прямых проведено $\frac{1}{2}n(n-1)$. Отсюда уравнения $\frac{1}{2}n(n-1)=45$.

Аналогичны задачи 457, 458, 461, 462.

Примечание. Для решения квадратных уравнений учащийся обязан знать две формулы корней: приведенного квадратного уравнения ($x^2+px+q=0$) и уравнения общего вида ($ax^2+bx+c=0$). Учащихся следует ориентировать на применение формулы приведенного квадратного уравнения в том случае, когда коэффициент при x^2 равен 1, коэффициент при x — четное число и свободный член — целое число. Во всех остальных случаях целесообразно применять формулы корней уравнения общего вида.

В качестве упражнения целесообразно вывести формулу корней уравнения $ax^2+2kx+c=0$, где k — какое-либо целое число или иррациональное, и рекомендовать учащимся пользоваться ею в соответствующих случаях.

Мы не считаем возможным вовсе отказаться от формулы корней приведенного квадратного уравнения. Учащиеся должны быть знакомы с методом преобразования уравнений общего вида к уравнениям частных случаев, дающих возможность получить более простой вид тех или иных формул.

§ 13. Свойства корней квадратного уравнения

Известная теорема о свойствах корней квадратного уравнения усваивается учащимися обычно достаточно хорошо.

При изучении этих свойств учитель должен пробудить самостоятельность учащихся в их суждениях.

Решив ряд несложных уравнений, например:

1) $x^2-5x+6=0$; 2) $x^2+5x+6=0$;

3) $x^2-7x+10=0$; 4) $x^2-x-56=0$,

учитель должен предложить учащимся установить зависимость между корнями уравнения и его коэффициентами.

Затем предложить уравнения частного вида: 1) $x^2-49=0$; 2) $x^2-12=0$; 3) $x^2-11x=0$. Установить, что и для этих уравнений только что сформулированные свойства корней квадратного уравнения остаются верными.

Далее, вывести теорему о свойствах корней уравнения:

$$x^2+px+q=0.$$

Вновь разобрать частные примеры отдельных уравнений, причем предлагать и уравнения, имеющие иррациональные корни, например:

$$x^2 - 8x + 13 = 0.$$

Затем дается такое уравнение:

$$x^2 - 4x + 5 = 0.$$

Обычно учащиеся, не задумываясь, отвечают, что сумма корней этого уравнения равна 4, а произведение равно 5.

Но попытка найти корни уравнения обнаруживает, что дискриминант — отрицательное число, а потому уравнение действительных корней не имеет. Но тогда нельзя и ставить вопрос о сумме и произведении корней. Из этого, в частности, следует, что прежде чем отвечать на вопрос о сумме и произведении корней, надо проверить, имеет ли данное уравнение действительные корни.

Теорему Виета о свойстве корней квадратного уравнения надо использовать для нахождения корней уравнения без применения формулы.

В этом случае прежде всего разлагается свободный член на такие два множителя, сумма которых равна коэффициенту при x с противоположным знаком. Устное решение некоторых уравнений надо практиковать и в дальнейшем (в частности, и при решении задач на составление уравнений) не только в VIII классе, но и в последующих классах.

Примечание. Теоремы о свойстве корней квадратного уравнения, а затем и теорему о разложении квадратного трехчлена на линейные множители следовало бы формулировать так: «Если данное квадратное уравнение (квадратный трехчлен) имеет действительные корни, то...» Однако позднее, когда учащиеся познакомятся с комплексными и, в частности, следовательно, с мнимыми числами и когда квадратный трехчлен будет разлагаться на множители в множестве комплексных чисел, указанная оговорка была бы излишней.

Вот почему мы считаем, что и в VIII классе лучше дать общую формулировку. Но при решении упражнений на свойства корней квадратного уравнения и разложение квадратного трехчлена на линейные множители надо прежде всего ответить на вопрос: имеет ли данное уравнение (квадратный трехчлен) действительные корни?

Применение теоремы Виета. Теорема Виета позволяет решать многие упражнения. Разберем некоторые из них.

1) Найти суммы квадратов корней уравнения $x^2 + px + q = 0$. Пусть корни его x_1 и x_2, тогда имеем два тождества:

$$x_1^2 + px_1 + q = 0,$$
$$x_2^2 + px_2 + q = 0.$$

После их сложения и переноса в правую часть всех членов, кроме первых, получим:

$$x_1^2 + x_2^2 = -p(x_1 + x_2) - 2q$$

и, наконец,

$$x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q.$$

2) Найти сумму кубов корней того же уравнения:

$$x_1^2 = -px_1 - q,$$
$$x_2^2 = -px_2 - q.$$

После умножения обеих частей тождеств соответственно на x_1 и x_2 получим:

$$x_1^3 = -px_1^2 - qx_1,$$
$$x_2^3 = -px_2^2 - qx_2.$$

Отсюда $x_1^3 + x_2^3 = -p(x_1^2 + x_2^2) - q(x_1+x_2) = -p(p^2-2q)+pq = -p^3 + 3pq$.

3) Дано уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, причем $c \neq 0$. Составить квадратное уравнение, корни которого были бы обратны корням данного.

Обозначая неизвестное нового уравнения через z, имеем: $z_1 = \frac{1}{x_1}$ и $z_2 = \frac{1}{x_2}$, тогда:

$$z_1 + z_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{b}{a} : \frac{c}{a} = -\frac{b}{c},$$
$$z_1z_2 = \frac{1}{x_1x_2} = \frac{a}{c}.$$

Теперь

$$z^2 + \frac{b}{c}z + \frac{a}{c} = 0,$$

или:

$$cz^2 + bz + a = 0.$$

Можно было сформулировать эту задачу и так: требуется составить уравнение, неизвестное которого связано с данным равенством $x = \frac{1}{z}$. Получим:

$$a \cdot \frac{1}{z^2} + b \cdot \frac{1}{z} + c = 0,$$

или:

$$cz^2 + bz + a = 0.$$

4) В уравнении $12x^2 + (\kappa - 1)x - 3 = 0$ найти κ, если известно, что отношение корней равно -9.

По теореме Виета $x_1x_2 = -\frac{1}{4}$.

Из условия задачи $x_1 : x_2 = -9$ или $x_1 = -9x_2$. Подставляя в первое уравнение $-9x_2$ вместо x_1, получим: $-9x_2^2 = -\frac{1}{4}$. Откуда: $x_2 = \pm\frac{1}{6}$, а следовательно, $x_1 = \mp\frac{3}{2}$. Задача имеет два решения:

1) $x_1 = -\frac{3}{2}$ и $x_2 = \frac{1}{6}$, тогда $\frac{\kappa - 1}{12} = -\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\right)$; отсюда $\kappa_1 = 17$.

2) $x_1 = \frac{3}{2}$ и $x_2 = -\frac{1}{6}$, тогда $\frac{\kappa - 1}{12} = -\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\right)$; $\kappa_2 = -15$.

§ 14. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители

Несмотря на несложность этого вопроса, учащиеся недостаточно отчетливо представляют себе, почему разложение многочлена на множители связано с решением уравнений и в данном случае квадратного.

Мы рекомендуем начать изложение этой темы с повторения основных приемов разложения многочленов на множители, известных из курса VI и VII классов.

Примеры. 1) x^2-5x; 2) x^2-9; 3) $4x^2-25$; 4) x^2-6x+9; 5) $x^2-ax-bx+ab$.

После этого следует предложить найти численную величину этих многочленов при 1) $x=-1; 0; 5$; 2) $x=4; 3; -3$; 3) $x=\pm 2{,}5$; 4) $x=3$; 5) $x=a$ и $x=b$.

Выяснить, что при некоторых значениях данные многочлены обращаются в 0 и притом как раз при тех значениях, которые вычитаются из x в линейных двучленах, представляющих множители разложения. После этого ввести понятие корня многочлена. Затем предложить разложить $x^2-8x+15$; $x^2-2x-24$.

Способ группировки нельзя применить: нечетное число членов. Сопоставление с многочленом $x^2-ax-bx+ab$ подсказывает прием: надо подыскать такие два числа, чтобы произведение их было равно $+15$ (-24 во втором случае), а сумма -8 (-2). Находим -5 и -3 (-6 и 4) и, представив многочлены в виде $x^2-5x-3x+15$ и $x^2-6x+4x-24$, разлагаем на произведение линейных множителей.

Задача подыскания двух чисел по данному их произведению и сумме уже была решена раньше: это решение приведенного квадратного уравнения.

Теперь ставим общий вопрос о разложении любого квадратного трехчлена на произведение линейных двучленов (если этот квадратный трехчлен имеет действительные корни).

Необходимо особо подчеркнуть, что коэффициент при x^2 может быть любым числом (кроме 0).

При разложении квадратных трехчленов на множители можно рекомендовать следующие записи.

Разложить на множители $3x^2-2x-8$. Ученик пишет: «Находим корни $3x^2-2x-8=0$». Решает это уравнение и находит $x_1=2$; $x_2=-1\frac{1}{3}$, а затем: $3x^2-2x-8=3(x-2)\left(x+1\frac{1}{3}\right)$.

Мы полагаем, что нет надобности вносить множитель 3 в один из двучленов. В дальнейшем при исследовании квадратного трехчлена некоторые его свойства определяются этим коэффициентом и внесение его в один из двучленов только затруднит исследование.

Чтобы учащийся не забывал об этом коэффициенте, полезно рекомендовать выписывать его заранее, еще до нахождения корней.

После того как разобрано разложение квадратного трехчлена на линейные множители, следует вновь решить упражнения на составление уравнений по его корням, но теперь эту задачу можно решить иначе: искомое уравнение можно записать в виде произведения. Например, составить уравнение, если $x_1 = -\frac{1}{4}$ и $x_2 = 2$; уравнение: $\left(x + \frac{1}{4}\right)(x - 2) = 0$. После преобразования $4x^2 - 7x - 2 = 0$.

§ 15. Исследование корней квадратного уравнения

Начало исследования корней квадратного уравнения было положено при выводе формул корней.

Было установлено условие, при котором квадратное уравнение имеет действительные корни: дискриминант уравнения $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$.

Используя теорему Виета, можно ответить на ряд других вопросов о корнях квадратного уравнения, не решая его.

Так как формула корней $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ является общей, поэтому для исследования корней целесообразно использовать именно эту формулу.

$c < 0$, значит $-c > 0$. $b^2 - 4ac = b^2 + 4a(-c) > 0$ как сумма двух положительных чисел.

Вывод. При $c < 0$ квадратное уравнение имеет два различных действительных корня.

Из того, что $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, а в рассматриваемом случае $\frac{c}{a} < 0$, то есть $x_1x_2 < 0$, следует: корни имеют различные знаки.

Сумма двух чисел с различными знаками может быть различной по знаку или равна 0, в зависимости от их абсолютной величины.

1) Если $b < 0$, а значит $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$, то положительный корень имеет большую абсолютную величину.

2) Если $b = 0$, то есть $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 0$, следовательно, x_1 и x_2 — противоположные числа.

3) Если $b > 0$, то есть $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$, то отрицательный корень имеет большую абсолютную величину.

Примеры (приводим запись, которую следует требовать от учащихся).

Исследовать корни уравнений:

а) $2x^2 - 5x - 3 = 0$; $c = -3 < 0$, следовательно, $D > 0$.

Уравнение имеет действительные различные корни:

$x_1x_2 = -\frac{3}{2} < 0$ — знаки корней различные,

$x_1 + x_2 = \frac{5}{2} > 0$ — положительный корень имеет большую абсолютную величину.

б) $2x^2 - 3 = 0$; $c < 0$, следовательно, $D > 0$.

Уравнение имеет действительные различные корни:

$x_1 x_2 = -\frac{3}{2} < 0$ — знаки корней различные;

$x_1 + x_2 = 0$ — корни уравнения — противоположные числа.

в) $2x^2 + 5x - 3 = 0$; $c = -3 < 0$, следовательно, $D > 0$.

Уравнение имеет действительные различные корни:

$x_1 x_2 = -\frac{3}{2} < 0$ — знаки корней различные;

$x_1 + x_2 = -\frac{5}{2} < 0$ — отрицательный корень имеет большую абсолютную величину.

В отдельных случаях целесообразно ответы заканчивать нахождением корней, это особенно полезно, когда корни — иррациональные числа.

Например, при исследовании корней уравнения $3x^2 - 5x - 1 = 0$ получаем: уравнение имеет действительные различные корни с различными знаками, причем положительный корень имеет большую абсолютную величину.

В самом деле,

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{37}}{6} \approx -0{,}18; \; x_2 = \frac{5 + \sqrt{37}}{6} \approx 1{,}85.$$

Дальнейшее исследование корней при $c = 0$ и $c > 0$ производится способом, аналогичным разобранному выше. Так как проводится исследование корней уравнения общего вида, то особо рассматривать случаи неполных уравнений не приходится.

Полезно дать общую сводку исследования в виде следующей таблицы (см. стр. 44), на основе которой целесообразно сделать несколько плакатов. Последняя графа этой таблицы «Графическая иллюстрация» заполняется позже, когда будет рассмотрено графическое решение квадратных уравнений.

§ 16. Биквадратные уравнения

Биквадратными уравнениями называются, как известно, такие уравнения четвертой (дважды квадратные) степени, левая часть которых содержит неизвестное только в четных степенях. Биквадратное уравнение, приведенное к нормальному виду, выражается следующей формулой:

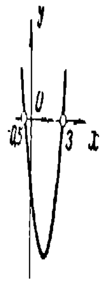
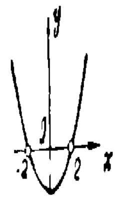
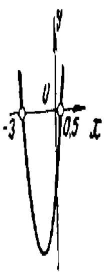
$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

где, как и в квадратном уравнении, будем считать $a > 0$. Наиболее простой прием решения биквадратного уравнения заключается во введении нового вспомогательного неизвестного и приведение биквадратного уравнения относительно x к квадратному относи-

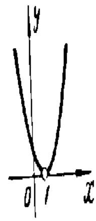
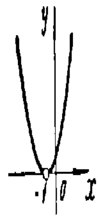
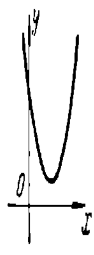
ИССЛЕДОВАНИЕ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

$$ax^2+bx+c=0,\text{ где } a>0.$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\quad D=b^2-4ac.\qquad x_1+x_2=-\frac{b}{a};\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

	D	Заключение о корнях на основании знака дискриминанта	Знаки корней	b	Заключение о корнях на основании знака b	Числовой пример	Графическая иллюстрация
	2	3	4	5	6	7	8
0	$D>0$	Корни действительные различные	$x_1x_2=\frac{c}{a}<0$. Корни имеют различные знаки	$b<0$	$x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0$ Положительный корень имеет бо́льшую абсолютную величину	$2x^2-5x-3=0$; $x_1=-0,5$; $x_2=3$	
				$b=0$	$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=0$ x_1 и x_2 — противоположные числа	$0,5x^2-2=0$; $x_1=-2$; $x_2=2$	
				$b>0$	$x_1+x_2=-\frac{b}{a}<0$ Отрицательный корень имеет бо́льшую абсолютную величину	$2x^2+5x-3=0$; $x_1=-3$; $x_2=0,5$	

Продолжение

1	2	3	4	5	6	7	8
>0	$D=0$	Корни действительные равные[2]	$x_1 = x_2$[3] Следовательно, и знаки корней одинаковые	$b<0$	$x_1 = x_2 > 0$	$x^2 - 2x + 1 = 0$; $x_1 = x_2 = 1$	
				$b>0$[1]	$x_1 = x_2 < 0$	$x^2 + 2x + 1 = 0$; $x_1 = x_2 = -1$	
	$D<0$	Квадратное уравнение не имеет действительных (вещественных) корней				$x^2 - 4x + 5 = 0$	 [4]

[1] $b = 0$ не рассматривается, так как при $c > 0$ и $D \geqslant 0$ b не может быть равным 0.

[2] В этом случае левая часть квадратного уравнения представляет квадрат двучлена относительно x.

[3] Употребителен термин: уравнение имеет двукратный корень.

[4] Графическая иллюстрация производится только после изучения темы «Функции и графики».

§ 17. Иррациональные уравнения

Под иррациональными уравнениями разумеются такие уравнения, неизвестное которых находится под знаком радикала. Таковы уравнения: $\sqrt{x}=7$; $2\sqrt{x}-9=0$; $\sqrt{x-1}+2x=23$ и т. п.

Нельзя дать общего вида иррационального уравнения.

Существуют различные приемы решения иррациональных уравнений. Мы укажем здесь простейшие.

Прежде всего заметим, что при решении иррациональных уравнений, содержащих неизвестное под знаком радикала четной степени, имеется в виду только арифметическое значение корня. Поэтому уравнение $\sqrt{x}=7$ имеет корень $x=49$, а уравнение $\sqrt{x}=-7$ не имеет корня, так как $\sqrt{x}\geqslant 0$, а $-7<0$.

Уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=0$ (Л., № 540-1) не имеет корней, так как должно быть $x+1\geqslant 0$, то есть $x\geqslant -1$. Тогда $x+2\geqslant 1$, а следовательно, $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}>0$.

Уравнение $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x-1}=-3$ (Л., № 540-3) не имеет корней, так как $\sqrt{x^2+1}>0$ при любых действительных значениях x, а $\sqrt{x-1}\geqslant 0$, следовательно, $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x-1}>0$.

Уравнение $\sqrt{7+\sqrt{x-3}}=2$ не имеет корней. В самом деле, $\sqrt{x-3}\geqslant 0$, тогда $\sqrt{7+\sqrt{x-3}}\geqslant\sqrt{7}>2$.

Уравнение $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3}=1{,}5$ не имеет корней, так как $2x+1\geqslant 0$ при $x\geqslant -0{,}5$, но тогда $\sqrt{x+3}\geqslant\sqrt{2{,}5}>1{,}5$.

При решении иррациональных уравнений, содержащих квадратные радикалы, обе части уравнения возводятся в квадрат. Так как квадрат и положительного и отрицательного числа — число положительное, то возведение в квадрат обеих частей уравнений дает, вообще говоря, новое уравнение, корни которого являются как корнями данного (если оно имеет решение), так и корнями другого, отличающегося от данного знаком одной из частей (правой или левой).

Пусть, например, дано уравнение $A=B$, где под буквами A и B подразумеваются некоторые выражения, содержащие неизвестное.

После возведения в квадрат обеих частей уравнения получим: $A^2=B^2$ или $(A-B)(A+B)=0$, откуда имеем два уравнения: $A=B$, то есть то, которое было дано, и $A=-B$, корни которого отличаются от корней данного.

В школьной практике, когда к моменту решений иррациональных уравнений учащиеся не встречались с записями уравнения в виде $A=B$ или $F(x)=f(x)$, указанное выше обстоятельство достаточно показать только на примерах.

1) $5x=3$. Это уравнение имеет единственный корень $x=0{,}6$. Возведение в квадрат обеих частей уравнения даст уравнение

$25x^2 = 9$, которое содержит как корни данного уравнения $5x = 3$, так и корни уравнения $5x = -3$, или $x = 0,6$ и $x = -0,6$.

Второй корень — посторонний для данного уравнения. Исходное уравнение и полученное после возведения в квадрат обеих частей его — неравносильные уравнения.

2) $2x - 1 = -7$. Корень этого уравнения $x = -3$.

После возведения в квадрат обеих частей уравнения получим $4x^2 - 4x + 1 = 49$. Это уравнение имеет корни $x = -3$ и $x = 4$. Второй корень для исходного уравнения посторонний. Исходное уравнение и полученное после возведения в квадрат обеих его частей — неравносильные уравнения.

3) $x^2 + 4 = 13$. Это уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \pm 3$.

После возведения в квадрат обеих частей уравнения получим биквадратное уравнение $x^4 + 8x^2 - 153 = 0$, имеющее только два действительных корня ± 3, т. е. как раз те же, что и исходное уравнение. Значит, в данном случае при возведении в квадрат обеих частей уравнения получено уравнение, равносильное данному в множестве действительных чисел.

Вывод. При возведении в квадрат обеих частей уравнения получается новое уравнение, которое может быть неравносильно данному в множестве действительных чисел.

Поэтому, если при решении уравнения обе его части возводятся в квадрат (или иную степень), то после решения полученного уравнения надо отобрать из его корней лишь те, которые удовлетворяют исходному уравнению.

Примеры решения иррациональных уравнений.

1) $\sqrt{2x - 9} = \sqrt{6 - x}$ (Л., № 543-4).

После возведения в квадрат обеих частей имеем: $2x - 9 = 6 - x$, отсюда $x = 5$. Подстановка $x = 5$ в левую и правую части исходного уравнения дает: $\sqrt{2x - 9} = 1$ и $\sqrt{6 - x} = 1$, то есть $x = 5$ — корень исходного уравнения.

2) $\sqrt{1,5 - x\sqrt{x^2 - 5,25}} = 2$.

После первого возведения в квадрат и некоторых преобразований имеем:

$$x\sqrt{x^2 - 5,25} = -2,5.$$

После второго возведения в квадрат:

$$x^4 - 5,25x^2 - 6,25 = 0.$$

Это уравнение имеет два действительных корня $\pm 2,5$. Из них только $x = -2,5$ является корнем исходного уравнения. Корень же $x = 2,5$ не удовлетворяет исходному уравнению.

3) $\sqrt{2x+15}-\sqrt{x-1}=3$.

При решении этого уравнения целесообразно до возведения в квадрат перенести один из радикалов в правую часть:

$\sqrt{2x+15}=3+\sqrt{x-1}$;

$2x+15=9+6\sqrt{x-1}+x-1$;

$x+7=6\sqrt{x-1}$; $x^2-22x+85=0$; $x_1=5$; $x_2=17$.

Подстановка каждого из найденных корней в исходное подтверждает, что данное иррациональное уравнение имеет два корня: 5 и 17.

4) $\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+7}=6$.

После возведения в квадрат обеих частей уравнения $\sqrt{x+1}-6=\sqrt{3x+7}$ и дальнейших преобразований получим $6\sqrt{x+1}=15-x$.

Дальнейшие преобразования дадут квадратное уравнение $x^2-66x+189=0$, имеющее $x_1=3$ и $x_2=63$.

Подстановка x_1 в левую часть исходного уравнения дает -2, а подстановка x_2 дает -6, но не 6. Данное уравнение не имеет корней.

Это можно было бы видеть и из данного уравнения. В самом деле $\sqrt{x+1}$ имеет смысл только при $x \geqslant -1$, но тогда $\sqrt{3x+7}>\sqrt{x+1}$, а следовательно, $\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+7}<0$.

Глава III

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

§ 18. Понятие о функции и графике функции

В объяснительной записке к программе по математике сказано: «В преподавании математики следует обратить особое внимание на сознательное овладение... идеей функции и ее графическим изображением. Понятие о функции и ее графическом изображении должно быть подготовлено изучением математики в V—VII классах».

Изучение темы «Функции и графики» в VIII классе должно быть поставлено как обобщение сведений о функциональной зависимости в предыдущих классах. Затем должны быть введены некоторые новые понятия, дающие соответствующую терминологию, произведен анализ свойств функций (на примере линейной и квадратичной функций) и установлена связь между свойствами функции и ее графиком.

Учащиеся VIII класса должны понимать термины: постоянная величина, константа, переменная, параметр; знать определение понятий функции и аргумента; уметь привести примеры некоторых функций; понимать термины «область определения функции» и «допустимые значения аргумента», термин «множество значений функции»; понимать, что график функции есть средство геометрической иллюстрации свойств функции; уметь по данному графику указывать некоторые свойства соответствующей функции.

Хотя ни программа, ни соответствующие упражнения в задачнике не содержат обозначений функций $F(x)$, $f(x)$ и т. п., а также $F(2)$, $f(0)$ и т. п., можно рекомендовать выяснить с учащимися указанные обозначения, если к тому представляется возможность.

В качестве примеров постоянных величин можно привести сумму внутренних углов любого треугольника, сумму внешних углов любого выпуклого многоугольника. Много примеров постоянных величин можно привести из физики (эти постоянные часто носят название констант), например удельный вес железа $7{,}86\frac{г}{см^3}$, золота — $19{,}3\frac{г}{см^3}$, число Авогадро $6{,}023\cdot10^{23}$ (количество молекул в 1 грамм-молекуле) и т. п.

Постоянные величины в геометрии получены на основании теоретических исследований, на основании логически обоснованных суждений (например, то, что сумма углов треугольника равна 180°, доказывается). Практические измерения дают то более, то менее точные приближения к теоретически обоснованным выводам.

Физические константы получаются на основании экспериментальных исследований. В результате большого количества опытов устанавливается некоторая средняя величина измеряемого показателя, которая и принимается за постоянную в дальнейших расчетах.

Примерами переменных величин могут быть: величина внутреннего угла α_n правильного многоугольника, если число его сторон увеличивается (при n, равном 3, 4, 5, 6, 7, ...); периметр многоугольника, описанного около данной окружности; расстояние движущейся точки от начала движения в каждый определенный момент времени; температура воздуха; численная величина некоторого алгебраического выражения при различных значениях букв, входящих в это выражение (например, $y = 2x^2 - x + 1$) и т. п.

На этих примерах выясняется зависимость одних переменных величин от других. Эта зависимость называется функциональной. При разборе таких примеров надо постепенно вводить термин «соответствует» (каждому данному числу сторон многоугольника соответствует определенная сумма его внутренних углов; каждому значению x соответствует определенное значение y), а также термин «допустимые» значения одной из переменных.

На примере формулы площади прямоугольника $S = ab$ или объема прямоугольного параллелепипеда $V = abc$ устанавливается возможность зависимости одной величины (S, V) от двух-трех величин. После внимательного разбора примеров, даваемых как самим учителем, так и учащимися, дается определение функции.

Переменная величина y называется функцией от переменной x, если каждому допустимому значению x соответствует определенное значение y.

x в данном случае называется аргументом или независимой переменной.

Множество допустимых значений аргумента называется областью определения функции или областью существования функции.

Из рассмотренных выше примеров и данного определения функции следует, что сумма внутренних углов многоугольника есть функция, аргументом которой является число сторон многоугольника. В этом случае допустимыми значениями аргумента являются натуральные числа: 3, 4, 5, ...

Путь (s), пройденный движущейся равномерно точкой, есть функция времени (t), причем $t > 0$.

$y = 2x^2 - x + 1$. Здесь y есть функция от x, причем x может быть любым числом.

$y = \frac{1}{2x - 7}$, y — опять функция от x, причем допустимые значения x: любое число, не равное 3,5.

Допустимыми значениями аргумента функции $y = \sqrt{x^2 - 36}$ являются числа, определяемые условием $6 \leqslant x \leqslant -6$.

Область определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 36}}$ — числа, определяемые условием $6 < x < -6$.

На подобных примерах, понятных учащимся VIII класса, учитель может выяснить понятия: допустимые значения аргумента и область определения функции.

Говоря о способах задания функции, надо опять-таки использовать уже известные учащимся формулы (уравнения) пути при равномерном движении, равномерно-ускоренном движении и т. п.

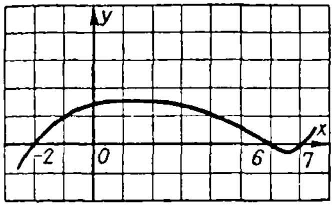
Функция может быть задана уравнением ($s = v_0t + 0{,}5at^2$; $y = 2x^2 - x + 1$ и т. п.) или одновременно и уравнением и таблицей (пусть цена 1 *кг* мяса равна 12,5 руб., тогда стоимость (p) некоторого количества мяса (q) определяется уравнением $p = 12{,}5q$. Однако продавец в целях удобства и быстроты вычислений составляет таблицу стоимости мяса, указывая в ней стоимость 0,05 *кг*, 0,1 *кг*, 0,15 *кг* и т. д.

Таблица синусов острого угла есть не что иное, как функция, заданная таблицей.

Функция может быть задана описанием способа получения ее частных значений: в круге данного радиуса проводятся хорды, длина их есть функция расстояния от центра.

Прежде чем переходить к графическому способу задания функции, необходимо вспомнить с учащимися прямоугольную систему координат и построение графиков, как это производилось в VII классе.

Определяется график функции как множество точек, абсциссами которых являются значения аргумента данной функции и ординатами — соответствующие значения функции.



Черт. 3.

Учитель приносит в класс заранее приготовленный график (его можно выполнить на миллиметровой бумаге), например, такой, как изображен на чертеже 3.

Учащийся должен научиться читать график, то есть уметь находить ординату точки, принадлежащей графику, по заданному значению аргумента. Делается вывод, что каждой точке на оси x, взятой в пределах чертежа (допустимые значения x) соответствует определенная точка графика (значение функции y). Полезно в данном случае привести примеры приборов автоматически записывающих температуру воздуха, давления и т. п.

§ 19. Линейная функция

В курсе VIII класса подробно рассматриваются только линейная функция и квадратная, обычно называемая квадратный трехчлен.

В качестве примеров линейных функций могут быть предложены: 1) скорость (v) тела при равномерном ускоренном движении (ускорение равно a), при условии, что начальная скорость была v_0; 2) длина металлического стержня, изменяющаяся в зависимости от температуры; 3) формула перехода от показаний термометра Фаренгейта (f) к показаниям термометра Цельсия (c) $c = \frac{5}{9}f - 17\frac{7}{9}$.

Затем указывается общий вид линейной функции $y = kx + b$. Если $b = 0$, то $y = kx$, то есть уравнение прямой пропорциональности является частным случаем линейной функции.

График прямой пропорциональности известен учащимся из курса VII класса; в VIII классе проводится доказательство, что график функции $y = kx$ есть прямая линия.

При построении графика линейной функции доказывается, что график ее — прямая линия.

Чтобы получить график линейной функции $y = kx + b$, составляется таблица значений этой функции и функции $y = kx$ при одних и тех же абсциссах:

x	$Y = kx$	$y = kx + b$
0	0	b
x_1	kx_1	$kx_1 + b$
x_2	kx_2	$kx_2 + b$

Из рассмотрения этой таблицы можно сделать вывод, что для получения графика линейной функции $y = kx + b$ надо прямую $Y = kx$ перенести параллельно самой себе.

Затем доказываются две теоремы:

1) все точки графика функции $y = kx + b$ принадлежат прямой, параллельной графику функции $Y = kx$ и проходящей через точку $(0; b)$, и

2) обратная первой: все точки прямой, параллельной графику функции $Y = kx$ и проходящей через точку $(0; b)$, принадлежат графику функции $y = kx + b$.

Далее следует перейти к линейному уравнению с двумя неизвестными, например $5x + 2y = 8$. В данном уравнении y можно рассматривать как функцию от x (каждому произвольно взятому значению x соответствует определенное значение y) и так как x и y даны в первой степени, значит y — линейная функция от x. Это особенно ясно видно, если данное уравнение представить как $y = -2{,}5x + 4$.

Беря различные значения коэффициента k при одном и том же значении b, обнаружим, что при этом изменяются углы, которые составляют прямые (графики соответствующих функций) с положительным направлением оси x. Отсюда название: k — угловой коэффициент.

Из рассмотрения частных примеров устанавливается, что при $k > 0$ линейная функция возрастающая, при $k < 0$ — убывающая. Если $k = 0$, график линейной функции — прямая, параллельная оси абсцисс (если $b \neq 0$) или совпадает с осью абсцисс (если $b = 0$).

Особо необходимо обратить внимание на точку пересечения графика линейной функции с осью абсцисс. В этом случае $y = 0$, то есть $kx + b = 0$. Это есть не что иное, как уравнение первой степени с одним неизвестным. Следовательно, решение линейного уравнения графически представляет собой определение абсциссы точки пересечения графика линейной функции с осью абсцисс.

§ 20. Квадратный трехчлен

Свойства квадратного трехчлена (квадратной функции) в курсе VIII класса рассматриваются главным образом на основании графика. Общий вид квадратного трехчлена:

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ где } a \neq 0.$$

Изучение свойств квадратного трехчлена надо проводить в следующем порядке:

1) $y = x^2$;

2) $y = ax^2$, например, при a, равном $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 2, и при a, равном $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, -2;

3) $y = ax^2 + b$ ($b > 0$ и $b < 0$);

4) $y = a(x + m)^2$ при a, равном $1, \frac{1}{2}, 2$, и при a, равном $-1, -\frac{1}{2}, -2$;

5) $y = a(x + m)^2 + n$.

График квадратного трехчлена (равно как и всех других функций, рассматриваемых в школьном курсе) надо строить только по отдельным точкам.

При построении графика квадратной функции, хотя бы в простейшем случае, $y = x^2$ и $y = ax^2 + b$ полезно брать не только рациональные значения x, но и некоторые иррациональные: $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{5}$, $\pm\sqrt[4]{8}$ и т. п. Это отчасти убеждает учащихся, что любой точке на оси x (иначе любому действительному числу x) соответствует определенное значение y.

Для построения графика квадратного трехчлена общего вида необходимо его привести к виду $y = a(x + m)^2 + n$. Например: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) = -\frac{1}{2}[(x^2 - 4x + 4) - 2] = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1$.

Идея построения графиков квадратного трехчлена обычно усваивается учащимися довольно легко, но построение их по точкам отнимает много времени. Для облегчения построения графиков целесообразно предложить учащимся сделать из плотной бумаги, а еще лучше из алюминиевой или пластмассовой тонкой пластинки лекала (шаблоны) парабол $y = x^2$, $y = 0{,}5x^2$ и $y = 2x^2$.

За единицу масштаба наиболее целесообразно взять 1 *см*.

Аналогичные лекала следует построить и для выполнения чертежей на доске (за единицу масштаба взять 5 *см*). Пользование лекалами облегчает ведение урока по изучению графиков и свойств квадратного трехчлена. Небольшой выбор параметров параболы не мешает изучению квадратного трехчлена, так как изменение параметра не вносит принципиальных изменений в ход рассуждений. В то же время лекала позволяют быстро показывать, как изменяется положение параболы при изменении ее уравнения.

Надо настойчиво рекомендовать иметь в классе доску, разграфленную квадратной сеткой со стороной квадрата в 5 *см*.

После того как построен график квадратного трехчлена, учащимся предлагаются следующие вопросы (ответы даются каждый раз со ссылкой на график):

1) При каких значениях x функция убывает? возрастает?

2) При каком значении x функция имеет наименьшее (наибольшее) значение и чему оно ровно?

Этот вопрос равносилен заданию найти координаты вершины параболы. Абсцисса вершины является тем значением аргумента исследуемого квадратного трехчлена, при котором трехчлен имеет наибольшее значение (при $a < 0$) или наименьшее (при $a > 0$). Соответствующая ордината — это наибольшее или наименьшее значение трехчлена.

3) При каких значениях x $y = 0$? $y < 0$? $y > 0$?

4) Чему равно значение функции при $x =$ ... (задать числа)?

5) Чему равна абсцисса x при заданном значении ординаты?

6) Как изменяется y при изменении x от ... до ... (задать числа)?

При построении графиков квадратного трехчлена выясняется, что при некоторых значениях x парабола имеет общие точки с осью абсцисс: касается ее или пересекает. Иначе: при некоторых значениях x $ax^2 + bx + c = 0$.

Но ответ на вопрос, при каких же значениях x квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c = 0$, уже решен аналитически. Это есть не что иное, как решение квадратного уравнения.

Вывод. Определение по графику абсцисс общих точек (если таковые существуют) параболы $y = ax^2 + bx + c$ и оси абсцисс представляет собой графическое решение квадратного уравнения[1]).

На заключительных уроках по теме «Функции и графики», а также в дальнейшем при повторении этой темы можно предлагать учащимся по произвольно начерченной кривой, рассматриваемой как график функции (притом однозначной), указать некоторые ее свойства, то есть отвечать на поставленные выше вопросы.

Глава IV

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

§ 21. Решение некоторых систем уравнений второй степени

При решении систем уравнений второй степени надо прежде всего вспомнить решение системы первой степени с двумя неизвестными.

Надо напомнить, что решениями системы двух уравнений с двумя неизвестными называются пары таких действительных чисел, которые удовлетворяют каждому из уравнений системы.

Решения систем надо записывать одним из следующих способов:

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ y_1 = b, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = c, \\ y_2 = d \end{cases} \qquad \text{и т. д.,}$$

или система имеет ... решений $(a;\ b)$, $(c;\ d)$ и т. д.

---

[1]) Это один из способов графического решения квадратного уравнения. Другие способы несколько сложнее.

Последний способ записи решений систем надо особенно рекомендовать при графическом способе решения.

Примечание. Термин «решение уравнения» имеет в алгебре двоякий смысл. Когда выполняют различные преобразования над уравнениями, то говорят: «производится решение уравнения». В то же время отождествляются термины «корень уравнения» и «решение уравнения» (одинаково правильно сказать, что уравнение $x^2 - 7x + 6 = 0$ имеет два корня 1 и 6 или два решения 1 и 6).

При изучении систем уравнений не принято говорить «корни системы», употребляют термин «решение системы».

Программой по алгебре в VIII классе предусматривается решение некоторых частных случаев систем уравнений второй степени. В соответствии с этим даны и упражнения в стабильном задачнике.

При решении систем уравнений второй степени применяются разнообразные приемы (нередко называемые искусственными), в частности возведение в квадрат обеих частей того или иного уравнения.

Такие преобразования могут дать системы, неравносильные исходным. Поэтому при решении систем уравнений второй степени следует во всех случаях найденные решения подставлять в каждое из уравнений исходной системы. Решениями исходной системы будут только те пары действительных чисел, которые обращают каждое из уравнений системы в тождество.

Решение систем уравнений целесообразно рассматривать в следующем порядке.

1) Системы уравнений, содержащих одно уравнение второй степени и одно первой степени.

Решаются эти системы подстановкой: из уравнения первой степени одно из неизвестных выражается через другое, найденное выражение подставляется в данное уравнение второй степени. Полученное квадратное уравнение может иметь два различных решения, одно (два равных) или ни одного.

Следовательно, и система может иметь два различных решения, одно (два равных) или ни одного.

Среди систем такого вида особое значение имеют системы вида:

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ xy = d. \end{cases}$$

Эти системы могут быть решены при помощи подстановки, но целесообразно решать их составлением вспомогательного квадратного уравнения:

$$z^2 - cz + d = 0,$$

принимая $\begin{cases} ax_1 = z_1, \\ by_1 = z_2, \end{cases}$ или $\begin{cases} ax_2 = z_2, \\ by_2 = z_1. \end{cases}$

Решение этой системы следует иллюстрировать графически.

Уравнению $ax + by = c$ соответствует прямая линия; уравнению $xy = d$ — гипербола. Координаты общих точек прямой и гиперболы (если эти общие точки существуют) являются решениями рассматриваемой системы.

Системы:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x \pm y = b \end{cases}$$

решаются подстановкой, но их решение может быть также приведено к рассмотренной выше. Для этого надо возвести обе части второго уравнения в квадрат и заменить $x^2 + y^2$ числом a, равным этой сумме. Тогда получим:

$$\begin{cases} x \pm y = b, \\ xy = \frac{b^2 - a}{2}. \end{cases}$$

Графическое решение систем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x \pm y = b \end{cases}$$

приводит к построению кривой, соответствующей уравнению $x^2 + y^2 = a$. Запишем его в виде $y = \pm \sqrt{a - x^2}$. Построение ряда точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, обнаружит, что они лежат на окружности, центр которой находится в начале координат и радиус равен $\sqrt{a}$.

Если прямая $x \pm y = b$ пересекает окружность, то система имеет два различных решения; если касается, то система имеет одно решение (два равных); если прямая и окружность не имеют общих точек, система вовсе не имеет решений.

2) Решение системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ xy = b, \end{cases}$ где оба уравнения второй степени, опять-таки может быть приведено к рассмотренной ранее, а именно к системе $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x^2y^2 = b^2. \end{cases}$

Решение этой системы даст вообще восемь пар чисел, но четыре из них будут посторонними решениями для исходной системы. В самом деле: если $b > 0$, то значения x и y должны иметь одинаковые знаки; если $b < 0$, значения x и y должны иметь различные знаки.

Система $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ xy = b \end{cases}$ может быть приведена к четырем линейным системам. Умножив обе части второго уравнения на 2, сложим его с первым уравнением, а затем вычтем его из первого, получим:

$$\begin{cases} x + y = \pm \sqrt{a + 2b}, \\ x - y = \pm \sqrt{a - 2b}. \end{cases}$$

Графическое решение системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ xy = b \end{cases}$ приводит к отысканию общих точек окружности и гиперболы. Эти кривые могут иметь или четыре общих точки, или две (гипербола и окружность касаются), или ни одной.

3) Решение систем, левая часть которых представляет собой однородные многочлены второй степени относительно x и y, может производиться следующим образом.

Разберем на частном примере:

$$\begin{cases} x^2 + xy + 4y^2 = 6, \\ 3x^2 + 8y^2 = 14. \end{cases}$$

Умножив левую и правую части первого уравнения на —7, а второго на 3 и сложив затем, получим $4y^2 + 7xy - 2x^2 = 0$.

Разложим левую часть как квадратный трехчлен относительно y и разделим обе части уравнения на 4, тогда получим:

$$\left(y - \frac{1}{4}x\right)(y + 2x) = 0, \text{ откуда } y_1 = -2x \text{ и } y_2 = \frac{1}{4}x.$$

Теперь имеем две системы:

$$\begin{cases} 3x^2 + 8y^2 = 14, \\ y = -2x; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 + 8y^2 = 14, \\ y = \frac{1}{4}x. \end{cases}$$

Получим четыре решения первоначальной системы:
$(0{,}2\sqrt{10};\ -0{,}4\sqrt{10})$, $(-0{,}2\sqrt{10};\ 0{,}4\sqrt{10})$, $(2; 0{,}5)$, $(-2; -0{,}5)$.

Графическое истолкование решения этой системы выходит за пределы программы средней школы.

Напомним, что решение систем надо во всех случаях проверять по исходной системе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В течение последних недель учебного года на уроках алгебры надо повторить элементы теории иррациональных чисел, определение функции, свойства функций на графиках, решать упражнения на закрепление понятия арифметического корня и решать задачи из главы VI стабильного задачника «Задачи для повторения курса VIII класса».

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Проверочная работа по курсу VII класса

Вариант А

1) Упростить:

$$\frac{2}{a+x} + \frac{4}{ax^2 - a^3} \cdot \left(\frac{x^2 + a^2}{2x} - a\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right). \qquad [0]$$

2) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3y + 1 - \dfrac{3(x-5y)}{4} = x - \dfrac{27y+22}{8}, \\ x + 3 - \dfrac{5x-9y}{6} = 3y - \dfrac{3-5x}{9}. \end{cases} \qquad \left[6;\ \frac{2}{3}\right]$$

3) Вычислить: а) $5{,}724^2 - 4{,}276^2$;

б) $5 \cdot 1{,}038^2$ с точностью до 0,01.

Вариант Б

1) Упростить:

$$\left(\frac{a^2+1}{1-2a+a^2} - \frac{1}{a^3-a^2-a+1} : \frac{1}{a^3+1}\right) \cdot (a^3 - 2a^2 + a). \qquad [a^2]$$

2) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{2(3x-y)}{5} = \dfrac{3y-10x}{3} + 2x + 1, \\ \dfrac{4x-3y}{3} + \dfrac{8x-3y}{2} = y + 1. \end{cases} \qquad [1{,}5;\ 2]$$

3) Вычислить: а) $10{,}31^2 - 0{,}31^2$;

б) $6 \cdot 0{,}2057^2$ с точностью до 0,001.

Работа № 1. Решение квадратных уравнений с числовыми коэффициентами

Вариант А

1) Решить уравнения:

а) $x^2 - 126x - 792 = 0$; $\qquad [132;\ -6]$

б) $\dfrac{5}{6x+2} + 3 = \dfrac{2}{x}$; $\qquad \left[\frac{1}{2};\ -\frac{4}{9}\right]$

в) $49x^2 - 28x + 4 = 0$. $\qquad \left[\frac{2}{7}\right]$

2) Найти с точностью до 0,01 корни уравнения:

$$5x^2 - 32{,}3x + 12{,}4 = 0 \qquad [6{,}05;\ 0{,}41]$$

Вариант Б

1) Решить уравнения:

а) $x^2 + 236x - 1452 = 0$; $\qquad [-242;\ 6]$

б) $\dfrac{5}{3x+2} + \dfrac{9}{6x-1} = 2$; $\qquad \left[-\frac{1}{3};\ 1\frac{5}{12}\right]$

в) $64x^2 + 48x + 9 = 0$. $\qquad \left[-\frac{3}{8}\right]$

2) Найти с точностью до 0,01 корни уравнения:

$$5x^2 - 45{,}7x + 54{,}8 = 0. \qquad [1{,}42;\ 7{,}72]$$

Работа № 2. **Действия со степенями с целыми показателями**

Вариант А

1) Выполнить действия:

$$\text{а) } \left[\left(-\frac{5a^{-n}b^{2k+1}}{0{,}5^{-2}x^3y^2}\right)^{10} : \left(\frac{b^{3k+2}y^{-3}}{8\cdot 25^{-1}a^{2n}x^7}\right)^5\right]\cdot 8b^{-5k}y^6; \qquad \left[\frac{1}{4}\,x^5\right]$$

$$\text{б) } \left(2a^3x^{n-2}-\frac{1}{4}\,ax^{2-n}\right)^2.$$

2) Вычислить:

$$8\cdot(-3{,}7^0)+\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}\cdot(-3{,}7)^0-0{,}125^{-2}. \qquad [-56]$$

3) Проверить:

$$\frac{5\cdot 2^{13}\cdot 4^{11}-16^9}{(3\cdot 2^{17})^2}=\frac{2}{3}.$$

Вариант Б

1) Выполнить действия:

$$\text{а) } \frac{a^{7-5n}b^{27n}x^{-4}}{0{,}75z^{79}} : \left[\left(-\frac{0{,}5^{-1}a^{2n}b^{3n-1}}{3x^4z^8}\right)^9\cdot\left(\frac{3a^{1-3n}x^4}{2b^{-1}z}\right)^8\right]; \qquad \left[-2a^{n-1}\,bz\right]$$

$$\text{б) } \left(-\frac{2}{3}\,a^{n-3}b^2-\frac{3}{4}\,a^{3-n}b\right)^2.$$

2) Вычислить:

$$(-2{,}3)^0\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}-2{,}3^0\cdot(-9)^3-0{,}125^{-3}. \qquad [298]$$

3) Проверить:

$$\frac{3\cdot 2^{15}\cdot 16^2-5\cdot 2^2\cdot(2^{10})^2}{4^7\cdot 2^8}=1.$$

Работа № 3. **Извлечение корня и приведение радикалов к простейшему виду**

Вариант А

1) Выполнить действия:

$$\frac{1}{9}\,b^2\sqrt[2m-1]{\frac{3^{6m-3}a^{4m^2-1}}{b^{4m-2}x^0}}. \qquad [3a^{2m+1}]$$

2) Привести к простейшему виду:

$$\text{а) } 25\sqrt[6]{0{,}000027};\quad \text{б) } -0{,}6\sqrt[3]{-41\frac{2}{3}};\quad \text{в) } \frac{2x^3}{c^2}\sqrt[4]{\frac{0{,}25c^9}{2x}};$$

$$\text{г) } \frac{x^2}{2-x}\sqrt{\frac{4(1-x)}{x^3}+\frac{1}{x}},\ \text{если } x>2. \qquad [-\sqrt{x}]$$

Вариант Б

1) Выполнить действия:

$$\frac{a^2}{4^{2n}b^{2n-1}}\sqrt[4n+1]{\frac{2^{16n^2-1}b^{8n^2+2n}a^{-2}c^0}{a^{8n}}}. \qquad \left[\frac{1}{2}b\right]$$

2) Привести к простейшему виду:

а) $\frac{1}{3}\sqrt[6]{0{,}000081}$; б) $8\sqrt[3]{-85\frac{3}{4}}$; в) $x\sqrt[8]{\frac{8^0}{64x^6z^{14}}}$;

г) $a^3\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{2a-1}{a^4}}$, если $a<1$ и притом $a\neq 0$. $[a(1-a)]$.

Работа № 4. Действия с радикалами и степенями с дробными показателями

Вариант А

1) Выполнить действия:

а) $\left(8\sqrt[4]{20\frac{1}{4}}+\sqrt{2\frac{1}{2}}\right)-\left(5\sqrt[4]{0{,}01}+2\sqrt{0{,}08}\right)$; $[11{,}6\sqrt{2}]$

б) $6\sqrt[3]{20}+\left(\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{5}+8\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}\right)\left(\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{4}\right)$; $[18]$

в) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{-9}+3\sqrt[4]{\frac{8}{27}}\right):\left(-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+\frac{1}{2}\cdot 54^{0{,}25}$; $\left[\frac{3}{8}\sqrt[6]{24}\right]$

г) $(a^{0{,}5}-2b^{1{,}5})(a^{0{,}5}+2b^{1{,}5})$.

2) Вычислить:

$$\left[\left(\frac{25}{36}\right)^{-1{,}5}+0{,}0001^{-\frac{3}{4}}-1{,}2^3\right]^{\frac{1}{3}} \qquad [10]$$

Вариант Б

1) Выполнить действия:

а) $\left(9\sqrt[3]{\frac{1}{81}}-26\frac{2}{3}\sqrt[6]{0{,}000081}\right)-\left(0{,}9\sqrt[3]{-41\frac{2}{3}}-\right.$

$\left.-\frac{7}{6}\sqrt[3]{9000}\right)$; $[11{,}5\sqrt[3]{9}]$

б) $\left(\sqrt[3]{36}+2\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{-2}\right)\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4}\right)+4\cdot 12^{\frac{1}{3}}$; $[10]$

в) $6^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[9]{25}+\left(2\sqrt[9]{5^8}-\frac{1}{3}\sqrt[6]{3\frac{1}{3}}\right):\left(2\sqrt[3]{-4\frac{1}{6}}\right)$; $\left[\frac{1}{30}\sqrt[6]{3000}\right]$

г) $\left(\frac{1}{2}a^{0{,}25}+a^{0{,}75}\right)^2-a^{1{,}5}$. $\left[\frac{1}{4}\sqrt{a}+a\right]$

2) Вычислить:

$$\left[\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[1{,}5]{10^{-4{,}5}}+10000^{-\frac{3}{4}}\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad [0{,}1]$$

Работа № 5. Различные преобразования радикалов и действия со степенями с любыми рациональными показателями

Вариант А

Выполнить действия:

$$1)\ (a^2+b^2)\sqrt{\frac{a-2b}{b^2-2ab+a^2}}-4a^2\sqrt{\frac{1}{16a}-\frac{b}{8a^2}}-$$
$$-\frac{ab}{a-b}\sqrt{4a-8b}+(2ab-4b^2)\sqrt{\frac{1}{a-2b}},$$

если $a > 2b > 0$. $\left[b\sqrt{a-2b}\right]$

$$2)\ \frac{4}{5\sqrt{2}}-\frac{1{,}5-0{,}8\sqrt{2}}{3-4\sqrt{\frac{1}{2}}}+\frac{\sqrt{2}}{5};$$ $[-1{,}3]$

$$3)\ \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}}+\frac{2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}}\right)^{-2}-(x^2+8x+16)^{\frac{1}{2}},$$ если $x>0$. $\left[-4\sqrt{x}\right]$

Вариант Б

Выполнить действия:

$$1)\ a\sqrt{\frac{2b}{a^2}-\frac{1}{a}}-\frac{2a-6b}{a}\sqrt{\frac{2a^4b-a^5}{a^2-6ab+9b^2}}-$$
$$-5(a^2+2ab)\sqrt{\frac{2b-a}{a^4+4a^3b+4a^2b^2}}+$$
$$+\sqrt{32b-16a},$$ если $2b > a > 0$. $\left[2a\sqrt{2b-a}\right]$

$$2)\ \frac{2{,}5}{\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{7{,}5}-9\sqrt{5}}{\sqrt{15}-6\sqrt{2{,}5}}.$$ $\left[-\frac{1}{4}\sqrt{2}\right]$

$$3)\ \left[\frac{a-4b\,(a^3)^0}{(\sqrt{a}+3\sqrt{b})(\sqrt{a}-2\sqrt{b})}-\frac{a-81^{0{,}5}b}{a+6(ab)^{0{,}5}+9b}\right]\cdot\frac{a^{0{,}5}-3b^{\frac{1}{2}}}{b^{-0{,}5}},$$

если $a > 0$ и $b > 0$. $\left[\frac{5}{a-9b}\right]$

Работа № 6. Решение задачи на составление квадратного уравнения. Решение уравнения с параметрами

Вариант А

1) Задача. На двух станках надо было обработать по 300 деталей. На первом станке в час обрабатывали на 5 деталей больше, чем на втором. Работу на первом станке начали на 1 час 30 мин. позднее, чем на втором, и, кроме того, на первом станке прерывали работу на 30 мин. Однако работа на обоих

станках выполнена была к одному и тому же сроку. По скольку деталей в час обрабатывали на каждом станке? [30; 25].

2) Решить уравнение относительно x, если $a \neq 0$:

$$\frac{x+2a}{x} + \frac{2x-a}{x-2a} = \frac{4ax-2a^2}{x^2-2ax}. \qquad \left[-\frac{a}{3}\right]$$

Вариант Б

1) Задача. Два велосипедиста выезжают одновременно из города A в город B, расстояние между которыми равно 42 *км*.

Второй велосипедист отстает от первого в каждый час на 4 *км*. В пути первый отдыхал 1 час, а второй 20 мин. В город B оба прибыли одновременно. С какой скоростью ехал каждый велосипедист? [18; 14].

2) Решить уравнение относительно x, если $a \neq 0$:

$$\frac{x}{a} \cdot \left(\frac{5}{a+x} - \frac{7}{a-x}\right) = \frac{10a}{x^2-a^2}. \qquad \left[\frac{5}{6}a\right]$$

Работа № 7. Свойства корней квадратного уравнения

Вариант А

1) Составить квадратные уравнения по их корням:

$$\text{а) } \frac{2}{5 \pm \sqrt{3}}; \quad \text{б) } \frac{1}{4} \text{ и } 0.$$

2) Не решая уравнения $3x^2 + 10x - 1 = 0$, найти сумму квадратов его корней. $\left[11\frac{7}{9}\right]$

3) В уравнении $3x^2 - 14x + c = 0$ один корень меньше другого на $\frac{2}{3}$. Найти c. [16]

Вариант Б

1) Составить квадратные уравнения по их корням:

$$\text{а) } \frac{4}{7 \pm \sqrt{5}}; \quad \text{б) } \pm\frac{2}{3}.$$

2) Не решая уравнения $5x^2 - 12x - 3 = 0$, найти сумму квадратов его корней. [6,96]

3) При каком значении c корни уравнения $50x^2 - 5x + c = 0$ удовлетворяют условию: $5x_1 - x_2 = 2{,}3$? [-6]

Работа № 8. Исследование корней квадратного уравнения, разложение квадратного трехчлена на множители; биквадратное уравнение

Вариант А

1) Исследовать корни уравнения: $4x^2 - x - 7 = 0$.

2) Сократить дробь: $\dfrac{3a^2 - 14a - 5}{2a^2 - 13a + 15}$.

3) При каких значениях m уравнение $4x^2 + (m + 5)x + 9 = 0$ имеет равные корни? [7; — 17]

4) При каких значениях x $3x^4$ равно $2x^2 + 1$?

Вариант Б

1) Исследовать корни уравнения: $2x^2 - 5x + 1 = 0$.

2) Сократить дробь: $\frac{1 + 3a - 4a^2}{8a - 3a^2 - 5}$.

3) При каких значениях k корни уравнения $25x^2 + (k - 3)x + 1 = 0$ равны между собой? [— 7; 13]

4) Существуют ли такие значения x, при которых $9x^4$ меньше $28x^2$ на 3? Если существуют, найти их. $\left[\pm\sqrt{3};\ \pm\frac{1}{3}\right]$

Работа № 9. Решение задач на составление квадратного уравнения

Вариант А

Задача. Два грузовика перевезли 250 *т* груза. Первый грузовик перевез 160 *т*, а второй, проработавший одним днем меньше, перевез остальное.

Если бы первый грузовик проработал столько дней, сколько работал второй, а второй — столько, сколько первый, то они перевезли бы поровну, но часть груза осталась бы неперевезенной. Сколько тонн груза осталось бы неперевезенным в этом случае? [10]

Вариант Б

Задача. При определенных нормах расхода горючего имеющегося запаса хватит для двух грузовых машин и одной легковой на 10 дней. На сколько дней хватит этого запаса для трех грузовых машин, если известно, что одна грузовая машина израсходовала бы его на 36 дней скорее легковой? [8]

Работа № 10. Решение иррациональных уравнений

Вариант А

Решить уравнения:

1) $\sqrt{1{,}5 - x\sqrt{x^2 - 5{,}25}} = 2$. [— 2,5]

2) $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{9x + 7} = 6$. [Нет корней]

3) $\sqrt{2x + 15} - \sqrt{x - 1} = 3$. [5; 17]

4) $5x + 7\sqrt{x} - 6 = 0$. [0,36]

Вариант Б

Решить уравнения:

1) $\sqrt{2x + 25 + \sqrt{-x - 5}} = 3$. [— 9]

2) $\sqrt{1 - x} - \sqrt{7 - 3x} = 6$ [Нет корней]

3) $\sqrt{3x + 10} - \sqrt{x - 2} = 4$. [2; 18]

4) $3x - 4\sqrt{x} - 15 = 0$. [9]

Работа № 11. Линейная и квадратная функции

Вариант А

1) Построить график функции:

$$y = 0{,}5x^2 - x - 4,$$

и, пользуясь графиком, ответить на вопросы: а) при каком значении x функция имеет наименьшее значение и чему оно равно? б) при каких значениях x функция имеет положительные значения?

2) Найти координаты точек пересечения графиков функций:

$$y = 0{,}5x - 5 \text{ и } y = -x^2 + 2x - 4.$$

3) Найти графически с точностью до 0,1 корни уравнения:

$$0{,}5x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Вариант Б

1) Построить график функции:

$$y = -0{,}5x^2 + x + 1{,}5,$$

и, пользуясь графиком, ответить на вопросы: а) имеет ли эта функция наименьшее или наибольшее значение и если имеет, то при каком значении x и чему оно равно? б) при каких значениях x эта функция возрастает, а при каких убывает?

2) Найти координаты точек пересечения графиков функций:

$$y = x^2 - 5 \text{ и } y = 2x + 3.$$

3) Найти графически с точностью до 0,1 корни уравнения:

$$0{,}5x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Работа № 12. Решение систем уравнений

Вариант А

1) Решить системы:

а) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = 61, \\ xy = -12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x - 3y = 3{,}6, \\ xy = -0{,}12. \end{cases}$

[(3; —4), (—4; 3), (—3; 4), (4; —3)]; [(0,3; —0,4), (0,15; —0,8)].

2) Выполнить действия:

$$\left[\frac{2^{-2}\cdot\left(\frac{1+n}{1-n}\right)^{-0,25}}{\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^{-0,75}}\cdot 2(1-n)^{-2} - 2^{-1} : (1+n^2)\right](1-n^4),$$

если $0 < n < 1$. $[n^2]$

Вариант Б

1) Решить системы:

а) $\begin{cases} 4x^2 - 3xy + 9y^2 = 40, \\ xy = -1; \end{cases}$

$\left[(-0{,}5;\ 2),\ \left(3;\ -\frac{1}{3}\right),\ (0{,}5;\ -2),\ \left(-3;\ \frac{1}{3}\right)\right]$;

б) $\begin{cases} 5x + 2y = 5{,}2, \\ xy = 0{,}48. \end{cases}$

$[(0{,}8;\ 0{,}6),\ (0{,}24;\ 2)]$.

2) Выполнить действия:

$$\left\{\left[a + \frac{2}{(a-1)^{-0{,}5}}\right]^{-0{,}5} + \left[a - \frac{2}{(a-1)^{-0{,}5}}\right]^{-0{,}5}\right\}^2 : (2-a)^{-1},$$

если $1 < a < 2$. [4]

Работа № 13. Преобразование радикалов и некоторые вопросы теории иррациональных чисел

Вариант А

1) Что больше: $2 - \sqrt{\sqrt{3}+2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-2}$ или $2 + \sqrt[6]{3{,}5}$?

2) Дана функция $f(x) = x^3 - \frac{2}{\sqrt{0{,}1x + 0{,}0332}}$.

Вычислить с точностью до 0,01 $f(1{,}650)$. [0,00]

3) а) Какие практические задачи и какие потребности математики привели к введению дробных чисел?

б) Показать на двух примерах, что рациональное число может быть изображено или конечной десятичной дробью или бесконечной периодической десятичной дробью.

в) Доказать, что $\sqrt[3]{2}$ число не целое и не дробное.

Вариант Б

1) Что больше:

$$0{,}2\sqrt[3]{500} \text{ или } 1 - \sqrt[3]{\sqrt{2}-3} \cdot \sqrt[6]{11 + 6\sqrt{2}}\,?$$

2) Дана $f(x) = \frac{6{,}922}{\sqrt{x^3 - \sqrt{3}}} - \frac{7}{\sqrt{x}}$, вычислить с точностью до 0,01 $f(1{,}398)$. [1,00].

3) а) Какой десятичной дробью может выражаться рациональное число?

б) Подтвердить ответ на предыдущий вопрос вычислением отношений сторон прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 18, а один из катетов 15.

в) Доказать, что $\sqrt{3}$ число не целое и не дробное.

Работа № 14. Заключительная работа по курсу VIII класса (на 2 часа)

Вариант А

1) Задача. Две лыжные команды совершили переход от пункта A до пункта B. Вышли обе команды одновременно: первая из A, вторая из B навстречу первой. При встрече оказалось, что первая команда прошла на 210 *км* больше второй. Первая команда пришла в пункт B через 4 дня после встречи, вторая в пункт A — через 9 дней. Найти расстояние между пунктами A и B и время, затраченное каждой командой на весь переход. [1050; 10; 15]

Примечание. Время отдыха команд не учитывается.

2) Дано уравнение: $2x^2 + \sqrt{10}(\sqrt{2}-1)x - 5\sqrt{2} = 0$.

Составить другое квадратное уравнение, корни которого равны: первый — сумме квадратов корней данного уравнения и второй — произведению квадратов тех же корней. [$4z^2 - 80z + 375 = 0$]

Вариант Б

1) Задача. В 8 час. утра из города в одном и том же направлении выехали два автомобиля — один со скоростью 40 *км* в час, другой — 48 *км* в час. Через 45 мин. из того же города в том же направлении выехал мотоциклист, который обогнал второй автомобиль на полтора часа позже, чем первый. Найти скорость мотоциклиста и узнать в котором часу он обогнал второй автомобиль. [60 *км* в час; 11 час 45 мин.]

2) В уравнении $9x^2 + kx + 1 = 0$ найти k, если отношение корней его равно $(\sqrt{2}+1)^2$. [$\pm 6\sqrt{2}$]

ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАН РАБОТЫ

Число уроков: на данный вопрос	Число уроков: с начала года	Содержание учебного материала	Повторение	Упражнения для работы в классе и для домашних заданий
1	2	3	4	5
		Первое полугодие *(по 2 урока в неделю)*		
		1. Отношение и пропорциональность отрезков		
1	1	Длина отрезка. Выражение длины отрезка в виде целого числа, обыкновенной и десятичной дроби. Аксиома Архимеда	Обращение обыкновенной дроби в десятичную конечную и бесконечную (периодическую), обратная задача	См. настоящее пособие[1)] примеры к § 1
2	3	Приближенное измерение длин данных отрезков. Практическая работа	Деление отрезка на произвольное число равных частей	Б. и С. примеры к § 2
1	4	Отношение отрезков	Свойство отношения. Нахождение неизвестного члена отношения	Рыбкин, Сборник задач по геометрии, ч. I[2)], § 8, № 1—4. Б. и С., примеры к § 3
1	5	Несоизмеримые отрезки. Существование несоизмеримых отрезков		
1	6	Понятие об иррациональном числе. Равенство отношений		
1	7	Контрольная работа № 1. Измерение отрезков, отношение их		

[1)] В дальнейшем это пособие будет обозначаться сокращенно Б. и С.
[2)] В дальнейшем это пособие будет обозначаться сокращенно буквой Р.

Продолжение

1	2	3	4	5
1	8	Основная теорема о пропорциональных отрезках		
2	10	Следствия из основной теоремы		Р., § 8, № 5—15
1	11	Основные задачи на построение пропорциональных отрезков	Биссектриса как геометрическое место точек	Р., § 8, № 16
2	13	Свойство биссектрисы угла треугольника	Свойство биссектрисы равнобедренного треугольника	Р., § 8, № 17—28
1	14	Контрольная работа № 2. Пропорциональность отрезков		
		2. Гомотетия и подобие		
1	15	Вступительная беседа о подобных фигурах. Определение подобных фигур	Признаки параллельности и свойство углов при параллельных и секущей	
2	17	Определение гомотетии. Центр и коэффициент гомотетии. Построение фигуры, подобной данной		Построение фигур, подобных данным фигурам произвольной формы
1	18	Гомотетия отрезка и треугольника. Построение треугольника, гомотетичного данному треугольнику	Признаки равенства треугольников. Основная теорема о пропорциональных отрезках	
2	20	Признаки подобия треугольников		Р., § 9, № 1—19, 23—54
3	23	Решение задач на вычисление		
1	24	Контрольная работа № 3. Подобие треугольников		
2	26	Решение задач на доказательство и построение		Р., § 9, № 20—22, 34, 35; Б. и С., § 17

Продолжение

1	2	3	4	5
2	28	Гомотетия многоугольников. Построение гомотетичных многоугольников		Б. и С., § 19
1	29	Контрольная работа № 4. Гомотетия треугольников и многоугольников		
2	31	Признак подобия многоугольников. Свойства подобных многоугольников		Р., § 9, № 55—60
		***Второе полугодие** (по 3 урока в неделю)*		
3[1]		Практические работы. Пантограф и работа с ним. Мензульная съемка плана		
2	33	Гомотетия окружности		Б. и С., § 21,22.
1	34	Контрольная работа № 5. По всей теме «Гомотетия и подобие»		
		3. Метрические соотношения *в треугольнике и круге*		
2	36	Соотношение между элементами прямоугольного треугольника. Теорема Пифагора	Непрерывная пропорция. Среднее пропорциональное. Среднее арифметическое	
4	40	Решение задач	Свойство биссектрисы в треугольнике	Р., § 10, № 1—3 (выборочно), 4—6, 10, 13, 15—23, 24 (1, 2, 4), 26, 27, 29, 32, 33, 35.
1	41	Контрольная работа № 6. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике		

[1] Часы на практические работы не включаются в число часов на прохождение темы.

Продолжение

1	2	3	4	5
2	43	Тригонометрические функции острого угла. Взаимно однозначное соответствие между величиной угла прямоугольного треугольника и отношением его сторон. Составление таблиц, устанавливающих это соответствие. Определение тригонометрических функций острого угла. Функции дополнительных углов. Таблицы Брадиса	Признаки подобия треугольников	Составление таблиц тригонометрических функций
4	47	Решение прямоугольных треугольников. Решение задач практического содержания. Решение задач, связанных с непосредственными измерениями (в классе, в зале, на пришкольном участке)	Таблицы квадратов, квадратных корней и обратных чисел	Рыбкин, Сборник задач по тригонометрии, § 5, № 1—8, § 6, № 1—28, 29, 31, 32, 34, 41, 48, *или* Стратилатов, Сборник задач по тригонометрии, § 1, № 1—7, 9—11, 13—32.
1	48	Изменение тригонометрических функций		
1	49	Контрольная работа № 7. Тригонометрические функции острого угла		
2	51	Метрические соотношения в любом треугольнике и параллелограмме		
3	54	Решение задач, в частности вычисление высот, медиан и биссектрис в треугольнике по трем его сторонам	Построение кругов, описанного около треугольника и вписанного в треугольник	Р., § 10, № 79—82, 85—91; § 13 № 60. Б. и С. § 26
2	56	Решение задач, в частности вычисление радиусов описанного и вписанного кругов для равнобедренных и прямоугольных треугольников Контрольная работа № 8. Метрические соотношения в треугольнике		Р., § 10, № 66, 67, 70, § 11, № 42—45; § 14, № 9—10. Б. и С. § 26

Продолжение

1	2	3	4	5
2	58	Метрические соотношения в круге		Р., § 11, № 11, 14, 16, 17, 22, 32, 33, 38, 39, 46.
2	60	Решение задач		
1	61	Контрольная работа № 9. Пропорциональные отрезки в круге		
3	64	Алгебраический метод решения геометрических задач на построение	Построение $x = \frac{ab}{c}$; $x = \sqrt{ab}$; $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$	Р., § 16, № 1, 2, 6 (1—6), 7, 23—25
1	65	Контрольная работа № 10. Построение формул		
		4. Измерение площадей многоугольников		
2	67	Понятие о площади. Измерение площади при помощи палетки или масштабной сетки. Практическая работа		Отчет о практической работе
2	69	Площадь прямоугольника, треугольника, параллелограмма, ромба, трапеции и описанного многоугольника	Вычисление высоты треугольника по его сторонам	Р., § 13, № 3—7, 12, 15—20
6	75	Решение задач на вычисление площадей. Отношение площадей подобных фигур	Метрические соотношения в треугольнике	Р., § 13, № 25, 35, 43, 45, 60, 64, 67, 72, 73, 74, 80, 84, 87, 90, 91
1	76	Контрольная работа № 11. Измерение площадей		
3	79	Равновеликость фигур. Равновеликость треугольников и параллелограммов. Преобразование многоугольника в равновеликий квадрат		Р., § 13, № 23 (1), 32, 49, 50, 108, 113, 128, 130, 131, 137
2	81	Задачи на построение равновеликих фигур. Заключительная беседа	**Построение гомотетичных фигур**	

Глава I

ОТНОШЕНИЕ И ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ ОТРЕЗКОВ

§ 1. Длина отрезка

Целью изучения данной темы в средней школе является как ознакомление учащихся с теорией вопроса, так и усовершенствование их навыков в измерении отрезков.

В научных курсах элементарной геометрии, например в курсе Перепелкина[1]), теория измерения отрезков основывается на теории положительных чисел. Поскольку теория действительных чисел и, в частности, теория положительных чисел излагаются в средней школе упрощенно, не со всей строгостью, постольку не может со всей строгостью излагаться в средней школе и теория измерения отрезков; отдельные положения этой теории, вообще говоря, доказываемые, приходится в школе постулировать.

Основным понятием в теории измерения отрезков является понятие длины отрезка. В курсе геометрии Перепелкина это понятие определяется следующим образом.

«Установить систему измерения отрезков — значит поставить каждому отрезку AB в соответствие положительное число, называемое длиной отрезка и обладающее следующими двумя свойствами:

а) равным отрезкам соответствует одна и та же длина (свойство инвариантности);

б) если точка B лежит между A и C, то длина отрезка AC равна сумме длин отрезков AB и BC (свойство аддитивности).

Из свойства аддитивности непосредственно вытекает следствие: большему отрезку соответствует и большая длина (свойство монотонности).

К указанным двум свойствам (пп. «а» и «б») добавляется еще свойство:

в) некоторому произвольно выбранному отрезку PQ соответствует длина, равная 1».

Совершенно очевидно, что принять в условиях преподавания в средней школе подобную концепцию определения понятия длины совершенно невозможно.

В учебнике геометрии Никитина и Фетисова, предназначенном для средней школы, предлагается следующее определение длины отрезка: длиной отрезка при данном единичном отрезке называется число, на которое нужно умножить единичный отрезок для того, чтобы получить измеряемый отрезок.

При этом определении, как и при определении, приведенном в книге Перепелкина, длина отрезка оказывается числом отвлеченным.

---

[1]) Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. I, Гостехиздат, 1948.

Нам представляется, что прав Н. М. Бескин, который в своей методике геометрии[1] рекомендует при преподавании геометрии в средней школе рассматривать длину, как именованную величину.

Действительно, к такому пониманию длины учащиеся приучены всем предыдущим ходом обучения математике, затем с таким же пониманием длины учащиеся встречаются в курсе физики, и, наконец, попытка определить длину как отвлеченное число, сделанная в учебнике Никитина и Фетисова, привела к усложнениям и даже к некоторой запутанности в изложении вопроса об отношении отрезков.

Процесс измерения длины отрезка, в результате которого длина оказывается выраженной именованным числом, описан в учебнике геометрии Глаголева (§ 161), причем рассматриваются три случая, к которым может привести процесс измерения данного отрезка AB, когда за единицу измерения принят некоторый отрезок CD.

Первый случай. Единица измерения, то есть отрезок CD, откладывается точно 5 раз на отрезке AB. В этом случае длина отрезка AB выразится целым числом: $AB = 5CD$.

Можно сказать также, что отрезок AB получится, если единицу измерения (отрезок CD) умножить на 5.

Второй случай. Какая-нибудь часть отрезка CD — единицы измерения — откладывается точно несколько раз на отрезке AB.

В этом случае длина отрезка AB выразится обыкновенной дробью или конечной десятичной дробью.

$AB = \frac{12}{7}CD$. (Седьмая часть отрезка CD откладывается точно 12 раз на отрезке AB.)

Отрезок AB получится, если единицу измерения — отрезок CD — умножить на $\frac{12}{7}$.

Или $AB = 1{,}6\ CD$. (Десятая часть CD откладывается точно 16 раз на AB.) Отрезок AB получится, если единицу измерения — отрезок CD — умножить на 1,6.

Третий случай, когда ни десятая, ни сотая, ни тысячная, то есть никакая десятичная часть отрезка CD, не откладывается точно несколько раз на отрезке AB. В этом случае длина отрезка AB выразится бесконечной десятичной дробью:

$$AB = 1{,}333\ldots CD \text{ или}$$
$$AB = 1{,}2112111211112\ldots CD.$$

Третий случай нельзя отождествлять со случаем иррационального измерения отрезка, так как в первом примере длина выражается бесконечной периодической десятичной дробью, то есть числом рациональным.

[1] Н. М. Бескин, Методика геометрии, Учпедгиз, 1947, ст. 178.

В первом примере отрезок AB получится, если единицу измерения — отрезок CD — умножить на 1,333 ... то есть на бесконечную периодическую десятичную дробь; во втором примере — если отрезок CD умножить на 1,2112111211112 ... то есть на бесконечную непериодическую десятичную дробь.[1]

В учебнике указывается, что обнаружить возможность третьего случая измерения на практике не удается и что убедиться в существовании таких случаев можно только косвенным путем, то есть путем теоретических рассуждений.

То же самое можно, впрочем, сказать и о первом и о втором случае, так как никакие построения на практике не могут быть выполнены абсолютно точно. Поэтому никогда нельзя утверждать, что при фактическом откладывании какого-нибудь отрезка он отложится на другом отрезке точно целое число раз. Однако путем рассуждения можно обнаружить возможность не только первого и второго случая, но частично и случая третьего.

Пусть, например, третья часть отрезка CD, принятого за единицу измерения, отложится на AB точно четыре раза, тогда длина отрезка AB будет равна $1\frac{1}{3}$ CD.

Как известно из арифметики, число $1\frac{1}{3}$ обращается в бесконечную десятичную периодическую дробь 1,333 ... значит, в данном случае $AB = 1,333 \ldots CD$. Поскольку признается существование отрезка, имеющего длину, равную $1\frac{1}{3}$, постольку следует признать и существование отрезка, имеющего длину $1,333 \ldots CD$, то есть отрезка, на котором никакая десятичная часть отрезка CD не откладывается точно целое число раз.

Точно так же можно доказать и существование отрезка, имеющего длину, равную, например, $2,555 \ldots CD$.

Указанным приемом нельзя доказать существование отрезков, длина которых выражается бесконечной непериодической десятичной дробью, хотя вопрос о существовании таких отрезков возникает.

Учащимся следует указать, что доказательство это вследствие его сложности будет изложено позднее.

В учебнике Глаголева не приводится общего определения длины отрезка. Это определение после приведенных рассуждений можно дать в такой форме.

Длиной отрезка AB при данной единице измерения (отрезке CD) называется произведение этой единицы на множитель, на который нужно умножить отрезок CD, чтобы построить отрезок AB.

После определения понятия длины отрезка следует указать, что в качестве единиц измерения можно брать и общепринятые

---

[1] Вопрос об умножении на эти дроби излагается в курсе алгебры.

в практической жизни, в физике, в механике и т. д. единицы длины, то есть метр, дециметр, сантиметр, миллиметр и другие. В этом случае длина отрезка будет записываться так: 5,3 *дм*; 3,52 *м*; 7,8 *см* и т. д.

Чтобы закрепить в сознании учащихся изложенный теоретический материал, следует провести с ними несколько упражнений, а для развития измерительных навыков — несколько практических работ.

Упражнения выполняются в классе с демонстрацией на доске, причем большое внимание обращается на обоснование выполняемых построений и вычислений.

Практические работы выполняются учащимися в индивидуальном порядке с максимальной возможной точностью.

Примеры. 1) Построить отрезок, длина которого равна $3\,CD$; $2\frac{1}{3}\,CD$; $4{,}6\,CD$; $2{,}25\,CD$.

2) Построить отрезок, длина которого равна 3,2 *дм*; 2,74 *дм*; 0,8 *см*; 22,3 *см*.

Построение целесообразно сопровождать примерно таким объяснением: для построения отрезка, длина которого равна $2\frac{1}{3}CD$, умножаем отрезок CD на $2\frac{1}{3}$, то есть на прямой MN откладываем сначала отрезок AB, равный $2\,CD$, а затем отрезок B_1B, равный $\frac{1}{3}CD$.

Для построения отрезка, длина которого равна $1{,}75\,CD$, целесообразно будет обратить 1,75 в обыкновенную дробь $1\frac{3}{4}$.

Решение второго примера, конечно, следует выполнять при помощи масштабной линейки.

Перед тем как перейти к построению отрезков, длина которых выражается бесконечной периодической десятичной дробью, следует повторить об обращении обыкновенных дробей в десятичные и обратно. Построение отрезков, длина которых выражается бесконечной непериодической десятичной дробью, необходимо отложить до знакомства учащихся с иррациональными числами и действиями над ними.

В качестве подготовки к изучению несоизмеримых отрезков желательно повторить некоторые сведения об обращении обыкновенных дробей в десятичные и десятичных в обыкновенные.

В основном надо установить (индуктивным методом) справедливость следующих положений:

I. Каждая обыкновенная дробь[1] обращается или в конечную десятичную дробь, или в бесконечную, но периодическую десятичную дробь.

---

[1] Имеется в виду обыкновенная дробь с конечными числителем и знаменателем.

II. Обратно, каждая конечная десятичная дробь может быть записана в виде обыкновенной, а каждая бесконечная, но периодическая десятичная дробь обращается в обыкновенную дробь.

И как следствие:

III. Каждая бесконечная непериодическая десятичная дробь не обращается в обыкновенную дробь.

Справедливость первых двух положений утверждается на основании рассмотрения ряда примеров, например: 1) Отрезок AB получен умножением единичного отрезка CD на число $2\frac{1}{3}$. Выразить длину отрезка AB в указанных линейных единицах в виде десятичной дроби. Путем деления 1 на 3 находим $2\frac{1}{3} = 2,\ 333 \ldots = 2,(3)$.

$$AB = CD \cdot 2\frac{1}{3} = CD \cdot 2{,}333 \ldots \text{ то есть}$$

$$AB = 2{,}333 \ldots \text{ лин. ед.}$$

2) Отрезок $AB = \frac{5}{6}$ *дм*. Выразить длину отрезка AB в виде десятичной дроби.

Путем деления 5 на 6 находим: $\frac{5}{6} = 0{,}833 \ldots = 0{,}8\ (3)$. Следовательно, $AB = 0{,}833 \ldots$ *дм*. Беря любую обыкновенную дробь и обращая ее в десятичную, получим или конечную десятичную дробь, или бесконечную, но обязательно периодическую десятичную дробь.

$$\frac{7}{40} = 0{,}175; \quad \frac{5}{13} = 0{,}384615\,384615 \ \ldots = 0{,}(384615) \quad \text{и т.п.}$$

На практике в тех случаях, когда длина данного отрезка выражается бесконечной периодической десятичной дробью или даже конечной десятичной дробью, но с большим числом десятичных знаков, ограничиваются указанием приближенного значения длины, беря только некоторое число десятичных знаков.

Например, для дроби $\frac{5}{13}$ при обращении ее в десятичную дробь (берут приближенное значение 0,385 (с точностью до 0,001) или 0,38 с точностью до 0,01). Для дроби $\frac{13}{32}$, равной 0,40 625, берут приближенное значение 0,406 (с точностью до 0,001) или даже 0,4 (с точностью до 0,1) и т. д.

Положение II об обращении десятичной дроби в обыкновенную и следствие из положений I и II о невозможности обращения бесконечной непериодической десятичной дроби в обыкновенную имеют важное значение для формирования понятия о несоизмеримых отрезках.

Положение *II* может быть выведено индуктивным методом из рассмотрения ряда примеров.

1) Конечная десятичная дробь 0,375 может быть записана обыкновенной дробью $\frac{375}{1000}$, то есть дробью $\frac{3}{8}$.

Таким же образом любую конечную десятичную дробь можно записать в виде обыкновенной.

2) Бесконечная периодическая десятичная дробь 0,555 ... обращается в обыкновенную дробь $\frac{5}{9}$, в чем можно убедиться путем обратного обращения обыкновенной дроби $\frac{5}{9}$ в десятичную.

3) Бесконечная периодическая десятичная дробь 0,5333 ... обращается в обыкновенную дробь $\frac{8}{15}$.

В самом деле, $0{,}533\ldots = 0{,}333\ldots + 0{,}2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$.

Аналогично, $0{,}133\ldots = 0{,}333\ldots - 0{,}2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$.

4) В том, что дробь $0{,}303030\ldots = \frac{10}{33}$, убеждаемся путем обратного обращения обыкновенной дроби $\frac{10}{33}$ в десятичную.

Следствие о невозможности обратить бесконечную непериодическую десятичную дробь в обыкновенную доказывается после этого методом от противного.

Примеры. 1. Выразить десятичной дробью длину отрезка, полученного умножением единичного отрезка на число $2\frac{2}{3}$; $3\frac{8}{15}$; $1\frac{2}{15}$.

2. На какую обыкновенную дробь надо умножить единичный отрезок, чтобы получить отрезок длиной в 0,16 лин. ед.; 0,166 ... лин. ед.; 0,777 ... лин. ед.

3. Выразить обыкновенной дробью длину отрезка, полученного умножением единичного отрезка на число 0,375; 0,666 ...; 0,266 ...

4. Почему не может быть выражена обыкновенной дробью длина отрезка, равного 1,1010010001 ...? 3,3232232223 ...?

5. Приняв некоторый отрезок за единицу измерения, построить отрезки, равные 1,75 лин. ед ; 3,25 лин. ед.; 2,5 лин. ед.

6. Приняв некоторый отрезок за единицу измерения, построить отрезки, равные 1,333 ... лин. ед.; 2,454545 ... лин. ед.; 2,1666 ... лин. ед.; 0,4(9) лин. ед.

§ 2. Приближенное измерение длин

Пусть AB — измеряемый отрезок, а CD — единичный. Для нахождения длины отрезка AB надо найти число, умножением на которое единичного отрезка CD получается отрезок AB. Этот множитель находится путем откладывания на отрезке AB единичного отрезка CD или его частей.

Чтобы решение задачи конкретизировать, целесообразно подготовить несколько «масштабных линеек». На одной линейке единичный отрезок разделить на 2 части, на другой на 3 и т. д. Вообще желательно иметь линейки, на которых единичный отрезок разделен на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 частей[1].

Подбирая подходящую для измерения линейку, можно найти длину отрезка AB достаточно точно.

Учащиеся должны учиться давать ответ об измерении отрезка в такой форме:

1) Отрезок AB содержит, например, $\frac{5}{11}$ частей единичного отрезка CD.

2) Отрезок AB есть произведение единичного отрезка на число $\frac{5}{11}$. Следовательно, длина отрезка AB равна $\frac{5}{11}$ лин. ед.

Проделав ряд измерений отрезков при помощи указанных линеек, учащиеся убедятся в справедливости положения о том, что в конкретных условиях все вообще измерения дают только приближенные результаты. На этом следует заострить внимание учащихся, так как довольно часто у них складывается убеждение, что результаты измерений, выраженные в обыкновенных дробях, являются абсолютно точными, приближенными же они могут быть только тогда, когда выражены в десятичных дробях.

Перейдя в конце концов к упражнениям на измерение отрезков при помощи линейки, на которой нанесены десятичные доли единичного отрезка (дециметры, сантиметры и миллиметры), или при помощи рулетки, учащиеся оценят простоту и практическую целесообразность этого последнего способа измерения отрезков по сравнению со способом измерения при помощи описанного выше набора «масштабных линеек».

Таким образом, учащиеся приучатся выражать длину отрезка в десятичных дробях.

На ряде примеров[2] учащиеся должны убедиться, что хотя с точки зрения теории длина отрезка может выражаться как конечной десятичной дробью, так и бесконечной, но на практике в случае непосредственных измерений длина отрезка будет получаться только в виде конечной десятичной дроби.

Зависит это от свойств измерительной линейки и нашего глаза. Отрезки, длина которых меньше определенной величины, не различаются глазом, «невидимы» для глаза. Поэтому, если черточка деления на линейке будет отстоять от конца измеряемого отрезка на такое малое расстояние, то измерителю будет казаться, что эти точки совпадают, и он выразит длину отрезка в виде конечной десятичной дроби. На линейке обычно наносятся миллиметры, более мелкие деления не наносятся, а оце-

[1] Изготовление линеек с такими шкалами послужит материалом для повторения способа деления отрезка на равные части.

[2] Образцы примеров приводятся ниже.

ниваются на глаз. Эта оценка делается даже натренированным измерителем не точнее чем до нескольких десятых долей миллиметра. Таким образом, последней возможной цифрой в десятичной дроби оказывается цифра десятых долей миллиметра; десятичная дробь, выражающая длину отрезка, является как бы всегда конечной.

Для уточнения цифры десятых долей миллиметра можно воспользоваться поперечным масштабом. Правда, принцип устройства этого масштаба и его действия будут разъяснены учащимся позднее, но приучить учащихся пользоваться им до ознакомления с теорией все-таки полезно: это заставит учащихся отнестись впоследствии с большим интересом к изучению теории устройства масштаба и облегчит его изучение.

В практической деятельности ведь тоже часто приходится работать с инструментами, приборами и машинами, принципы устройства и работы которых или неизвестны работникам, или известны недостаточно полно.

При пользовании поперечным масштабом станет особенно понятным утверждение, что в принятых нами условиях работы цифра десятых долей миллиметра будет последней цифрой в числе, выражающем длину отрезка.

При работе с самыми совершенными измерительными инструментами тоже существует предел точности, а потому и в этом случае результат измерения будет выражаться конечной дробью.

В условиях пользования инструментами, обычно имеющимися у учащихся (*масштабная линейка*, поперечный масштаб и циркуль), измерение длины данного отрезка можно произвести при исключительной тщательности работы с точностью до 0,1 *мм* (0,0001 *м*). Проделать с учащимися несколько измерений с такой точностью следует. Это необходимо с точки зрения развития у учащихся измерительной техники, а также и для изучения последующей теории.

Однако в тех случаях, когда измеряются не данные отрезки, а отрезки, получающиеся в результате некоторых построений, цифра десятых долей миллиметра становится сомнительной, вследствие неизбежных неточностей при выполнении построений. Поэтому в этих случаях приходится отказываться от получения ответа с десятыми долями миллиметра.

Примеры. 1) Измерить несколько отрезков, начерченных на бумаге.

2) Измерить длины нескольких элементов моделей геометрических тел.

3) Построить параллелограмм по сторонам $a = 5{,}3$ *см*; $b = 3{,}7$ *см* и углу $A = 48°$ и измерить его высоты с точностью до 0,1 *см*.

4) Определить отрезки, на которые разделится медиана треугольника точкой пересечения ее с другими медианами, если бы эта медиана имела длину, точно равную 1 *дм*.

Найти длины этих отрезков измерением, построив какой-нибудь треугольник с медианой, равной 1,00 *дм*. Подчеркнуть, что в случае решения задачи вычислением на основании теоремы о точке пересечения медиан треугольника, считая длину медианы, точно равной 1 *дм*, мы получили бы ответ в виде бесконечной (периодической) десятичной дроби: один отрезок равен 0,333 ... *дм*; другой — 0,666 ... *дм*. При решении же задачи непосредственным измерением мы получили ответ в виде конечной десятичной дроби: один отрезок равен 0,33 *дм*, другой — 0,67 *дм*.

5) Найти измерением длину диагонали квадрата со стороной, равной 1,00 *дм*. Ответ. 1,41 *дм*.

Указать, что, как это будет доказано в дальнейшем, длина диагонали квадрата должна была бы выражаться бесконечной непериодической десятичной дробью 1,414213 ... если бы сторона квадрата точно равнялась 1 *дм*.

6) Найти длину окружности, диаметр которой равен 1,00 *дм*. Учащиеся приведут ответ в виде конечной десятичной дроби — 3,14 *дм*.

Здесь можно будет указать, что приведенный ответ является приближенным и что, если бы задача была поставлена так: «Найти длину окружности, диаметр которой был бы точно равен 1 *дм*», то ответ, как это будет доказано в дальнейшем, выразился бы в виде бесконечной непериодической десятичной дроби 3,14159265358 ... *дм*.

Приведенный перечень упражнений является только примерным и может быть изменен и дополнен.

§ 3. Отношение отрезков. Соизмеримые и несоизмеримые отрезки

Отношение отрезков. Руководящую роль в вопросе об отношении отрезков играет положение о том, что отношение отрезков равно отношению чисел, выражающих их длину, при условии, что оба отрезка измерялись одной и той же единицей.

Это положение важно потому, что позволяет вопрос об отношении отрезков сводить к арифметическому, ранее изученному вопросу об отношении чисел. В дальнейшем на основании этого же положения и вопрос о пропорциональности отрезков будет сведен к арифметическому вопросу о пропорциональных числах. Это внесет значительное упрощение в изложение теории о пропорциональных отрезках и придаст ей большую строгость и стройность.

Отношение определяется как частное: **отношением числа a к числу b называется частное от деления a на b.** Иначе говоря, **отношением отрезка AB к отрезку CD называется число, на которое надо умножить отрезок CD, чтобы получить отрезок AB.** Целесообразно, считаясь с менее подготовленной частью класса, разъяснить это положение на примерах, в которых значение отношения брать равным конкретным числам: 2; $\frac{3}{4}$ и т. д.

Убедиться в справедливости положения, что отношение отрезков равно отношению чисел, выражающих их длину, при условии, что оба отрезка измерялись одной и той же единицей измерения, можно на числовых примерах.

Пусть имеются два отрезка AB и CD, отношение которых равно $2\frac{2}{5}$. Это значит, что на отрезке AB откладывается два раза отрезок CD и еще два раза пятая часть отрезка CD.

Пусть отрезок CD измерен какой-нибудь единицей измерения PQ, и его длина получилась равной 15 PQ. Тогда длина отрезка AB будет в $2\frac{2}{5}$ раза больше CD, то есть будет равна 36 PQ, а это и значит, что отношение длин отрезков AB и CD будет равно отношению отрезков.

Указанное положение можно применять также к случаю, когда отношение отрезка AB к отрезку CD будет выражаться бесконечной десятичной дробью (периодической или непериодической).

Для полного усвоения указанного положения проводится несколько упражнений такого вида:

1) Отношение сторон прямоугольника равно $\frac{3}{8}$, большая сторона равна 1,45 *дм*. Найти меньшую сторону. (Решить двумя способами.)

2) *Меньший катет прямоугольного треугольника равен* 2,72 *дм*, а отношение катетов равно 1,4. Найти больший катет. (Решить двумя способами.)

3) Отношение катета к гипотенузе равно 0,4, гипотенуза равна 7,2 *см*. Построить треугольник.

Решение подобных упражнений будет, между прочим, содействовать повторению свойств отношений, которые часто забываются.

Несоизмеримые отрезки. Надо учитывать, что учащиеся VIII класса ко времени изучения темы о пропорциональных отрезках еще не владеют иррациональными числами; поэтому умножение отрезка учащиеся мыслят только на целое число и на обыкновенную дробь, а в случае замены обыкновенной дроби десятичной — на конечную и бесконечную периодическую дробь.

Находя отношение двух данных отрезков геометрически, учащиеся получают только приближенное значение отношения; в этом случае отношение будет выражаться либо целым числом, либо обыкновенной дробью, либо конечной десятичной дробью. Наконец, в случае нахождения отношения отрезков как отношения чисел, выражающих их длины, измеренные одним и тем же единичным отрезком, учащиеся тоже будут получать приближенные значения отношений. Следовательно, и в этом случае отношение отрезков будет выражаться или целым числом, или обыкновенной дробью, или конечной десятичной дробью.

Таким образом, знания, полученные учащимися в результате проделанных ими измерительных и вычислительных работ, не будут содержать в явном виде того материала, который мог бы возбудить у них мысль о существовании отрезков, отношение которых не выражается ни целым числом, ни дробью. Иначе говоря, невозможно рассчитывать, чтобы учащиеся самостоятельно поставили вопрос о существовании несоизмеримых отрезков. На эту мысль учащихся надо натолкнуть.

Это можно сделать следующим образом. Учащиеся встречались со случаями, когда отношение отрезков оказывалось возможным определить вполне точно. Эти случаи можно им напомнить.

Например, учащиеся знают, что точкой взаимного пересечения каждая медиана треугольника делится на отрезки, отношение которых точно равно $\frac{1}{2}$; точно так же отношение катета, противолежащего углу в 30°, к гипотенузе должно точно равняться $\frac{1}{2}$; далее, отношение диаметра круга к его радиусу точно равно 2; отношение периметра квадрата к его стороне равно 4; отношение периметра правильного треугольника к его стороне равно 3 и т. п. Таким образом, учащиеся смогут сделать вывод, что в ряде случаев теория указывает точное значение отношения тех или иных отрезков.

После этого учитель переходит к вопросу о нахождении отношения несоизмеримых отрезков, например к нахождению отношения диагонали квадрата к его стороне.

Приближенное значение этого отношения учащиеся находили раньше, оно легко получается в виде 1,4 и даже в виде 1,41.

Естественно ожидать, что по крайней мере отдельные учащиеся поставят вопрос: не дает ли теория способа для вычисления точного значения этого отношения? Если никто из учащихся такого вопроса не поставит, придется его поставить самому учителю, но только, как показывает практика преподавания, учащиеся подобный вопрос ставят всегда и ставят часто гораздо раньше.

Этот вопрос и следует использовать для того, чтобы сделать естественной и даже желательной для учащихся постановку теоремы об отношении стороны к диагонали квадрата, а затем и постановку вопроса о соизмеримых и несоизмеримых отрезках.

§ 4. Различные определения соизмеримых и несоизмеримых отрезков

В учебниках геометрии встречаются различные определения соизмеримых и несоизмеримых отрезков.

В учебнике Киселева соизмеримыми называются отрезки, имеющие общую меру, а несоизмеримыми — отрезки, не имеющие ее.

Это определение, представляющееся на первый взгляд наиболее естественным, ведет, однако, к возникновению больших трудностей в вопросе доказательства существования несоизмеримых отрезков.

Для проведения этого доказательства в учебнике Киселева сначала излагается способ нахождения наибольшей общей меры путем последовательного отложения все уменьшающихся отрезков (алгоритм Евклида), а затем доказывается теорема о том, что диагональ квадрата и сторона его не имеют общей меры.

Весь этот материал усваивается учащимися с большим трудом и с большой затратой времени. В частности, почти невозможно добиться, чтобы учащиеся поняли и усвоили обоснование основного утверждения, что *если последовательное отложение получающихся отрезков не имеет конца, то данные отрезки никакой общей меры иметь не могут* (Киселев, Геометрия, ч. I, стр. 93). Точно так же традиционное доказательство теоремы о несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, приведенное в учебнике Киселева, учащиеся большей частью не столько усваивали, сколько формально заучивали.

В учебниках Глаголева, Никитина и Фетисова дано иное определение соизмеримых и несоизмеримых отрезков. В учебнике Никитина и Фетисова сказано: «Если отношение двух отрезков выражается целым или дробным числом, то отрезки называются соизмеримыми. Если же это отношение не может быть выражено ни целым, ни дробным числом, то отрезки называются несоизмеримыми».

Определение, приведенное в учебнике Глаголева, в принципиальном отношении не отличается от приведенного.

Основываясь на этом определении значительно проще в чисто логическом отношении, доказать существование несоизмеримых отрезков. Кроме того, оказывается возможным не заниматься вопросом нахождения наибольшей общей меры отрезков (алгоритмом Евклида), который практического применения не имеет.

Положение о том, что соизмеримые отрезки имеют общую меру, а несоизмеримые ее не имеют, легко выводится как следствие из принятого определения.

На ряде примеров, преимущественно устных, учащиеся должны научиться находить общую меру соизмеримых отрезков. Пусть, например, отношение отрезков AB и CD равно 3, то есть $AB = 3CD$; общей мерой отрезков AB и CD будет отрезок CD или любая его часть.

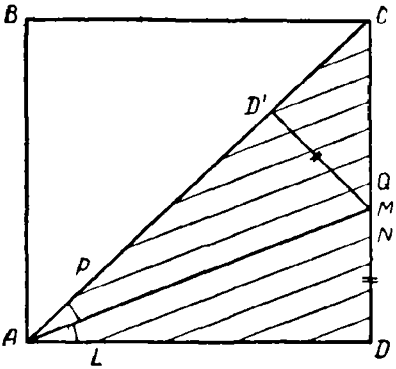
Если отношение отрезков AB и CD равно дроби $\frac{5}{7}$, то есть $AB = \frac{5}{7}CD$, то общей мерой данных отрезков будет седьмая часть отрезка CD, так как она уложится 7 раз на отрезке CD и 5 раз на отрезке AB. Общей мерой будет также любая часть этой седьмой части отрезка CD, например половина ее, то есть $\frac{1}{14}CD$, затем $\frac{1}{21}CD$, $\frac{1}{28}CD$ и т. д.

Умение находить общую меру отрезков, отношение которых дано, принесет пользу при решении задач и доказательстве теорем.

Достаточно строгое доказательство существования несоизмеримых отрезков, изложенное применительно к данному определению их, можно найти в учебнике Никитина и Фетисова. Ниже это доказательство приводится в несколько переработанном виде с целью сделать его более доступным для понимания и усвоения.

Теорема. **Диагональ квадрата и его сторона являются несоизмеримыми отрезками.**

Раньше всего следует записать в схематической форме условие теоремы.



Черт. 1.

Дано: квадрат $ABCD$ с диагональю AC (черт. 1).

Требуется доказать: AC и AD — несоизмеримые отрезки.

Надо доказать, что отношение $\frac{AC}{AD}$ не может равняться: 1) целому числу, 2) дроби. Первое положение, что $\frac{AC}{AD}$ не может равняться целому числу, доказывается легко.

После этого указывается, что доказательство второго положения ведется методом от противного.

Предположим, что отношение диагонали квадрата к его стороне равно несократимой дроби $\frac{m}{n}$, то есть $\frac{AC}{AD} = \frac{m}{n}$. (Подчеркивается, что дальнейшие рассуждения будем вести исходя из этого предположения, а следовательно, выводы, которые мы будем получать, будут вытекать из этого предположения).

Для доказательства теоремы находим два других отрезка, отношение которых будет равно отношению $\frac{AC}{AD}$, то есть, по нашему предположению, $\frac{m}{n}$. Для получения этих отрезков проведем в треугольнике CAD биссектрису угла CAD — прямую AM. Докажем, что отношение полученных отрезков CM и MD будет равно отношению $\frac{AC}{AD}$, то есть, по нашему предположению, должно будет равняться $\frac{m}{n}$.

Для доказательства этого разделим AD на n равных частей, тогда поскольку $\frac{AC}{AD} = \frac{m}{n}$ (по предположению), постольку на AC отложится точно m таких же частей. Проведем после этого через каждую точку деления AC и AD прямые, параллельные биссектриce AM. Этими прямыми отрезок CM разделится на m равных частей, а отрезок DM — на n равных частей. Чтобы найти отношение CM к MD, докажем, что отрезки, полученные на CM, будут равны отрезкам, полученным на MD. Это доказательство можно провести разными способами, например так: соединив точки P и L[1], получим равнобедренный треугольник APL, в котором прямая AM разделит PL пополам и будет к PL перпендикулярна. Опустив из точки N перпендикуляр на AM, увидим, что его отрезок, заключенный между LN и PQ, тоже разделится прямой AM пополам. Из этого вытекает равенство отрезков MN и MQ, а значит, и равенство между собой отрезков на которые разделились CM и MD. Отсюда

$$\frac{CM}{MD}=\frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Но отношение CM к MD можно выразить иначе: AM — биссектриса угла CAD, поэтому

$$MD=MD', \text{ где } MD' \perp AC. \qquad (2)$$

В прямоугольном треугольнике $CD'M$ один из острых углов (ACD) равен 45°, следовательно, треугольник — равнобедренный:

$$D'C=MD'.$$

Таким образом,

$$MD=D'C.$$

Обозначим через κ длину отрезка, полученного при разделении сторон AD и AC треугольника ACD ($AL=\kappa$; $AP=\kappa$). Тогда: $AC=\kappa m$, $AD=\kappa n$, значит и $CD=\kappa n$, $D'C=AC-AD'=$ $=AC-AD=\kappa m-\kappa n$, но $MD=D'C$, значит $MD=\kappa m-\kappa n$, (3) $CM=CD-MD$. Отсюда

$$CM=\kappa n-\kappa m+\kappa n=2\kappa n-\kappa m. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) выводим:

$$\frac{CM}{MD}=\frac{2\kappa n-\kappa m}{\kappa m-\kappa n}=\frac{2n-m}{m-n}. \qquad (5)$$

Из (1) и (5) следует:

$$\frac{2n-m}{m-n}=\frac{m}{n} \text{ или}$$

$m^2-mn=2n^2-mn$.

$$\text{Окончательно } \left(\frac{m}{n}\right)^2=2.$$

Мы пришли к выводу, что, если отношение диагонали квадрата к его стороне равно несократимой обыкновенной дроби, то квадрат этой дроби должен равняться целому числу 2. Но это

[1] При доказательстве этой теоремы в классе необходимо прямую PL построить.

противоречит положению о том, что квадрат несократимой дроби не может быть целым числом.

Поэтому следует признать, что отношение диагонали квадрата к его стороне не может быть ни целым числом, ни дробным.

Значит, это отношение не может быть выражено и десятичной дробью — конечной или бесконечной периодической.

Идея приведенного доказательства представляется доступной для учащихся VIII класса, но оно все-таки труднее и сложнее всех доказательств, с которыми учащиеся встречались ранее, и потому изложение и усвоение его потребует значительной затраты времени. Учитывая перегруженность программы VIII класса по математике, можно в случае недостатка времени доказательство теоремы о существовании несоизмеримых отрезков отложить, то есть временно постулировать существование несоизмеримых отрезков. Если при этом доказательство теорем о пропорциональных отрезках проводить как для случая соизмеримых отрезков, так и для случая несоизмеримых, то теорема Пифагора будет доказана для обоих случаев. Поэтому теоремой Пифагора можно будет воспользоваться для обнаружения отрезков, являющихся несоизмеримыми. Так именно этот вопрос и разрешен в учебнике Глаголева.

§ 5. Понятие об иррациональном числе

Теорема об отношении диагонали квадрата к его стороне изучается в курсе геометрии раньше, чем учащиеся знакомятся в курсе алгебры с иррациональными числами. Поэтому утверждение, что отношение диагонали квадрата к его стороне не может быть выражено ни целым числом, ни дробью, воспринимается учащимися с большим недоумением и вызывает у них известную растерянность. В самом деле, в процессе выполнения практических работ учащиеся находили приближенные значения отношения этих отрезков с точностью до десятых и до сотых, а некоторые даже и до тысячных; и вдруг теперь они узнают, что это отношение не может быть равно ни целому числу, ни дробному.

С точки зрения учащихся, не знакомых с иррациональными числами, это означает, что данное отношение вообще не может быть равно никакому числу, то есть вообще не существует, поскольку отношение определяется как число. Вполне понятно, что учащиеся испытывают острое недоумение от знакомства с данной теоремой.

Чтобы рассеять это недоумение, необходимо сейчас же познакомить учащихся с иррациональными числами и сообщить некоторые сведения о них.

Это ознакомление с иррациональными числами на данном этапе обучения может быть осуществлено таким образом.

1) Учащиеся вспоминают, что, помимо конечных и бесконечных периодических десятичных дробей, существует еще третий

вид десятичных дробей — бесконечные непериодические десятичные дроби, которые нельзя обратить точно в обыкновенные дроби, то есть нельзя приравнять обыкновенным дробям.

Если в начале курса VIII класса были повторены, как это нами рекомендуется, способы обращения обыкновенных дробей в десятичные и обратно, то учащиеся должны знать о существовании бесконечных непериодических десятичных дробей.

2) Учитель сообщает учащимся, что отношение диагонали квадрата к его стороне равно именно такой бесконечной непериодической десятичной дроби.

3) Чтобы обосновать это утверждение, учитель предлагает учащимся или вспомнить, или заново проделать работу по нахождению приближенных значений отношения диагонали квадрата к его стороне и составить на основании полученных результатов таблицу:

$$1 < \frac{d}{a} < 2$$

$$1{,}4 < \frac{d}{a} < 1{,}5$$

$$1{,}41 < \frac{d}{a} < 1{,}42,$$

где d — длина диагонали квадрата, a — длина его стороны.

4) После этого учитель указывает, что найти приближенные значения данного отношения с точностью до тысячных при помощи инструментов и моделей, имеющихся в школе, будет затруднительно, найти же это отношение с еще большей точностью — совершенно невозможно.

Для нахождения приближенных значений данного отношения со все большей и большей точностью пользуются не измерениями, а особым способом, который дается теорией. Этот способ дает возможность находить вычислением приближенные значения с любой точностью.

Таким образом, составленную таблицу можно продолжить и продолжить сколько угодно.

Далее учитель указывает, что если вычислить по указываемому теорией способу ряд приближенных значений отношения диагонали квадрата к его стороне со все большей и большей точностью, то получится такая таблица:

$$1 < \frac{d}{a} < 2$$

$$1{,}4 < \frac{d}{a} < 1{,}5$$

$$1{,}41 < \frac{d}{a} < 1{,}42$$

$$1{,}414 < \frac{d}{a} < 1{,}415$$

$$1{,}4142 < \frac{d}{a} < 1{,}4143$$

$$1{,}41421 < \frac{d}{a} < 1{,}41422$$

$$1{,}414213 < \frac{d}{a} < 1{,}414214$$

$$1{,}4142135 < \frac{d}{a} < 1{,}4142136$$

$$1{,}41421356 < \frac{d}{a} < 1{,}41421357$$

. . . .

Точки, стоящие под таблицей, показывают, что таблицу можно продолжать без конца, причем способ нахождения дальнейших приближенных значений (еще более точных) известен.

5) Используя полученную таблицу, записываем:

$$\frac{d}{a} = 1{,}41421356...$$

Точки, стоящие после цифры 6, показывают, что за этой цифрой следует бесконечное множество цифр, каждую из которых можно найти по способу, указываемому теорией.

6) Полученное число является бесконечной десятичной дробью, притом непериодической, так как если бы предположить, что полученная дробь является периодической, то она оказалась бы равной некоторой обыкновенной дроби, а это невозможно, так как противоречит доказанной теореме.

7) Целесообразно уже здесь сказать учащимся, что бесконечная непериодическая десятичная дробь обычно не называется дробью, а называется иррациональным числом. Поэтому возможно теорему о диагонали квадрата и его стороне сформулировать так: «Отношение диагонали квадрата к его стороне не может быть выражено ни целым, ни дробным числом».

Вопрос о том, следует ли на данном этапе в курсе геометрии ограничиться рассмотрением только указанных выше положений об иррациональном числе или целесообразнее расширить и углубить их, вообще говоря, является спорным. Формально изучение иррациональных чисел является задачей курса алгебры, но вместе с тем иррациональные числа играют большую роль в геометрии. В геометрии же учащиеся впервые сознают необходимость иметь дело с этими числами. Поэтому нам представляется целесообразным не обрывать изучение иррациональных чисел на этом последнем пункте, который изложен выше, а несколько продолжить его.

8) Следует указать, что бесконечная непериодическая десятичная дробь является определенным числом и изображается на числовой оси некоторой точкой.

Это последнее положение вытекает из аксиомы Кантора (см. «Курс элементарной геометрии», ч. I, Д. И. Перепелкина, стр. 160, аксиома 9), поэтому может быть сообщено учащимся как факт. Полезно его все-таки иллюстрировать путем получения на числовой оси соответствующей точки, например точки, изображающей иррациональное число, равное отношению диагонали квадрата к его стороне.

9) После этого естественно разъяснить учащимся, что иррациональное число считается заданным (известным), если известен способ получения любого числа его цифр. Это положение хорошо иллюстрировать примером иррационального числа, для которого указан способ получения любого числа цифр. Например, задать получение иррационального числа таким способом: цифра единиц — 2, цифра десятых — 0, затем опять цифра 2, за ней последовательно два нуля, после этого опять цифра 2, после нее последовательно три нуля, после них снова цифра 2, затем уже четыре нуля и т. д.

Получается бесконечная непериодическая десятичная дробь 2,02002000200002...

Учащиеся на этом примере легко осознают и «видят», что данное число вполне определено, то есть может считаться известным, поскольку известен способ получения его цифр. Для иллюстрации этого же положения можно использовать умение учащихся находить приближенные квадратные корни с любой точностью. Например, $\sqrt{5}$ учащиеся могут найти с любой точностью. Этот корень есть иррациональное число. Это число определенное и его учащиеся сочтут известным, так как им хорошо известен способ нахождения его цифр.

Рассмотрением указанного материала целесообразно на данном этапе и ограничиться.

Этот материал дает хотя и не большой, но законченный круг сведений об иррациональном числе, при помощи которого можно более или менее обстоятельно и убедительно изложить теорию пропорциональных отрезков.

Таким образом, первое понятие об иррациональном числе как о числе, выражающем отношение несоизмеримых отрезков, учащиеся получают на уроках геометрии. На первых уроках геометрии учащиеся представляют себе это число только в виде бесконечной десятичной непериодической дроби, а не в виде $\sqrt{2}$ или $\sqrt{3}$ и т. д. Это, конечно, хорошо, но в этом заключается и некоторое неудобство: учащиеся не знают способа находить с любой точностью приближенные значения отношений несоизмеримых отрезков. Поэтому, чтобы иллюстрировать получение иррационального числа, выражающего отношение данных несоизмеримых отрезков, учителю придется приводить готовые результаты вычисления приближенных значений этих отношений.

Однако учитель должен будет учесть необходимость привлечь впоследствии учащихся к самостоятельному нахождению этих результатов на уроках алгебры. На данном же этапе обучения, учителю придется указать, что приближенные значения отношения данных отрезков вычислены особым способом, который будет изучен учащимися позднее.

Следует привести еще пару подобных примеров. Например, можно иллюстрировать получение иррационального числа, выражающего отношение высоты равностороннего треугольника к его стороне.

Обозначив через a сторону треугольника, а через h — его высоту, будем иметь:

$$0{,}8 < \frac{h}{a} < 0{,}9$$
$$0{,}86 < \frac{h}{a} < 0{,}87$$
$$0{,}866 < \frac{h}{a} < 0{,}867$$
$$0{,}8660 < \frac{h}{a} < 0{,}8661$$
$$0{,}86602 < \frac{h}{a} < 0{,}86603$$
$$0{,}866025 < \frac{h}{a} < 0{,}866026$$
$$0{,}8660254 < \frac{h}{a} < 0{,}8660255$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Откуда $\frac{h}{a} = 0{,}8660254\dots$ то есть является бесконечной непериодической десятичной дробью.

§ 6. Равенство отношений отрезков

Определение равенства двух отношений несоизмеримых отрезков необходимо иллюстрировать примерами, иначе оно может усваиваться формально. Возьмем, например, диагональ куба и его ребро. В дальнейшем курсе геометрии устанавливается, что эти отрезки несоизмеримы, а также указывается способ вычисления приближенных значений их отношения с любой степенью точности.

Если обозначить диагональ куба через d, а ребро через c, то при помощи вычислений по этому способу получим:

Таблица 1

$1{,}7 < \frac{d}{c} < 1{,}8$	$1{,}73205 < \frac{d}{c} < 1{,}73206$
$1{,}73 < \frac{d}{c} < 1{,}74$	$1{,}732050 < \frac{d}{c} < 1{,}732051$
$1{,}732 < \frac{d}{c} < 1{,}733$	$1{,}7320508 < \frac{d}{c} < 1{,}7320509$
$1{,}7320 < \frac{d}{c} < 1{,}7321$	$\dots\dots\dots\dots$

Иррациональное число, выражающее отношение диагонали куба к его ребру, окажется бесконечной непериодической десятичной дробью:

$$\frac{d}{c} = 1{,}7320508...$$

В дальнейшем курсе геометрии устанавливается также, что в прямоугольном треугольнике с острым углом в 30° катеты несоизмеримы друг с другом, и указывается способ вычисления приближенных значений их отношения с любой степенью точности.

Если обозначить больший катет этого треугольника через a, а меньший катет через b, то при помощи вычислений по этому способу получим:

Таблица 2

$$1{,}7 < \frac{a}{b} < 1{,}8$$

$$1{,}73 < \frac{a}{b} < 1{,}74$$

$$1{,}732 < \frac{a}{b} < 1{,}733$$

$$1{,}7320 < \frac{a}{b} < 1{,}7321$$

$$1{,}73205 < \frac{a}{b} < 1{,}73206$$

$$1{,}732050 < \frac{a}{b} < 1{,}732051$$

$$1{,}7320508 < \frac{a}{b} < 1{,}7320509$$

. . . .

Иррациональное число, выражающее отношение большего катета данного треугольника к меньшему, окажется бесконечной непериодической десятичной дробью:

$$\frac{a}{b} = 1{,}7320508\ldots$$

Сравнивая таблицы 1 и 2, видим, что приближенные значения обоих отношений, вычисленные с одинаковой степенью точности, равны. Оказывается также (это будет доказано в дальнейшем), что, сколько бы мы ни продолжали вычисления, соответственные, то есть вычисленные с одинаковой степенью точности, приближенные значения этих отношений будут получаться равными.

Значит, бесконечные непериодические десятичные дроби, выражающие значения этих отношений, будут одинаковы, так как у них будут равны соответственные десятичные знаки.

На этом основании, в согласии с определением, можем сказать, что отношение диагонали куба к его ребру равно отношению большего катета к меньшему в треугольнике с острым углом в 30°:

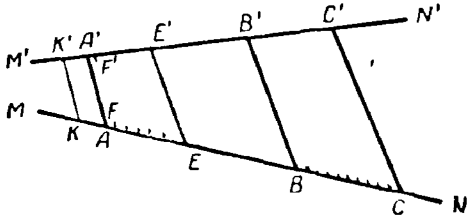
$$\frac{d}{c} = \frac{a}{b}.$$

Для демонстрации при помощи таблиц 1 и 2 равенства отношений несоизмеримых отрезков можно было бы взять два куба различных размеров или даже два прямоугольных треугольника с углом в 30°, но в этом случае результат оказался бы не столь неожиданным для учащихся, а потому и не столь показательным.

§ 7. Некоторые теоремы о пропорциональных отрезках

Теорема. **Три параллельные прямые, пересекающие две прямые, отсекают на них пропорциональные отрезки.**

Приведенная формулировка теоремы заимствована из учебника Глаголева. Формулировки, данные в учебниках Никитина и Фетисова и Киселева, несколько отличаются от нее. Можно предложить и такую формулировку теоремы: **Если тремя параллельными прямыми пересечь две произвольные прямые, то отрезки, образованные на одной из них, будут пропорциональны соответствующим отрезкам, образованным на другой.**



Черт. 2.

Приведем примерный вариант изложения доказательства этой теоремы в классе во время объяснения ее учителем.

Дано: $AA' \parallel BB' \parallel CC'$; MN и $M'N'$ — прямые, пересекающие AA', BB' и CC' (черт. 2).

Требуется доказать:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Первый случай. Отрезки, образованные на одной прямой, например на MN, соизмеримы. В этом случае доказательство не может вызвать затруднений. С приемом доказательства можно познакомиться по учебнику Глаголева (§ 169) или Киселева (§ 159).

Второй случай. Отрезки, образованные на одной из прямых, например отрезки AB и BC на прямой MN, несоизмеримы. В этом случае отношение $\frac{AB}{BC}$ выразится бесконечной непериодической десятичной дробью, например дробью 1,7358 ... Запишем таблицу приближенных значений отношения $\frac{AB}{BC}$.

Таблица 1

$$1 < \frac{AB}{BC} < 2$$

$$1{,}7 < \frac{AB}{BC} < 1{,}8$$

$$1{,}73 < \frac{AB}{BC} < 1{,}74$$

$$1{,}735 < \frac{AB}{BC} < 1{,}736$$

. . . .

Чтобы доказать теорему, надо доказать, что приближенные значения отношения $\frac{A'B'}{B'C'}$ будут равны соответствующим приближенным значениям отношения $\frac{AB}{BC}$. Приближенное значение отношения $\frac{AB}{BC}$ с недостатком с точностью до 1 равно 1. Это значит, что отрезок BC отложился на отрезке AB от точки B один раз и, кроме того, окажется остаток EA, меньший отрезка BC.

Проведя прямую EE', параллельную AA', увидим, что на отрезке $A'B'$ отложится отрезок $B'C'$ один раз и, кроме того, окажется остаток $E'A'$, меньший отрезка $B'C'$. Это значит, что приближенное значение отношения $\frac{A'B'}{B'C'}$ с недостатком с точностью до 1 равно 1, то есть

$$1 < \frac{A'B'}{B'C'} < 2.$$

Приближенное значение отношения $\frac{AB}{BC}$ с недостатком с точностью до 0,1 равно 1,7. Это значит, что десятая часть отрезка BC отложится на остатке EA семь раз и, кроме того, окажется остаток FA, меньший десятой части отрезка BC.

Разделим отрезок BC на десять равных частей и отложим на отрезке EA эти десятые части отрезка BC. Проведя через все точки деления прямые, параллельные AA', увидим, что отрезок $B'C'$ разделится на 10 равных частей, а на отрезке $E'A'$ отложится семь таких десятых частей $B'C'$ и, кроме того, окажется остаток $F'A'$, меньший десятой части отрезка $B'C'$.

Это значит, что приближенное значение отношения $\frac{A'B'}{B'C'}$ с недостатком с точностью до 0,1 равно 1,7. Занеся это в таблицу приближенных значений отношения $\frac{A'B'}{B'C'}$, получим[1]:

$$1 < \frac{A'B'}{B'C'} < 2 \qquad\qquad 1{,}7 < \frac{A'B'}{B'C'} < 1{,}8$$

---

[1] Таблица приближенных значений отношения $\frac{A'B'}{B'C'}$ заполняется постепенно, по мере нахождения этих приближенных значений.

Рассуждая таким же образом, установим, что раз приближенное значение отношения $\frac{AB}{BC}$ с недостатком с точностью до 0,01 равно 1,73, то и приближенное значение отношения $\frac{A'B'}{B'C'}$ с недостатком с точностью до 0,01 тоже будет равно 1,73[1].

Такой же вывод сделаем и о приближенных значениях с точностью до 0,001 и т. д. В классе эти рассуждения надо провести со всеми подробностями. Занеся все эти результаты в таблицу приближенных значений отношения $\frac{A'B'}{B'C'}$, получим:

Таблица 2

$$1 < \frac{A'B'}{B'C'} < 2$$

$$1{,}7 < \frac{A'B'}{B'C'} < 1{,}8$$

$$1{,}73 < \frac{A'B'}{B'C'} < 1{,}74$$

$$1{,}735 < \frac{A'B'}{B'C'} < 1{,}736$$

. . . .

Сравнение таблиц 1 и 2 наглядно покажет, что соответствующие приближенные значения отношений $\frac{AB}{BC}$ и $\frac{A'B'}{B'C'}$ равны, а из этого следует, что равны и сами отношения: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$, причем каждое отношение равно бесконечной непериодической десятичной дроби, то есть иррациональному числу 1,7358... В учебнике Никитина и Фетисова сделана интересная с логической точки зрения попытка не разделять доказательства теоремы на случаи соизмеримости и несоизмеримости, а проводить его сразу применительно к обоим случаям. Однако это усложнило изложение доказательства и затруднило понимание его учащимися. Рекомендовать такой способ изложения мы не можем.

Доказанная теорема является основной для всей теории пропорциональных отрезков, а также и для теории подобных фигур; поэтому опрос учащихся по материалу данной теоремы должен проводиться с особой тщательностью. Следствия из данной теоремы имеют большое значение как для последующей теории, так и для решения задач.

Из пропорции $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ (черт. 3)

путем перестановки средних членов получается: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$.

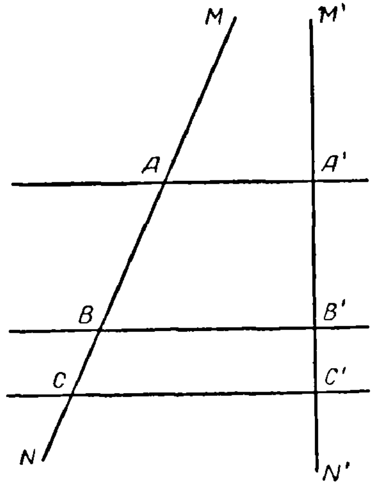
---

[1] Делить отрезок BC на сотые части и проводить через точки деления прямые линии придется только мысленно, так как на нашем чертеже выполнить эти операции практически будет невозможно.

Следствие 1. **Если три параллельные прямые пересекают две произвольные прямые, то отрезки этих прямых, заключенные между одной парой параллельных секущих, пропорциональны соответственным отрезкам, заключенным между другой парой параллельных секущих.**

Прибавим к обоим отношениям, составляющим пропорцию $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$ (черт. 3), по 1, получим пропорцию $\frac{AB+BC}{BC}=$ $=\frac{A'B'+B'C'}{B'C'}$, то есть $\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'}$. Если в пропорции $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$ переставить члены каждого отношения и затем к каждому отношению прибавить по 1, то получим:

$$\frac{BC}{AB}+1=\frac{B'C'}{A'B'}+1 \quad \text{или} \quad \frac{BC+AB}{AB}=$$
$$=\frac{B'C'+A'B'}{A'B'}, \text{ то есть } \frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'}.$$



Черт. 3.

Следствие 2. **Если три параллельные прямые пересекают две произвольные прямые, то отрезки одной из них, взятые от любой крайней точки пересечения до двух других точек пересечения, пропорциональны соответствующим отрезкам на другой из произвольных прямых.**

Следствие 3. **Если две пересекающиеся прямые пересечь двумя параллельными, то отрезки, образовавшиеся на одной прямой, пропорциональны соответственным отрезкам, образовавшимся на другой прямой** (черт. 4 и 5).

Дано: $BB' \parallel CC'$. Требуется доказать: $\frac{AB}{BC}=\frac{AB'}{B'C'}$.

Доказательство для обоих случаев можно изложить по учебнику Глаголева (§ 170 (1) и § 172), но для доказательства первого случая можно применить и несколько иной прием, а именно: провести вне угла CAC' прямую MN, параллельную AC', и затем через точку A прямую KL, параллельную CC'.

Этим построением мы сведем вопрос непосредственно к основной теореме.

Второй случай сводится к первому путем поворота треугольника ACC' вокруг точки A на 180°.

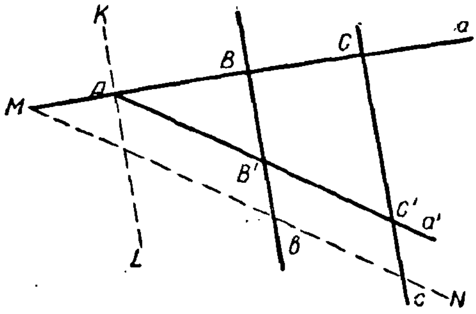
Следствие 4. **Если на двух пересекающихся прямых отложить от точки пересечения в соответственных направлениях две пары пропорциональных отрезков, то прямые, соединяющие соответственные концы этих отрезков, параллельны** (черт. 4 и 5).

Это следствие является обратной теоремой о пропорциональных отрезках.

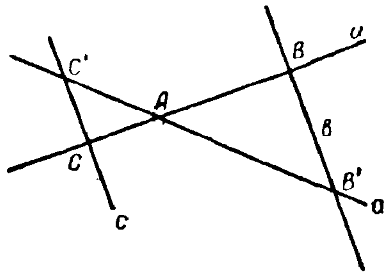
Дано: $\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}$. Требуется доказать: $BB' \parallel CC'$.

Доказательство (методом от противного).

Предположение: BB' не параллельно CC'.



Черт. 4.

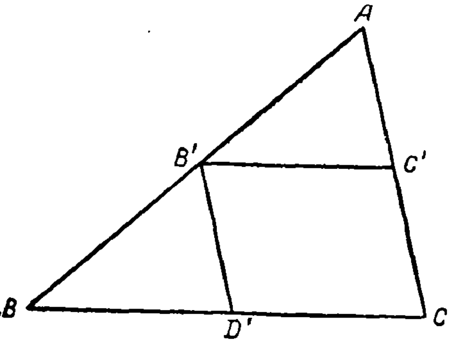


Черт. 5.

Проводим $BB'' \parallel CC'$.

Тогда по следствию 3 имеем: $\frac{AB}{AC}=\frac{AB''}{AC'}$, что противоречит условию, так как $\frac{AB''}{AC'} \neq \frac{AB'}{AC'}$.

Следствие 5. **Прямая, параллельная какой-нибудь стороне треугольника, отсекает от него треугольник, стороны которого пропорциональны соответственным сторонам данного треугольника.**



Черт. 6.

Дано: $B'C' \parallel BC$ (черт. 6).

Требуется доказать:

$$\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

Доказательство. $\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}$ по следствию 3.

Проводим $B'D' \parallel AC$, тогда по следствию 3

$\frac{AB}{AB'}=\frac{BC}{D'C}$, но $D'C = B'C'$,

следовательно $\frac{AB}{AB'}=\frac{BC}{B'C'}$.

После доказательства теоремы о пропорциональных отрезках и следствий из нее необходимо остановиться на таком вопросе. В условии прямой теоремы о пропорциональных отрезках указывается, что параллельные секущие могут быть расположены

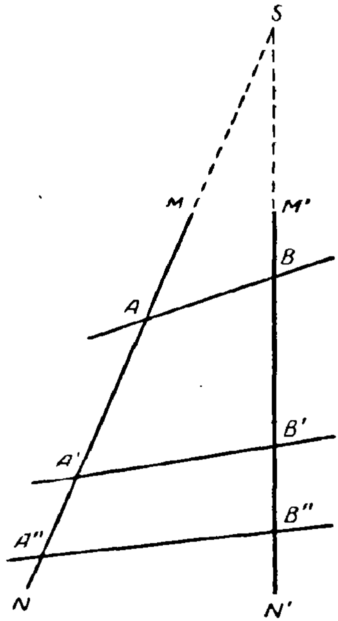
овершенно произвольно. В условии же обратной теоремы гово-
ится, что пропорциональные отрезки следует откладывать на
нных прямых обязательно от точки их пересечения.

Если это условие не будет выполнено, то прямые, проведен-
ые через соответственные концы пропорциональных отрезков, как
авило, параллельными не будут.

Это обстоятельство вызывает недоумение.

Причина такой кажущейся несогласованности между прямой
обратной теоремой заключается в том, что в традиционном из-
ожении прямой теоремы упускается дно заключение, а именно: не указы-
ается, что расстояния от точки пере-
ечения данных прямых до каждой
параллельных секущих пропорцио-
альны откладываемым отрезкам. По-
кольку для правильного построения
братной теоремы необходимо учиты-
ать все заключения прямой теоремы,
остольку это заключение прямой тео-
емы должно быть включено в усло-
ие данной обратной теоремы.

Таким образом, теоремой, обрат-
ой теореме о пропорциональности
трезков двух данных прямых, пере-
екаемых параллельными секущими,
удет именно теорема о свойстве кон-
ов пропорциональных отрезков, от-
оженных на сторонах угла от его
ершины[1].



Черт. 7.

На чертеже 7 иллюстрируется
тверждение, что если пропорциональ-
ые отрезки откладывать на данных
рямых от произвольных точек, то
рямые, соединяющие соответствен-
ые концы отложенных отрезков, не будут параллельны.

MN и $M'N'$ — данные прямые. A и B — произвольные точки.
A', $A'A''$, BB' и $B'B''$ — пропорциональные отрезки, причем

$$\frac{AA'}{A'A''} = \frac{BB'}{B'B''} = 2.$$

рямые AB, $A'B'$ и $A''B''$ не оказались параллельными. Причина
аключается в том, что отрезки SA и SB не пропорциональны
тложенным отрезкам.

[1] В учебнике Никитина и Фетисова эта теорема почему-то названа обрат-
ой не основной теореме, а одному из ее следствий.

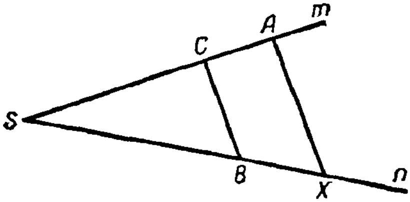
§ 8. Основные задачи на построение пропорциональных отрезков

Решение задачи о построении четвертого пропорционального отрезка к трем данным отрезкам не вызывает затруднений, но все-таки полезно указать учащимся, что раньше всего следует составить пропорцию. Обозначения отрезков записываются в пропорции в том порядке, как они даны, то есть если сказано: найти четвертый пропорциональный отрезок к отрезкам a, b и c, то пропорция записывается так: $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Откладывая отрезки на сторонах угла, следует помнить, что средние члены должны помещаться на различных сторонах угла, причем если один займет первое место от вершины угла, то другой должен занять второе место, значит возможные способы расположения отрезков a, b и c таковы:

$$SC = a;\ SB = b;\ CA = c \text{ или}$$
$$SC = a;\ CA = b;\ SB = c \text{ и т. д. (черт. 8).}$$

При решении задачи о построении четвертого пропорционального отрезка учащиеся могут предложить разные способы решения задачи. Эту инициативу следует поощрить. Чаще всего учащиеся предлагают изменить только способ составления пропорции и вместо $\frac{SX}{SA} = \frac{SB}{SC}$ написать $\frac{SX}{SB} = \frac{SA}{SC}$. Но бывают иногда и более интересные предложения, именно предлагают: на стороне m отложить $SC = a$ и $SA = c$, затем построить между прямыми m и n отрезок $CB = b$ и через точку A провести прямую AX, параллельную отрезку CB. Отрезок AX будет искомым четвертым пропорциональным к данным отрезкам a, b и c. Конечно, предложивший этот способ решения задачи, должен доказать правильность решения:



Черт. 8.

$$\frac{AX}{BC} = \frac{SA}{SC};\ \frac{x}{b} = \frac{c}{a}.$$

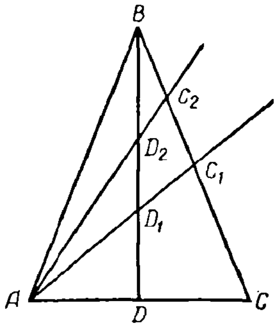
Задачу о делении данного отрезка AB в отношении, равном отношению данных отрезков m и n, удобнее решить, понимая условие задачи сначала только в узком буквальном смысле, именно найти точку P, делящую отрезок AB в заданном отношении внутренним образом.

Подчеркнув затем, что точка P обладает тем свойством, что отношение расстояний от нее до точек A и B равно отношению $m:n$ и, установив, что на отрезке AB другой такой точки нет, можно поставить вопрос о нахождении на продолжении AB другой точки, обладающей тем же свойством, что отношение расстояний от нее до точек A и B равно отношению данных отрезков m и n.

При таком способе изложения материала термин «разделить отрезок внешним образом» все же очень условный и противоречащий общепринятому представлению о «делении величины», не вызывает возражений со стороны учащихся.

§ 9. Теорема о биссектрисе внутреннего угла треугольника

До изложения теоремы о биссектрисе угла треугольника полезно использовать модели. Так, например, используя очень простую модель, можно добиться того, что у учащихся возникнет мысль о теореме, выражающей одно из свойств биссектрисы угла треугольника.



Черт. 9.

Возьмем модель равнобедренного треугольника, в которой боковые стороны треугольника неподвижно закреплены между собой, а основанием треугольника служит часть планки, вращающейся вокруг одной из вершин треугольника в его плоскости. Поместим эту модель в вертикальной плоскости так, чтобы основание треугольника приняло горизонтальное положение. Тогда отвес, прикрепленный к вершине треугольника, определит положение его высоты, а следовательно, и биссектрисы угла при вершине.

В таком положении мы будем иметь модель, иллюстрирующую теорему о свойстве биссектрисы равнобедренного треугольника.

Найдем пропорциональные отрезки и составим пропорцию

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \text{ (черт. 9).}$$

Повернем затем основание треугольника так, чтобы оно заняло положение AC_1, где C_1 — середина стороны BC. BD по-прежнему будет биссектрисой угла B, но теперь в треугольнике ABC_1 она разделит основание AC_1 на неравные части: $AD_1 > D_1C_1$.

Боковые стороны нового треугольника ABC_1 тоже не равны, отношение их известно: $\frac{AB}{BC_1} = 2$.

Похоже, что и отношение $\frac{AD_1}{D_1C_1} = 2$. Проверяем измерением.

Передвигаем основание в положение AC_2 и сравниваем отношение боковых сторон треугольника ABC_2 и отношение полученных отрезков основания.

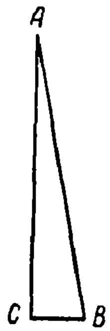
Учащиеся после этого формулируют теорему о биссектрисе внутреннего угла треугольника (своими словами).

Учитель предлагает общую формулировку теоремы о свойстве биссектрисы внутреннего угла треугольника. Затем теорема доказывается.

После этого учитель обращает внимание учащихся на то, что, проведя доказательство, мы убедились в справедливости предполагавшегося свойства, а также выявили причины, почему свойство именно таково[1].

§ 10. Поперечный масштаб

Хотя в программе вовсе не упоминается о поперечном масштабе, но по традиции учащимся сообщаются сведения о конструкции и практическом применении этого измерительного прибора.



Черт. 10.

В каждом учебнике геометрии эти вопросы излагаются, и каких-либо трудностей для учащихся их усвоение не представляет. Полезно только подчеркнуть следующее обстоятельство: разделить черточками на обычной школьной линейке отрезок, равный миллиметру, еще на десять равных частей практически невозможно. Поэтому получить на такой линейке отрезки, равные, например, 0,1 *мм*; 0,2 *мм*; 0,3 *мм* и т. д., нельзя. Но такие отрезки можно получить при помощи приема, основанного на свойстве пропорциональных отрезков. Для этого достаточно:

1) Построить прямоугольный треугольник BAC с катетом BC, равным 1 *мм*. Другой катет AC можно взять произвольной длины (черт. 10).

2) Разделить этот катет AC на 10 равных частей и через точки деления провести между сторонами AC и AB отрезки, параллельные стороне BC. Самый верхний из этих отрезков будет иметь длину 0,1 *мм*, второй сверху — длину 0,2 *мм* и т. д. В этом заключается основная идея конструкции поперечного масштаба. С этого разъяснения и целесообразно начинать в классе работу по изучению поперечного масштаба.

---

[1] На эту последнюю функцию доказательства почему-то не обращается достаточного внимания, а между тем в школьном преподавании она могла бы сыграть свою положительную роль.

Глава II

ГОМОТЕТИЯ И ПОДОБИЕ

§ 11. Введение

Приступая в классе к изучению темы «Гомотетия и подобие», учитель сталкивается с вопросом о порядке прохождения темы, то есть с вопросом планирования материала темы. Дело в том, что среди методистов нег единства в вопросе о том, что следует положить в основу изложения — гомотетию или подобие, а в соответствии с этим — с чего начинать изучение материала, с гомотетии как особого вида преобразования или с понятия подобия и вытекающих из него признаков подобия треугольников и многоугольников.

И один и другой порядок изучения материала имеют свои достоинства и свои недостатки.

Программа Министерства просвещения РСФСР из этих двух путей выбирает один, именно программой устанавливается, что сначала проходится более или менее полно в систематическом изложении гомотетия фигур, а затем на этой основе изучается подобие.

Таким образом, программа кладет в основу темы понятие преобразования, которое и приводит к понятию подобия.

То обстоятельство, что в программе говорится не о гомотетии треугольников или многоугольников, а о гомотетии фигур вообще, заставляет предполагать, что программой предусматривается изучение гомотетии не только треугольников и многоугольников, а и фигур произвольной формы, в первую очередь окружностей. Следует признать, что это в значительной мере увеличивает объем изучаемого материала.

Близко к программе изложена эта тема в учебнике Никитина и Фетисова. В этом учебнике дано полное и систематическое изложение гомотетии плоских фигур любой формы.

Однако изложение в нем не всегда доступно для учащихся VIII класса; затем, как показал анализ учебника, оно и не везде достаточно точно; наконец, на основании данных опыта выяснилось, что удовлетворительно пройти весь материал темы, изложенный в учебнике Никитина и Фетисова, в отведенное на тему число часов совершенно невозможно.

В учебнике геометрии Глаголева эта тема изложена достаточно полно и систематически, но неприемлемым для преподавания в школе представляется определение подобных фигур, данное в этом учебнике: «Две фигуры подобны, если можно построить третью фигуру, перспективно подобную[1] одной из данных и равную другой».

[1] В учебнике Глаголева применяется вместо термина «гомотетичная фигура» термин «перспективно подобная фигура».

Это определение при всей его правильности оторвано от наглядного представления о подобных фигурах и потому вряд ли целесообразно пользоваться им в школе.

Поскольку способ изложения подобия в учебнике Глаголева основывается на приведенном определении, постольку приходится отказываться от следования этому учебнику в вопросе установления зависимости между гомотетией и подобием.

В учебнике Киселева изложение темы резко отличается от изложения, предусмотренного программой.

Поэтому в случае преподавания геометрии по учебнику Киселева придется при изложении темы «Гомотетия и подобие» вводить дополнения к материалу учебника и некоторые изменения в его планировании.

Научные курсы элементарной геометрии излагают материал, значительно более обширный и отобрать из него все необходимое для школы и связать это отобранное в некоторую систему — задача учебника.

Учитывая, что в школе преподавание гомотетии является делом сравнительно новым, авторы настоящего методического пособия стремились обработать материал методически, в частности упростить стиль изложения темы в указанных выше учебниках, указать некоторые приемы, облегчающие понимание и усвоение материала учащимися, связать изучение темы с практическими вопросами и т. д.

Вместе с тем ввиду несоответствия между временем, отведенным на изучение темы, и объемом материала, изложенного в учебниках Никитина и Фетисова, Глаголева, нами несколько сокращается материал, предназначенный для изучения в школе, однако не вступая в противоречие с требованиями программы.

Если следовать программе буквально, то изучение темы придется начать с определения гомотетии как особого вида преобразования фигур. Чтобы введение этого нового понятия сделать естественным, полезно предварительно напомнить учащимся некоторые знакомые им виды преобразования фигур.

1. *Параллельный перенос.* Этим видом преобразования фигур учащиеся пользовались при решении задач на построение. Например, чтобы построить внутри данного треугольника ABC отрезок, равный данному отрезку m и параллельный стороне треугольника AC, приходится отложить на стороне AC отрезок AD, равный отрезку m, и затем выполнить параллельный перенос этого отрезка, для чего провести $DE \parallel AB$ и $EL \parallel AC$.

2. *Вращение.* Этот вид преобразования фигур применялся при доказательстве теорем о дугах и хордах и расстояниях их от центра.

Интуитивно были установлены и некоторые свойства этого преобразования — сохранение длины отрезков и дуг и др.

3. *Симметрия относительно прямой и точки.* Учащиеся строили симметричные точки, отрезки, треугольники и многоуголь-

ники, изучали некоторые свойства симметрии. В частности, доказывали или по крайней мере должны были доказывать, что фигурой, симметричной отрезку, является отрезок, то есть, что все точки, симметричные точкам данного отрезка относительно одной и той же прямой, располагаются на одном отрезке. Указывалось также, что соответственные отрезки симметричных фигур, как правило, не параллельны друг другу и т. д.

Гомотетия определяется как новый вид преобразования фигур и непосредственно вслед за этим согласно программе изучаются некоторые свойства гомотетии и приемы выполнения ее, то есть изучается более или менее полный и систематический курс гомотетии.

Изучение подобия фигур планируется, таким образом, только после прохождения довольно длительного курса гомотетии.

Нельзя, конечно, отрицать, что указанный порядок прохождения темы отличается стройностью и логической безупречностью, но с точки зрения методики обучения он вызывает возражения.

Во-первых, введение новой теоретической темы приходится мотивировать соображениями чисто теоретического порядка — необходимостью углубить изучение вопроса о преобразовании фигур. Это таит в себе опасность формального отношения учащихся к изучению темы.

Во-вторых, придется длительное время вести преподавание в отрыве от каких-либо практических приложений теории, так как прикладной характер тема сможет принять только после установления зависимости между гомотетией и подобием.

В-третьих, изучение гомотетии представляет для учащихся значительные трудности, особенно вне связи с подобием.

В-четвертых, указанный порядок прохождения темы очень оттягивает знакомство учащихся с подобием треугольников и признаками их подобия. Между тем для согласования планов по физике и математике в VIII классе необходимо как можно ранее изучить подобие треугольников.

Исходя из этих соображений представляется целесообразным введением в тему сделать понятие подобия фигур, потому что подобие фигур сравнительно легко связать с некоторыми задачами прикладного характера и, таким образом, включение в курс геометрии новой темы обосновать потребностями практической деятельности и техники.

Затем также представляется целесообразным несколько отступить от порядка изучения темы, указанного в программе с целью сделать преподавание более доступным для учащихся, а также лучше увязать изучение геометрии с физикой.

Таким образом, план изучения материала темы намечается следующий:

1) Беседа о подобии фигур. Определение подобия.
2) Определение гомотетии.

3) Теорема. Гомотетия преобразует данную фигуру в фигуру подобную данной. Практические работы.

4) Гомотетия отрезка и треугольника.

5) Зависимость между гомотетией и подобием треугольника.

6) Признаки подобия треугольников.

7) Задачи на вычисление и простейшие на построение.

8) Гомотетия многоугольников. Способы построения гомотетичных многоугольников.

9) Признак подобия многоугольников. Свойства подобных многоугольников.

10) Практические работы.

11) Гомотетия окружностей.

12) Решение задач на вычисление, доказательство и построение методом подобия.

Этот план может быть несколько противоречит порядку изучения темы по программе, но духу ее не противоречит.

Ниже приводится изложение материала темы. Изложение это дается в соответствии с намеченным планом и сопровождается методическими указаниями.

§ 12. Понятие о подобии фигур

Систематическому изучению темы естественно предпослать небольшую вступительную беседу с классом, в которой учитель установил бы конкретные связи между некоторыми данными жизненного опыта учащихся и материалом темы.

Примерный план вступительной беседы [1].

В житейском обиходе часто употребляются выражения: эти вещи, эти фигуры, эти рисунки и т. п. похожи друг на друга, или, наоборот, не похожи.

Если взять несколько кубов разных размеров, то все назовут их все-таки похожими друг на друга; точно так же похожими друг на друга будут названы и шары разных размеров.

Если взять несколько географических карт разного масштаба, классную стенную карту Европейской части СССР, стенную карту Европы и соответствующие им карты в ученических атласах, то каждый все-таки безошибочно найдет на них, например, Черное море.

А почему?

Потому, конечно, что фигура Черного моря на всех картах хотя и различна по размерам, но одинакова по форме.

По такой же причине на всех этих картах легко будет найти любое указанное государство или любую область и т. д. Примерами фигур, у которых одинаковая форма, могут служить два

---

[1] Это вступление, являющееся в основном рассказом учителя, названо беседой исходя из того, что оно может прерываться вопросами учащихся, вопросами учителя к учащимся, высказываниями учащихся и т. п.

чертежа одной и той же машины или детали, выполненные по одним и тем же правилам, но в различных масштабах.

Похожими, т. е. одинаковыми по форме, является также картина в музее и хорошие репродукции ее различных размеров (форматов). Одинаковыми по форме, наконец, будут рисунок, сделанный на пленке (диапозитив) и изображение этого рисунка, получаемое на экране при помощи проекционного фонаря.

Получение и изучение предметов, чертежей, рисунков и изображений, имеющих одинаковую форму, то есть похожих, играет большую роль как в практической деятельности, так и в научных исследованиях: этими вопросами в школе занимаются и география, и черчение, и геометрия.

После этого надо показать учащимся, что слово «похоже», то есть понятие «одинаковой формы», в житейском обиходе понимается по-разному.

Например, про фотокарточки говорят, что на этой карточке такой-то человек «похож», а на этой «совсем не похож». Слово «похож» употребляется здесь в менее строгом, точном смысле, чем в предыдущих примерах, так как лицо человека — пространственная фигура, а изображение лица на фотокарточке — фигура плоская, и значит эти фигуры не могут иметь безусловно одинаковую форму.

Точно так же в менее строгом смысле употребляют слово «похоже», когда говорят, что рисунок похож на натуру, с которой он срисован.

Далее учащимся предлагаются вопросы: одинаковая ли форма у куба и прямоугольного параллелепипеда? или одинаковая ли форма у квадрата и прямоугольника? и т. п. Мнения учащихся по этим вопросам обычно расходятся: одни утверждают, что форма у куба и прямоугольного параллелепипеда одинаковая, другие оспаривают это; также обстоит дело, когда сравнивается форма квадрата и прямоугольника, равнобедренных треугольников и т. п.

Таким образом, видим, что в разных обстоятельствах слову «похоже» может придаваться разный смысл, то есть понятие «одинаковой формы» может пониматься по-разному.

Математика такого положения вещей не терпит. В математике каждое слово, каждый термин, каждое понятие должны иметь вполне определенный, точно установленный смысл. Поэтому, приступая к изучению фигур, имеющих одинаковую форму, математик раньше всего должен определить, какие именно фигуры будут считаться имеющими одинаковую форму, а также во избежание недоразумений ввести особое название для таких фигур.

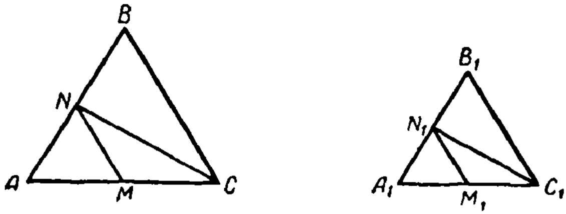
Указывается, что фигуры, которые в геометрии считаются одинаковыми по форме, называются подобными. Затем приводятся примеры фигур, которые считаются одинаковыми по форме, то есть *подобными*.

Такими фигурами могут служить, например, карты полуострова Крыма, чертежи одной и той же детали и т. д. К этим примерам целесообразно добавить еще два равносторонних треугольника, два квадрата и т. д. Сравнивая (опытным путем) указанные подобные фигуры, устанавливаем, что они обладают следующими свойствами:

1) ***Каждой точке, взятой на одной фигуре, соответствует вполне определенная единственная точка второй фигуры, и обратно: каждой точке, взятой на второй фигуре, соответствует одна и только одна точка первой фигуры.***

В случае, когда в качестве подобных фигур рассматриваются карты какой-нибудь местности, например полуострова Крыма, естественно устанавливать соответствие точек, обозначающих на всех картах одни и те же города, населенные пункты, горы и т. д.

Если какой-нибудь населенный пункт на одной карте обозначен, а на другой не обозначен, то при помощи несложного построения можно получить на этой карте единственную точку, которая и будет обозначать данный населенный пункт.



Черт. 11.

Если взять два треугольника одинаковой формы, например два равносторонних треугольника, то естественно принять, что соответственными точками будут вершины треугольников (черт. 11).

Точке	A_1	соответственна	точка	A
»	B_1	»	»	B
»	C_1	»	»	C

Устанавливать соответствие между другими точками, лежащими на сторонах треугольников, можно, вообще говоря, различными способами, но проще и естественнее всего принять, что каждой точке N, взятой на стороне AB, будет соответствовать точка N_1 на стороне A_1B_1, расположенная относительно вершин A_1 и B_1 так же, как точка N расположена относительно вершин A и B, то есть так, что $\frac{AN}{NB} = \frac{A_1N_1}{N_1B_1}$.

Такой же способ получения соответственных точек целесообразно принять и для точек, расположенных на сторонах AC и BC.

Следует указать, что, таким образом, между точками подобных фигур устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Определить понятие взаимно однозначного соответствия можно, например, так: **если каждой точке A первой из двух фигур соответствует единственная точка A_1 второй фигуры и точке A_1 второй фигуры соответствует точка A первой, то говорят, что между точками этих фигур установлено взаимно однозначное соответствие.**

До перехода к следующему свойству подобия фигур следует дать определение сходственных отрезков и соответственных углов.

Определение. **Отрезки, соединяющие соответственные точки фигур, называются сходственными. Углы, стороны которых являются сходственными отрезками, называются соответственными.**

2) ***Сходственные отрезки пропорциональны между собой.***

Так, на всех картах Крыма расстояние от Симферополя до Севастополя относится к расстоянию от Симферополя до Керчи, как $1:3$.

Точно так же и в подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеем равные отношения: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{NC}{N_1C_1} = \frac{NM}{N_1M_1}$ и т. д.

3) ***Соответственные углы равны.***

Так, углы, образованные между направлениями из Симферополя к Севастополю и Керчи, на всех картах равны. (Это можно проверить по транспортиру.)

Точно так же по транспортиру можно проверить равенство соответственных углов в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 11), например $\angle MNC = \angle M_1N_1C_1$ или $\angle CNB = \angle C_1N_1B_1$ и т. д. (M, M_1, N и N_1 — середины сторон треугольников).

Указанные свойства подобных фигур получены опытным путем на основании рассмотрения отдельных примеров, но именно эти свойства и кладутся в основу определения подобных фигур, то есть фигур, форма которых считается одинаковой.

Определение. **Две фигуры называются подобными, если между их точками можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором все соответственные углы равны между собой, а все сходственные отрезки пропорциональны**[1]. Приведен-

---

[1] Это определение является избыточным, так как, если между точками двух фигур установлено взаимно однозначное соответствие, при котором сходственные отрезки пропорциональны, то из этого вытекает равенство углов. Однако представление о подобии фигур связано как с пропорциональностью отрезков, так и с равенством углов между соответственными отрезками. Поэтому в условиях школьного преподавания целесообразно принять приведенное выше определение. Ведь определяет С. А. Богомолов в своем систематическом курсе геометрии подобные треугольники как треугольники, у которых углы соответственно равны, а сходственные стороны пропорциональны (стр. 179, определение 102).

ное определение является общим, применимым для любых фигур. На основании этого определения можно установить подобие треугольников, многоугольников, окружностей, эллипсов и вообще любых фигур. Здесь же вводится знак подобия.

В учебнике Киселева такого общего определения подобия не давалось, там давались частные определения, причем только для треугольников и многоугольников.

Преимущества общего определения по сравнению с частными безусловны, однако надо сразу же учесть, что введение общего определения подобия должно повлечь за собой известные изменения в структуре курса и в способе изложения теоретического материала темы.

Так, например, при традиционной системе изложения (в учебнике Киселева) подобными многоугольниками по определению называются многоугольники, у которых соответственные углы (то есть внутренние углы многоугольников) равны и сходственные стороны пропорциональны.

Теперь же подобными многоугольниками по определению будут называться многоугольники, у которых установлено равенство каждых соответственных углов (то есть в том числе и углов, образованных сходственными диагоналями и вообще любыми сходственными отрезками), а пропорциональность установлена для всех пар сходственных отрезков (не только сторон).

Сказанное относится и к треугольникам; так что подобными по определению будут называться треугольники, у которых установлено равенство не только соответственных внутренних углов, но и углов, образованных, например, сходственными высотами со сходственными медианами и т. д., а пропорциональность установлена не только между сходственными сторонами, но и между сходственными сторонами и сходственными высотами, сходственными радиусами вписанных и описанных кругов и т. д.

Таким образом, те положения, которые раньше (в учебнике Киселева) являлись определениями подобных многоугольников (треугольников), окажутся теперь уже признаками подобия и будут подлежать доказательству.

С этим принципиальным отличием точек зрения учителю придется освоиться; не исключена возможность, что по традиции учитель иногда будет (на первых порах) сбиваться на традиционную точку зрения. Чтобы избежать этого, надо быть особенно внимательным к своей речи, к своим рассуждениям.

§ 13. Определение гомотетии. Построение подобных фигур. Связь гомотетии с подобием

После того как будет установлено определение подобных фигур, учитель показывает несколько плакатов, на которых изображены подобные треугольники, многоугольники и фигуры произвольной формы. Подобные фигуры на плакатах должны быть изображены в различных положениях, в том числе в таких, когда они являются не только подобными, но и гомотетичными. Здесь, естественно, возникнет вопрос о способе получения подобных фигур.

Учитель сообщает учащимся, что для получения фигуры, подобной данной, надо данную фигуру подвергнуть особому преобразованию, которое называется гомотетией или перспективно подобным преобразованием [1].

Определение гомотетии можно изложить или так, как оно изложено в учебнике Никитина и Фетисова (редакция изложения несколько изменена).

«Гомотетией называется преобразование фигуры F, выполняемое следующим образом:

1. Выбирается произвольная точка S.

2. Для каждой точки A данной фигуры F находится соответственная точка A' новой фигуры, лежащая на прямой SA и притом так, что отношение $\frac{SA'}{SA}$ равно определенному заданному числу k[2]. Совокупность точек A' дает новую фигуру».

Или так, как оно изложено в учебнике Глаголева.

«Подобным преобразованием (*гомотетией*) *называется следующее* построение. В плоскости данной фигуры выбирают произвольную точку и соединяют ее со всеми точками данной фигуры. Получают, таким образом, совокупность отрезков с общим началом. После этого удлиняют (или укорачивают) все эти отрезки в одно и то же число раз, то есть изменяют их в одном и том же отношении. Свободные концы этих измененных отрезков образуют новую фигуру.

Такой способ получения из данной фигуры новой и называется подобным преобразованием данной фигуры (или гомотетией)».

На наш взгляд в последнем определении можно было бы исключить слова «в одно и то же число раз, то есть изменяют их».

В курсе геометрии Богомолова гомотетия определяется так: «Определение 104. Пусть дана постоянная точка O (центр гомотетии или центр подобия) и постоянное положительное число κ, не равное 1 [3] (отношение подобия). Гомотетией называется пре-

---

[1] Если учитель располагает временем, то полезно напомнить учащимся о тех преобразованиях, с которыми они знакомились раньше. Сделать это можно так, как указано выше (см. § 11).

[2] κ может быть любым числом положительным или отрицательным, но не равным нулю ($\kappa \neq 0$). Этот случай исключается, так как при $\kappa = 0$ все отрезки SA' оказываются равными нулю, то есть данная фигура F преобразуется в точку S. Таким образом, свойства гомотетичных фигур при $\kappa = 0$ оказываются совершенно непохожими на свойства при всех других значениях κ.

[3] При $\kappa = 1$ получается $SA' = SA$; $SB' = SB$ и т. д., то есть точки A', B', C' и т. д. будут совпадать с точками A, B, C и т. д. В этом случае говорят, что фигура F преобразуется в себя. В некоторых курсах геометрии это преобразование не считается гомотетией, в других же оно считается особым случаем гомотетии и потому случай $\kappa = 1$ не исключается из рассмотрения.

образование, в силу которого любой точке M, отличной от O, соответствует такая точка M_1, лежащая на прямой OM, что $\frac{OM_1}{OM} = k$; точка O соответствует самой себе».

После определения гомотетии дается определение центра и коэффициента гомотетии. Например, центром гомотетии называется выбранная точка исхода отрезков; коэффициентом гомотетии — отношение, в котором изменяются все отрезки, то есть отношение измененного отрезка к первоначальному (Глаголев).

Устанавливается также определение гомотетичных фигур. В книге Ж. Адамара «Элементарная геометрия» (стр. 133) приводится такое определение: «фигура, гомотетичная какой-либо фигуре F, есть фигура, образованная совокупностью точек M', гомотетичных точкам, образующим фигуруF''» [1)].

Преобразовать гомотетией можно любые фигуры, как замкнутые, так и не замкнутые и даже отдельные точки, поэтому можно говорить, что точки A' и A гомотетичны друг другу.

Установив все приведенные выше определения, следует перейти к доказательству основной теоремы, устанавливающей зависимость между подобием фигур и гомотетией.

Теоремы. **Фигура F', полученная гомотетией из данной фигуры F, подобна ей.**

Для доказательства теоремы следует:

1. Преобразовать гомотетией данную фигуру F.

2. Доказать, что полученная фигура F' подобна фигуре F, то есть, что сходственные отрезки их пропорциональны, а соответственные углы равны.

Дано: F' гомотетична F.

Требуется доказать: $F' \sim F$.

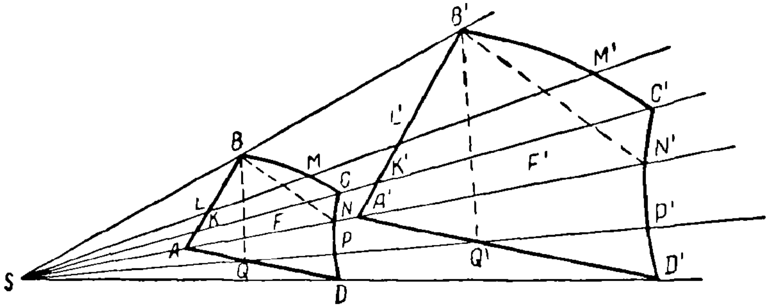
Доказательство. Пусть дана фигура F произвольной формы (черт. 12). Примем произвольную точку S за центр гомотетии и возьмем произвольное значение k — коэффициента гомотетии. (На чертеже он взят равным 2.)

Возьмем на фигуре F ряд точек: A, K, L, B, M, C, N, P, D, Q, и проведем лучи SA, SK, SL, SB ... и т. д. На луче SA отложим отрезок $SA' = k \cdot SA$, на луче SK — отрезок $SK' = k \cdot SK$, на луче SL — отрезок $SL' = k \cdot SL$, на луче SB — отрезок $SB' = k \cdot SB$ и т. д.

Соединяя полученные точки A', K', L', B' ... и т. д. последовательно линиями, похожими на соответствующие линии в фигуре F, получим фигуру $A'K'L'B'M'C'N'P'D'Q'$.

[1)] Конечно, подразумевается, что гомотетия всех точек рассматривается отнесенной к одному и тому же центру и при одном и том же коэффициенте гомотетии. Вообще, когда говорится о гомотетии отдельных элементов фигур, то, как правило, имеется в виду, что гомотетия рассматривается при одинаковых условиях, то есть при одном центре и при одинаковых значениях коэффициента гомотетии.

Точки A', K', L', B', ..., Q' будут указывать точное положение точек, гомотетичных точкам A, K, L, B, ..., Q данной фигуры F, а точки, лежащие на отрезках и дугах, последовательно соединяющих точки A', K', L', ..., Q', будут приближенно соответствовать точкам фигуры F'. Однако на каждом отрезке или дуге, которые соединяют соседние из взятых точек фигуры F, можно взять сколько угодно дополнительных точек и для каждой из них построить по принятому способу соответственные точки для получения фигуры F'. Это позволит уточнить рисунок искомой фигуры F'. Поступая таким образом, можно неограниченно увеличивать число точек, взятых для построения фигуры F'.



Черт. 12.

С точки зрения теории можно считать, что все точки данной фигуры F преобразуются в точки фигуры F' таким же образом, как преобразованы точка A в точку A', точка B в точку B', точка C в точку C', точка N в точку N' и т. д.

Докажем теперь, что при таком преобразовании фигуры F и F' будут подобны.

1) Каждой точке фигуры F соответствует одна и только одна точка фигуры F'. Точке A соответствует точка A', точке K — точка K', точке L — точка L' и т .д. (Верно и обратное утверждение: каждой точке фигуры F' соответствует одна и только одна точка фигуры F.) Следовательно, между точками обеих фигур можно установить взаимно однозначное соответствие.

2) Если проведем в фигуре F два произвольных отрезка, например отрезки BN и BQ, а в фигуре F' два отрезка, соответственные им, то есть отрезки $B'N'$ и $B'Q'$, то будем иметь: $\frac{SB'}{SB} = \frac{SQ'}{SQ} = k$ по построению и $BQ \parallel B'Q'$ по обратной теореме об отрезках на сторонах угла.

Точно так же получим: $BN \parallel B'N'$.

Следовательно, $\angle NBQ = \angle N'B'Q'$, то есть любые соответственные углы в фигурах F и F' равны.

3) Аналогичным образом из равенств $\frac{SB'}{SB} = \frac{SQ'}{SQ} = k$ получим $\frac{B'Q'}{BQ} = k$, то есть любые сходственные отрезки в фигурах F и F' пропорциональны.

Вывод. На основании определения подобных фигур устанавливаем, что фигуры F и F' подобны.

Теорема доказана, то есть установлено, что при помощи преобразования, выполненного указанным способом, получается фигура, подобная первоначальной.

Во время доказательства теоремы указывалось, что сходственные отрезки фигур F и F' параллельны. Это положение является свойством гомотетии.

Учащимся следует разъяснить, что гомотетичные фигуры обязательно обладают этим свойством, подобные же фигуры могут этим свойством обладать, но могут и не обладать.

Действительно, если построенную фигуру F' подвергнуть вращению вокруг какой-нибудь точки, то фигура останется подобной фигуре F, так как длины отрезков ни изменятся и, следовательно, сходственные отрезки останутся пропорциональными; не изменятся и углы и, следовательно, соответственные углы останутся равными.

Однако после проделанного вращения отрезки фигуры F' могут не быть параллельны сходственным отрезкам фигуры F, то есть фигуры не будут гомотетичны.

Учащиеся должны усвоить это различие между подобными и гомотетичными фигурами, то есть понимать, что гомотетичные фигуры не только подобны, но и специальным образом расположены друг относительно друга.

Ввиду особой важности доказанной теоремы необходимо закрепить знание и понимание ее, проделав для этого некоторое число упражнений на построение подобных фигур и практических работ.

Нам представляются полезными практические работы такого содержания: увеличение или уменьшение карты какой-нибудь страны или области, моря, реки; уменьшение или увеличение технического чертежа; изготовление плакатов по данному чертежу в книге; построение в натуральную величину выкройки одежды по уменьшенному изображению ее в альбоме и т. п. Таким образом, мы будем исходить из конкретной практической задачи и сразу же используем определение подобия во всей его общности.

Практика преподавания показывает, что эти работы заинтересовывают учащихся, и они выполняют их тщательно и с большой охотой, а это не может не оказать благотворного влияния на качество усвоения учащимися теоретического материала.

Немаловажное значение будет иметь и то обстоятельство, что учащиеся увидят необходимость выполнять преобразование фигуры произвольной формы при помощи преобразования большого числа ее точек. Это поможет учащимся впоследствии понять смысл теоремы о гомотетии отрезка и оценить эту теорему, которая иначе представляется им чисто формальной и ненужной.

В число упражнений вводятся и упражнения на построение подобных фигур при отрицательном значении коэффициента гомотетии.

Чтобы учащимся легче было запомнить, в каком случае коэффициент гомотетии принимается положительным и в каком отрицательным, можно обратить внимание на то, что положительный коэффициент берется тогда, когда направления отрезков, соединяющих центр гомотетии с точкой данной фигуры и с соответствующей ей точкой гомотетичной фигуры, одинаковы, а отрицательный — когда направления этих отрезков противоположны.

После этого на ряде примеров иллюстрируется гомотетия при различных положениях центра и различных значениях коэффициента гомотетии. Особо следует остановиться на случае, когда центром гомотетии является точка данной (преобразуемой) фигуры.

В этом случае данная точка будет гомотетична сама себе. Это положение не выводится из принятого общего определения гомотетии, поэтому нужно объяснить, что данное положение является дополнением к приведенному ранее определению гомотетии. Это дополнение можно сформулировать так: центр гомотетии преобразуется в себя.

§ 14. Гомотетия отрезка и треугольника

После выполнения ряда упражнений на преобразование фигур произвольной формы следует указать учащимся на то, что для преобразования прямолинейного отрезка достаточно выполнить преобразование только концов его и нет необходимости преобразовывать промежуточные точки, как это приходится делать при преобразовании дуг.

Очень вероятно, что подобную мысль в тот или иной момент выскажут сами учащиеся.

Развитие этой мысли, естественно, приводит к выводу, что преобразование таких фигур, как треугольники и многоугольники, может быть упрощено: именно, чтобы преобразовать многоугольник (треугольник), достаточно подвергнуть гомотетии только его вершины, так как, соединив полученные точки в последовательном порядке отрезками, получим многоугольник, гомотетичный данному.

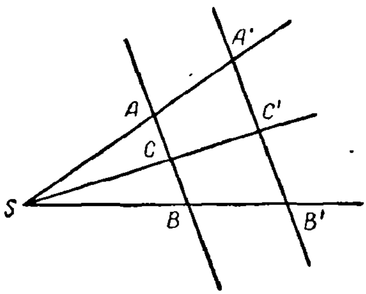
Однако, чтобы обосновать этот вывод, надо предварительно доказать теорему о гомотетии отрезка, то есть теорему о том, что гомотетия преобразует отрезок в отрезок.

Приступая к изложению теоремы, следует разъяснить учащимся, что, преобразовав две какие-нибудь точки прямой MN, например точки A и B в точки A' и B', мы не можем утверждать, не доказав этого, что все остальные точки прямой MN преобразуются в точки, лежащие на прямой $A'B'$. Можно предположить, что точки, гомотетичные точкам прямой MN, образуют не прямую, а какую-нибудь кривую или ломаную. Надо доказательством это предположение опровергнуть.

Теорема. **Гомотетия преобразует отрезок в отрезок.**

Чтобы доказать эту теорему, достаточно доказать, что точка C' гомотетичная любой точке C данного отрезка AB, лежит на отрезке, соединяющем точки A' и B', гомотетичные концам отрезка AB.

Теорему надо рассмотреть для двух случаев: первый случай, когда центр гомотетии расположен вне прямой AB; второй случай, когда центр гомотетии расположен на прямой AB.



Черт. 13.

Первый случай (черт. 13).

Дано: S — центр гомотетии, k — коэффициент гомотетии, отрезок AB.

A' гомотетична A,
B' » B,
C' » C.

Требуется доказать: C' лежит на отрезке $A'B'$. (черт. 13).

Доказательство.

$\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=k$ по условию.

$A'B' \parallel AB$ (1) по следствию из теоремы о пропорциональных отрезках (или по свойству гомотетии).

$$\frac{SA'}{SA}=\frac{SC'}{SC}=k,$$

$A'C' \parallel AC$, то есть

$A'C' \parallel AB$ (2).

Из (1) и (2) следует, что $A'C'$ и $A'B'$ составляют одну прямую (по аксиоме Евклида о параллельных), следовательно, C' лежит на прямой $A'B'$, а значит, и на отрезке $A'B'$, так как AC проходит внутри угла $A'SB'$.

Теорема для первого случая доказана.

Второй случай (черт. 14).

Дано: S — центр гомотетии, k — коэффициент гомотетии, отрезок AB.

A' гомотетична A,
B' » B,
C' » C.

Требуется доказать: C' лежит на отрезке $A'B'$.

Доказательство.

C лежит на прямой SA, следовательно,

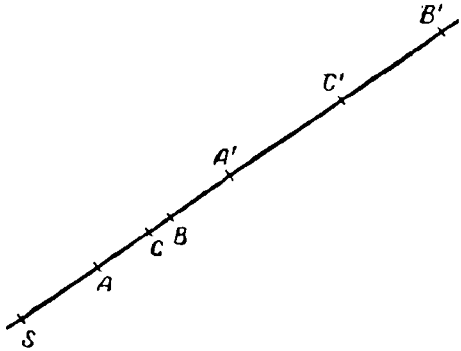
C' тоже лежит на прямой SA.

C находится между A и B, следовательно,

C' находится между A' и B' [1], то есть на отрезке $A'B'$.

Следствие. **Если концы одного отрезка гомотетичны концам другого, то отрезки гомотетичны.**

Раньше было доказано, что отношение гомотетичных отрезков равно коэффициенту гомотетии. Однако это доказательство проводилось для случая, когда гомотетичные отрезки параллельны друг другу, случай же, когда они расположены на одной прямой, был опущен. Между тем доказательство при таком расположении гомотетичных отрезков отличается некоторыми особенностями.



Черт. 14.

(Ниже оно приводится для сведения учителей.)

На чертеже 14 изображены гомотетичные отрезки $A'C'$ и AC; докажем, что их отношение равно $|k|$:

$$\frac{SC'}{SC}=\frac{SA'}{SA}, \text{ откуда } \frac{SC'}{SA'}=\frac{SC}{SA}.$$

Составляем производную пропорцию (отнимаем от обоих отношений по 1):

$$\frac{SC'-SA'}{SA'}=\frac{SC-SA}{SA} \text{ или } \frac{A'C'}{SA'}=\frac{AC}{SA}; \quad \frac{A'C'}{AC}=\frac{SA'}{SA}=k.$$

Доказанная теорема и следствие из нее позволяют установить весьма простые способы построения гомотетичных и тем самым подобных треугольников и многоугольников.

Переходим теперь к построению гомотетичных треугольников.

Первый способ построения гомотетичных, а значит и подобных треугольников.

Пусть дан треугольник ABC. Построим на сторонах AB и AC (черт. 15) точки B' и C', гомотетичные вершинам треугольника B и C, приняв вершину A за центр гомотетии и k за коэффициент гомотетии, причем $k>0$.

---

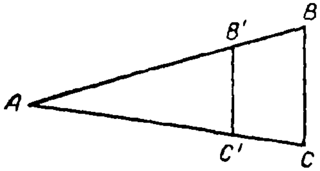
[1] Для сведения сообщается более строгое доказательство, что C' лежит между A' и B'.

$$SC'=|k|\cdot SC, \text{ но } SA<SC<SB, \text{ значит}$$
$$|k|\cdot SA<|k|\,SC<|k|\,SB \text{ или}$$
$$SA'<SC'<SB'.$$

Отрезок $B'C'$ отсечет от треугольника ABC треугольник $A'B'C'$, гомотетичный и подобный треугольнику ABC.

В самом деле, на основании следствия из теоремы о гомотетии отрезка заключаем, что отрезок $B'C'$ гомотетичен отрезку BC и аналогично отрезки AB' и AC' соответственно гомотетичны отрезкам AB и AC. Значит, треугольник $AB'C'$ является совокупностью точек, гомотетичных всем точкам треугольника ABC, то есть гомотетичен и подобен треугольнику ABC.

Для построения точек B' и C' удобно воспользоваться делительным циркулем.



Черт. 15.

Второй способ построения гомотетичных и подобных треугольников.

На стороне AB треугольника ABC берем произвольную точку B' и проводим отрезок $B'C'$, параллельный стороне BC (черт. 15). Отрезок $B'C'$ отсечет треугольник $AB'C'$, гомотетичный и подобный треугольнику ABC.

Действительно: $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ вследствие параллельности $B'C'$ и BC. Значит, вершины треугольников ABC и $AB'C'$ гомотетичны; из этого вытекает, что гомотетичны и стороны этих треугольников, а следовательно, гомотетичны и подобны сами треугольники.

§ 15. Признаки подобия треугольников

Мы знаем, что при помощи гомотетии получаются фигуры, в том числе и треугольники, подобные друг другу. Но мы знаем также (об этом говорилось выше на странице 115), что могут существовать фигуры не гомотетичные, но между тем подобные. Чтобы получить такие фигуры, достаточно, например, фигуру, гомотетичную данной, переместить по плоскости так, чтобы соответственные стороны их перестали быть параллельны. Фигуры перестанут быть гомотетичными, так как у гомотетичных фигур соответственные отрезки должны быть параллельны. Однако фигуры останутся подобными, потому что при неизменности установленного соответствия между точками фигур пропорциональность сходственных отрезков и равенство соответственных углов не нарушатся.

При изучении различных предметов (физики, механики, геометрии и т. д.) и при решении задач часто возникает потребность установить, подобны ли те или иные данные фигуры, которые при данном их расположении не являются гомотетичными и относительно которых не указано, что они получены из гомотетичных фигур путем перемещения.

Особенно часто такие вопросы возникают по отношению к треугольникам. Таким образом, возникает проблема установления признаков подобия треугольников.

Раньше чем приступить к доказательству теоремы о признаках подобия треугольников, полезно остановиться на выяснении понятия признака того или иного явления или события. Так, понижение столбика ртути в термометре является признаком понижения температуры воздуха, воды и т. п., учащение пульса — признаком повышения температуры тела и вместе с тем признаком вероятности заболевания.

В алгебре устанавливаются признаки невозможности деления одночленов, признаки невозможности извлечения точного квадратного корня из целого числа (например, цифра 7 на месте единиц) и т. п.

В арифметике известны признаки делимости, например, на 9, на 4 и т. п.

В геометрии выводятся признаки равенства треугольников, ибо, если бы мы проводили рассуждения об установлении равенства треугольников, основываясь только на определении, приходилось бы каждый раз производить наложение их друг на друга.

Наличие известных признаков равенства треугольников позволяет устанавливать равенство треугольников более простыми и удобными способами, так как доказано, что из равенства определенных элементов треугольников вытекает возможность совместить данные треугольники, то есть вытекает соблюдение всех условий, указанных в определении равенства фигур. Аналогична роль признаков подобия треугольников.

По определению две фигуры называются подобными, если они удовлетворяют следующим условиям:

1) Между всеми точками одной фигуры можно установить взаимно однозначное соответствие с точками другой фигуры.

2) Все сходственные отрезки фигур пропорциональны.

3) Все соответственные углы равны.

Если бы попытаться установить подобие двух треугольников непосредственно и только на основании приведенного определения, то сделать это было бы невозможно, так как нельзя проверить, например, пропорциональность всего бесконечного множества сходственных отрезков, которые можно провести в данных треугольниках.

Между тем при помощи теории можно получить очень удобные признаки подобия треугольников. Можно установить небольшое число условий, которым должны удовлетворять несколько определенных элементов данных треугольников, чтобы треугольники были подобны, то есть чтобы из соблюдения этих условий вытекало и соблюдение всех условий, приведенных в определении подобия фигур.

Формулировки признаков подобия, приведенные в различных учебниках, почти тождественны, но в доказательствах имеются отличия.

Во-первых, в учебниках Глаголева, Никитина и Фетисова изложение ведется в терминах, присущих гомотетии, во-вторых, в этих учебниках при доказательстве используются некоторые, установленные ранее свойства гомотетии и, в-третьих, по-разному выполняется вспомогательное построение, чем обусловливается различие в последовательности умозаключений.

В учебнике Киселева для доказательства всех признаков подобия на стороне большего треугольника откладывается отрезок, равный соответственной стороне меньшего, и затем проводится прямая, параллельная другой стороне; эта прямая отсекает от данного треугольника вспомогательный треугольник.

При таком вспомогательном построении доказательство подобия данных треугольников излагается в следующем порядке.

1) Устанавливается подобие вспомогательного треугольника и большего из данных.

2) Доказывается равенство вспомогательного треугольника и меньшего из данных.

3) Устанавливается подобие двух данных треугольников.

В общем следует признать, что доказательство теоремы о признаках подобия треугольников изложено в учебнике Киселева просто и ясно. Следует только вместо ссылки на лемму подобия внести указание о том, что при помощи вспомогательного построения получается треугольник, гомотетичный данному, а следовательно, и подобный ему. О лемме можно упомянуть как о следствии из признаков подобия.

В учебнике Глаголева доказательство признаков подобия излишне усложнено; идея же его состоит в том, что на двух сторонах одного из данных треугольников от одной из его вершины откладываются отрезки, равные соответственным сторонам другого треугольника, затем концы этих отрезков соединяются. (Если в условии имеется указание о равенстве углов в данных треугольниках, то отрезки откладываются от вершины одного из этих углов.)

Доказательство, основанное на этом способе построения, можно изложить гораздо проще, чем оно изложено в учебнике Глаголева, и особенно просто для второго и третьего признаков подобия. Последовательность изложения доказательства будет следующей:

1) Устанавливается равенство вспомогательного треугольника и одного из данных.

2) Доказывается подобие вспомогательного треугольника и другого из данных.

3) Устанавливается подобие обоих данных треугольников.

Ниже приводится схематическое изложение доказательства признаков подобия треугольников по плану, принятому в учебнике Глаголева.

Первый признак подобия.

Дано: $\angle A = \angle A'$; $\angle C = \angle C'$ (черт. 16).

Требуется доказать: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Доказательство.

1) Вспомогательное построение: $CM = C'A'$; $CN = C'B'$; MN.

2) $\triangle CMN = \triangle C'A'B'$, так как равны две стороны и угол между ними.

3) $\angle CNM = \angle C'B'A'$.

4) $MN \parallel AB$.

5) $\triangle CMN \sim \triangle CAB$ и, следовательно, $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

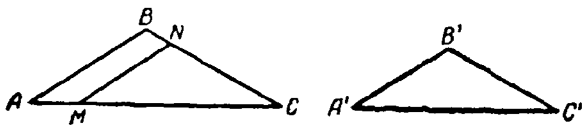
Второй признак подобия.

Дано: $\angle C = \angle C'$; $\frac{C'B'}{CB} = \frac{C'A'}{CA} = k$ (черт. 16).

Требуется доказать: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Доказательство.

1) Вспомогательное построение такое же, как при доказательстве первого признака, то есть $CM = C'A'$ и $CN = C'B'$; MN.



Черт. 16.

2) $\triangle CMN = \triangle C'A'B'$, так как равны две стороны и угол между ними.

3) $\frac{CN}{CB} = \frac{CM}{CA} = k$, так как $CN = C'B'$ и $CM = C'A'$ по построению.

4) $\triangle CMN \sim \triangle CAB$, следовательно, $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Третий признак подобия.

Дано: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'B'}{CB} = \frac{C'A'}{CA} = k$.

Требуется доказать: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Доказательство.

1) Вспомогательное построение такое же, как при доказательстве первого признака, то есть $CM = C'A'$, $CN = C'B'$ и MN.

2) $\frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB} = k$.

3) $MN \parallel AB$ по следствию из теоремы о пропорциональных отрезках.

4) $\frac{MN}{AB} = k$; $MN = k \cdot AB$; $MN = A'B'$.

5) $\triangle A'B'C' = \triangle CMN$ по равенству трех сторон.

6) $\triangle CMN \sim \triangle ABC$, следовательно, $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

В учебниках подробное изложение каждого признака подобия треугольников заканчивается выводом о том, что, с одной стороны, вспомогательный треугольник CMN подобен данному треугольнику CAB, с другой же стороны, вспомогательный треугольник CMN равен треугольнику $C'A'B'$, и далее говорится:

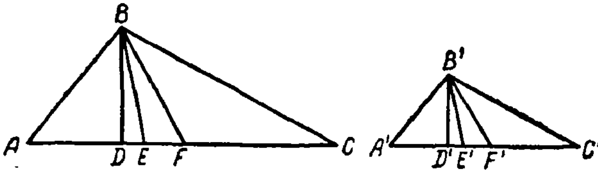
«Отсюда на основании общих свойств подобия получается, что $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$». Это последнее утверждение надо разъяснить, иначе оно будет учащимися формально заучиваться и может быть даже неправильно, с точки зрения принятого в учебнике определения подобия, пониматься.

Наиболее понятным представляется для учащихся следующее разъяснение (черт. 16).

Раз доказано, что треугольники $A'B'C'$ и MNC равны, то, значит, треугольник $A'B'C'$ можно наложить на треугольник MNC так, что они совместятся. Из этого следует, что сходственные стороны и отрезки и соответственные углы этих треугольников равны. Но треугольники MNC и ABC подобны, то есть их сходственные стороны и отрезки пропорциональны, а соответственные углы равны, значит, и у треугольников $A'B'C'$ и ABC сходственные стороны и отрезки пропорциональны, а соответственные углы равны, то есть треугольники $A'B'C'$ и ABC подобны.

§ 16. Решение задач

В качестве задач на доказательство полезно разобрать предложения о пропорциональности высот, медиан и биссектрис в подобных треугольниках.



Черт. 17.

Доказать, что в подобных треугольниках соответственные высоты, медианы и биссектрисы пропорциональны сходственным сторонам.

Пусть $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (черт. 17), BD и $B'D'$ — соответственные высоты, BE и $B'E'$ — соответственные биссектрисы, BF и $B'F'$ — соответственные медианы.

Доказательство.

1) $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$, следовательно, $\frac{BD}{B'D'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = k$.

2) $\triangle ABE \sim \triangle A'B'E'$ ($\angle A = \angle A'$; $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABC$; $\angle A'B'E' = \frac{1}{2}\angle A'B'C'$ и, следовательно, $\angle ABE = \angle A'B'E'$).

Из подобия треугольников $\frac{BE}{B'E'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = k$.

3) $\triangle ABF \sim \triangle A'B'F'$ $\left(\angle A = \angle A';\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}A'C'} = \frac{AF}{A'F'}\right)$. Из подобия треугольников $\frac{BF}{B'F'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = k.$

Подобным же образом доказываются предложения о том, что в подобных треугольниках радиусы описанных и вписанных кругов пропорциональны сходственным сторонам.

В качестве задач на построение можно рекомендовать следующие задачи.

Построить треугольник ABC, если даны[1]:

1. $\angle A$, $\angle B$, l_c; l_c — биссектриса угла треугольника ABC;
2. $\angle A$, $\angle B$, h_c; h_c высота треугольника ABC, опущенная на сторону AB;
3. $\angle A$, $\angle B$, r.
4. $\angle C$, m_a, $BC : AC$; m_a медиана треугольника ABC, проведенная к стороне BC.
5. $\angle C$, l_A, $BC : AC$.

6*. $m_a : m_c$, c, $\delta = \angle (m_a, m_c)$.

7*. $h_c : l_c$; $\angle A$, m_c.

Ниже приводится примерный образец решения одной из подобных задач.

Задача. Построить треугольник по углу, отношению сторон, между которыми находится этот угол, и медиане, проходящей через вершину данного угла.

Дано: 1) Угол α при одной из вершин искомого треугольника, например при вершине A (черт. 18,*а*).

2) Отрезки p и q, отношение которых равно отношению сторон искомого треугольника (черт. 18,*б*). (Отношение сторон треугольника может быть задано числом, например $\frac{3}{4}$.)

3) Отрезок m_a, которому должна быть равна медиана искомого треугольника (черт. 18,*с*).

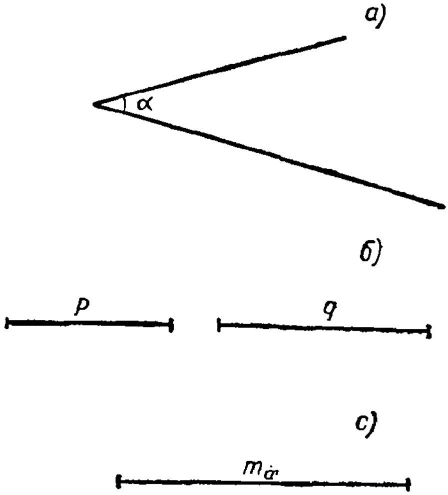
Анализ. Отбросив условие о длине медианы, мы сможем построить один из треугольников, отвечающих оставшимся требованиям, так как сможем построить данный угол и на его сторонах отложить от вершины данные отрезки p и q, концы этих отрезков соединить.

---

[1] Приведенные задачи взяты из учебника Глаголева (Упражнения к главе ..стой).

* Задачи, отмеченные звездочкой, труднее предыдущих задач, особенно в отношении доказательства и исследования.

Построив этот вспомогательный треугольник, сможем провести медиану из вершины A. Как правило, эта медиана не будет равна отрезку m_a и потому полученный треугольник не будет искомым.



Черт. 18.

Но мы сможем с помощью гомотетии преобразовать полученный вспомогательный треугольник в искомый.

Построение.

1) Строим угол A, равный α (черт. 19).

2) Откладываем $AB' = p$ и $AC' = q$ (на сторонах угла A).

3) Проводим $B'C'$.

4) Строим точку D', делящую пополам $B'C'$.

5) Подвергаем $\triangle AB'C'$ гомотетии, приняв точку A за центр гомотетии, а отношение $\frac{m_a}{AD'}$ за коэффициент гомотетии, для чего откладываем на AD' отрезок $AD = m_a$ и проводим через точку D прямую $BC \parallel B'C'$. Треугольник ABC — искомый.

Доказательство.

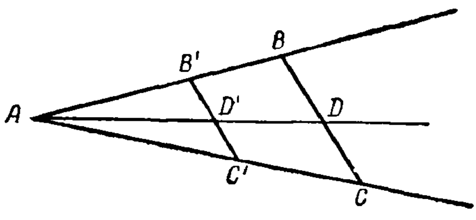
1) Треугольник ABC гомотетичен треугольнику $A'B'C'$ по построению.

Поэтому $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$ или $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{p}{q}$.

2) $\angle BAC = \alpha$ по построению.

3) $\frac{BD}{B'D'} = \frac{DC}{D'C'}$, но $B'D' = D'C'$, следовательно, $BD = DC$.

Значит AD — медиана треугольника ABC. По построению она равна данному отрезку m_a.



Черт. 19.

Исследование.

Задача возможна при любых значениях данных ($\alpha < 180°$) и имеет одно решение.

(Изложение анализа задачи в письменной форме, а в тех случаях, когда решение задачи не вызывает затруднений и в устной форме, не обязательно.)

В качестве задач на вычисление следует использовать задачи из «Сборника задач по геометрии», ч. I, Рыбкина (§ 9, № 1—54).

Для устного решения целесообразно параллельно решать задачи такого типа:

Узнать, подобны ли треугольники, если:

1) углы одного треугольника 40° и 60°, а другого 80° и 60°.

2) » » » 37° 30′ и 102° 15′, а другого 40° 15′ и 37° 30′.

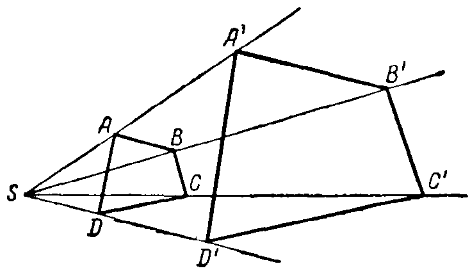
§ 17. Гомотетия многоугольников. Построение гомотетичных многоугольников

На основании теоремы о гомотетии отрезка и следствии из нее легко доказывается следующая теорема, имеющая важное значение как для теории, так и для решения многих задач.

Теорема. **Если вершины одного многоугольника соответственно гомотетичны вершинам другого, то гомотетичны и сами многоугольники.**

Дано: многоугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ (черт. 20); вершины A', B', C', D' соответственно гомотетичны вершинам A, B, C, D.

Требуется доказать, что многоугольник $A'B'C'D'$ гомотетичен многоугольнику $ABCD$.



Черт. 20.

Доказательство. Если точки A' и B' гомотетичны точкам A и B, то сторона $A'B'$ одного многоугольника гомотетична стороне AB другого.

Так же устанавливаем гомотетичность сторон $B'C'$, $C'D'$ и $D'A'$ сторонам BC, CD и DA.

Значит, многоугольник $A'B'C'D'$ представляет собой совокупность точек, гомотетичных всем точкам многоугольника $ABCD$, то есть гомотетичен многоугольнику $ABCD$.

Доказанная теорема дает возможность обосновать следующие два способа построения гомотетичных многоугольников.

Первый способ. Пусть дан многоугольник $ABCD$ и требуется построить многоугольник, гомотетичный ему при некотором (произвольном) положении центра гомотетии S и некотором (произвольном) значении коэффициента гомотетии k.

Преобразуем гомотетией только вершины A, B, C, D данного многоугольника и полученные точки A', B', C', D' соединим последовательно прямолинейными отрезками.

Легко доказать, что полученный многоугольник $A'B'C'D'$ будет гомотетичен данному многоугольнику $ABCD$.

В самом деле, точка A преобразуется гомотетией в точку A', а точка B — в точку B', следовательно, по теореме о гомотетии прямой прямая AB преобразуется в прямую $A'B'$, отрезок AB — в отрезок $A'B'$. Это означает, что любая точка стороны AB многоугольника $ABCD$ преобразуется в точку, лежащую на соответственной стороне $A'B'$ многоугольника $A'B'C'D'$.

Приведенное рассуждение можно повторить для точек, лежащих на всех остальных сторонах многоугольников, поэтому можно утверждать, что *каждая точка одного многоугольника* преобразуется в точку другого многоугольника, лежащую на соответственной стороне, а это и означает, что многоугольники гомотетичны.

Второй способ. Пусть дан многоугольник $ABCD$ и требуется построить многоугольник, гомотетичный ему при некотором (произвольном) положении центра гомотетии S и некотором (произвольном) значении коэффициента гомотетии k (черт. 20).

Преобразуем гомотетией только одну какую-нибудь вершину многоугольника $ABCD$, например вершину A. Получим точку A'. Затем проведем лучи SB, SC и SD и между ними проведем последовательно один за другим отрезки $A'B' \parallel AB$; $B'C' \parallel BC$; $C'D' \parallel CD$. Наконец, проведем отрезок $D'A'$.

Полученный многоугольник $A'B'C'D'$ будет гомотетичен данному многоугольнику $ABCD$.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{SA'}{SA} = k \\ A'B' \parallel AB \end{array}\right\} \longleftarrow \text{по построению.}$$

Следовательно, $\dfrac{SB'}{SB} = k$ по теореме об отрезках на сторонах угла. Значит, по теореме о гомотетии прямой отрезок $A'B'$ гомотетичен отрезку AB. Таким же образом доказывается, что отрезок $B'C'$ гомотетичен отрезку BC, отрезок $C'D'$ гомотетичен отрезку CD.

Гомотетичность отрезков $D'A'$ и DA вытекает из того, что $\dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{SA'}{SA} = k$.

(Из этого же вытекает и параллельность отрезков $D'A'$ и DA.) Таким образом, гомотетичность полученного многоугольника $A'B'C'D'$ многоугольнику $ABCD$ доказана.

Задачи для упражнений в применении доказанной теоремы и приведенных способов построения гомотетичных многоугольников можно взять из учебника геометрии Глаголева, упражнения к гл. VI, № 24—34.

В первую очередь можно рекомендовать решение следующих задач:

Построить параллелограмм $ABCD$ ($AD \parallel BC$), если даны:

1. $AB : AD$; $\angle A$; AC.
2. $AC : BD$; $\angle(AC,\ BD)$; h_{AD}.
3. AD; $AC : BD$; $\angle(AC,\ BD)$.

Построить трапецию $ABCD$ ($AD \parallel BC$), если даны:

1. AD; $\angle A$; $BC:AB$; $AB=CD$.
2. $BC:AD$; $\angle A$; $\angle D$; h_{AD}.
3. $AD:AB$; $\angle A$; $\angle D$; $\frac{AD+BC}{2}$.

§ 18. Признак подобия многоугольников

Раньше всего следует напомнить учащимся, в чем заключалась основная идея применяемого ранее способа доказательства признаков подобия треугольников. Для доказательства признаков подобия треугольников мы строили вспомогательный треугольник, гомотетичный одному из данных и равный другому, так как после этого легко было доказать подобие данных треугольников.

Аналогичный прием можно применить и для доказательства теоремы, устанавливающей признак подобия многоугольников.

Теорема. **Два одноименных многоугольника подобны, если соответственные углы их равны, а сходственные стороны пропорциональны.**

При изложении этой теоремы придется раньше всего изобразить два подобных многоугольника $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$, которые, однако, в общем случае не должны быть гомотетичными друг другу. Изображение таких многоугольников на доске иногда вызывает затруднения, так как желательно начертить эти многоугольники в произвольном положении, то есть так, чтобы сходственные стороны их не были параллельны друг другу, но чтобы сами мноугольники были «похожи» друг на друга, то есть производили впечатление подобных. Это нелегко удается. Чтобы избежать затруднений, полезно иметь шаблоны, сделанные из картона или фанеры, и, пользуясь ими, выполнять чертежи. Таким образом, будут соблюдены и произвольность расположения подобных многоугольников и сравнительная правильность (наглядность) чертежа. Доказательство теоремы по идее просто, но несколько длинно.

Ниже это доказательство приводится в достаточно развернутом виде. (Для ориентировки учителя.)

Вся идея доказательства сводится к тому, что, построив вспомогательный многоугольник $A_2B_2C_2D_2E_2$, гомотетичный многоугольнику $ABCDE$ и равный $A_1B_1C_1D_1E_1$ устанавливаем подобие многоугольников $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$.

Дано: многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (черт. 21). $\angle A_1=\angle A$; $\angle B_1=\angle B$; $\angle C_1=\angle C$; $\angle D_1=\angle D$; $\angle E_1=\angle E$. $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{E_1A_1}{EA}=k$, то есть $A_1B_1=k\cdot AB$; $B_1C_1=$ $=k\cdot BC$ и т. д.

Требуется доказать: $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$.

Доказательство.

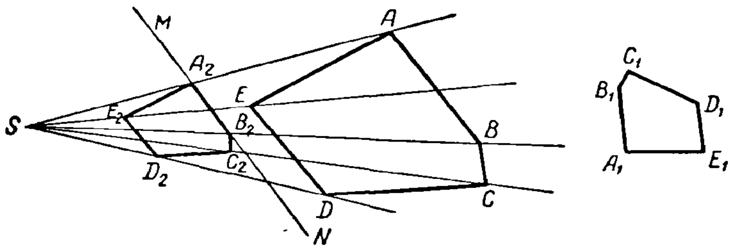
1) Берем на плоскости произвольную точку S и принимаем ее за центр гомотетии. (За центр гомотетии можно взять и вершину многоугольника.)

2) Из этой точки проводим лучи во все вершины многоугольника $ABCDE$.

3) Между лучами, соединяющими соседние вершины многоугольника, например между лучами SA и SB, помещаем отрезок A_2B_2, равный стороне A_1B_1 и параллельный стороне AB.

4) Проводим прямые $B_2C_2 \parallel BC$; $C_2D_2 \parallel CD$; $D_2E_2 \parallel DE$ и, наконец, соединяем E_2 и A_2.

5) Многоугольники $A_2B_2C_2D_2E_2$ и $ABCDE$ гомотетичны по построению (см. второй способ построения гомотетичных многоугольников), а следовательно, и подобны друг другу.



Черт. 21.

6) Доказываем равенство многоугольников $A_2B_2C_2D_2E_2$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$:

$\angle A_2 = \angle A$, следовательно, $\angle A_2 = \angle A_1$,

$\angle B_2 = \angle B$, следовательно, $\angle B_2 = \angle B_1$ и т. д.

$\frac{A_2B_2}{AB} = \frac{A_1B_1}{AB} = k$, так как $A_2B_2 = A_1B_1$ по построению.

$\frac{B_2C_2}{BC} = k$, так как многоугольники $A_2B_2C_2D_2E_2$ и $ABCDE$ гомотетичны.

Значит, $B_2C_2 = k \cdot BC = B_1C_1$.

Таким же образом доказываем, что $C_2D_2 = C_1D_1$; $D_2E_2 = D_1E_1$; $E_2A_2 = E_1A_1$. Заключаем, что у многоугольников $A_2B_2C_2D_2E_2$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ соответственные углы и сходственные стороны равны.

Легко доказать, что в таком случае многоугольники могут быть совмещены.

Из этого вытекает, что многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$, как и многоугольник $A_2B_2C_2D_2E_2$, подобен многоугольнику $ABCDE$.

Построение многоугольника $A_2B_2C_2D_2E_2$ возможно выполнить несколько иначе, именно провести в плоскости многоугольника $ABCDE$ прямую MN (черт. 21), параллельную какой-нибудь стороне этого многоугольника, например стороне AB, и на ней в произвольном месте построить отрезок A_2B_2, равный стороне

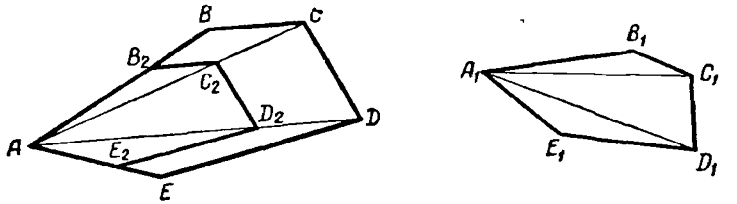
A_1B_1[1]. Затем провести прямые AA_2 и BB_2 и точку их пересечения принять за центр гомотетии.

Дальнейшее построение и ход доказательства не отличаются от изложенных выше.

§ 19. Свойства подобных многоугольников

Теорема. **Если два многоугольника подобны, то их можно разбить на одинаковое число соответственно подобных и одинаково расположенных треугольников.**

Пусть многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ подобны (черт. 22). Разобьем многоугольник $ABCDE$ диагоналями AC и AD на треугольники ABC, ACD и ADE, а многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$ — соответственными диагоналями A_1C_1 и A_1D_1 на треугольники



Черт. 22.

$A_1B_1C_1$; $A_1C_1D_1$ и $A_1D_1E_1$. Требуется доказать подобие каждой пары соответственных треугольников, то есть доказать, что $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$; $\triangle ACD \backsim \triangle A_1C_1D_1$ и $\triangle ADE \backsim \triangle A_1D_1E_1$.

Теорема (обратная). **Если два многоугольника можно разбить на одинаковое число подобных и одинаково расположенных треугольников, то такие многоугольники подобны.**

Пусть нам даны два многоугольника $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$, которые, например, диагоналями, проведенными из соответственных вершин A и A_1, разбиваются на соответственно подобные треугольники (черт 22). $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$; $\triangle ACD \backsim \triangle A_1C_1D_1$; $\triangle ADE \backsim \triangle A_1D_1E_1$.

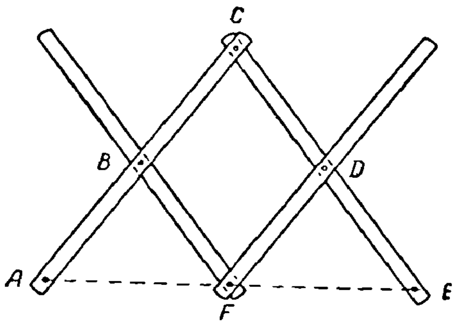
Надо доказать, что в таком случае подобными будут и сами многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$.

Для доказательства отложим на AB отрезок AB_2, равный A_1B_1, и, приняв точку A за центр гомотетии, построим многоугольник $AB_2C_2D_2E_2$, гомотетичный многоугольнику $ABCDE$. Следовательно, будем иметь $AB_2C_2D_2E_2 \backsim ABCDE$ при коэффициенте гомотетии k. Теперь надо доказать равенство многоугольников $AB_2C_2D_2E_2$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$.

---

[1] Отрезок A_2B_2 может иметь направление как одинаковое с направлением стороны AB, так и противоположное, но для упрощения доказательства следует построить его так, чтобы он был направлен одинаково со стороной AB.

Совершенно необходимо, чтобы каждый учащийся самостоятельно, то есть своими руками, проделал ряд работ при помощи пантографа. Для этого в школе (в математическом кабинете) должны быть несколько классных пантографов, но, кроме того, весьма желательно, чтобы у каждого учащегося был еще и индивидуальный (возможно, собственный) пантограф упрощенной конструкции. Изготовить классные пантографы, если школе не удастся их приобрести в магазинах наглядных пособий, может любая даже кустарная столярная мастерская, в том числе и школьная.



Черт. 23.

Очень просты по конструкции так называемые школьные пантографы (черт. 23).

Планки AC и EC (из алюминия или деревянные) имеют между собой шарнирное соединение в точке C. Такие же планки BF и DF имеют между собой шарнирное соединение в точке F. Кроме того, шарнирные соединения в точках B и D. Точки B, C, D и F расположены на планках так, что $CD = BF$ и $BC = DF$; поэтому $BCDF$ — параллелограмм и остается параллелограммом при вращении планок вокруг центров B, C, D и F и вращении всего параллелограмма вокруг центра A.

В точке A помещена игла, эта игла втыкается в доску, к которой прикреплен чертеж данной фигуры. В точке F — штифт, который надо двигать по контуру данной фигуры. В точке E — карандаш, описывающий некоторую фигуру, которая оказывается гомотетичной данной. Чтобы доказать это, надо доказать, что точки A, F и E все время лежат на одной прямой и $\frac{AE}{AF} = k$ (const). На нашем чертеже $CD = DE$ и $CB = AB$, поэтому $CE : CD = 2$, но $CD = BF$, значит, $CE : BF = 2$.

Точно так же $AC : AB = 2$. Проведем прямую AF и предположим, что E не лежит на AF. Обозначим через E_1 точку пересечения AF и CD, тогда $CE_1 : BF = AC : AB = 2$, значит $CE_1 = CE$, то есть точка E_1 совпадает с E и, следовательно, A, F и E лежат на одной прямой все время, кроме того, все время $\frac{AE}{AF} = 2$.

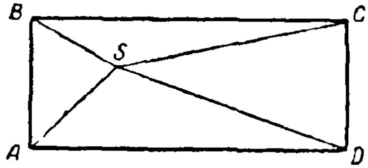
Это и доказывает, что карандаш в точке E описывает фигуру, гомотетичную данной фигуре, которую обводит штифт F. Центр гомотетии — точка A, коэффициент гомотетии $k = 2$.

Коэффициент гомотетии можно изменить, переместив шарнирные соединения планок. Например, поместив шарнир B' в середине отрезка BC, а шарнир D' в середине отрезка DE, получим гомотетию с $k = \frac{4}{3}$.

Кроме того, можно поменять местами карандаш и штифт, тогда получим $k = \frac{1}{2}$ или $k = \frac{3}{4}$ и т. д.

Надо иметь в виду, что теория устройства и действия пантографа не представляется учащимся простой, а потому учитель, который попытается излагать ее до того, как учащиеся научатся практически пользоваться пантографом, встретится с серьезными затруднениями. Изложение теории займет много времени и не все учащиеся усвоят теорию с полным пониманием. Еще хуже, если изучение пантографа будет проводиться «меловым способом», то есть без показа самого пантографа и его использования на работе.

2. *Мензульная съемка.* Практическая работа по мензульной съемке должна быть подготовлена в классе. Учащимся должна быть изложена идея такой съемки плана. Очень подробно о подготовке учащихся к практической работе по мензульной съемке говорится в книге Д. М. Смычникова «Измерительные работы на местности», Учпедгиз, 1953.



Черт. 24.

Совершенно правильно автор предлагает начать объяснение с показа, как можно на классной доске по идее мензульной съемки получить план самой доски.

Мы рекомендовали бы только при объяснении пользоваться терминами, употреблявшимися при изучении гомотетии. Именно, говорить так:

Чтобы получить план доски в масштабе 1 : 10, надо четырехугольник $ABCD$ (черт. 24), представляющий собой доску, подвергнуть гомотетии при коэффициенте гомотетии $k = 0{,}1$.

Для этого в первую очередь надо выбрать центр гомотетии. При мензульной съемке за центр гомотетии берут обычно точку, расположенную внутри контура той фигуры, которую снимают на план. Пусть центром гомотетии будет точка S; эта точка при съемке плана называется точкой стояния. Из точки S проводим лучи SA, SB, SC, SD. (Эти лучи можно чертить не полностью, а только на столько, чтобы на них уместились десятые доли отрезков SA, SB, SC и SD.) Затем измеряем расстояния SA, SB, SC и SD, уменьшаем полученные длины в 10 раз и откладываем их на соответствующих лучах от точки S.

Получаем вершины A', B', C', D', соответственно гомотетичные вершинам A, B, C, D. Из этого следует, что четырехугольник $A'B'C'D'$ гомотетичен четырехугольнику $ABCD$, то есть мы получили план доски в масштабе 1 : 10.

Учащиеся могут предложить применить второй из ранее разобранных способов получения гомотетичных многоугольников, именно способ, заключающийся в проведении параллельных прямых. Надо разъяснить учащимся, что при работах на местности проведение параллельных прямых является работой сложной, а потому на практике предпочитают применять способ, описанный выше, то есть способ, основанный на идее мензульной съемки. Попытки произвести мензульную съемку в классной обстановке при помощи всех необходимых инструментов и операций обычно не дают хороших результатов: учащиеся плохо видят процесс получения плана на планшете, измерениям мешают парты, сидящие на них учащиеся и т. п., поэтому в классе можно ограничиться съемкой плана доски и плана какого-нибудь полигона (многоугольника), изображенного на доске. Съемку этого плана можно осуществлять уже не на доске, а на листе бумаги, так прикрепленном к доске, что на нем окажется «точка стояния». Этот лист бумаги будет играть роль планшета, на котором и получится план данного полигона.

После проведения этой работы следует демонстрировать в классе мензулу со всеми необходимыми приспособлениями и, основываясь на опыте проделанной работы, объяснить учащимся, что для мензульной съемки плана полигона $ABCDE...$ данного на местности, необходимо проделать следующее:

1) Отметить на планшете точку стояния S.

2) Ориентировать планшет. (Указать на нем направление с юга на север.)

3) Визировать направления от точки стояния S на вершины полигона и прочертить эти направления на планшете.

4) Измерить расстояния от точки стояния до вершин полигона, то есть расстояния SA, SB, SC и т. д.

5) Умножить полученные длины на коэффициент гомотетии, то есть на величину масштаба плана, и получить отрезки $SA' = SA \cdot k$; $SB' = SB \cdot k$; $SC' = SC \cdot k$ и т. д.

6) Отложить от точки стояния S на прочерченных на планшете линиях отрезки SA', SB', SC' и т. д.

7) Соединить в последовательном порядке концы полученных отрезков, то есть точки A', B', C' и т. д. Полученный, таким образом, многоугольник $A'B'C'D'E'...$ будет гомотетичен данному полигону, следовательно, он и явится планом данного полигона, вычерченным в масштабе $1:10$ (если положить $k = 0{,}1$).

Не следует удлинять промежуток времени между самой мензульной съемкой на местности и подготовительной работой к ней, проводимой в классе. Мензульную съемку можно проводить не только на пришкольном участке, а, например, в физкультурном зале или в коридоре.

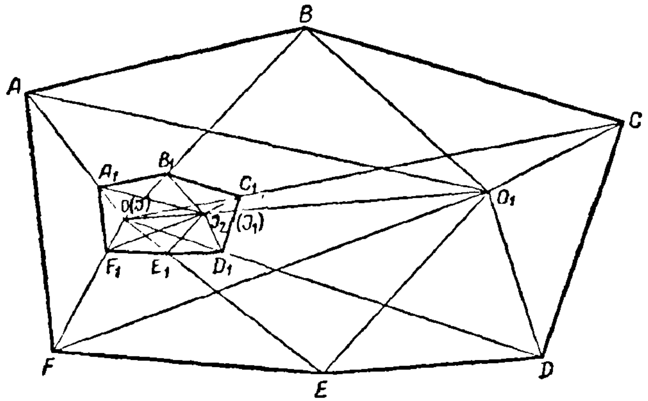
Можно рекомендовать проведение мензульной съемки земельного участка при помощи двух точек стояния.

Эта работа, требующая минимального числа измерений, отличается сравнительно большой насыщенностью математическим содержанием, но довольно трудна для учащихся и поэтому обязательной ее считать не следует.

Пусть требуется снять план земельного участка, имеющего форму многоугольника $ABCDEF$ (черт. 25).

Наметим внутри участка (полигона) точки стояния O и O_1 и измерим расстояние между ними, то есть расстояние OO_1.

Поместим мензулу сначала в точке O и ориентируем планшет по компасу. Затем отметим на планшете точку I, соответственную точке O[1]), и прочертим на планшете направления на все вершины



Черт. 25.

полигона и на точку O_1. На прямой OO_1 отложим отрезок II_1, показывающий в соответствующем масштабе длину расстояния OO_1. $II_1 = OO_1 \cdot k$, где k масштаб, например: $k = 1:100$. Точка I_1 будет соответствовать точке O_1, то есть второй точке стояния.

Перенесем после этого мензулу в точку O_1, восстановим ориентировку планшета (например, по направлению на точку O) и прочертим на планшете направления из точки I_1 на все вершины полигона.

Точка пересечения линий, прочерченных из точек I и I_1 по направлению к какой-нибудь вершине полигона, например к вершине A, даст точку A_1, которая явится изображением на плане точки A. Таким же образом получим точку B_1 — изображение на плане точки B и т. д.

Планом земельного участка $ABCDEF$ окажется полученный на планшете многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, подобный многоугольнику $ABCDEF$.

---

[1]) Пока на планшете еще ничего не начерчено, точку I берем на нем произвольно, учитывая только, чтобы на планшете поместился весь план участка.

Чтобы доказать подобие многоугольников, поместим ориентированную мензулу в точку стояния O. Тогда точка I совпадет с точкой O, а точка I_1 примет положение I_2.

В этом случае направление, прочерченное на планшете от точки I к точке A, совпадет с направлением от точки стояния O к точке A; направление же, прочерченное на планшете от точки I_1, будет параллельно направлению от второй точки стояния O_1 к точке A ($I_2A_1 \parallel O_1A$), так как планшет перенесен с сохранением ориентировки.

$\triangle OA_1I_2 \sim \triangle OAO_1$, следовательно, $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OI_2}{OO_1}$, но $OI_2 = II_1$, поэтому $\frac{OA_1}{OA} = \frac{II_1}{OO_1} = k$.

Точно так же $\triangle OD_1I_2 \sim \triangle ODO_1$, следовательно,

$$\frac{OD_1}{OD} = \frac{OI_2}{OO_1} \text{ или } \frac{OD_1}{OD} = \frac{II_1}{OO_1} = k.$$

Таким же образом докажем: $\frac{OB_1}{OB} = \frac{OC_1}{OC} = \frac{OE_1}{OE} = \frac{OF_1}{OF} = k.$

Это показывает, что вершины многоугольника $ABCDEF$ гомотетичны вершинам многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, следовательно, гомотетичны (а значит, и подобны) сами многоугольники. Из этого следует, что многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ является планом, снятым с участка $ABCDEF$ при данном масштабе k.

§ 21. Гомотетия окружностей

Вопрос об изучении в средней школе гомотетии окружностей нельзя считать вполне разрешенным новой программой.

В программе, строго говоря, нет пункта о гомотетии окружностей, но имеется пункт «Построение подобных фигур», поставленный после пунктов о признаках подобия треугольников, о подобных многоугольниках и об отношении их периметров. Употребление в этом пункте слов «подобные фигуры» вместо «подобные треугольники» и «подобные многоугольники» указывает, по-видимому, на необходимость более общего понимания понятия подобия, а значит и понятия гомотетии. Подобное же указание можно усмотреть и в объяснительной записке к программе.

Таким образом, естественно полагать, что после изучения гомотетии многоугольников уместно ознакомить учащихся с обобщением понятия гомотетии на другие фигуры. С этой целью целесообразнее всего остановиться на изучении гомотетии окружностей.

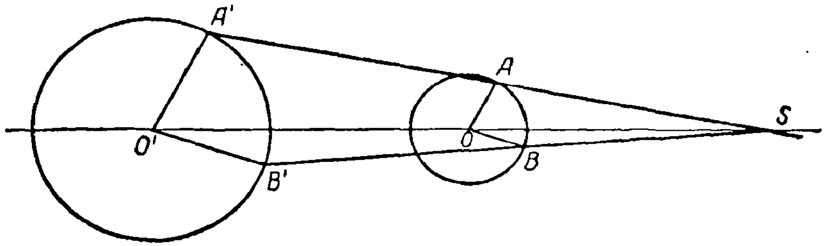
В учебниках этот вопрос изложен слишком сжато и схематично, преподносить его учащимся в классе в таком виде нельзя: учащимся будет очень трудно понять его, а значит, и усвоить.

Необходимо изложение развить, в частности дополнить доказательством положений о том, что: 1) центр гомотетии окружностей находится на линии их центров, 2) абсолютная величина коэффициента гомотетии равна отношению радиусов данных окружностей.

Пусть имеются окружности с центрами в точках O и O' и радиусами r и R, причем $r \neq R$ (черт. 26).

Будем считать соответственными точками точки O и O', тогда центр гомотетии будет находиться на прямой OO'.

Докажем, что точки, гомотетичные точкам одной окружности, находятся на другой окружности.



Черт. 26.

Для доказательства возьмем на первой окружности любую точку A и проведем радиус OA; проведем радиус $O'A'$ второй окружности, параллельный радиусу OA и одинаково с ним направленный.

Проведем прямую AA' и найдем точку пересечения прямых AA' и OO'. Пусть это будет точка S.

Тогда $\frac{SA'}{SA} = \frac{SO'}{SO} = \frac{R}{r}$.

Значит, точки O' и A' гомотетичны точкам O и A и абсолютная величина коэффициента гомотетии равна $\frac{R}{r}$. Центр гомотетии (точка S) оказывается точкой, делящей отрезок OO' внешним образом в отношении, равном отношению радиусов данных окружностей.

Возьмем теперь другую произвольную точку на первой окружности, например точку B, и построим соответственную ей точку B' на второй окружности таким же образом, как это было сделано для точки A, то есть проведем в первой окружности радиус OB, а во второй — радиус $O'B'$, параллельный радиусу OB и одинаково с ним направленный.

Тогда таким же образом, как и выше, докажем, что точки O' и B' будут гомотетичны точкам O и B, причем:

1) центром гомотетии будет являться точка, делящая отрезок OO' внешним образом в отношении $R : r$, то есть та же

ранее найденная точка S, так как задача деления отрезка внешним образом в данном отношении имеет одно решение [1];

2) абсолютная величина коэффициента гомотетии будет равна отношению радиусов данных окружностей, то есть $|k| = \frac{R}{r}$. Так как точки A и B взяты на первой окружности совершенно произвольно, то сказанное об этих точках можно обобщить на любые точки окружности и утверждать, что точки, гомотетичные точкам одной окружности, являются точками другой окружности, то есть, что данные окружности гомотетичны.

Построение, которое было выполнено, привело к положительной гомотетии окружностей, при которой центр гомотетии оказался внешним.

Можно установить между любыми окружностями, в том числе и равными, и отрицательную гомотетию. В этом случае центром гомотетии будет точка, делящая отрезок OO' в отношении $R:r$ внутренним образом.

Желательно, чтобы учащиеся выполнили эту работу в порядке упражнения.

Учащиеся уже знают, что между неравными, параллельными и одинаково направленными отрезками устанавливается положительная гомотетия; между отрезками же параллельными, но противоположно направленными устанавливается отрицательная гомотетия [2]. Это должно навести учащихся на мысль о способе проведения радиусов окружностей для получения соответственных точек при отрицательной гомотетии (черт. 28).

В любую точку A первой окружности проводится радиус OA, в другой окружности проводится радиус $O'A'$, параллельный радиусу OA, но направленный противоположно ему. Проведя

---

[1] Когда разбиралась задача о делении данного отрезка в данном отношении внешним образом, то вывод об единственности решения утверждался без доказательства. Возможно, что учащиеся поставят вопрос о доказательстве этого положения; на этот случай приводится ниже один из вариантов такого

Черт. 27.

доказательства. Предположим, что существуют две точки S и S', делящие отрезок OO' внешним образом в одном и том же отношении (черт. 27). Тогда $SO : SO' = S'O : S'O'$, отсюда, составив производную пропорцию, получим:

$$\frac{SO - SO'}{SO'} = \frac{S'O - S'O'}{S'O'}, \text{ то есть } \frac{OO'}{SO'} = \frac{OO'}{S'O'}.$$

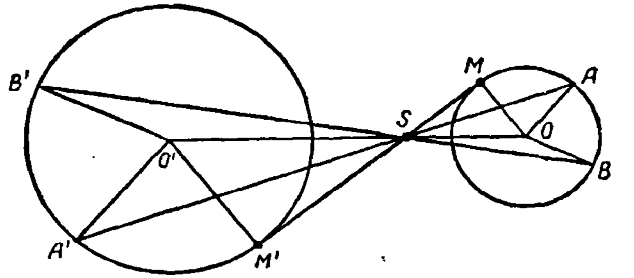
Значит, $SO' = S'O'$.

Это показывает, что точки S и S' совпадают, а следовательно, задача деления отрезка в данном отношении внешним образом имеет одно решение.

[2] В случае противоположного направления параллельные отрезки могут быть и равны.

прямые OO' и AA' и обозначив буквой S точку их пересечения, получим: $\frac{SA'}{SA} = \frac{SO'}{SO} = \frac{R}{r}$. Это показывает, что точки O' и A' соответственно гомотетичны точкам O и A, причем центром гомотетии является точка S, делящая внутренним образом отрезок OO' в отношении $R : r$, а коэффициентом гомотетии число $k = -\frac{R}{r}$.

Если путем проведения параллельных, но противоположно направленных радиусов OB и $O'B'$ получим соответственные точки B и B', то так же, как и раньше, докажем, что эти точки гомотетичны [1]).



Черт. 28.

Таким образом, будет установлено, что любые две окружности *с различными радиусами можно преобразовать одну в другую*, как путем положительной, так и путем отрицательной гомотетии [2]).

После этого учащиеся должны также установить, что для нахождения соответственно гомотетичных точек двух окружностей достаточно найти центр гомотетии (внутренний или внешний), а затем проводить прямые через этот центр, пересекающие данные окружности. Точки пересечения каждой из этих прямых с окружностью будут определять соответственно гомотетичные точки.

Нахождение центра гомотетии можно выполнить при помощи построения, описанного выше, то есть путем проведения в данных окружностях параллельных радиусов.

Вопрос о гомотетии точки, которая является точкой касания окружности с прямой, проходящей через центр гомотетии, то есть точки M (черт. 28) можно решить при помощи рассуждения, приведенного в учебнике Никитина и Фетисова, но можно сделать это и другим способом.

---

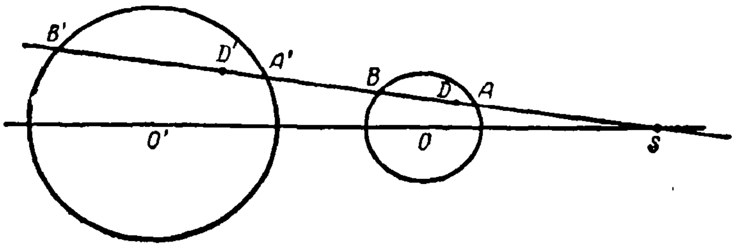
[1]) От учащихся при ответе следует потребовать полного обоснования этого положения.

[2]) При помощи отрицательной гомотетии могут быть преобразованы одна в другую и равные окружности.

Пусть $M'M$ — общая внутренняя касательная данных окружностей, докажем, что точки M и M' гомотетичны при тех же условиях, как и все остальные точки окружностей. Для этого надо доказать, что центром гомотетии точек M и M' является точка S (центр гомотетии окружностей) и что $\frac{SM'}{SM} = \frac{R}{r}$.

Доказательство. $O'M' \parallel OM$, значит точки M' и O' гомотетичны точкам M и O; но центром гомотетии точек O' и O является точка S, следовательно, она же является и центром гомотетии точек M' и M. Затем известно, что $\frac{SO'}{SO} = \frac{R}{r}$, но $\frac{SM'}{SM} = \frac{SO'}{SO}$, следовательно, $\frac{SM'}{SM} = \frac{R}{r}$.

Таким образом, доказано, что точка, которая является точкой касания окружности с прямой, проходящей через центр гомотетии, преобразуется гомотетией в точку, которая является точкой касания другой окружности с этой же прямой, иначе говоря, общая касательная двух окружностей проходит через их центр гомотетии.



Черт. 29.

В целях закрепления полученных теоретических сведений о гомотетии окружностей можно предложить ряд упражнений на построение гомотетичных точек в окружностях, расположенных различным образом друг относительно друга (концентрических, одна внутри другой, пересекающихся и касательных).

В учебниках указывается еще, что гомотетичными являются не только окружности, но и круги. Это указание, если его приводить учащимся, необходимо развить.

Пусть имеем два круга с центрами в точках O и O' (черт. 29). Окружности этих кругов, как установлено выше, гомотетичны, способ построения центра гомотетии окружностей известен. Пусть это будет точка S. Возьмем теперь произвольную точку D первого круга и покажем, что точка D', гомотетичная ей, будет принадлежать другому кругу.

Для нахождения точки D', гомотетичной точке D, надо провести прямую SD и на ней отложить отрезок SD', равный произведению $SD \cdot |k|$.

Прямая SD пересечет первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках A' и B'. Точки A' и B' будут соответственно гомотетичны точкам A и B. Поэтому $\frac{SB'}{SB} = |k|$ и, значит, $\frac{SB'}{SB} = \frac{SD'}{SD}$, а так как $SB > SD$, то и $SB' > SD'$. Это показывает, что точка D' лежит на прямой SB' ближе к точке S, чем точка B'. С другой стороны, $\frac{SA'}{SA} = |k|$ и, значит, $\frac{SA'}{SA} = \frac{SD'}{SD}$, а так как $SA < SD$, то и $SA' < SD'$. Это показывает, что точка D' лежит на прямой SB' дальше от точки S, чем точка A'.

Таким образом, устанавливаем, что точка D' лежит на хорде $A'B'$, то есть принадлежит второму кругу.

В этой связи естественно заметить, что аналогичным образом можно установить: если два многоугольника (выпуклых) гомотетичны, то всякая точка M, находящаяся внутри контура одного многоугольника, преобразуется гомотетией в точку, находящуюся внутри контура другого многоугольника.

§ 22. Решение задач повышенной трудности

Ниже приводятся условия нескольких более трудных задач, заимствованных из различных источников. К этим задачам даются указания о приемах их решения.

Задача 1. В данную окружность вписать треугольник, стороны которого были бы параллельны сторонам данного треугольника.

Указание. Пусть ABC — данный треугольник и O' — центр данной окружности. Опишем окружность O около треугольника ABC и проведем параллельно друг другу радиусы OA и $O'A'$. За центр гомотетии примем точку пересечения прямых AA' и OO'. Построив на данной окружности точки B' и C', гомотетичные точкам B и C, получим треугольник $A'B'C'$, гомотетичный данному треугольнику ABC. Его стороны будут параллельны сторонам данного треугольника, и он будет вписан в данную окружность.

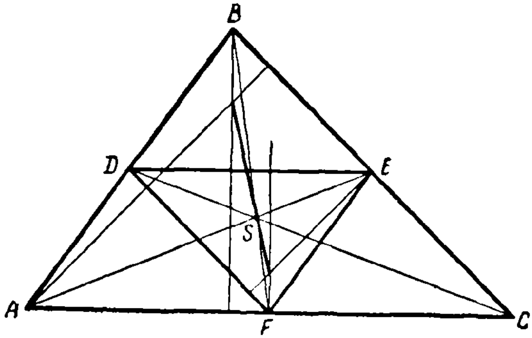
Задача 2. Если соединить отрезками все точки окружности с какой-нибудь постоянной точкой и каждый из отрезков разделить в одном и том же отношении, то геометрическим местом точек деления будет окружность. Доказать.

Указание. Соединить данную постоянную точку S с центром O данной окружности и построить на SO точку O' так, чтобы она делила отрезок SO в заданном отношении. Тогда легко будет доказать, что точки, о которых говорится в задаче, будут одинаково удалены от точки O'.

Задача 3. Точка пересечения высот треугольника, точка пересечения его медиан и центр описанной окружности лежат на одной и той же прямой. Доказать.

Указание. Центром гомотетии данного треугольника ABC и треугольника DEF (черт. 30), вершинами которого служат середины сторон треугольника ABC, является S — точка пересечения медиан треугольника ABC. В самом деле, прямые AE, BF и CD, соединяющие соответственные вершины треугольников, являются медианами треугольника ABC, значит, все они проходят через одну точку S и $\frac{SF}{SB} = \frac{SE}{SA} = \frac{SD}{SC} = \frac{1}{2}$. Из этого следует, что точка S является центром гомотетии треугольников ABC и DEF.

Раз точка S — центр гомотетии треугольников, то каждые две соответственные точки треугольников должны лежать на прямой, проходящей через точку S.



Черт. 30.

Соответственными являются точка пересечения высот треугольника ABC и точка пересечения высот треугольника DEF, значит они лежат на одной прямой, проходящей через точку S.

Но точка пересечения высот треугольника DEF является центром окружности, описанной около треугольника ABC, а точка S является точкой пересечения медиан; таким образом, задача решена.

Перед решением последующих задач следует напомнить учащимся указание об общем приеме решения задач на построение методом гомотетии.

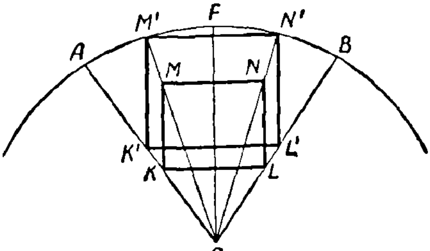
При решении этих задач первоначально отбрасывается одно из условий (требований к искомой фигуре), благодаря чему задача становится неопределенной, то есть допускает бесконечное множество решений. Оказывается, что в этом случае легко получить одно из таких (вспомогательных) решений. Как правило, оно не будет удовлетворять отброшенному условию, но, чтобы получить решение, удовлетворяющее всем условиям задачи, достаточно это найденное вспомогательное решение подвергнуть гомотетии.

З а д а ч а 4. В данный сектор вписать квадрат так, чтобы две вершины его лежали на дуге сектора, а две другие — на радиусах, ограничивающих сектор.

Отбросим требование о том, чтобы две вершины квадрата лежали на дуге сектора, и будем строить квадрат, удовлетворяющий только условию, чтобы две вершины его лежали на радиусах OA и OB (черт. 31). Задача становится неопределенной: квадратов, удовлетворяющих принятому условию, можно построить сколько угодно.

Построим $KLNM$ — один из таких квадратов, взяв точки K и L на радиусах OA и OB на равном расстоянии от центра O.

Чтобы получить квадрат, удовлетворяющий всем поставленным в задаче условиям, преобразуем квадрат $KLNM$ следующим образом. Точки M и N преобразуем в точки M' и N', затем проведем последовательно один за другим отрезки $M'N'$, $N'L' \parallel NL$, $M'K' \parallel MK$ и $K'L'$, получим квадрат $K'M'N'L'$, удовлетворяющий всем условиям задачи.



Черт. 31.

Чтобы доказать, что полученный многоугольник $K'M'N'L'$ квадрат, надо доказать, что он гомотетичен квадрату $KMNL$. Проведем $OF \perp KL$, тогда OF разделит KL и MN пополам, следовательно, треугольник OMN равнобедренный и OF разделит пополам как угол MON, так и дугу $M'N'$, а значит и хорду $M'N'$. Из того, что радиус OF делит пополам хорду, вытекает, что он перпендикулярен к $M'N'$, а так как и $MN \perp OF$, то $M'N' \parallel MN$. Значит, точки M' и N' гомотетичны точкам M и N.

Точно так же точки M' и K' гомотетичны точкам M и K, а точки N' и L' — точкам N и L.

Значит, вершины многоугольников $KMNL$ и $K'M'N'L'$ гомотетичны, а из этого следует, что гомотетичны и многоугольники. Но многоугольник $KMNL$ — квадрат, следовательно, и многоугольник $K'M'N'L'$ тоже квадрат, притом удовлетворяющий условию задачи.

Задача 5. Через точку, данную вне круга, провести секущую так, чтобы внешняя часть секущей была вдвое меньше внутренней.

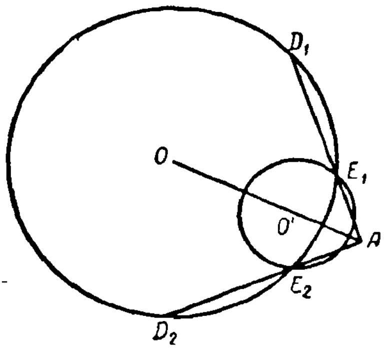
Дано: круг с центром в точке O и A — точка вне круга (черт. 32).

Требуется из точки A провести секущую так, чтобы внешняя часть ее была вдвое меньше внутренней.

Пусть AD_1 — искомая секущая, но как ее построить, мы пока не знаем.

Но мы можем построить окружность, гомотетичную данной окружности, приняв за центр гомотетии точку A и взяв коэффициент гомотетии $k = \frac{1}{3}$.

В самом деле, центр O' искомой вспомогательной окружности должен быть расположен на отрезке OA так, что $AO' : AO = 1 : 3$, то есть AO' должен составлять треть отрезка AO. Значит, точку O' — центр вспомогательной окружности, гомотетичной данной окружности,— найти можем.



Черт. 32.

По ранее доказанному коэффициент гомотетии окружностей равен отношению радиусов, значит, радиус искомой окружности равен трети радиуса данной окружности, то есть тоже может быть найден.

Тогда точка пересечения данной окружности с вспомогательной и будет точкой, которая разделит секущую, проведенную из точки A к данной окружности так, что внешний отрезок ее будет вдвое меньше внутреннего. Способ построения очевиден. AD_1 и AD_2 — искомые секущие.

Доказательство вытекает из способа построения и свойства гомотетичных окружностей.

Глава III

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ И КРУГЕ

§ 23. Метрические соотношения в треугольнике

Под этим термином понимаются *предложения*, устанавливающие числовые соотношения между сторонами треугольника, высотами треугольника и его сторонами, проекциями одних сторон треугольника на другие стороны и т. п.

Значение этого раздела курса геометрии очень велико, так как здесь закладываются основы *вычислительной геометрии*.

Перед началом изложения теорем о метрических соотношениях следует напомнить некоторые простейшие метрические соотношения, известные учащимся из прежнего курса: 1) в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы; 2) высота прямоугольного равнобедренного треугольника равна половине гипотенузы; 3) медиана в прямоугольном треугольнике, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы; 4) радиус круга, вписанного в прямоугольный треугольник, равен разности между полупериметром его и гипотенузой.

В курсе геометрии Киселева для VI—VII классов нет понятия проекции отрезка на прямую, хотя в задачнике по геометрии широко используется этот термин. Поэтому учитель безусловно должен ввести это понятие (см. у Глаголева в § 91 или у Никитина и Фетисова в § 25).

Затем необходимо определить среднее пропорциональное или среднее геометрическое двух положительных чисел как общий член непрерывной пропорции $a : x = x : b$ или $x : a = b : x$.

Если под буквами понимать отрезки, то тогда можно ввести понятие отрезка (x), среднего пропорционального между двумя данными отрезками (a и b). Решая непрерывные пропорции относительно x, получим $x = \sqrt{ab}$.

Полезно напомнить, что среднее арифметическое $m = \frac{a+b}{2}$. Если, в частности, a и b — основания трапеции, то m — ее средняя линия.

Наконец, следует указать, что во всех теоремах о метрических соотношениях отрезков под произведением отрезков (квадратом отрезка) понимается произведение длин отрезков (квадрат длины отрезка) и притом предполагается, что единица длины в каждой отдельной теореме, в каждой задаче выбрана одна и та же.

Мы считаем порядок изложения теорем о метрических соотношениях отрезков в треугольнике и круге, намеченный программой, удачным.

При этом порядке учащиеся сразу получают теоретический материал для решения большого круга задач на вычисление.

В формулировке теорем о метрических соотношениях следует ввести термин «проекция» (см. учебники Глаголева, Никитина и Фетисова).

Доказательство теорем о метрических соотношениях в прямоугольном треугольнике и, в частности, теоремы Пифагора обычно не затрудняет учащихся (напомним, что из новой программы исключено евклидово доказательство теоремы Пифагора).

Желательно сообщить учащимся исторические сведения о Пифагоре, а также рассмотреть формулы получения так называемых Пифагоровых чисел (см. у Глаголева).

После того как будут доказаны теоремы о метрических соотношениях в прямоугольном треугольнике, их надо широко использовать при решении задач, выбираемых из § 10 задачника Рыбкина (№ 1—78)[1]. В числе прочих рекомендуется решить № 37, 41, 43, 44, 46, 47, 52, 54, 65, 69, 78 как особо поучительные.

При решении задач на вычисление надо требовать от учащихся наиболее рациональных способов вычислений Так, при вычислении катета по гипотенузе, равной, например, 625, и ка-

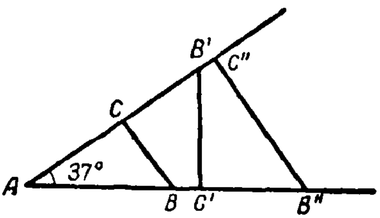
[1] Полнота использования задачника зависит от бюджета времени.

тету, равному 336, надо разлагать на множители разность квадратов: $\sqrt{625^2 - 336^2} = \sqrt{961 \cdot 289} = 31 \cdot 17 = 527$. Но если вычисления производятся при помощи таблиц, то разложение на множители применять не следует: пусть $c = 2{,}786$; $a = 1{,}537$; $b = \sqrt{2{,}786^2 - 1{,}537^2} \approx \sqrt{7{,}761 - 2{,}363} \approx \sqrt{5{,}398} \approx 2{,}324$.

При вычислении дроби $\frac{ab}{c}$ надо пользоваться таблицей обратных чисел. Пусть $a = 1{,}537$; $b = 2{,}324$; $c = 2{,}786$. Найдем сначала $\frac{1}{c} = \frac{1}{2{,}786} \approx 0{,}3589$, тогда $\frac{ab}{c} \approx 1{,}537 \cdot 2{,}324 \cdot 0{,}3589 \approx 1{,}282$ (деление на 2,786 заменено умножением на обратное число). При вычислении с приближенными числами надо пользоваться правилами, данными в таблицах Брадиса (гл. XXI).

§ 24. Тригонометрические функции острого угла

В VIII классе тригонометрические функции угла вводятся лишь как отношения сторон прямоугольного треугольника. К моменту введения понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла учащимся возможно еще не будет дано на уроках алгебры определение функции. В таком случае не следует на уроках геометрии углубляться в разбор этого понятия.



Черт. 33.

Вводить понятия $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ лучше всего путем непосредственных вычислений значений тригонометрических функций для отдельных заданных углов.

1. Учащиеся строят (по транспортиру) какой-нибудь угол, например угол в 37°, затем строят ряд прямоугольных треугольников так, чтобы одной из вершин каждого треугольника служила вершина данного угла, а две другие вершины лежали на сторонах данного угла.

Пусть эти треугольники ABC; $AB'C'$; $AB''C''$ и т. д. (черт. 33).

В каждом из построенных треугольников вычисляются отношения противолежащего катета к гипотенузе (с точностью до 0,01) и полученные результаты сравниваются. (Сначала каждый учащийся сравнивает результаты, получившиеся у него, а затем сравниваются и результаты, получившиеся у нескольких учащихся.) Можно быть уверенным, что результаты при округлении до десятых долей окажутся одинаковыми. Хорошо учащихся разбить на группы (например, по рядам) и каждой группе дать особый угол: одной—угол в 22°, другой—в 37°, третьей—в 54° и т. д. (Целесообразно углы подбирать так, чтобы совпадение десятых долей в величине отношения сторон, определяемом каждым из углов, было наиболее вероятно, а также, чтобы для различных из взятых углов это отношение оказывалось различно уже в десятых долях.)

Хорошо, если учитель располагает плакатами чертежей прямоугольных треугольников с определенным острым углом, например с углами в 22°, 37°, 54° и т. д. Тогда плакаты вывешиваются на доске и вызванные учащиеся производят на них нужные измерения и затем вычисляют отношения сторон треугольников.

Работа эта производится одновременно с работой остальных учащихся за партами.

Размеры треугольников на плакатах должны быть таковы, чтобы длины катетов, измеренные в миллиметрах, выражались трехзначными числами. В таком случае, как правило, отношения будут получены с точностью до сотых долей.

В результате эксперимента устанавливается: если в прямоугольном треугольнике один из углов равен 37°, то отношение противолежащего катета к гипотенузе равно 0,60 независимо от длин катета и гипотенузы; если угол 22°, то отношение противолежащего катета к другому катету равно 0,40; если угол 54°, то отношение противолежащего катета к гипотенузе равно 0,81; если угол — 72°, то отношение противолежащего катета к прилежащему равно 3,1. Подчеркивается, что получился вывод, аналогичный тому, который устанавливается путем теоретических рассуждений, основанных на подобии треугольников. Можно подчеркнуть также, что вывод, сделанный на основании практических работ, устанавливает только приблизительное равенство отношений сторон при одном и том же угле, тогда как теория устанавливает, что при одном и том же угле отношения соответствующих сторон прямоугольных треугольников должны быть точно равны.

2. В классе организуется работа по составлению таблицы этих отношений с точностью до 0,01 для различных углов, например от 0 до 60° через каждые 3 или 5°. Работу по составлению таблицы можно разбить по бригадам: одной бригаде поручить составление таблицы для промежутка углов от 0 до 15°, другой — от 15 до 30° и т. д., но каждая бригада должна составить как таблицу отношений противолежащего катета к гипотенузе, так и таблицу отношений противолежащего катета к прилежащему. Если составление таблицы не удастся провести полностью в классе, то окончание работы предлагается учащимся в качестве домашнего задания. К таблице каждый учащийся должен приложить лист, фиксирующий результаты измерений и вычислений.

Проведенные вычисления будут хорошим примером установленного теоретическим путем факта, что величина острого угла прямоугольного треугольника однозначно определяет отношение его сторон. После этого будет вполне естественным введение терминов для обозначения названий тех или иных отношений сторон прямоугольного треугольника. Одновременно учащиеся знакомятся и с готовыми таблицами тригонометрических функций. (Таблицы Брадиса.)

Вопрос об изменение тригонометрических функций с изменением угла от 0 до 90° не вызывает затруднений у учащихся; еще больше облегчается его изучение, если пользоваться наглядными пособиями, образцы которых общеизвестны.

Полезно также проследить изменение тригонометрических функций по таблицам. Этот прием часто выпадает из поля зрения учителей и потому учащиеся с ним не знакомятся. В результате учащиеся IX и X классов не представляют себе, как по одному взгляду на таблицу можно определить, что нужно сделать с поправкой на минуты: прибавить или отнять? Так для учащихся часто оказывается новостью, что, взглянув на значения $\cos 56°12'$ и $\cos 56°18'$, можно сообразить, что $\cos 56°15'$ будет меньше, чем $\cos 56°12'$ и больше, чем $\cos 56°18'$.

Таким путем легче уберечься от сравнительно частых ошибок, особенно частых при решении задач на нахождение значений косинуса и котангенса по углу и обратных — на нахождение угла по данным значениям косинуса и котангенса.

Упражнения, приведенные в § 5 «Сборника задач по тригонометрии» Рыбкина [1], полезно дополнить устными упражнениями на свойства тригонометрических функций, например такими:

1) Что больше:

$\sin 42°$ или $\sin 30°$?	$\sin 20°$ или $\cos 60°$?
$\sin 45°$ или $\sin 60°$?	$\cos 30°$ или $\sin 50°$?
$\cos 25°$ или $\cos 40°$?	$\sin 25°$ или $\operatorname{tg} 25°$?
$\cos 70°$ или $\cos 40°$?	$\sin 60°$ или $\operatorname{tg} 60°$?
$\sin 20°$ или $\cos 20°$?	$\cos 40°$ или $\operatorname{tg} 50°$?
$\sin 50°$ или $\cos 50°$?	

2) Какой из углов больше, α или 45°, если:

$$\sin\alpha > \sin 45°?$$
$$\sin\alpha > \cos 45°?$$
$$\cos\alpha > \cos 45°?$$

При изучении тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника основное внимание надо обратить на решение задач и перейти к их решению уже на третьем уроке после того, как дано понятие $\sin\alpha$, $\operatorname{tg} x$ и т. д.

Хорошие задачи по этой теме имеются в сборниках задач по тригонометрии Рыбкина, Худобиных [2] и Позойского [3].

При вычислениях надо пользоваться таблицами Брадиса и среди них, в частности, таблицей обратных чисел.

---

[1] Рыбкин Н., Сборник задач по тригонометрии, Учпедгиз, 1956,

[2] Худобин А. И. и Худобин Н. И., Сборник задач по тригонометрии, Учпедгиз, 1955.

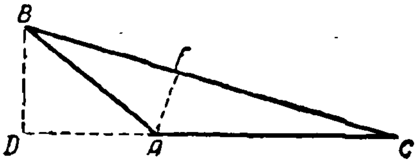
[3] Позойский Р. И., Сборник задач по тригонометрии, Учпедгиз, 1950.

§ 25. Теоремы о квадрате стороны треугольника против острого и против тупого угла

Приступая к доказательству этих теорем, полезно сделать модель треугольника, две стороны которого постоянны, а третья (например, приготовленная из резинового шнура) может иметь различную длину.

Когда угол против этой переменной стороны прямой, квадрат ее равен сумме квадратов двух сторон.

Если же угол уменьшить, то противолежащая сторона также уменьшится, а следовательно, квадрат стороны, лежащей против острого угла, меньше суммы квадратов двух других сторон. Противоположный вывод получается, когда угол против «резиновой» стороны тупой. Точное выражение величины разницы между квадратом одной стороны треугольника и суммой квадратов двух других дают доказываемые затем теоремы. Тексты теорем лучше давать или по учебнику Глаголева, или по учебнику Никитина и Фетисова.



Черт. 34.

Теоремы о квадрате стороны, лежащей против острого угла треугольника, и о квадрате стороны, лежащей против тупого угла треугольника, доказываются и усваиваются учащимися без труда. Однако следует обратить внимание на случай, когда требуется выразить сторону против острого угла в тупоугольном треугольнике ABC через две другие стороны и проекцию большей стороны на меньшую: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot CD$ (черт. 34). Полезно при опросе предложить учащимся доказать теорему для квадрата стороны AB на указанном чертеже 34.

Следует также обратить внимание на формулировку удвоенного произведения: «... удвоенное произведение одной из этих сторон...»

Надо доказать, что, например, в данном выше чертеже 34 произведение $AC \cdot CD$ можно заменить произведением $BC \cdot CF$, где CF — проекция AC на CB.

Особо следует задержаться на предложении, обратном теореме Пифагора и теоремам о квадрате стороны против острого и тупого угла.

Для облегчения доказательства этого предложения методом от противного можно его разбить на три теоремы:

1. Если квадрат какой-нибудь стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то первая сторона лежит против прямого угла, то есть треугольник прямоугольный.

2. Если квадрат большей стороны треугольника меньше суммы квадратов двух других сторон, то первая сторона лежит против острого угла, то есть треугольник остроугольный.

3. Если квадрат какой-нибудь стороны треугольника больше суммы квадратов двух других сторон, то первая сторона лежит против тупого угла, то есть треугольник тупоугольный.

Из сопоставления прямых и обратных теорем выводится необходимое и достаточное условие, которому должны удовлетворять стороны треугольника, чтобы треугольник был прямоугольным, остроугольным или тупоугольным.

Полезно сопоставить также соотношения, которым должны удовлетворять стороны треугольника и квадраты сторон:

$$a < b + c \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 &< b^2 + c^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 \\ a^2 &> b^2 + c^2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Если в треугольнике ABC наибольшей стороной является a, тогда соотношение, указанное формулой (1), обязательно, но для квадратов сторон возможно любое из трех соотношений (2).

В классе следует проделать несколько устных упражнений на применение указанных соотношений для определения тех или иных свойств геометрических фигур.

Примеры.

1. Определить, будет ли треугольник остроугольным, прямоугольным или тупоугольным, если его стороны соответственно равны:

а) 2; 2; 3;	г) 3; 3; 3;	ж) 6; 3; 3;
б) 2; 3; 4;	д) 4; 3; 3;	з) 7; 5; 1.
в) 2; 3; 3;	е) 5; 3; 3;	

Ответы. а) Тупоугольный; б) тупоугольный; в), г), д) остроугольный; е) тупоугольный; ж), з) треугольника не существует.

2. Под острым, прямым или тупым углом видна данная сторона параллелограмма из точки пересечения диагоналей, если:

а)	диагонали равны 10 и 6,	сторона равна 8;
б)	« « 6 и 8,	« « 5;
в)	« « 6 и 11,	« « 4.

Ответы. а) Не существует такого параллелограмма; б) под прямым; в) под острым.

3. а) В равнобочной трапеции диагональ равна 5 *см*, боковая сторона — 4 *см*. В каких границах может изменяться меньшее основание?

Ответ. В границах между 1 *см* и 3 *см*.

б) В равнобочной трапеции диагональ равна 13 *см*, боковая сторона — 5 *см*. В каких границах может изменяться большее основание.

Решение. Обозначив большее основание AD через x, получим неравенства:

$$AC^2 < CD^2 + AD^2, \text{ так как } \angle D < 90°;$$
$$169 < 25 + x^2;$$
$$x^2 > 144; \ x > 12;$$
$$AD < AC + CD; \ x < 13 + 5; \ x < 18. \text{ Ответ. } 12 < x < 18.$$

Теоремы о квадрате стороны треугольника используются для доказательства теоремы о сумме квадратов диагоналей прямоугольника, ромба и вообще любого параллелограмма.

§ 26. Метрические соотношения в круге

Эту тему целесообразно рассматривать в полном соответствии с программой после метрических соотношений в треугольнике.

Прежде надо указать, что следствия из метрических соотношений в прямоугольном треугольнике являются также предложениями, устанавливающими метрические соотношения в круге (см. § 189 в учебнике Киселева или § 213 в учебнике Глаголева).

Затем уже доказываются теоремы о хордах, пересекающихся внутри круга, и о касательной и секущей, проведенных к окружности из одной точки[1]).

После доказательства этих теорем возможно ввести понятие степени точки относительно окружности (см. § 226 в учебнике Глаголева).

Теоремы о метрических соотношениях в треугольнике и круге дают материал для огромного количества задач на вычисление, на построение и на доказательство. Их много в § 10, 11 и 14 «Сборника задач по геометрии» Рыбкина. Приведем некоторые задачи и решения к ним.

1) Определение высоты треугольника через его три стороны (a, b, c).

Эта задача решена во всех трех учебниках: Киселева, Глаголева и Никитина и Фетисова.

2) Определение медианы треугольника через его три стороны.

Решение производится на основании теоремы о сумме квадратов диагоналей параллелограмма. Подробно изложено в учебнике Никитина и Фетисова.

3) Вывод формулы для биссектрисы угла треугольника.

Пусть даны треугольник ABC и в нем AD — биссектриса угла BAC (черт. 35). Опишем около треугольника ABC окружность, продолжим биссектрису AD до пересечения с окружностью в некоторой точке E и соединим хордой точки B и E.

$$\triangle ABE \sim \triangle ADC, \text{ так как}$$
$$\angle BAE = \angle EAC \text{ и } \angle BEA = \angle BCA.$$

[1]) Эти теоремы возможно объединить, как это сделано в учебнике Глаголева (§ 222) Такое объединение представляется целесообразным, особенно в случае введения понятия степени точки относительно окружности.

Из подобия треугольников получаем:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AC}{AE},$$

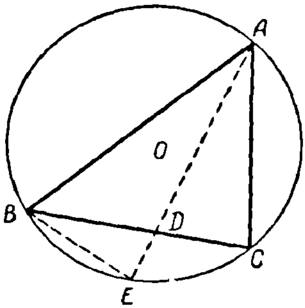
откуда $AD \cdot AE = AB \cdot AC.$ (1)

По теореме об отрезках хорд AE и BC, пересекающихся внутри круга:

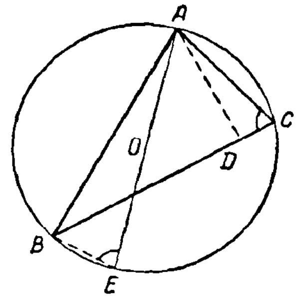
$$AD \cdot DE = BD \cdot DC. \tag{2}$$

Вычитая из равенства (1) равенство (2), получаем:

$$AD\,(AE - DE) = AB \cdot AC - BD \cdot DC,$$
$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC. \tag{3}$$



Черт. 35.



Черт. 36.

Если даны три стороны треугольника a, b, c, то отрезки BD и DC вычисляются по теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника; обозначим их через u и v и биссектрису угла A — через l_A, тогда:

$$l_A = \sqrt{bc - uv},$$

где u и v определяются из системы уравнений: $u + v = a$; $u : v = c : b$.

4) Вывод формулы для радиуса окружности, описанной около треугольника, см. задачи № 15 и 16 § 10 из задачника Рыбкина.

Пусть ABC — данный треугольник, O — центр описанной около него окружности (черт. 36). Проведя высоту AD данного треугольника и соединив хордой точки B и E, получаем подобные треугольники ABE и ACD (треугольники прямоугольные и имеют по равному углу E и C):

$$\frac{AC}{AE}=\frac{AD}{AB},$$

откуда:

$$AC \cdot AB = AE \cdot AD.$$

Введя обычные сокращенные обозначения, получаем:

$$bc = 2R \cdot h_a;\quad R = \frac{bc}{2h_a},\ \text{но}\ h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

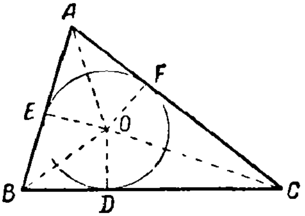
Поэтому $R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

В дальнейшем можно получить формулу:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

5) Вывод формулы для радиуса окружности, вписанной в треугольник. (Дается только после изучения теоремы о площади треугольника.)

Пусть ABC — данный треугольник, O — центр окружности, вписанной в него (черт. 37). OD, OE и OF — высоты треугольников BOC, AOB и AOC.



Черт. 37.

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOB} + S_{\Delta AOC};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot OD + AB \cdot OE + AC \cdot OF}{2};$$

$$OD = OE = OF = r;$$

следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{r(BC + AB + AC)}{2} = rp.$$

Отсюда

$$r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

В заключение необходимо подчеркнуть, что приведенные выше формулы для выражения через стороны треугольника, его медианы, биссектрисы и радиусов описанной и вписанной окружностей не значатся в программе, поэтому обязательными для запоминания считаться не могут. Вывод всех этих формул может проводиться в порядке упражнений на решение задач, причем задачи эти должны рассматриваться как задачи, требующие для своего решения помощи учителя.

Но если решение задач на определение всех перечисленных выше отрезков для случая любого треугольника не должны считаться обязательными для заучивания, то приемы решения задач на определение радиусов описанных и вписанных окружностей для равнобедренных и прямоугольных треугольников учащиеся должны хорошо и прочно усвоить. Возможно, что с некоторыми приемами решения указанных задач учащиеся были ознакомлены ранее, например при изучении подобия треугольников, но тепѐрь эти приемы должны быть объединены, сопоставлены и закреплены.

6) Определение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный треугольник.

Первый прием. OC — биссектриса угла C в треугольнике ACF (черт. 38), поэтому $\frac{AO}{OF} = \frac{AC}{CF}$; $\frac{AF - OF}{OF} = \frac{AC}{\frac{BC}{2}}$. Введя сокращенные обозначения: $AF = h$; $OF = r$; $AC = b$; $BC = a$, получим:

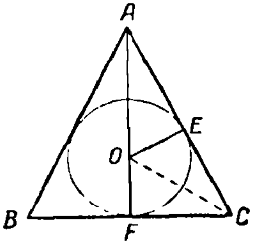
$$\frac{h-r}{r} = \frac{2b}{a},$$

откуда (r легко выражается через a и b):

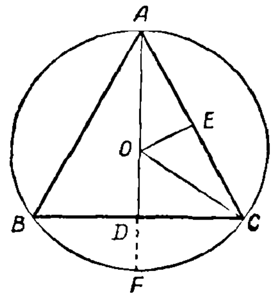
$$r = \frac{ah}{a+2b}.$$

Второй приём. $\triangle AOE \sim \triangle ACF$ (черт. 38), поэтому $\frac{OE}{AO} = \frac{CF}{AC}$, или $\frac{r}{h-r} = \frac{a}{2b}$, откуда $r = \frac{ah}{a+2b}$.

После изучения темы «Тригонометрические функции острого угла» возможно указать еще один способ решения данной задачи.



Черт. 38.



Черт. 39.

Третий прием. Из $\triangle OFC$ (черт. 38) имеем: $OF = FC \cdot tg\frac{C}{2}$ или $r = \frac{a tg\frac{C}{2}}{2}$.

7) Определение радиуса окружности, описанной около равнобедренного треугольника.

O — центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC (черт. 39). $OE \perp AC$, следовательно, $AE = EC$; точно так же $BD = DC$, так как $AD \perp BC$.

Первый прием. Из $\triangle DOC$ имеем: $OC^2 = OD^2 + CD^2$, $OC^2 = (AD - AO)^2 + CD^2$.

Вводя сокращенные обозначения, получим:

$$R^2 = (h-R)^2 + \frac{a^2}{4} \text{ или } R^2 = h^2 - 2hR + R^2 + \frac{a^2}{4},$$

откуда

$$R = \frac{\frac{a^2}{4} + h^2}{2h} = \frac{b^2}{2h}.$$

Второй прием. $\triangle AOE \backsim \triangle ADC$ (черт. 39), поэтому $\frac{AO}{AE} = \frac{AC}{AD}$ или $\frac{R}{\frac{b}{2}} = \frac{b}{h}$, откуда $R = \frac{b^2}{2h}$.

Третий прием. Продолжив AD до пересечения с окружностью в точке F (черт. 39), получим на основании теоремы об отрезках хорд (AF и BC), пересекающихся внутри круга:

$$AD \cdot DF = BD \cdot DC \text{ или } h(2R - h) = \frac{a^2}{4}.$$

Откуда

$$R = \frac{b^2}{2h}.$$

После изучения темы «Тригонометрические функции острого угла» возможно указать еще один прием решения данной задачи.

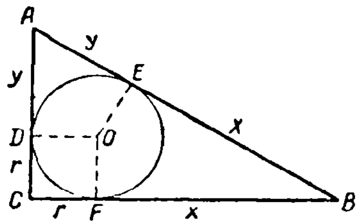
Четвертый прием. Из $\triangle AOE$ (черт. 39) выводим:

$$AO = \frac{AE}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{b}{2\cos\frac{A}{2}}; \quad R = \frac{b}{2\cos\frac{A}{2}} \text{ или } R = \frac{b}{2\sin C}.$$

8) Определение высоты в прямоугольном треугольнике, проведенной из вершины прямого угла $\left(h = \frac{ab}{c}\right)$.

Доказательство не представляет затруднений.

9) Определение радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник (эта задача могла быть решена в VII классе).



Черт. 40.

Пусть O — центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC; точки D, E и F — точки касания (черт. 40).

$$BE = BF = x, \qquad AB = c;$$
$$AE = AD = y, \qquad AC = b;$$
$$CF = CD = r, \qquad BC = a.$$

Составляем уравнение:

$$2r + 2x + 2y = a + b + c.$$
$$2r + 2(x + y) = a + b + c, \text{ но } x + y = AB = c,$$
$$2r + 2c = a + b + c,$$
$$r = \frac{a + b - c}{2} = p - c,$$

где p — полупериметр треугольника.

10) Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы $\left(R = \frac{c}{2}\right)$.

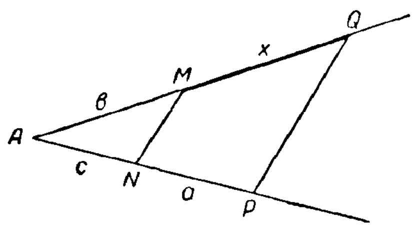
На этом последнем случае следует несколько задержаться, то есть потребовать от учащихся четкого обоснования вывода; возможно вспомнить свойство медианы прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла.

§ 27. Алгебраический способ решения геометрических задач на построение

Данная тема распадается на два раздела. В первом разделе (подготовительном) рассматривается проблема построения отрезка по данной формуле, в которой каждое число, выраженное буквой означает длину некоторого отрезка. В учебниках эта проблема рассматривается очень бегло, а между тем учащиеся не сразу усваивают самую сущность ее. На разборе основных задач надо остановиться подробнее; все построения необходимо выполнять с наибольшей возможной точностью.

Задача 1. Построить отрезок x по формуле $x = a + b$, в которой числа a и b выражают длины отрезков, измеренные одной и той же линейной единицей [1]).

По условию задачи требуется построить отрезок x, длина которого равнялась бы сумме длин данных отрезков.



Черт. 41.

Для решения задачи надо построить отрезки, имеющие длину a и b, и сложить их. Полученный отрезок и будет отрезком, построенным по формуле $x = a + b$.

Задача 2. Построить x по формуле $x = \frac{ab}{c}$. Эта формула для x получается из пропорции $c : a = b : x$ (пропорцию лучше записывать так, чтобы x был вторым крайним членом). Пропорция показывает, что искомый отрезок x является четвертым пропорциональным к отрезкам a, b и c. Решение этой задачи общеизвестно, но не лишним будет привести примерные образцы объяснений.

Построение (черт. 41).

1) На одной произвольно взятой стороне угла откладываем от его вершины отрезок AN, имеющий длину c, и NP, имеющий длину a.

2) На другой стороне от вершины откладываем отрезок AM, имеющий длину b (отрезки надо откладывать в той последовательности, как они записаны в пропорции).

---

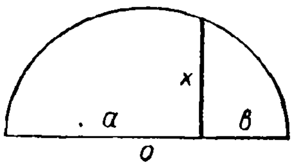
[1]) В дальнейшем точно так же будем считать, что все числа, входящие в формулу, выражают длины отрезков, измеренные одной и той же единицей измерения.

3) Проводим MN и $PQ \parallel MN$. Полученный отрезок MQ будет искомым отрезком, построенным по формуле $x = \frac{ab}{c}$, то есть будет иметь длину, равную $\frac{ab}{c}$ (линейных единиц).

Доказательство. По теореме о пропорциональных отрезках на сторонах угла $\frac{b}{c} = \frac{x}{a}$; $x = \frac{ab}{c}$.

Задача 3. Построить отрезок x по формуле $x = \sqrt{ab}$. Эта формула для x получается из пропорции $a : x = x : b$, которая показывает, что отрезок x является средним пропорциональным к отрезкам a и b.

Построение можно выполнить разными способами. Одно из построений показано на чертеже 42. Полученный отрезок x и будет отрезком, построенным по формуле $x = \sqrt{ab}$, то есть будет иметь длину, равную $\sqrt{ab}$ (лин. ед.). Хорошо, если учащиеся покажут и другие способы построения.



Черт. 42.

Задача 4. Построить отрезок x по формулам: 1) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ и 2) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$. В первом случае отрезок будет равен гипотенузе треугольника, в котором катеты равны отрезкам, имеющим длину a и b, во втором — катетом треугольника, в котором гипотенуза имеет длину, равную a, а другой катет — длину, равную b. Построение очевидно.

Задача 5. Построить отрезок x по формуле $x = \sqrt{ab + \frac{ac^2}{b}}$ (задача помещена в учебнике Никитина и Фетисова). Решение задачи необходимо сопровождать построением всех вспомогательных отрезков.

Данную формулу представляем в виде:

$$x = \sqrt{(\sqrt{ab})^2 + \left(\sqrt{\frac{ac}{b} \cdot c}\right)^2}.$$

Эта формула показывает, что отрезок x есть гипотенуза прямоугольного треугольника, в котором катетами являются отрезки, имеющие длину $\sqrt{ab}$ и $\sqrt{\frac{ac}{b} \cdot c}$.

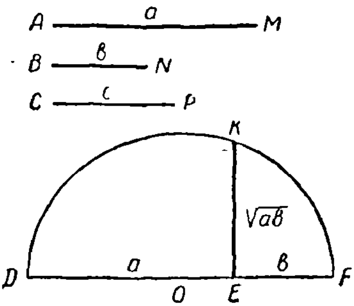
Пусть отрезок AM имеет длину a; отрезок BN — длину b и отрезок CP — длину c.

1) Строим отрезок по формуле $\sqrt{ab}$ (черт. 43):

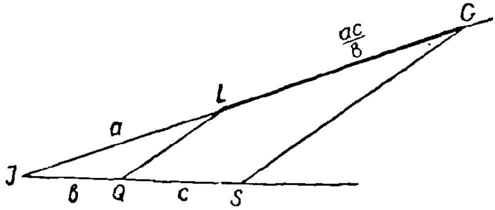
$$DE = a;\ EF = b;\ KE \perp DF;\ EK = \sqrt{ab}.$$

2) Строим отрезок по формуле $\frac{ac}{b}$ (черт. 44);

$$IL = a;\ IQ = b;\ QS = c;$$
$$QL;\ SG \parallel QL;$$
$$LG = \frac{ac}{b}.$$



Черт. 43.

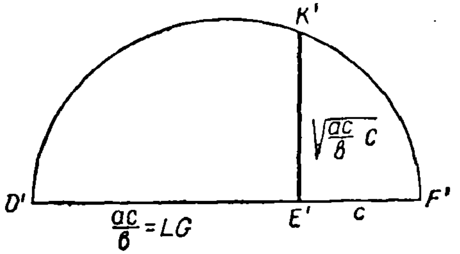


Черт. 44.

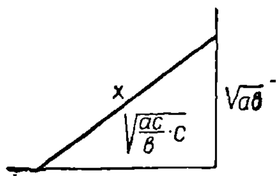
3) Строим отрезок по формуле $\sqrt{\frac{ac}{b} \cdot c}$, то есть по формуле $\sqrt{LG \cdot c}$ (черт. 44 и 45).

$$D'E' = LG = \frac{ac}{b};\ E'F' = c;\ E'K' = \sqrt{\frac{ac}{b} \cdot c}.$$

4) Строим отрезок x по формуле $x = \sqrt{(\sqrt{ab})^2 + \left(\sqrt{\frac{ac}{b} \cdot c}\right)^2}$. Для чего строим прямоугольный треугольник, катеты которого



Черт. 45.



Черт. 46.

равны по длине отрезкам $E'K'$ и EK (черт. 43 и 45). Гипотенуза этого треугольника будет равна искомому отрезку x (черт. 46).

Решение последней задачи дано здесь так, как оно намечено в учебнике Никитина и Фетисова. Однако есть решение значительно более простое.

Преобразуем данную формулу следующим образом:

$$x = \sqrt{a\left(b + \frac{c^2}{b}\right)}.$$

Теперь построим $b + \frac{c^2}{b}$; $KL = \frac{c^2}{b} + b$ (черт. 47).

Теперь строим отрезок x (черт. 48).

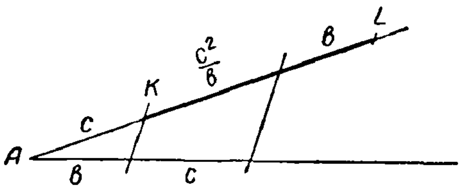
На этом чертеже $KL = \frac{c^2}{b} + b$; $KM = a$; $MN \perp KL$, тогда $KN = \sqrt{KM \cdot KL}$.

Доказательство ясно из построения.

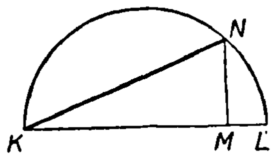
Второй (основной) раздел темы посвящен решению геометрических задач на построение, требующих предварительного вывода формул для выражения длин искомых отрезков через длины данных отрезков. Решение таких задач складывается обычно из следующих основных этапов:

1. Составление уравнений, выражающих зависимости между длинами данных и искомых отрезков.

2. Нахождение, путем решения полученных уравнений и систем уравнений, формул, выражающих длины искомых отрезков.



Черт. 47.



Черт. 48.

3. Построение искомых отрезков по найденным формулам. Для того чтобы составить уравнения по условию задачи, иногда приходится провести анализ в той форме, как это принято вообще при решении геометрических задач на построение.

Образцы решения задач на построение алгебраическим методом приведены в учебниках, причем решение этих задач начинается с анализа.

Понятно, что нельзя ограничиваться только описанием построений, необходимых для решения задачи, а следует все эти построения осуществить в действительности и притом так, как это вообще делается при решении задач на построение — при помощи чертежных инструментов, добиваясь наибольшей точности построений.

При проведении анализа надо особенно четко установить, длины каких отрезков являются данными, то есть известными, так как обычно в условии задачи это прямо не указывается; пока учащиеся не выяснят это, все решение задачи будет восприниматься ими только формально.

Решение задач на построение алгебраическим методом достаточно подробно изложено в учебниках Глаголева, Никитина и Фетисова.

Глава IV

ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

§ 28. Понятие о площади

Способ изложения данной главы в учебниках Киселева и Глаголева можно считать общеизвестным, поэтому есть смысл остановиться на способе изложения, принятом в учебнике Никитина и Фетисова.

Одной из особенностей этого учебника геометрии является то, что в нем почти нигде не упоминается о теории пределов. Применение этой теории заменяется использованием аксиомы Кантора.

Хотя в учебнике не дается формулировки аксиомы и поэтому нет и ссылок на нее, но в описательной форме эта аксиома неоднократно излагается и служит основанием для получения ряда выводов, например при определении отношения несоизмеримых отрезков, при доказательстве теорем о площади многоугольников и т. д.

Вообще представляется целесообразным сообщить учащимся предложение, выражающее смысл аксиомы Кантора.

«Пусть даны две бесконечные последовательности чисел: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ такие, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ при всех n и разности $b_n - a_n$ неограниченно приближаются к нулю при неограниченном увеличении n. Тогда существует одно и только одно число x, такое, что $a_n \leqslant x \leqslant b_n$» (взято из учебника алгебры, ч. II Фадеева и Соминского)[1]. Но можно изложить это и несколько иначе.

Пусть имеется последовательность приближенных значений какой-нибудь величины по недостатку и по избытку, причем:

1) каждое приближенное значение по недостатку меньше любого приближенного значения по избытку;

2) приближенные значения по недостатку последовательно увеличиваются, а приближенные значения по избытку уменьшаются;

3) разность между приближенным значением по избытку и приближенным значением по недостатку постоянно уменьшается и может стать меньше любого положительного числа.

Тогда существует одно и только одно число, которое больше всех приближенных значений по недостатку и меньше всех приближенных значений по избытку. Это число и считается (является) значением данной величины.

На этих положениях, выражающих смысл аксиомы Кантора, основывается доказательство теоремы о площади прямоугольника.

Идея вывода формулы площади прямоугольника в учебнике Никитина и Фетисова заключается в следующем.

---

[1] Фадеев Д. К. и Соминский И. С., Алгебра, ч. 2, Учпедгиз, 1954.

Предполагается, что общеизвестна формула площади прямоугольника, когда стороны его выражаются целыми числами при данной единице длины, равной длине единичного квадрата.

Вычисляются затем площади двух прямоугольников: меньшего, чем данный, и большего, чем данный; эти площади выражаются произведениями приближенных значений длин двух сторон прямоугольников. В одном случае вычисленные площади меньше площади данного прямоугольника, в другом больше. Истинное значение площади данного прямоугольника заключено между двумя площадями, то есть между приближенными значениями: по недостатку a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, ... и по избытку $a_1'b_1'$, $a_2'b_2'$, $a_3'b_3'$, ...

Далее в учебнике Никитина и Фетисова говорится: «Полученными приближенными значениями определяется число ab — произведение чисел a и b, так как числа a_1, a_2, a_3, ... и a_1', a_2', a_3', ... определяют число a, а числа b_1, b_2, b_3, ... и b_1', b_2', b_3', ... определяют число b.

Итак, площадь прямоугольника с основанием a и высотой b выражается формулой $S = ab$».

Окончательное заключение, что площадь прямоугольника выражается формулой $S = ab$, представляется неожиданным и потому не вполне убедительным. Чтобы это заключение сделать убедительным, следует разъяснить учащимся, что число, определяемое последовательностями приближенных значений некоторой величины, считается (является) значением этой величины. (Последовательности приближенных значений площади прямоугольника определяют число, выражающее площадь прямоугольника, равно как последовательности приближенных значений отношения несоизмеримых отрезков определяют число, выражающее это отношение.)

§ 29. Измерение площадей при помощи палетки или масштабной сетки

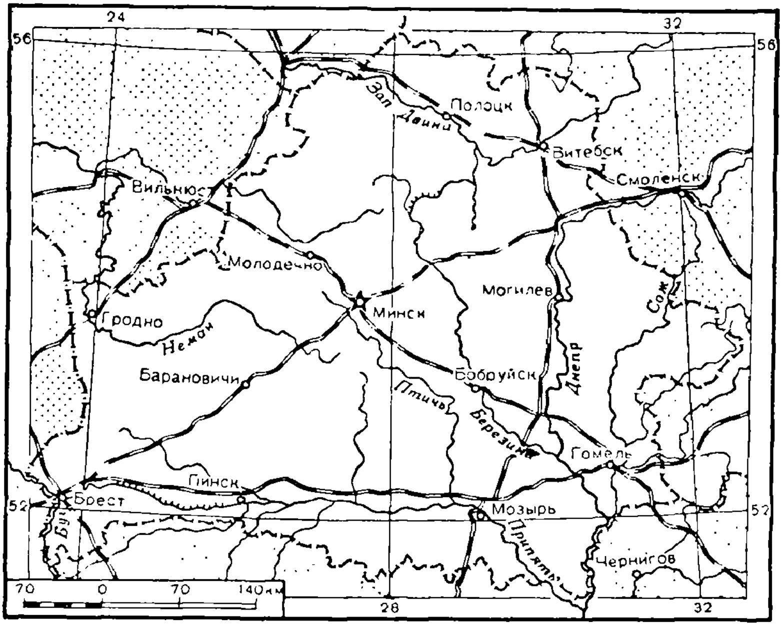
Измерение площади при помощи палетки следует использовать не только в качестве введения в понятие об измерении площадей (см. учебник Никитина и Фетисова), но и в качестве практической работы по приближенному измерению площадей плоских фигур.

Чтобы избежать чрезмерной громоздкости подсчетов, не следует брать фигуры с особо сложным контуром.

Затем вследствие трудности нанесения палетки на прозрачную бумагу целесообразно в качестве палетки брать миллиметровую бумагу, а измеряемую фигуру переснимать на прозрачную бумагу.

Хорошими практическими работами можно признать работы по измерению площади поверхностей различных областей СССР или различных небольших по площади стран[1]). Развитие навыков в производстве подобного рода измерений полезно. Учащимся придется производить перевод одних мер в другие, припомнить сведения о масштабах. Результаты измерений можно будет проверить по географическим справочникам.

Пример. Переснимаем на прозрачную бумагу карту Белорусской ССР (черт. 49). Накладываем ее на миллиметровую бумагу так, чтобы внутри границ республики поместилось наибольшее число больших квадратов с площадью по 1 *кв. см.*



Черт. 49.

Затем подсчитываем число малых квадратов с площадью по 1 *кв. мм*, помещающихся полностью внутри границ республики.

Таким образом, находим площадь фигуры, представляющей карту Белорусской ССР, по недостатку[2]).

Таким же образом можно найти площадь поверхности по избытку, для этого достаточно сосчитать число маленьких квадратов, по которым проходит граница республики, и прибавить их общую площадь к площади найденной по недостатку.

---

[1]) Не надо забывать, что при таких измерениях мы предполагаем измеряемые участки как части плоскости. Ошибка при таких измерениях тем меньшая, чем меньше измеряемый участок.

[2]) Надо учитывать, что при линейном масштабе, например $1 : 10^7$, площади изменяются в отношении $1 : 10^{14}$.

Среднее арифметическое между полученными значениями по недостатку и по избытку будет достаточно близко к числу 208 тыс., помещенному в статистическом сборнике «Народное хозяйство СССР» за 1956 г.

Эту работу можно распределить между группами учащихся. Для этого карту БССР, переснятую на кальку, надо разрезать на части, и каждая группа учащихся найдет площадь одной из полученных частей. Еще лучше находить площади отдельных областей республики.

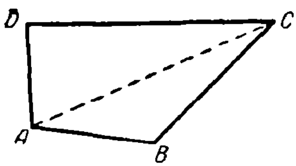
Доказательство теорем о площади треугольника, параллелограмма, ромба, трапеции, описанного многоугольника можно давать по любому из трех указываемых ранее учебников. Что касается теоремы об отношении площадей подобных многоугольников, то эта теорема проще доказывается в учебниках Глаголева и Никитина и Фетисова.

В «Сборнике задач по геометрии» ч. I, Рыбкина, в § 13, имеется большой набор задач на площади прямолинейных фигур. Решить все эти задачи в отведенное на изучение темы время невозможно. Придется использовать для работы в классе и для задания на дом только часть из них. В первую очередь целесообразно решить такие задачи: § 13, № 3—7, 12, 15—17, 25, 35, 45, 60, 67, 72—74, 80, 87 и др.

§ 30. Построение равновеликих фигур

Изложению теоремы о преобразовании многоугольника в равновеликий квадрат следует предпослать решение задачи на построение треугольника, равновеликого данному многоугольнику, как это и сделано во всех трех учебниках.

Решение этой задачи следует начать с анализа, так как, проделав анализ, учащиеся сознательнее и прочнее усвоят самый способ построения.



Черт. 50.

А н а л и з можно провести примерно таким образом. Пусть нам дан неправильный четырехугольник $ABCD$ (черт. 50). Его можно разбить диагональю AC на два треугольника ABC и ACD.

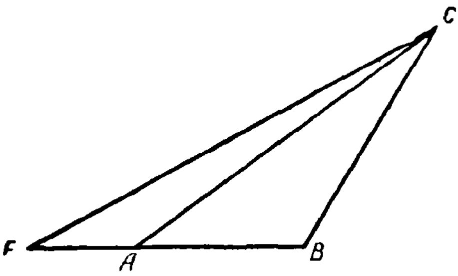
Нам надо получить вместо этих двух треугольников один треугольник, площадь которого равнялась бы сумме площадей треугольников ABC и ACD.

Два треугольника образуют вместе один треугольник, если, например, они расположены, как на чертеже 51, то есть, если основания их лежат на одной прямой (AB), вершина — общая (C) и одна сторона (AC) тоже общая.

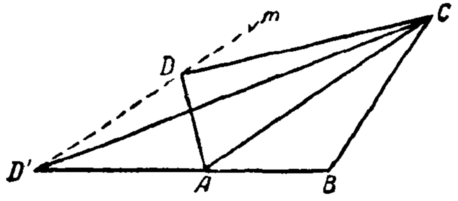
Естественно будет попробовать и два треугольника ABC и ACD (черт. 50), получившиеся из данного четырехугольника, расположить таким же образом. Однако сделать это оказывается невозможно.

Тогда возникает мысль, взяв один из этих треугольников, например треугольник ABC, пристроить к нему вместо треугольника ACD равновеликий треугольник ACD', как показано на чертеже 52.

Треугольники ABC и ACD' составляют теперь один треугольник $D'BC$. Но нам нужно, чтобы треугольник ACD' был равновелик треугольнику ACD. Положения вершин A и C треугольника ACD' определены, поэтому возникает вопрос о местоположении вершины D'.



Черт. 51.



Черт. 52

Считая у треугольников ACD и ACD' общим основанием сторону AC, увидим, что для того чтобы треугольники были равновелики, достаточно, чтобы вершины их D и D' лежали на прямой, параллельной AC, кроме того, вершина D' должна лежать на прямой AB. Таким образом, местоположение точки D' определено, а этим определяется и способ решения задачи.

Приведенный анализ в сокращенной форме может быть записан так:

1) $S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}$.

2) Треугольник ACD заменить треугольником $AD'C$.

3) $D' \subset AB$, $D' \subset m$, где $m \parallel AC$.

4) Способ построения точки D' найден, следовательно, можно построить треугольник $D'BC$ (искомый).

Построение: 1) проводим AC; 2) продолжаем AB; 3) проводим $m \parallel AC$ через точку D; 4) отмечаем точку D' (точку пересечения m и AB); 5) проводим $D'C$.

$\triangle CD'B$ — искомый треугольник, равновеликий четырехугольнику $ABCD$.

Доказательство не может вызвать затруднений.

Исследование. Задача всегда возможна, так как всегда возможно провести диагональ четырехугольника и провести через одну из вершин четырехугольника прямую, параллельную этой диагонали. Эта прямая пересечет продолжение стороны четырехугольника; точка пересечения определит положение третьей вершины искомого треугольника.

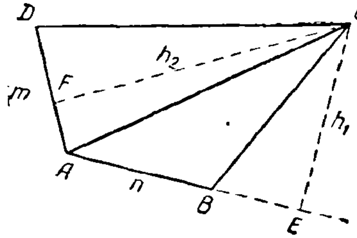
Задача имеет бесконечное множество решений в том смысле, что можно построить бесконечное множество треугольников, отвечающих условию задачи, но различных по форме. Учащиеся могут поставить вопрос о других способах решения этой задачи, в частности о таком способе решения, при котором ни треугольник ABC, ни треугольник ADC не оказываются включенными полностью в искомый треугольник.

Решение задачи в этом случае можно провести так (черт. 53): обозначим AD через m, AB через n, высоты треугольников ABC и ACD соответственно через h_1 и h_2, а площади их через S_1 и S_2.

Тогда:

$$S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot h_1 = \frac{1}{2} nh_1,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} AD \cdot h_2 = \frac{1}{2} mh_2.$$



Черт. 53.

Найдем теперь, какое основание должен иметь треугольник, равновеликий треугольнику ACD и имеющий высоту h_1, то есть такую, как у треугольника ABC.

Обозначим это основание через x. Тогда $S_2 = \frac{1}{2} x \cdot h_1$ и, следовательно, $mh_2 = xh_1$, откуда $x = \frac{mh_2}{h_1}$. Значит, отрезок x является четвертым пропорциональным к отрезкам h_1, h_2 и m.

Найдя построением этот отрезок x, легко построить и искомый треугольник, равновеликий данному четырехугольнику; для этого достаточно построить треугольник с основанием, равным $n + x$, и высотой, равной h_1.

Преобразование треугольника в равновеликий прямоугольник рассматривать отдельно не имеет смысла ввиду элементарности этой задачи. Задачу о преобразовании прямоугольника в равновеликий квадрат имеет смысл решить до доказательства теоремы о преобразовании многоугольника только в том случае, если подобная задача ранее не разбиралась (например, в разделе решения задач на построение алгебраическим методом).

В таком случае анализ будет заключаться в установлении зависимости между стороной искомого квадрата и сторонами данного прямоугольника, то есть в составлении уравнения $x^2 = ab$, где x — сторона квадрата, а a и b — стороны прямоугольника, а затем и в том, что для нахождения стороны квадрата надо построить отрезок, средний пропорциональный между отрезками a и b.

После проведения такой предварительной работы доказательство теоремы о том, что всякий многоугольник можно преобразовать в равновеликий ему квадрат, не встретит затруднений и даже может быть поручено самим учащимся.

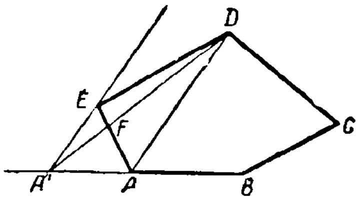
После доказательства теоремы полезно указать учащимся на равновеликость треугольников EFD и $A'FA$ (черт. 54).

В учебнике Никитина и Фетисова изложено решение такой задачи: «Поле, имеющее форму неправильного четырехугольника, разделить на две равновеликие части при помощи межи, проходящей через заданную точку на его стороне».

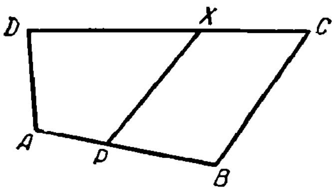
Решение этой задачи может затруднить учащихся сложностью построения, а главное многочисленностью вспомогательных линий. Поэтому можно рекомендовать использование не одного, а нескольких, постепенно получающихся чертежей.

Решение задачи начинаем с анализа.

Анализ. Пусть четырехугольник $ABCD$ дает изображение этого поля; P — заданная точка на стороне AB (черт. 55). Предположим, что PX — искомая прямая, делящая четырехугольник $ABCD$ на два равновеликих четырехугольника $APXD$ и $PBCX$.



Черт. 54.



Черт. 55.

Каждый из образовавшихся четырехугольников можно преобразовать в равновеликий треугольник с вершиной P и основанием, лежащим на прямой CD. Эти треугольники будут иметь общую сторону PX и будут равновелики, поэтому и основания их будут равны.

Вместе эти треугольники составят один треугольник, в котором искомая прямая PX будет являться медианой и который будет равновелик данному четырехугольнику $ABCD$.

Если построить этот треугольник, то можно будет провести и его медиану, то есть найти точное местоположение искомой прямой PX.

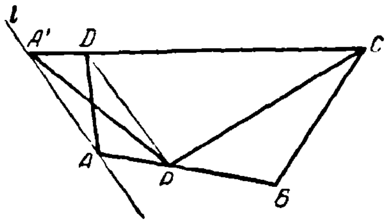
Таким образом, возникает вопрос о построении треугольника с вершиной в точке P и основанием, лежащим на прямой CD, равновеликого данному четырехугольнику $ABCD$. Но нам известен способ преобразования четырехугольника в такой равновеликий ему треугольник, вершина которого совпадает с одной из вершин четырехугольника. Поэтому надо разбить четырехугольник $ABCD$ либо на два произвольных четырехугольника, но для каждого из которых точка P являлась бы вершиной, либо, что проще, на четырехугольник и треугольник.

Таким образом, определяется порядок решения задачи.

Построение (черт. 56).

1) Проводим прямую PC.

2) Получившийся четырехугольник $APCD$ преобразуем в равновеликий треугольник с вершиной в точке P и основанием на прямой CD. Для этого в четырехугольнике $APCD$ проводим диагональ PD, а через вершину A прямую l, параллельную PD, и отмечаем точку пересечения прямых l и CD, то есть точку A'.

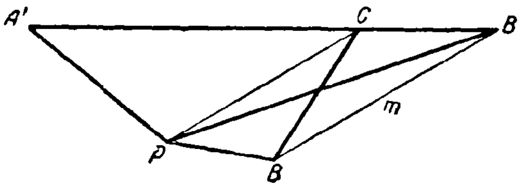


Черт. 56.

3) Проводим прямую $A'P$ и получаем треугольник $A'PC$, равновеликий четырехугольнику $APCD$.

4) Присоединив к этому треугольнику треугольник PBC, получим четырехугольник $A'PBC$, равновеликий четырехугольнику $ABCD$, изображающему данное поле.

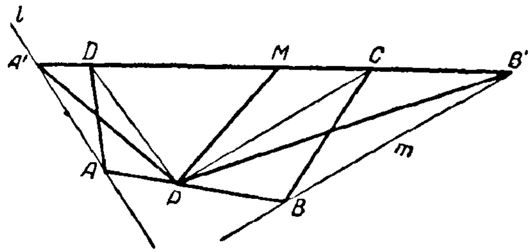
Теперь этот четырехугольник $A'PBC$ преобразуем в равновеликий треугольник с вершиной в точке P и основанием на прямой $A'C$ (черт. 57).



Черт. 57.

Диагональю этого четырехугольника служит PC, поэтому проводим через точку B прямую m параллельно PC и находим точку пересечения прямых m и $A'C$, то есть точку B'. Проведя прямую PB', получим треугольник $PA'B'$, равновеликий четырехугольнику $A'PBC$, а следовательно, и четырехугольнику $ABCD$.

5) Строим теперь чертеж, на котором восстанавливаем все основные и вспомогательные линии (черт. 58).



Черт. 58.

6) Проводим медиану PM треугольника $A'PB'$.

Прямая PM и есть искомая, делящая четырехугольник $ABCD$ на две равновеликие части.

Доказательство.

1) Треугольник $A'PB'$ равновелик по построению четырехугольнику $ABCD$.

2) Медианой PM треугольник $A'PB'$ разделяется на два равновеликих треугольника $A'PM$ и MPB', значит площадь каж-

дого из них равна половине площади данного четырехугольника $ABCD$.

3) Треугольник MPB' равновелик четырехугольнику $MPBC$, так как

$$S_{\triangle MPB'} = S_{MPBB'} - S_{\triangle PBB'}; \quad S_{MPBC} = S_{MPBB'} - S_{\triangle CBB'},$$

а треугольники PBB' и CBB' равновелики.

4) Следовательно, четырехугольник $MPBC$ имеет площадь, равную половине площади четырехугольника $ABCD$, то есть прямая PM действительно делит четырехугольник $ABCD$ на две равновеликие части.

Чтобы на поле провести требуемую межу, делящую поле пополам (по площади), надо или при заданной на стороне AB точке P построить угол, соответственно равный углу BPM, и по полученному направлению провести межу, или сторону поля CD разделить на части, пропорциональные отрезкам MC и MD (чертежа) и полученную точку деления соединить межой с точкой P.

Рассмотренные выше задачи, а также и многие другие задачи на построение равновеликих фигур, представляют большие трудности для учащихся. Учащихся необходимо все же ознакомить с такими задачами.

Все же основными задачами по теме «Измерение площадей многоугольников» надо считать задачи на вычисление площадей. Эти задачи, в частности, следует решать также и при проведении практических программных работ, например при мензульной съемке. Здесь задачу на построение можно связать с задачей на вычисление. Например, после съемки плана некоторого участка земли в форме многоугольника предложить учащимся найти площадь участка, учитывая масштаб плана. Для этого предварительно найти площадь данного многоугольника, например в квадратных сантиметрах[1]). Работу эту можно выполнить разными способами, например: 1) разбив многоугольник диагоналями на треугольники, вычислить площадь каждого полученного треугольника и затем сложить эти площади; 2) преобразовав предварительно многоугольник в равновеликий треугольник, найти площадь полученного треугольника.

Второй способ, вообще говоря, дает более точные результаты и требует значительно меньшей вычислительной и измерительной работы. Возможно здесь также воспользоваться и палеткой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В течение последних недель учебного года необходимо увязывать изучение нового материала с повторением пройденного; решать задачи не только на новый материал, но и на изученный.

[1]) Можно длины отрезков, измеренные на плане в сантиметрах или миллиметрах, сразу же переводить по масштабу в метры, тогда будет получаться непосредственно в квадратных метрах площадь самого участка.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Работа № 1. **Измерение отрезков, отношение их**

Вариант А

1) В треугольнике ABC с углами $A = 38°$ и $B = 102°$ провести биссектрису CD и найти: а) отношение $AC : BC$ и б) отношение отрезков AD и BD. Сравнить полученные отношения и высказать предположение.

2) Взять произвольный отрезок AB и построить отрезок x так, чтобы $x : AB = 1\frac{5}{8}$. Решить задачу двумя способами: а) не произведя измерений и б) путем измерения длины данного отрезка AB и вычисления длины искомого отрезка x.

Вариант В.

1) В прямоугольном треугольнике с острым углом в 38° провести высоту из вершины прямого угла и найти: а) отношение этой высоты к одному из катетов; б) отношение другого катета к гипотенузе. Сравнить полученные отношения и высказать предположение.

2) Взять произвольный отрезок за основание равнобедренного треугольника и построить треугольник так, чтобы отношение его основания к боковой стороне равнялось $1\frac{3}{8}$. Решить задачу двумя способами: а) измерив длину данного отрезка и вычислив длину искомого отрезка, б) не производя измерений.

Работа № 2. **Пропорциональность отрезков**

Вариант А

1) В треугольнике ABC сторона AC равна 48 *м*. Из вершины B внутри треугольника проведены прямые, пересекающие AC в точках D и F так, что $AD : DF : FC = 5 : 2 : 1$. Сторона AB разделена на три равные части и через точки деления проведены внутри треугольника отрезки, параллельные стороне AC. На какие части делятся эти отрезки прямыми BD и BF? [20; 8; 4 и 10; 4; 2].

2) Стороны треугольника относятся, как $7 : 11 : 12$. Найти длины отрезков, на которые биссектриса большего угла треугольника, равная 3,5, делится биссектрисой одного из других углов треугольника. [1,4 *м* и 2,1 *м*].

Вариант Б

1) Основание треугольника равно 16,5 *м*, боковые стороны равны 10 *см* и 12 *см*. На высоте треугольника взята точка F так, что расстояния от нее до вершины треугольника и до основания относятся, как $2 : 1$. Через точку F проведена прямая, параллельная основанию треугольника. На какие части отрезок этой пря-

мой, заключенный внутри треугольника, делится биссектрисой угла при вершине треугольника? [6 *см* и 5 *см*].

2) Внутри равнобедренного треугольника через середину высоты проведена прямая, параллельная боковой стороне треугольника. Зная, что отрезок этой прямой, заключенный внутри треугольника, равен 9 *см*, найти отрезки, на которые рассекается этой прямой боковая сторона треугольника. [9 *см* и 3 *см*]

Работа № 3. **Подобие треугольников**

Вариант А

1) Из середины гипотенузы восставлен к ней перпендикуляр до пересечения с большим катетом, который рассекается этим перпендикуляром на отрезки, равные 18 *см* и 7 *см*. Определить гипотенузу. [30 *см*]

2) Доказать, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ угол A равен углу A_1 и стороны AB и A_1B_1 пропорциональны биссектрисам углов A и A_1, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

Вариант Б

1) В треугольнике ABC даны $AB = 15$ *см* и $AC = 30$ *см*. Из точки D на стороне AB проведена к стороне AC прямая DF так, что $\angle ADF = \angle ACB$. Найти отрезки AD и AF, если известно, что AD больше AF на 5 *см*. [5 *см*, 10 *см*]

2) В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$, где AD и A_1D_1 — медианы треугольников. Доказать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

Работа № 4. **Гомотетия треугольников и многоугольников**

Вариант А

1) Построить треугольник по отношению сторон $2:3:4$ и медиане, проведенной из вершин меньшего угла, равной данному отрезку m. Задачу решить с полным объяснением.

2) Построить фигуру, гомотетичную данной неравнобочной трапеции, приняв за центр гомотетии точку пересечения продолжения боковых сторон и взяв $k = -2$. Требуется выполнить и описать построение.

Вариант Б

1) Построить треугольник ABC по углу A при основании, биссектрисе этого угла $AF = l$ и отношению высоты к основанию $BD : AC = m : n$. Задачу решить с полным объяснением.

2) Построить фигуру, гомотетичную данной неравнобочной трапеции, приняв за центр гомотетии точку F, делящую большее основание AD на отрезки, находящиеся в отношении $2:1$, и взяв $k = 2$.

Работа № 5. По всей теме **«Гомотетия и подобие»**[1])

Вариант А

1) Построить трапецию, если даны: отношение оснований ее $AD:BC=m:n$, углы A и D при основании и диагональ AC.

2) Прямоугольник, стороны которого относятся, как $2:5$, вписан в прямоугольный треугольник так, что две вершины прямоугольника лежат на катетах треугольника, а две другие — на гипотенузе на расстоянии 3 *см* и 12 *см* от ближайших концов ее. Найти высоту треугольника, опущенную на гипотенузу. [12 *см*]

Вариант Б

1) Даны отрезки m, n и l. Построить ромб, в котором отношение высоты к стороне равнялось бы отношению отрезков m и n, а большая диагональ равнялась бы отрезку l.

2) Около параллелограмма $ABCD$ описан треугольник AMN так, что острый угол A у них общий, а сторона треугольника MN проходит через вершину C параллелограмма. Стороны параллелограмма $AB=8$ *см*, $AD=9$ *см*. Найти стороны треугольника, образующие угол A, зная, что отрезки этих сторон BM и DN относятся, как $2:1$. [20 *см* и 15 *см*]

Работа № 6. **Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике**

Вариант А

1) В прямоугольной трапеции основания $a=45{,}8$ *дм*; $b=21{,}4$ *дм*. Найти с точностью до 0,1 боковые стороны, если отношение их равно $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

2) В равнобедренном треугольнике проекция боковой высоты на основание равна m, основание равно b. Найти боковые стороны треугольника. $\left[\frac{b}{2}\sqrt{\frac{b}{b-m}}\right]$

Вариант Б

1) В ромбе $ABCD$ высота равна 3,45 *м*. Зная, что высота BE отсекает от основания отрезок ED, составляющий 0,70 основания, найти сторону ромба с точностью до 0,01 *м*.

2) В равнобочной трапеции диагональ перпендикулярна к боковой стороне; большее основание равно a, а проекция на него боковой стороны равна c. Найти расстояние от точки пересечения продолжения боковых сторон трапеции до вершин большего основания. $\left[\frac{a\sqrt{ac}}{2c}\right]$

---

[1]) По своему характеру эта работа такая же, как работа № 4, но содержит материал несколько более трудный. Проведение ее предполагается в начале второго полугодия.

Работа № 7. **Тригонометрические функции острого угла**

Вариант А

1) Решить прямоугольный треугольник по гипотенузе, равной 0,79 *м* и катету, равному 0,27 *м*. [0,70 *м*; 21°; 69°]

2) Желая определить высоту башни, наблюдатель из пункта *А* измерил угол между горизонтом и направлением к карнизу первого этажа башни. Этот угол оказался равным 13°. Затем наблюдатель измерил угол между горизонтом и направлением к верхушке башни, оказавшийся равным 32°. Зная, что карниз первого этажа находится на высоте 3,15 *м*, определить высоту башни. [8,5 *м*]

Вариант Б

1) Решить прямоугольный треугольник по данным катетам $a = 0{,}47$ *м* и $b = 1{,}08$ *м*. [1,2 *м*; 23°; 67°]

2) Определить, какой длины следует изготовить переносную лестницу, чтобы она, будучи приставлена к стене под углом в 72° к горизонту, достигала до крыши, находящейся на высоте 5,5 *м* от земли так, чтобы от края крыши до конца лестницы было еще 0,3 *м*. [6,1 *м*]

Работа № 8. **Метрические соотношения в треугольнике**

Вариант А

1) В круг радиуса $R = 23{,}2$ *м* вписан равнобедренный треугольник, боковая сторона которого $b = 38{,}6$ *м*. Найти основание треугольника.

2) Две стороны треугольника равны 34 *см* и 56 *см*, медиана, проведенная к третьей стороне, равна 39 *см*. Найти расстояние от конца этой медианы до большей из данных сторон. [15 *см*]

Вариант В

1) В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 37,4 *м*, высота, опущенная на основание, равна 28,5 *м*. Найти радиус круга вписанного в этот треугольник.

2) Основание треугольника равно 30 *см*, большая боковая сторона равна 51 *см*, проекция этой боковой стороны на основание равна 46,2 *см*. На какие части делится другая боковая сторона биссектрисой угла, образованного данными сторонами треугольника? [10 *см* и 17 *см*]

Работа № 9. **Пропорциональные отрезки в круге**[1]

Вариант А

1) Хорда, пересекая диаметр окружности, делит его на отрезки в отношении 1 : 5, а сама делится на отрезки, разность

[1] Работу № 9 можно объединить с работой № 10, взяв для задания первые упражнения из этих работ.

которых равна 2 *см*. Найти диаметр окружности, зная что он больше хорды на 6 *см*. [24 *см*]

2) Две окружности имеют внешнее касание в точке F. Доказать, что каждая точка X общей внутренней касательной к этим окружностям обладает следующим свойством: если из этой точки провести прямую a, пересекающую одну окружность последовательно в точках A и B, и прямую b, пересекающую другую окружность последовательно в точках C и D, то из образовавшихся отрезков можно составить пропорцию $\frac{XA}{XC}=\frac{XD}{XB}$.

Вариант Б

1) Хорда, пересекающая диаметр, делит его на отрезки, из которых один больше другого на 7 *см*, а хорда делится в точке пересечения на отрезки, различающиеся друг от друга на 1 *см*. Зная, что сумма диаметра и хорды равна 24 *см*, найти диаметр окружности. [13 *см*]

2) Две окружности имеют внутреннее касание в точке F. Доказать, что если из любой точки M общей касательной к этим окружностям провести прямую, пересекающую обе окружности последовательно в точках A, B, C, D, то на этой прямой образуются отрезки MA, MB, MC и MD, удовлетворяющие соотношению $\frac{MA}{MB}=\frac{MC}{MD}$.

Работа № 10. **Построение формул**

Вариант А

1) Построить отрезок x по формуле:

$$x=\frac{a(a+b)}{a-b}+2\sqrt{ab},$$

где a и b — данные отрезки.

2) Построить параллелограмм, если даны: а) периметр его, б) отрезки, на которые биссектриса тупого угла параллелограмма делит его диагональ.

Вариант Б

1) Построить отрезок x по формуле:

$$x=\sqrt{(a-b)^2+ab},$$

где a и b — данные отрезки.

2) Построить треугольник, зная: а) основание его, б) положение на нем точки F, служащей основанием биссектрисы угла при вершине треугольника, и в) разность боковых сторон.

Работа № 11. **Измерение площадей**[1]

Вариант А

1) В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна m и составляет с гипотенузой угол в 60°. Найти площадь этого треугольника. $\left[\frac{1}{2} m^2 \sqrt{3}\right]$

2) Проекция центра круга, вписанного в ромб, на его сторону делит ее на отрезки 2,73 *м* и 1,27 *м*. Найти площадь ромба с точностью до 0,1 $м^2$. [14,9 *м*]

Вариант Б

1) В круг радиуса R вписана трапеция, острый угол которой равен 60° и одно из оснований равно боковой стороне. Найти площадь трапеции. $\left[\frac{3\sqrt{3}}{4} R^2\right]$

2) Перпендикуляр, опущенный на основание равнобедренного треугольника из точки пересечения боковой стороны с высотой, проведенной к этой стороне, делит основание на отрезки 16,4 *м* и 3,6 *м*. Найти площадь треугольника с точностью до 1 $м^2$. [213 $м^2$]

---

[1] При решении второй задачи учащиеся должны пользоваться таблицами Брадиса.

СОДЕРЖАНИЕ

Алгебра

Геометрия

Методические указания к преподаванию алгебры и геометрии в VIII классе

Редактор *Н. П. Лепешкина*

Художественный редактор *Б. Л. Николаев*
Технический редактор *И. Г. Крейс*
Корректоры: *Т. И. Крысанова и М. И. Воронкина*

Сдано в набор 12/III 1957 г. Подписано к печати 17/III 1958 г.
$60 \times 92^1/_{16}$. Печ. л. 11. Уч.-изд. л. 10,62. Тираж 45 000 экз.
А02170.
Учпедгиз. Москва, Чистые пруды, 6.

Книжная фабрика им. Фрунзе Главиздата Министерства культуры УССР,
Харьков, Донец-Захаржевская, 6/8. № 486.

Цена 2 р. 85 коп.