А.П. Киселев
Н.А. Рыбкин

ГЕОМЕТРИЯ

СТЕРЕОМЕТРИЯ 10•11 классы

Учебник и задачник

Издательский
дом
'Дрофа'
1995

Киселев А. П., Рыбкин Н. А.

К44 Геометрия: Стереометрия: 10 –11 кл.: Учебник и задачник. — М.: Дрофа, 1995. — 224 с.: ил.

ISBN 5–7107–0478–4

Учебник по геометрии известнейшего русского педагога-математика А. П. Киселева выдержал несколько десятков изданий. Благодаря простоте изложения материала, продуманной методике, строгой научности, учебник необыкновенно популярен и заслужил признательность многих поколений школьников и учителей. Неоднократно переиздавался и задачник по геометрии Н. А. Рыбкина. Оба пособия и сегодня могут быть успешно использованы в общеобразовательных учебных заведениях разных типов и для самообразования.

Тексты с небольшими редакционными исправлениями печатаются по изданиям: *Киселев А. П. Геометрия: Ч. 2: Стереометрия. – М: Просвещение, 1974; Рыбкин Н. А.* Сборник задач по геометрии: Стереометрия. — М.: Просвещение, 1974.

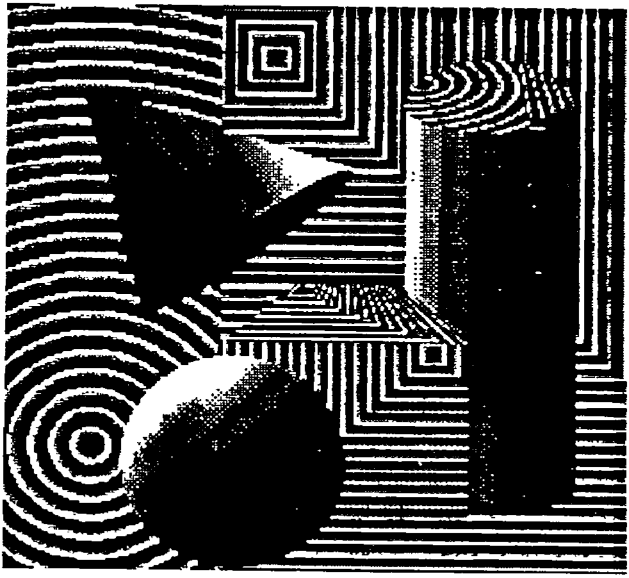
ББК 22.151я72

А. П. Киселев

Геометрия

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Учебник
для 10-11 классов



Предварительные замечания

1. В стереометрии изучаются геометрические тела и пространственные фигуры, не все точки которых лежат в одной плоскости. Пространственные фигуры изображаются на чертеже при помощи рисунков, которые производят на глаз приблизительно такое же впечатление, как и сама фигура. Эти рисунки выполняются по определенным правилам, основанным на геометрических свойствах фигур.

Один из способов изображения пространственных фигур на плоскости будет указан в дальнейшем (§ 54–56).

ГЛАВА I

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

2. Изображение плоскости. В обыденной жизни многие предметы, поверхность которых напоминает геометрическую плоскость, имеют форму прямоугольника: переплет книги, оконное стекло, поверхность письменного стола и т.п. При этом если смотреть на эти предметы под углом и с большого расстояния, то они представляются нам имеющими форму параллелограмма. Поэтому принято изображать плоскость в виде параллелограмма[1]. Эту плоскость обычно обозначают одной буквой, например «плоскость *M*» (рис. 1).

3. Основные свойства плоскости. Укажем следующие свойства плоскости, которые принимаются без доказательства, т.е. являются аксиомами:

---

[1] Наряду с указанным изображением плоскости возможно и такое, как на рисунках 15–17 и др. (*Прим. ред.*)

1) *Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и каждая точка этой прямой принадлежит плоскости.*

2) *Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.*

3) *Через всякие три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.*

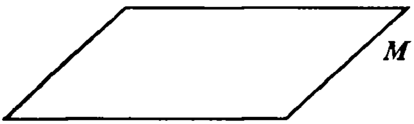


Рис. 1.

4. Следствия. Из последнего предложения можно вывести следствия:

1) *Через прямую и точку вне ее можно провести плоскость (и только одну).* Действительно, точка вне прямой вместе с какими-нибудь двумя точками этой прямой составляют три точки, через которые можно провести плоскость (и притом одну).

2) *Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость (и только одну).* Действительно, взяв точку пересечения и еще по одной точке на каждой прямой, мы будем иметь три точки, через которые можно провести плоскость (и притом одну).

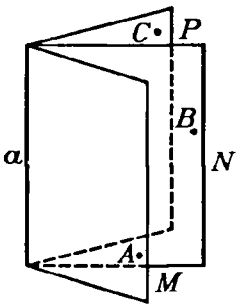


Рис. 2.

3) *Через две параллельные прямые можно провести только одну плоскость.* Действительно, параллельные прямые, по определению, лежат в одной плоскости; эта плоскость единственная, так как через одну из параллельных и какую-нибудь точку другой можно провести не более одной плоскости.

5. Вращение плоскости вокруг прямой. ***Через каждую прямую в пространстве можно провести бесчисленное множество плоскостей.*** В самом деле, пусть дана прямая a (рис. 2). Возьмем какую-нибудь точку A вне ее. Через точку A и прямую a проходит единственная плоскость (§ 4). Назовем ее плоскостью M. Возьмем новую точку B вне плоскости M. Через точку B и прямую a в свою очередь проходит плоскость. Назовем ее плоскостью N. Она не может совпадать с M, так как в ней лежит точка B, которая не принадлежит плоскости M. Мы можем далее взять в пространстве еще новую точку C вне плоскостей M и N. Через точку C и прямую a

проходит новая плоскость. Назовем ее P. Она не совпадает ни с M, ни с N, так как в ней находится точка C, не принадлежащая ни плоскости M, ни плоскости N. Продолжая брать в пространстве все новые и новые точки, мы будем таким путем получать все новые и новые плоскости, проходящие через данную прямую a. Таких плоскостей будет **бесчисленное множество**. Все эти плоскости можно рассматривать как различные положения одной и той же плоскости, которая **вращается** вокруг прямой a.

Мы можем, следовательно, высказать еще одно свойство плоскости: плоскость может вращаться вокруг всякой прямой, лежащей в этой плоскости.

6. Задачи на построение в пространстве. Все построения, которые делались в планиметрии, выполнялись в одной плоскости при помощи чертежных инструментов. Для построения в пространстве чертежные инструменты становятся уже не пригодными, так как чертить фигуры в пространстве невозможно. Кроме того, при построениях в пространстве появляется еще новый элемент — **плоскость**, построение которой в пространстве нельзя выполнять столь простыми средствами, как построение прямой на плоскости.

Поэтому при построениях в пространстве необходимо точно определить, что значит выполнить то или иное построение и, в частности, что значит построить плоскость в пространстве. Во всех построениях в пространстве мы будем предполагать:

1) что плоскость может быть построена, если найдены элементы, определяющие ее положение в пространстве (§ 3 и 4), т.е. что мы умеем построить плоскость, проходящую через три данные точки, через прямую и точку вне ее, через две пересекающиеся или две параллельные прямые;

2) что если даны две пересекающиеся плоскости, то дана и линия их пересечения, т.е. что мы умеем найти линию пересечения двух плоскостей;

3) что если в пространстве дана плоскость, то мы можем выполнять в ней все построения, которые выполнялись в планиметрии.

Выполнить какое-либо построение в пространстве — это значит свести его к конечному числу только что указанных основных построений. При помощи этих основных задач можно решать и задачи более сложные.

В этих предположениях и решаются задачи на построение в стереометрии.

7. Пример задачи на построение в пространстве. З а д а ч а. *Найти точку пересечения данной прямой a* (рис. 3) *с данной плоскостью P.* Возьмем на плоскости P какую-либо точку A. Через точку A и прямую a проводим плоскость Q. Она пересекает плоскость P по некоторой прямой b. В плоскости Q находим точку C пересечения прямых a и b. Эта точка и будет искомой. Если прямые a и b окажутся параллельными, то задача не будет иметь решения.

II. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

Параллельные прямые

8. Предварительное замечание. Две прямые могут быть расположены в пространстве так, что через них нельзя провести плоскость. Возьмем, например (рис. 4), две такие прямые AB и DE, из которых одна пересекает некоторую плоскость P, а другая лежит на ней, но не проходит через точку (C) пересечения первой прямой и плоскости P. Через такие две прямые нельзя провести плоскость, потому что в противном случае через прямую DE и точку C проходили бы две различные плоскости: одна P, пересекающая прямую AB, и другая, содержащая ее, а это невозможно (§ 3).

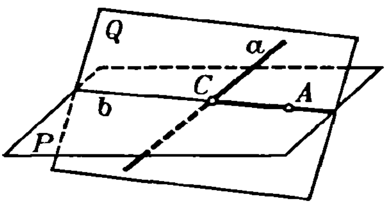


Рис. 3.

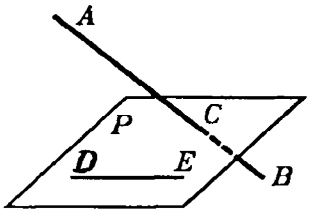


Рис. 4.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, конечно, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали; однако их не называют параллельными, оставляя это название для таких прямых, которые, н а х о д я с ь в о д н о й п л о с к о с т и, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются **скрещивающимися**.

Прямая и плоскость, параллельные между собой

9. Определение. Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, называются **параллельными**, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

10. Теорема. ***Если прямая** (AB, рис. 5) **параллельна какой-нибудь прямой** (CD), **расположенной в плоскости** (P), **то она параллельна самой плоскости.***

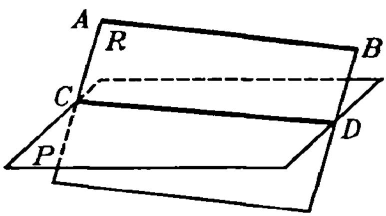


Рис. 5.

Проведем через AB и CD плоскость R и предположим, что прямая AB где-нибудь пересекается с плоскостью P. Тогда точка пересечения, находясь на прямой AB, должна принадлежать так же и плоскости R, на которой лежит прямая AB, в то же время точка пересечения, конечно, должна принадлежать и плоскости P. Значит, точка пересечения, находясь одновременно и на плоскости R и на плоскости P, должна лежать на прямой CD, по которой пересекаются эти плоскости; следовательно, прямая AB пересекается с прямой CD. Но это невозможно, так как по условию $AB \| CD$, значит, нельзя допустить, чтобы прямая AB пересекалась с плоскостью Р, и потому $AB \| P$.

11. Теорема. ***Если плоскость** (R, рис. 5) **проходит через прямую** (AB), **параллельную другой плоскости** (P), **и пересекает эту плоскость, то линия пересечения** (CD) **параллельна первой прямой** (AB).*

Действительно, во-первых, прямая CD лежит в одной плоскости с прямой AB, во-вторых, эта прямая не может пересечься с прямой AB, потому что в противном случае прямая AB пересекалась бы с плоскостью P, что невозможно.

12. Следствие 1. *Если прямая (AB, рис. 6) параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей (P и Q), то она параллельна линии их пересечения (CD).*

Проведем плоскость через AB и какую-нибудь точку M прямой CD. Эта плоскость должна пересечься с плоскостями P и Q по прямым, параллельным AB и проходящим через точку M. Но через точку M можно провести только одну прямую, параллельную AB; значит, две линии пересечения проведенной плоскости с плоскостями P и Q должны слиться в одну прямую. Эта прямая, находясь одновременно на плоскости P и на плоскости Q, должна совпадать с прямой CD, по которой плоскости P и Q пересекаются; значит, $CD \parallel AB$.

13. Следствие 2. *Если две прямые* (AB и CD, рис. 7) ***параллельны третьей прямой*** (EF), ***то они параллельны между собой.***

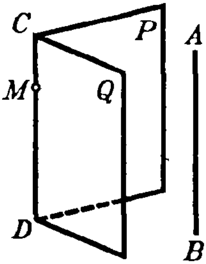


Рис. 6.

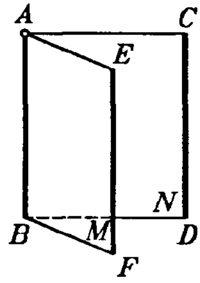


Рис. 7.

Проведем плоскость M через параллельные прямые AB и EF. Так как $CD \parallel EF$, то $CD \parallel M$ (§ 10).

Проведем также плоскость N через CD в некоторую точку A прямой AB. Так как $EF \parallel CD$, то $EF \parallel N$. Значит, плоскость N должна пересечься с плоскостью M по прямой, параллельной EF (§ 11) и в то же время проходящей через точку A. Но в плоскости M через точку A проходит единственная прямая, параллельная EF, именно прямая AB. Следовательно, плоскость N пересекается с M по прямой AB; значит, $CD \parallel AB$.

Параллельные плоскости

14. Определение. Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

15. Теорема. ***Если две пересекающиеся прямые*** (AB и AC, рис. 8) ***одной плоскости*** (P) ***соответственно параллельны двум прямым*** (A_1B_1 и A_1C_1) ***другой плоскости*** (Q), ***то эти плоскости параллельны.***

Прямые AB и AC параллельны плоскости Q (§ 10). Допустим, что плоскости P и Q пересекаются по некоторой прямой DE (рис. 8). В таком случае $AB \parallel DE$ и $AC \parallel DE$ (§ 11). Таким образом, в плоскости P через точку A проходят две прямые AB и AC, параллельные прямой DE, что невозможно. Значит, плоскости P и Q не пересекаются.

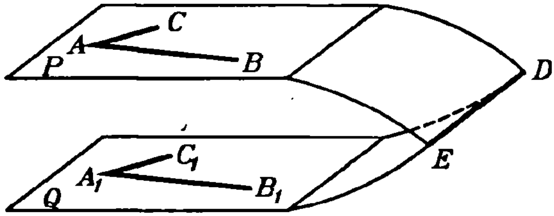


Рис. 8.

16. Теорема. ***Если две параллельные плоскости*** (P и Q, рис. 9) ***пересекаются третьей плоскостью*** (R), ***то линии пересечения*** (AB и CD) ***параллельны.***

Действительно, во-первых, прямые AB и CD находятся в одной плоскости (R); во-вторых, они не могут пересечься, так как в противном случае пересекались бы плоскости P и Q, что противоречит условию.

17. Теорема. ***Отрезки параллельных прямых*** (AC и BD, рис. 9), ***заключенные между параллельными плоскостями*** (P и Q), ***равны.***

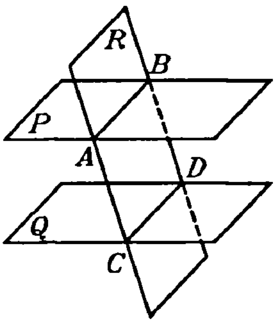


Рис. 9.

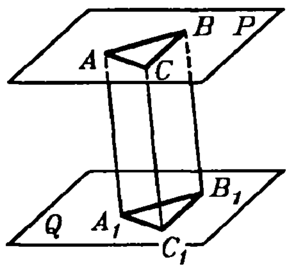


Рис. 10.

Через параллельные прямые AC и BD проведем плоскость R; она пересечет плоскости P и Q по параллельным прямым AB и CD; следовательно, фигура $ABDC$ есть параллелограмм, и потому $AC=BD$.

18. Теорема. ***Два угла*** (BAC и $B_1A_1C_1$, рис. 10) ***с соответственно параллельными и одинаково направлен-***

ными сторонами равны и лежат в параллельных плоскостях (P и Q).

Что плоскости P и Q параллельны, было доказано выше (§ 15); остается доказать, что углы A и A_1 равны.

Отложим на сторонах углов произвольные, но равные отрезки $AB=A_1B_1$; $AC=A_1C_1$ и проведем прямые AA_1, BB_1, CC_1, BC и B_1C_1. Так как отрезки AB и A_1B_1 равны и параллельны, то фигура ABB_1A_1 есть параллелограмм; поэтому отрезки AA_1 и BB_1 равны и параллельны. По той же причине равны и параллельны отрезки AA_1 и CC_1; следовательно, $BB_1 \| CC_1$ и $BB_1=CC_1$. Поэтому $BC=B_1C_1$ и $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ (по трем сторонам); значит, $\angle A=\angle A_1$.

Задачи на построение

19. *Через точку* (A, рис. 11), *расположенную вне данной прямой* (a), *в пространстве провести прямую, параллельную данной прямой* (a).

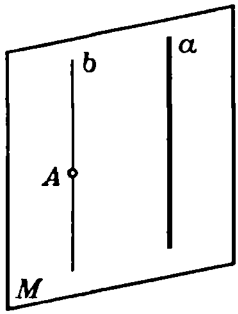


Рис. 11.

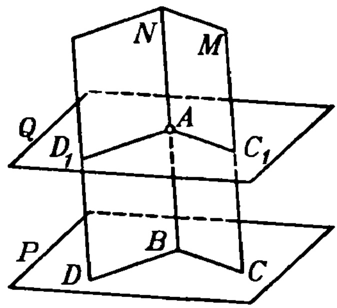


Рис. 12.

Решение. Через прямую a и точку A проводим плоскость M. В этой плоскости строим прямую b, параллельную прямой a.

Задача имеет единственное решение. В самом деле, искомая прямая должна лежать с прямой a в одной плоскости. В этой же плоскости должна находиться точка A, через которую проходит искомая прямая. Значит, эта плоскость должна совпадать с M. Но в плоскости M через точку A можно провести только одну прямую, параллельную прямой a.

20. *Через данную точку* (A, рис. 12) *провести плоскость, параллельную данной плоскости* (P), *не проходящей через точку* A.

Решение. Проводим на плоскости P через какую-либо точку B две какие-либо прямые BC и BD. Построим две вспомогательные плоскости: плоскость M — через точку A и прямую BC и плоскость N — через точку A и прямую BD. Искомая плоскость, параллельная плоскости P, должна пересечь плоскость M по прямой, параллельной BC, а плоскость N — по прямой, параллельной BD (§ 16). Отсюда вытекает такое построение: через точку A проводим в плоскости M прямую $AC_1 \| BC$, а в плоскости N прямую $AD_1 \| BD$.

Через прямые AC_1 и AD_1 проводим плоскость Q. Она и будет искомой. В самом деле, стороны угла D_1AC_1, расположенного в плоскости Q, параллельны сторонам угла DBC, расположенного в плоскости P. Следовательно, $Q \| P$.

Так как в плоскости M через точку A можно провести лишь одну прямую, параллельную BC, а в плоскости N через точку A лишь одну прямую, параллельную BD, то задача имеет единственное решение. Следовательно, через каждую точку пространства можно провести единственную плоскость, параллельную данной плоскости.

21. *Через данную прямую* (a, рис. 13) *провести плоскость, параллельную другой данной прямой* (b).

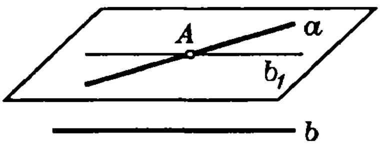


Рис. 13.

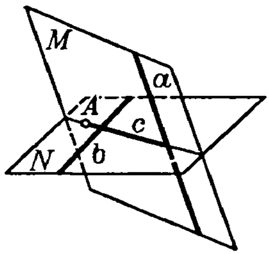


Рис. 14.

Решение. 1-й случай. Прямые a и b не параллельны. Через какую-нибудь точку A прямой a проводим прямую b_1, параллельную b; через прямые a и b_1 проводим плоскость. Она и будет искомой (§ 10). Задача имеет в этом случае единственное решение.

2-й случай. Прямые a и b параллельны. В этом случае задача неопределенна: всякая плоскость, проходящая через прямую a, будет параллельна прямой b.

22. Пример более сложной задачи на построение. *Даны две скрещивающиеся прямые* (a и b, рис. 14) *и точка A, не лежащая ни на одной из данных прямых. Провести через точку A прямую, пересекающую обе данные прямые* (a и b).

Р е ш е н и е. Так как искомая прямая должна проходить через точку A и пересекать прямую a, то она должна лежать в плоскости, проходящей через прямую a и точку A (так как две ее точки должны лежать в этой плоскости: точка A и точка пересечения с прямой a). Совершенно так же убеждаемся, что искомая прямая должна лежать в плоскости, проходящей через точку A и прямую b. Следовательно, она должна служить линией пересечения этих двух плоскостей. Отсюда такое построение. Через точку A и прямую a проводим плоскость M; через точку A и прямую b проводим плоскость N. Берем прямую c пересечения плоскостей M и N. Если прямая c не параллельна ни одной из данных прямых, то она пересечется с каждой из данных прямых (так как с каждой из них она лежит в одной плоскости: a и c лежат в плоскости M, b и c — в плоскости N). Прямая c буд^т в этом случае искомой. Если же $a \| c$ или $b \| c$, то задача не имеет решения.

III. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННЫЕ К ПЛОСКОСТИ

Поставим задачу определить, в каком случае прямая может считаться перпендикулярной к плоскости. Докажем предварительно следующее предложение.

23. Т е о р е м а. ***Если прямая*** (AA_1, рис. 15), ***пересекающаяся с плоскостью*** (MN), ***перпендикулярна к каким-нибудь двум прямым*** (OB и OC), ***проведенным на этой плоскости через точку пересечения*** (O) ***данной прямой и плоскости, то она перпендикулярна и ко всякой третьей прямой*** (OD), ***проведенной на плоскости через ту же точку пересечения*** (O).

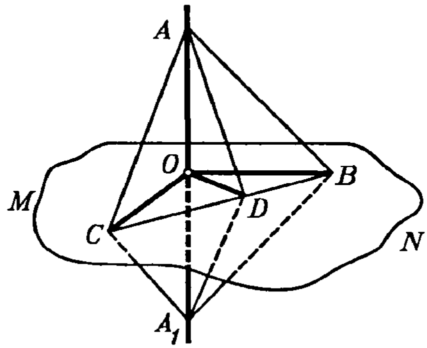


Рис. 15.

Отложим на прямой AA_1 произвольной длины, но равные отрезки OA и OA_1 и проведем на плоскости какую-нибудь прямую, которая пересекала бы три прямые, исходящие из точки O, в каких-нибудь точках C, D и B. Эти точки соединим с точками A и A_1. Мы получим тогда несколько треугольников. Рассмотрим их в такой последовательности.

Сначала возьмем треугольники ACB и A_1CB; они равны, так как у них CB — общая сторона, $AC=A_1C$, как наклонные к прямой AA_1, одинаково удаленные от основания O перпендикуляра OC; по той же причине $AB=A_1B$. Из равенства этих треугольников следует, что $ABC=A_1BC$.

После этого перейдем к треугольникам ADB и A_1DC; они равны, так как у них DB — общая сторона, $AB=A_1B$ и $\angle ABD=\angle A_1BD$. Из равенства этих треугольников выводим, что $AD=A_1D$.

Теперь возьмем треугольники AOD и A_1OD; они равны, так как имеют соответственно равные стороны. Из их равенства выводим, что $\angle AOD=\angle A_1OD$; а так как эти углы смежные, то, следовательно, $AA_1 \perp OD$.

24. Определение. Прямая называется **перпендикулярной к плоскости**, если она, пересекаясь с этой плоскостью, образует прямой угол с каждой прямой, проведенной на плоскости через точку пересечения. В этом случае говорят также, что плоскость перпендикулярна к прямой.

Из предыдущей теоремы (§ 23) следует, что прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум прямым, лежащим в данной плоскости и проходящим через точку пересечения данной прямой и плоскости.

Прямая, пересекающая плоскость, но не перпендикулярная к ней, называется **наклонной** к этой плоскости. Точка пересечения прямой с плоскостью называется **основанием** перпендикуляра или наклонной.

25. Сравнительная длина перпендикуляра и наклонных[1]. Когда из одной точки A (рис. 16) проведены к плоскости перпендикуляр AB и наклонная AC, условимся называть проекцией наклонной на плоскость P отрезок BC, соединяющий основание перпендикуляра и основание наклонной. Таким образом, отрезок BC есть проекция наклонной AC, отрезок BD есть проекция наклонной AD и т.д.

26. Теорема. ***Если из одной и той же точки*** (A, рис. 16), ***взятой вне плоскости*** (P), ***проведены к этой плоскости перпендикуляр*** (AB) ***и какие-нибудь наклонные*** (AC, AD, AE, ...), ***то:***

1) ***Две наклонные, имеющие равные проекции, равны;***

---

[1] Для краткости термины «перпендикуляр» и «наклонная» употребляются вместо «отрезок перпендикуляра, ограниченный данной точкой и основанием перпендикуляра», и «отрезок наклонной, ограниченный данной точкой и основанием наклонной».

2) ***из двух наклонных та больше, проекция которой больше.***

Вращая прямоугольные треугольники ABC и ABD вокруг катета AB, мы можем совместить их плоскости с плоскостью ΔABE. Тогда все наклонные будут лежать в одной плоскости с перпендикуляром, а все проекции расположатся на одной прямой. Таким образом, доказываемые теоремы приводятся к аналогичным теоремам планиметрии.

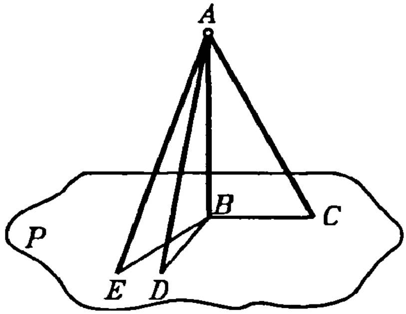


Рис. 16.

Замечание. Так как AB есть катет прямоугольного треугольника, а каждая из наклонных AC, AD, AE,... есть гипотенуза, то перпендикуляр AB меньше всякой наклонной; значит, перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, есть наименьший из всех отрезков, соединяющих данную точку с любой точкой плоскости, и потому он принимается за меру расстояния точки A от плоскости P.

27. Обратные теоремы. ***Если из одной и той же точки, взятой вне плоскости, проведены перпендикуляр и какие-нибудь наклонные, то:***

1) ***равные наклонные имеют равные проекции;***

2) ***из двух проекций та больше, которая соответствует большей наклонной.***

Доказательство (от противного) предоставляем самим учащимся.

Приведем еще следующую теорему о перпендикулярах, которая понадобится нам впоследствии.

28. Теорема. ***Прямая*** (DE, рис. 17), ***проведенная на плоскости*** (P) ***через основание наклонной*** (AC) ***перпендикулярно к ее проекции*** (BC), ***перпендикулярна и к самой наклонной.***

Отложим произвольные, но равные отрезки CD и CE и соединим прямолинейными отрезками точки A и B с точками D и E. Тогда будем иметь: $BD=BE$, как наклонные к прямой DE, одинаково удаленные от основания C перпендикуляра BC; $AD=AE$, как наклонные к плоскости P, имеющие равные проекции BD и BE. Вследствие этого ΔADE равнобедренный, и потому его медиана AC перпендикулярна к основанию DE.

Эта теорема носит название **теоремы о трех перпендикулярах**. Действительно, в ней говорится о связи, соединяющей следующие три перпендикуляра: 1) AB к плоскости P, 2) BC к прямой DE и 3) AC к той же прямой DE.

29. Обратная теорема. ***Прямая*** (DE, рис. 17), ***проведенная на плоскости*** (P) ***через основание наклонной*** (AC) ***перпендикулярно к этой наклонной, перпендикулярна и к ее проекции.***

Сделаем те же построения, что и при доказательстве прямой теоремы. Отложим произвольные, но равные отрезки CD и CE и соединим прямолинейными отрезками точки A и B с точками D и E, тогда будем иметь: $AD=AE$, как наклонные к прямой DE, одинаково удаленные от основания C перпендикуляра AC; $BD=BE$, как проекции равных наклонных AD и AE. Вследствие этого ΔBDE равнобедренный, и потому его медиана BC перпендикулярна к основанию DE.

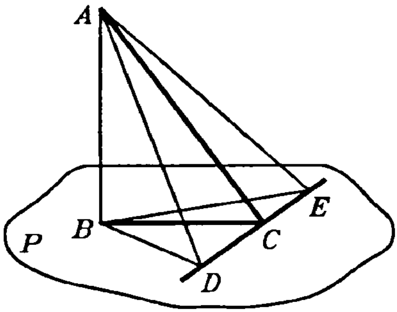


Рис. 17.

IV. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬЮ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬЮ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

30. Предварительное замечание. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве и перпендикулярность прямой к плоскости находятся в некоторой зависимости. Именно наличие параллельности одних элементов влечет за собой перпендикулярность других, и, обратно, из перпендикулярности одних элементов можно сделать заключение о параллельности других. Эта связь между параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей в пространстве выражается следующими теоремами.

31. Теорема. ***Если плоскость*** (P, рис. 18) ***перпендикулярна к одной из параллельных прямых*** (AB), ***то она перпендикулярна и к другой*** (CD).

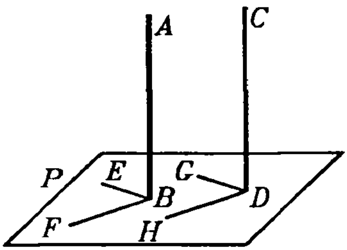


Рис. 18.

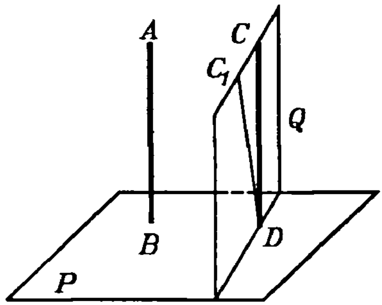


Рис. 19.

Проведем через точку B на плоскости P две какие-нибудь прямые BE и BF, а через точку D проведем прямые DG и DH, соответственно параллельные прямым BE и BF. Тогда будем иметь: $\angle ABE = \angle CDG$ и $\angle ABF = \angle CDH$, как углы с параллельными сторонами. Но углы ABE и ABF прямые, так как $AB \perp P$, значит, углы CDG и CDH также прямые (§ 18). Следовательно, $CD \perp P$ (§ 24).

32. Обратная теорема. ***Если две прямые*** (AB и CD, рис. 19) ***перпендикулярны к одной и той же плоскости*** (P), ***то они параллельны.***

Предположим противное, т.е. что прямые AB и CD не параллельны. Проведем тогда через точку D прямую, параллельную AB. При нашем предположении это будет какая-нибудь прямая DC_1 , не сливающаяся с DC. Согласно прямой теореме прямая DC_1 будет перпендикулярна к плоскости P. Проведем через CD и C_1D плоскость Q и возьмем линию ее пересечения DE с плоскостью P. Так как (на основании предыдущей теоремы) $C_1D \perp P$, то $\angle C_1DE$ прямой, а так как по условию $CD \perp P$, то $\angle CDE$ также прямой. Таким образом, окажется, что в плоскости Q к прямой DE из одной ее точки D восставлены два перпендикуляра DC и DC_1. Так как это невозможно, то нельзя допустить, чтобы прямые AB и CD были не параллельны.

33. Теорема. ***Если прямая*** (BB_1, рис. 20) ***перпендикулярна к одной из параллельных плоскостей*** (P), ***то она перпендикулярна и к другой*** (Q).

Проведем через прямую BB_1 какие-нибудь две плоскости M и N, каждая из которых пересекается с P и Q по параллельным прямым: одна — по параллельным прямым BC и B_1C_1, другая — по параллельным прямым BD и B_1D_1. Согласно условию прямая BB_1 перпендикулярна к прямым BC и BD; следовательно, она также перпендикулярна к параллельным им прямым B_1C_1 и B_1D_1, а потому перпендикулярна и к плоскости Q, на которой лежат прямые B_1C_1 и B_1D_1.

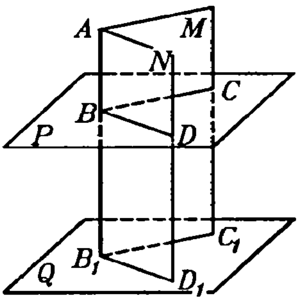


Рис. 20.

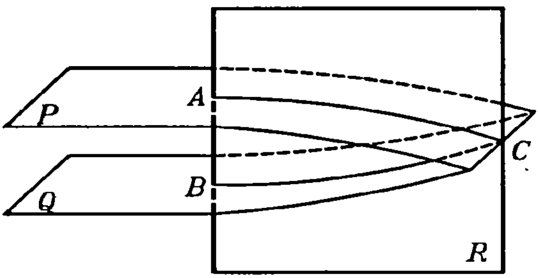


Рис. 21.

34. Обратная теорема. ***Если две плоскости*** (P и Q, рис. 21) ***перпендикулярны к одной и той же прямой*** (AB), ***то они параллельны.***

Предположим противное, т.е. что плоскости P и Q пересекаются. Возьмем на линии их пересечения какую-нибудь точку C и проведем плоскость R через C и прямую AB. Плоскость R пересечет плоскости P и Q соответственно по прямым AB и BC. Так как $AB \perp P$, то $AB \perp AC$, и так как $AB \perp Q$, то $AB \perp BC$. Таким образом, в плоскости R мы будем иметь два перпендикуляра к прямой AB, проходящих через одну и ту же точку C, перпендикуляры AC и BC. Так как это невозможно, то предположение, что плоскости P и Q пересекаются, неверно. Значит, они параллельны.

Задачи на построение

35. *Через данную точку* (C) *в пространстве провести плоскость, перпендикулярную к данной прямой* (AB) (рис. 22).

Решение. 1-й случай. Данная точка C лежит на прямой AB (рис. 22).

Проведем через прямую AB какие-нибудь две плоскости P и Q. Искомая плоскость должна пересекать эти плоскости по прямым, перпендикулярным к прямой AB (§ 24). Отсюда построение: через AB проводим две произвольные плоскости P и Q. В каждой из этих плоскостей восставляем перпендикуляр к прямой AB в точке C (в плоскости P – перпендикуляр CD, в плоскости Q – перпендикуляр CE). Плоскость, проходящая через прямые CD и CE, есть искомая.

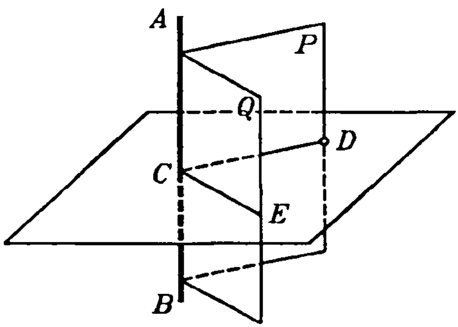


Рис. 22.

2-й случай. Данная точка D не лежит на прямой AB (рис. 22). Через точку D и прямую AB проводим плоскость P и в этой плоскости строим прямую DC, перпендикулярную к AB. Через прямую AB проводим произвольно вторую плоскость Q и в этой плоскости строим прямую CE, перпендикулярную к AB. Искомая плоскость должна пересечь плоскости P и Q по прямым, перпендикулярным к AB. Отсюда построение: через точку D проводим в плоскости P прямую DC, перпендикулярную к AB. Прямая DC пересечет прямую AB в некоторой точке C.

Через точку C проводим в плоскости Q прямую CE перпендикулярно к AB. Плоскость, проходящая через прямые CD и CE, — искомая.

Так как в каждой из плоскостей P и Q через данную точку можно провести лишь одну прямую, перпендикулярную к данной, то задача в обоих случаях имеет одно решение, т. е. через каждую точку в пространстве можно провести лишь одну плоскость, перпендикулярную к данной прямой.

36. *Через данную точку* (O) *пространства провести прямую, перпендикулярную к данной плоскости* (P).

1-й случай. Точка O лежит на плоскости P (рис. 23). Проведем на плоскости P через точку O две какие-либо взаимно перпендикулярные прямые OA и OB. Проведем, далее, через прямую OA какую-либо новую плоскость Q и на этой плоскости Q построим прямую OC, перпендикулярную к OA.

Через прямые OB и OC проведем новую плоскость R и построим в ней прямую OM, перпендикулярную к OB. Прямая OM и будет искомым перпендикуляром к плоскости P. Действительно, так как $OA \perp OB$ и $OA \perp OC$, то прямая OA перпендикулярна к плоскости R и, следовательно, $OA \perp OM$. Таким образом мы видим, что $OM \perp OA$ и $OM \perp OB$; следовательно, OM перпендикулярна к плоскости P.

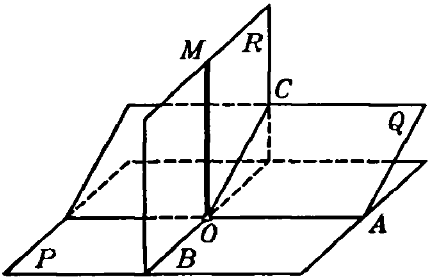


Рис. 23.

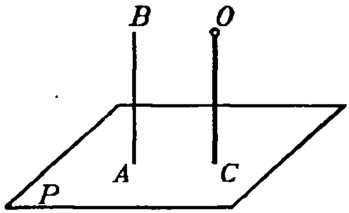


Рис. 24.

2-й случай. Точка O не лежит на плоскости P (рис. 24). Возьмем на плоскости P какую-нибудь точку A и выполним для нее предыдущее построение. Мы получим тогда прямую AB, перпендикулярную к плоскости P. После этого через точку O проводим прямую, параллельную AB. Эта прямая и будет искомой (§ 31).

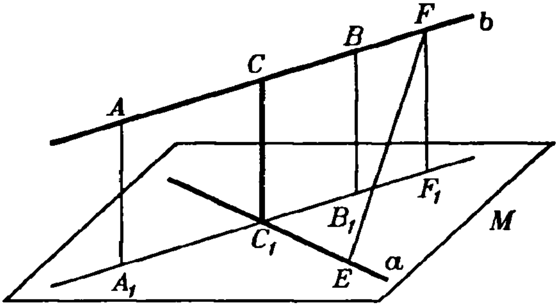


Рис. 25.

Задача в обоих случаях имеет одно решение. В самом деле, так как два перпендикуляра к одной и той же плоскости параллельны, то через одну и ту же точку O нельзя провести двух перпендикуляров P. Следовательно, **через каждую точку в пространстве можно провести** одну прямую, перпендикулярную к данной плоскости.

37. **Пример более сложной задачи.** *Даны две скрещивающиеся прямые* (a и b, рис. 25). *Построить прямую, пересекающую обе данные прямые и перпендикулярную к ним обеим.*

Решение. Проведем через прямую a плоскость M, параллельную прямой b (§ 21). Из двух каких-нибудь точек прямой b опустим перпендикуляры AA_1 и BB_1 на плоскость M. Соединим точки A_1 и B_1 отрезком прямой и найдем точку C_1 пересечения прямых A_1B_1 и a. Через точку C_1 проведем прямую, перпендикулярную к плоскости M. Предоставляем самим учащимся доказать, что эта прямая: 1) пересечется с прямой b в некоторой точке C и 2) будет перпендикулярна как к прямой a, так и к прямой b.

Прямая CC_1 будет, следовательно, искомой прямой.

Заметим, что отрезок CC_1 меньше всех других отрезков, которые можно получить, соединяя точки прямой a с точками прямой b. В самом деле, возьмем на прямой a какую-нибудь точку E и на прямой b какую-нибудь точку F, соединим эти точки отрезком прямой и докажем, что $EF > CC_1$. Опустим из точки F перпендикуляр FF_1 на плоскость M. Тогда будем иметь: $EF > FF_1$ (§ 26). Но $FF_1=CC_1$, следовательно, $EF > CC_1$. На этом основании длина отрезка CC_1 называется кратчайшим расстоянием между данными прямыми a и b.

V. ДВУГРАННЫЕ УГЛЫ, УГОЛ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ, УГОЛ ДВУХ СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ, МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

Двугранные углы

38. Определение. Часть плоскости, лежащая по одну сторону от какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, называется **полуплоскостью**. Фигура, образованная двумя полуплоскостями (P и Q, рис. 26), исходящими из одной прямой (AB), называется **двугранным углом**. Прямая AB называется **ребром**, а полуплоскости P и Q – **сторонами или гранями** двугранного угла.

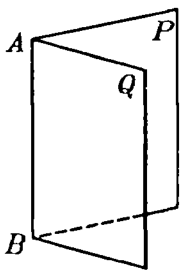


Рис. 26.

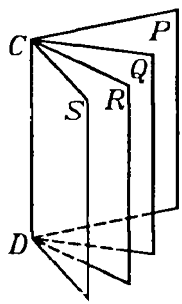


Рис. 27.

Такой угол обозначается обыкновенно двумя буквами, поставленными у его ребра (двугранный угол AB). Но если при одном ребре лежат несколько двугранных углов, то каждый из них обозначают четырьмя буквами, из которых две средние стоят при ребре, а две крайние — у граней (например, двугранный угол $SCDR$) (рис. 27).

Если из произвольной точки D ребра AB (рис. 28) проведем на каждой грани по перпендикуляру к ребру, то образованный ими угол CDE называется **линейным углом** двугранного угла.

Величина линейного угла не зависит от положения его вершины на ребре. Так, линейные углы CDE и $C_1D_1E_1$ равны, потому что их стороны соответственно параллельны и одинаково направлены.

Плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру, так как она содержит две прямые, перпендикулярные к нему. Поэтому для получения линейного угла достаточно грани данного двугранного угла пересечь плоскостью, перпендикулярной к ребру, и рассмотреть получившийся в этой плоскости угол.

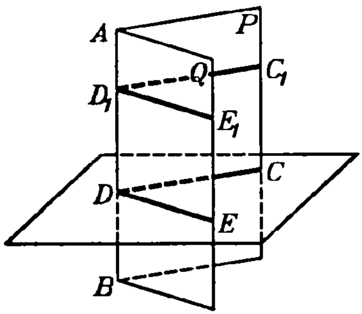


Рис. 28.

39. Равенство и неравенство двугранных углов. Два двугранных угла считаются **равными**, если они при вложении могут совместиться; в противном случае тот из двугранных углов считается меньшим, который составит часть другого угла.

Подобно углам в планиметрии, двугранные углы могут быть **смежные**, **вертикальные** и пр.

Если два смежных двугранных угла равны между собой, то каждый из них называется **прямым** двугранным углом.

Теоремы. 1) ***Равным двугранным углам соответствуют равные линейные углы.***

2) ***Большему двугранному углу соответствует больший линейный угол.***

Пусть $PABQ$ и $P_1A_1B_1Q_1$ (рис. 29) — два двугранных угла. Вложим угол A_1B_1 в угол AB так, чтобы ребро A_1B_1 совпало с ребром AB и грань P_1 с гранью P. Тогда если эти двугранные углы равны, то грань Q_1 совпадет с гранью Q; если же угол A_1B_1 меньше угла AB, то грань Q_1 займет некоторое положение внутри двугранного угла, например Q_2.

Заметив это, возьмем на общем ребре какую-нибудь точку B и проведем через нее плоскость R, перпендикулярную к ребру. От пересечения этой плоскости с гранями двугранных углов получатся линейные углы. Ясно, что если двугранные углы совпадут, то у них окажется один и тот же линейный угол CBD; если же двугранные углы не совпадут, если, например, грань Q_1 займет положение Q_2, то у большего двугранного угла окажется больший линейный угол (именно: $\angle CBD > \angle C_2BD$).

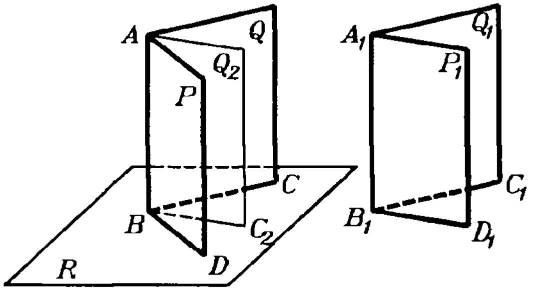


Рис. 29.

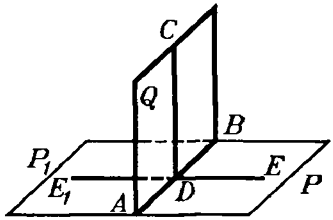


Рис. 30.

40. Обратные теоремы. 1) ***Равным линейным углам соответствуют равные двугранные углы.***

2) ***Большему линейному углу соответствует больший двугранный угол.***

Эти теоремы доказываются от противного.

41. Следствия. 1) *Прямому двугранному углу соответствует прямой линейный угол, и обратно.*

Пусть двугранный угол $PABQ$ прямой (рис. 30). Это значит, что он равен смежному углу $QABP_1$. Но в таком случае линейные углы CDE и CDE_1 также равны; а так как они смежные, то каждый из них должен быть прямой. Обратно, если равны смежные линейные углы CDE и CDE_1, то равны и смежные двугранные углы, т.е. каждый из них должен быть прямой.

2) *Все прямые двугранные углы равны,* потому что у них равны линейные углы.

Подобным же образом доказать, что:

3) *Вертикальные двугранные углы равны.*

4) *Двугранные углы с соответственно параллельными и одинаково* (или противоположно) *направленными гранями равны.*

5) Если за единицу двугранных углов возьмем такой двугранный угол, который соответствует единице линейных углов, то можно сказать, что *двугранный угол измеряется его линейным углом.*

Перпендикулярные плоскости

42. Определение. Две плоскости называются **взаимно перпендикулярными**, если, пересекаясь, они образуют прямые двугранные углы.

43. Теорема (выражающая признак перпендикулярности двух плоскостей). ***Если плоскость*** (P, рис. 31) ***проходит через перпендикуляр*** (AB) ***к другой плоскости*** (Q), ***то она перпендикулярна к этой плоскости.***

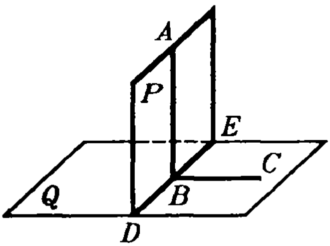


Рис. 31.

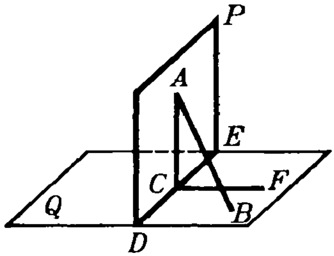


Рис. 32.

Пусть DE будет линия пересечения плоскостей P и Q. На плоскости Q проведем $BC \perp DE$. Тогда угол ABC будет линейным углом двугранного угла $PDEQ$. Так как прямая AB по условию перпендикулярна к Q, то $AB \perp BC$; значит, угол ABC прямой, а потому и двугранный угол прямой, т.е. плоскость P перпендикулярна к плоскости Q.

44. Теорема. ***Если две плоскости*** (P и Q, рис. 31) ***взаимно перпендикулярны и к одной из них*** (к Q) ***проведен перпендикуляр*** (AB), ***имеющий общую точку*** (A) ***с другой плоскостью*** (P), ***то этот перпендикуляр весь лежит в этой плоскости*** (P).

Предположим, что перпендикуляр AB не лежит в плоскости P (как изображено на рис. 32). Пусть DE будет линия пересечения плоскостей P и Q. На плоскости P проведем прямую $AC \perp DE$, а на плоскости Q проведем прямую $CF \perp DE$. Тогда угол ACF, как линейный угол прямого двугранного угла, будет прямой. Поэтому линия AC, образуя прямые углы с DE и CF, будет перпендикуляром к плоскости Q. Мы будем иметь тогда два перпендикуляра, опущенные из одной и той же точки A на плоскость Q, именно AB и AC. Так как это невозможно (§ 36), то допущение неверно; значит, перпендикуляр AB лежит в плоскости P.

45. Следствие. *Линия пересечения AB* (рис. 33) *двух плоскостей* (P и Q), *перпендикулярных к третьей плоскости* (R), *есть перпендикуляр к этой плоскости.*

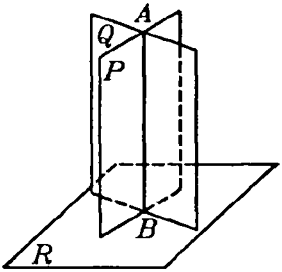


Рис. 33.

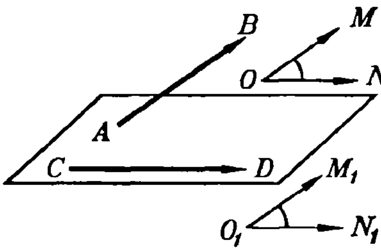


Рис. 34.

Действительно, если через какую-нибудь точку A линии пересечения плоскостей P и Q проведем перпендикуляр к плоскости R, то этот перпендикуляр согласно предыдущей теореме должен лежать и в плоскости Q, и в плоскости P, значит, он сольется с AB.

Угол двух скрещивающихся прямых

46. **Определение.** Углом двух **скрещивающихся** прямых (AB и CD, рис. 34), для которых дано положение и направление, называется угол (MON), который получается, если из произвольной точки пространства (O) проведем полупрямые (OM и ON), соответственно параллельные данным прямым (AB и CD) и одинаково с ними направленные.

Величина этого угла не зависит от положения точки O, так как если построим указанным путем угол $M_1O_1N_1$ с вершиной в какой-нибудь другой точке O_1, то $\angle MON = \angle M_1O_1N_1$, потому что эти углы имеют соответственно параллельные и одинаково направленные стороны.

Угол, образуемый прямой с плоскостью

47. Проекция точки и прямой на плоскость. Мы говорили ранее (§ 25), что когда из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонная, то проекцией этой наклонной на плоскость называется отрезок, соединяющий основание перпендикуляра с основанием наклонной. Дадим теперь более общее определение проекции.

1) *Ортогональной* (*или прямоугольной*) *проекцией какой-нибудь точки на данную плоскость* (например, точки M на плоскость P, рис. 35) *называется основание* (m) *перпендикуляра, опущенного на эту плоскость из взятой точки.*

2) *Ортогональной проекцией какой-нибудь линии на плоскость называется геометрическое место проекций всех точек этой линии.*

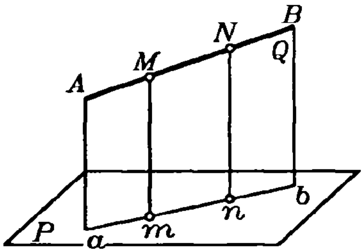


Рис. 35.

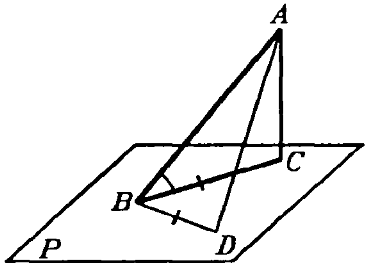


Рис. 36.

В частности, если проектируемая линия есть прямая (например, AB, рис. 35), не перпендикулярная к плоскости (P), то проекция ее на эту плоскость есть также прямая. В самом деле, если мы через прямую AB и перпендикуляр Mm, опущенный на плоскость проекций из какой-нибудь одной точки M этой прямой, проведем плоскость Q, то эта плоскость должна быть перпендикулярна к плоскости P; поэтому перпендикуляр, опущенный на плоскость P из любой точки прямой AB (например, из точки N), должен лежать в этой плоскости Q (§ 44) и, следовательно, проекции всех точек прямой AB должны лежать на прямой ab, по которой пересекаются плоскости P и Q. Обратно, всякая точка этой прямой ab есть проекция какой-нибудь точки прямой AB, так как перпендикуляр, восстановленный из любой точки прямой ab, лежит на плоскости Q и, следовательно, пересекается с

AB в некоторой точке. Таким образом, прямая ab представляет собой геометрическое место проекций всех точек данной прямой AB и, следовательно, есть ее проекция.

Для краткости речи вместо «ортогональная проекция» мы будем говорить просто «проекция».

48. Угол прямой с плоскостью. *Углом прямой* (AB, рис. 36) *с плоскостью* (P) в том случае, когда прямая наклонна к плоскости, называется *острый угол* (ABC), *составленный этой прямой с ее проекцией на плоскость.*

Угол этот обладает тем свойством, что он есть наименьший из всех углов, которые наклонная образует с прямыми, проведенными на плоскости P через основание наклонной. Докажем, например, что угол ABC меньше ABD. Для этого отложим отрезок $BD=BC$ и соединим D с A. У треугольников ABC и ABD две стороны одного равны соответственно двум сторонам другого, но третьи стороны не равны, а именно: $AD > AC$ (§ 26). Вследствие этого угол ABD больше угла ABC.

Многогранные углы

49. Определения. Возьмем несколько углов (рис. 37): ASB, BSC, CSD, которые, примыкая последовательно один к другому, расположены в одной плоскости вокруг общей вер-

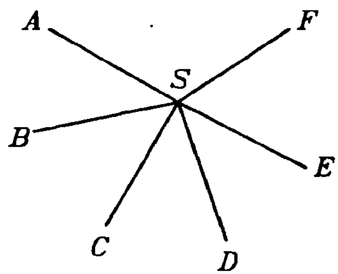


Рис. 37.

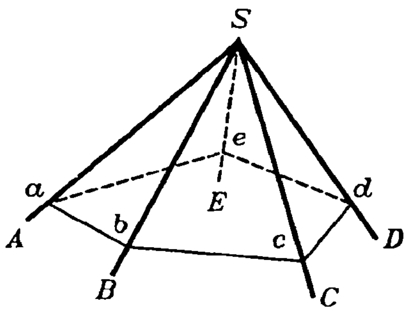


Рис. 38.

шины S. Повернем плоскость угла ABC вокруг общей стороны SB так, чтобы эта плоскость составила некоторый двугранный угол с плоскостью BSC. Затем, не изменяя получившегося двугранного угла, повернем его вокруг прямой SC так, чтобы площадь BSC составила некоторый двугранный угол с плоскостью CSD. Продолжим такое последовательное вращение вокруг каждой общей стороны. Если при этом последняя сторона SF совместится с первой стороной SA, то образуется фигура (рис. 38), которая называется **многогранным углом**. Углы ASB, BSC, ... называются **плоскими углами** или **гранями**, стороны их SA, SB, ... называются **ребрами**, а общая вершина S — **вершиной** многогранного угла. Каждое ребро является вместе с тем ребром некоторого двугранного угла; поэтому в многогранном угле столько двугранных углов и столько плоских, сколько в нем всех ребер. Наименьшее число граней в многогранном угле — три; такой угол называется **трехгранным**. Могут быть углы четырехгранные, пятигранные и т. д.

Многогранный угол обозначается или одной буквой S, поставленной у вершины, или же рядом букв $SABCDE$, из которых первая обозначает вершину, а прочие — ребра по порядку их расположения.

Многогранный угол называется **выпуклым**, если он весь расположен по одну сторону от плоскости каждой из его граней, неограниченно продолженной. Таков, например, угол, изображенный на рисунке 38. Наоборот, угол на рисунке 39 нельзя назвать выпуклым, так как он расположен по обе стороны от грани ASB или от грани BSC.

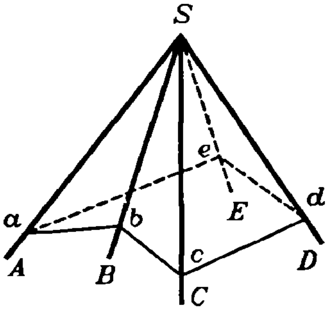


Рис. 39.

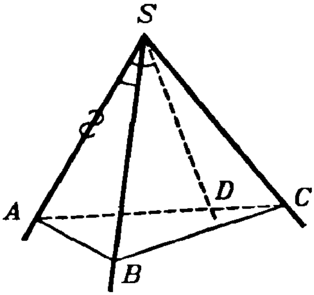


Рис. 40.

Если все грани многогранного угла пересечем плоскостью, то в сечении образуется многоугольник ($abcde$). В выпуклом многогранном угле этот многоугольник тоже выпуклый.

Мы будем рассматривать только выпуклые многогранные углы.

50. Теорема. ***В трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов.***

Пусть в трехгранном угле $SABC$ (рис. 40) наибольший из плоских углов есть угол ASC. Отложим на этом угле угол ASD, равный углу ASB, и проведем какую-нибудь прямую AC, пересекающую SD в некоторой точке D. Отложим $SB=SD$.

Соединив B с A и C, получим ΔABC, в котором

$$AD+DC < AB+BC.$$

Треугольники ASD и ASB равны, так как они содержат по равному углу, заключенному между равными сторонами; следовательно, $AD=AB$. Поэтому, если в выведенном неравенстве отбросить равные слагаемые AD и AB, получим, что $DC < BC$. Теперь замечаем, что у треугольников SCD и SCB две стороны одного равны двум сторонам другого, а третьи стороны не равны; в таком случае против большей из этих сторон лежит больший угол; значит,

$$\angle CSD < \angle CSB.$$

Прибавив к левой части этого неравенства угол ASD, а к правой равный ему угол ASB, получим то неравенство, которое требовалось доказать:

$$\angle ASC < \angle CSB+\angle ASB.$$

Мы доказали, что даже **наибольший** плоский угол меньше суммы двух других углов. Значит, теорема доказана.

Следствие. Отнимем от обеих частей последнего неравенства по углу ASB или по углу CSB; получим:

$$\angle ASC - \angle ASB < \angle CSB;$$

$$\angle ASC - \angle CSB < \angle ASB.$$

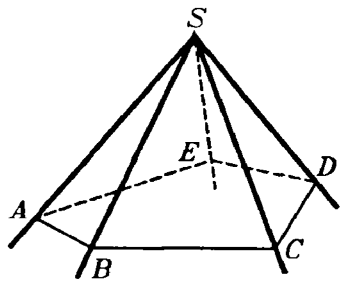


Рис. 41.

Рассматривая эти неравенства справа налево и приняв во внимание, что угол ASC как наибольший из трех углов больше разности двух других углов, мы приходим к заключению, что **в трехгранном угле каждый плоский угол больше разности двух других углов.**

51. Теорема. ***В выпуклом многогранном угле сумма всех плоских углов меньше 4d.***

Пересечем грани (рис. 41) выпуклого угла $SABCDE$ какой-нибудь плоскостью; от этого в сечении получим выпуклый n-угольник $ABCDE$.

Применяя теорему предыдущего параграфа к каждому из трехгранных углов, вершины которых находятся в точках A, B, C, D и E, находим:

$$\angle ABC < \angle ABS + \angle SBC; \ \angle BCD < \angle BCS + \angle SCD \text{ и т. д.}$$

Сложим почленно все эти неравенства. Тогда в левой части получим сумму всех углов многоугольника $ABCDE$, которая равна $2dn—4d$, а в правой — сумму углов треугольников ABS, SBC и т. д., кроме тех углов, которые лежат при вершине S. Обозначив сумму этих последних углов буквой x, мы получим после сложения:

$$2dn—4d < 2dn—x.$$

Так как в разностях $2dn—4d$ и $2dn—x$ уменьшаемые одинаковы, то, чтобы первая разность была меньше второй, необходимо, чтобы вычитаемое $4d$ было больше вычитаемого x; значит, $4d > x$, т. е. $x < 4d$.

Простейшие случаи равенства трехгранных углов

52. Теоремы. ***Трехгранные углы равны, если они имеют:***

1) ***по равному двугранному углу, заключенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными плоскими углами,***

или 2) ***по равному плоскому углу, заключенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными двугранными углами.***

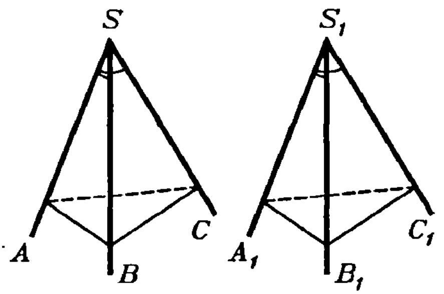


Рис. 42.

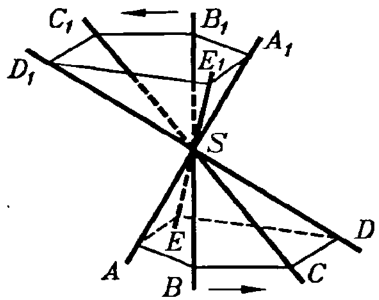


Рис. 43.

1) Пусть S и S_1 — два трехгранных угла (рис. 42), у которых $\angle ASB=\angle A_1S_1B_1$, $\angle ASC=\angle A_1S_1C_1$ (и эти равные углы одинаково расположены) и двугранный угол AS равен дву-

гранному углу S_1A_1. Вложим угол S_1 в угол S так, чтобы у них совпали точки S_1 и S, прямые S_1A_1 и SA и плоскости $A_1S_1B_1$ и ASB. Тогда ребро S_1B_1 пойдет по SB (в силу равенства углов $A_1S_1B_1$ и ASB), плоскость $A_1S_1C_1$ пройдет по ASC (по равенству двугранных углов) и ребро S_1C_1 пойдет по ребру SC (в силу равенства углов $A_1S_1C_1$ и ASC). Таким образом, трехгранные углы совместятся всеми своими ребрами, т. е. они будут равны.

2) Второй признак, подобно первому, доказывается вложением.

53. Симметричные многогранные углы. Как известно, вертикальные углы равны, если речь идет об углах, образованных прямыми или плоскостями. Посмотрим, справедливо ли это утверждение применительно к углам многогранным.

Продолжим (рис. 43) все ребра угла $SABCDE$ за вершину S, тогда образуется другой многогранный угол $SA_1B_1C_1D_1E_1$, который можно назвать **вертикальным** по отношению к первому углу. Нетрудно видеть, что у обоих углов равны соответственно и плоские углы, и двугранные, но те и другие расположены в обратном порядке. Действительно, если мы вообразим наблюдателя, который смотрит извне многогранного угла на его вершину, то ребра SA, SB, SC, SD, SE будут казаться ему расположенными в направлении против движения часовой стрелки, тогда как, смотря на угол $SA_1B_1C_1D_1E_1$, он видит ребра SA_1, SB_1, ... расположенными по движению часовой стрелки.

Многогранные углы с соответственно равными плоскостями и двугранными углами, но расположенными в обратном порядке вообще не могут совместиться при вложении; значит, они не равны. Такие углы называются симметричными (относительно вершины S). Подробнее о симметрии фигур в пространстве будет сказано ниже.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать теоремы:

1. Две плоскости, параллельные третьей, параллельны между собой.

2. Все прямые, параллельные данной плоскости и проходящие через одну точку, лежат в одной плоскости, параллельной данной.

3. Дана плоскость P и параллельная ей прямая a. Доказать, что все точки прямой a находятся на одинаковом расстоянии от плоскости P.

4. Доказать, что все точки одной из двух параллельных плоскостей находятся на одинаковом расстоянии от другой плоскости.

5. Две плоскости, проходящие через две данные параллельные прямые и не параллельные между собой, пересекаются по прямой, параллельной данным прямым.

6. Если прямая a параллельна какой-нибудь прямой b, лежащей на плоскости M, то всякая плоскость, проходящая через a, пересекает плоскость M по прямой, параллельной b, или по прямой b.

7. Если прямая a параллельна плоскости M, то всякая прямая, проходящая через точку, лежащую в плоскости M, и параллельная прямой a, лежит в плоскости M.

8. Если даны две скрещивающиеся прямые a и b и через первую проведена плоскость, параллельная второй, а через вторую — плоскость, параллельная первой, то эти две плоскости параллельны.

9. Все прямые, проходящие через какую-нибудь точку на прямой a и перпендикулярные к этой прямой, лежат в одной плоскости, перпендикулярной к a.

10. Если плоскость и прямая перпендикулярны к одной прямой, то они параллельны.

11. Если прямая a, параллельная плоскости M, пересекает прямую b, перпендикулярную этой плоскости, то прямые a и b перпендикулярны.

Задачи на построение

12. Через данную точку провести плоскость, параллельную двум данным прямым a и b.

13. Через данную точку провести прямую, параллельную данной плоскости и пересекающую данную прямую.

14. Построить прямую, пересекающую две данные прямые и параллельную третьей данной прямой.

15. Построить какую-либо прямую, пересекающую две данные прямые и параллельную данной плоскости (задача неопределенная).

16. Построить какую-либо прямую, пересекающую три данные прямые (задача неопределенная).

17. Через данную точку провести прямую, перпендикулярную двум данным скрещивающимся прямым.

18. Через данную прямую провести плоскость, перпендикулярную к данной плоскости.

19. Даны плоскость M и прямая $a \parallel M$. Через прямую a провести плоскость, пересекающую плоскость M под данным углом.

20. Дана плоскость M и две точки A и B по одну сторону от нее. Найти на плоскости M такую точку C, чтобы сумма $AC + BC$ была наименьшей.

ГЛАВА II

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ, ОТРЕЗКА И ФИГУРЫ

54. Изображение точки при помощи проекции на две плоскости. Вообразим плоскости проекций, горизонтальную H и вертикальную V, пересекающиеся под прямым углом по прямой xy, которую мы будем называть осью проекций (рис. 44). Плоскости эти образуют четыре двугранных угла,

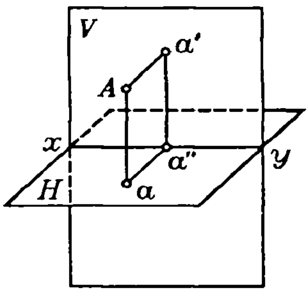


Рис. 44.

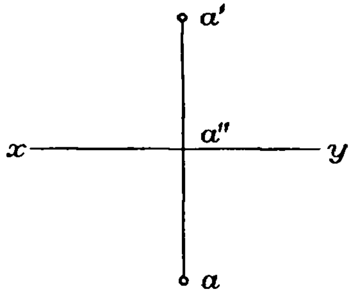


Рис. 45.

из которых мы для простоты будем рассматривать только один, именно передний верхний. Положим, что внутри этого угла расположена какая-нибудь точка A. Опустим из нее перпендикуляры на плоскости H и V. Тогда мы получим на этих плоскостях проекции точки A, именно: a есть горизонталь-

ная проекция, a' — **вертикальная** (проекции эти называются **ортогональными**, так как они получаются опусканием перпендикуляра на плоскость).

Обыкновенно каждая из этих проекций обозначается малой буквой одного наименования с той большой буквой, которая обозначает проектируемую точку, причем буква, обозначающая вертикальную проекцию, берется со знаком наверху. Перпендикуляры, с помощью которых получаются проекции точки, называются **проектирующими перпендикулярами**: Aa — горизонтально-проектирующий перпендикуляр, Aa' — вертикально-проектирующий перпендикуляр.

Если через эти перпендикуляры проведем плоскость, то она должна быть перпендикулярна к плоскости H и к плоскости V (§ 43); следовательно, должна быть перпендикулярна и к оси xy (§ 45), и потому прямые aa'' и $a'a''$, по которым эта плоскость пересекается с плоскостями H и V, будут перпендикулярны к оси xy; следовательно, они образуют линейный угол двугранного угла, составленного плоскостями H и V, и так как этот двугранный угол прямой, то линейный его угол должен быть прямым. Таким образом, четырехугольник $Aaa''a'$ будет *прямоугольником*, плоскость которого перпендикулярна к оси xy.

Заметив это, повернем горизонтальную полуплоскость H вокруг оси xy на 90° книзу; тогда она совпадет с нижней вертикальной полуплоскостью, образуя с верхней вертикальной полуплоскостью одну вертикальную плоскость. При этом точки a'' и a' останутся на своих местах, а точка a займет положение ниже оси xy и расположится на продолжении перпендикуляра $a'a''$ на расстоянии $a''a$, равном Aa'. Мы получим тогда развернутый рисунок 45, который впредь будем называть **эпюром**; рисунок этот состоит из прямой xy, изображающей ось проекций, и двух точек, расположенных на одном перпендикуляре к оси xy; нижняя точка есть горизонтальная проекция, а верхняя — вертикальная проекция точки A.

Конечно, всякой точке A, взятой внутри двугранного угла (рис. 44), соответствуют на эпюре две вполне определенные точки a и a', расположенные на одном перпендикуляре к оси xy. Обратно, всяким двум точкам эпюра a и a', расположенным на одном перпендикуляре к оси xy (точка a ниже xy, а точка a' выше xy), соответствует одна определенная точка A

внутри двугранного угла. Чтобы получить эту точку, мы должны вообразить, что нижняя половина эпюра вращением вокруг оси xy снова повернута на 90° кверху и затем из точек a и a' восставлены перпендикуляры к плоскостям образовавшегося двугранного угла; пересечение этих перпендикуляров и определит точку A.

55. Частные случаи. Из рисунков 46 и 47 видно, что если:

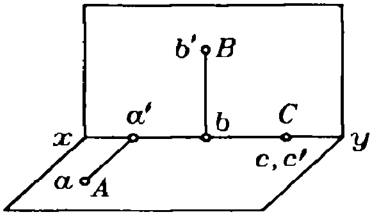


Рис. 46.

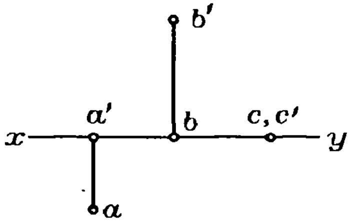


Рис. 47.

1) точка A лежит на горизонтальной плоскости, то ее вертикальная проекция a' лежит на оси xy, а горизонтальная совпадает с самой точкой;

2) точка B расположена на вертикальной плоскости, то ее горизонтальная проекция лежит на оси xy, а вертикальная совпадает с самой точкой;

3) точка C лежит на оси xy, то обе ее проекции совпадают с самой точкой.

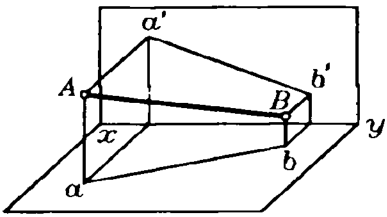


Рис. 48.

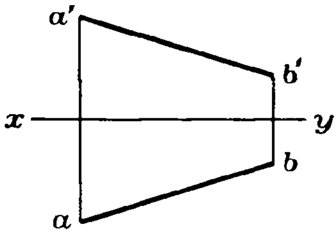


Рис. 49.

56. Изображение прямой. Мы уже видели (§ 47), что если проектируемая линия п р я м а я, то и проекция ее должна быть п р я м о й линией. Значит, отрезок прямой, соединяющей точки A и B (рис. 48), изобразится на эпюре (рис. 49) отрезками ab и $a'b'$, из которых первый есть горизонтальная проекция, а второй — вертикальная проекция отрезка AB. Таким образом, чтобы получить проекцию неограниченной прямой на какую-нибудь плоскость, достаточно найти проекцию на эту плоскость двух ее точек, и через эти проекции провести прямую.

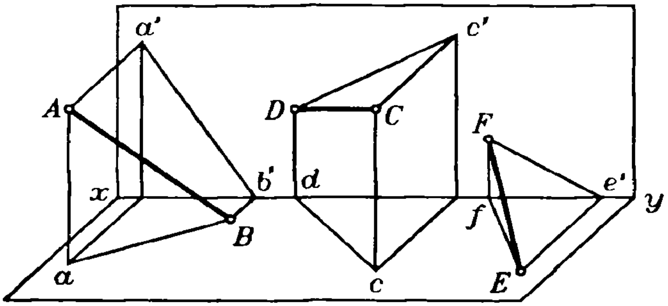


Рис. 50.

Проекции прямой можно получить еще иначе, а именно: мы можем провести через эту прямую две плоскости: одну — перпендикулярную к горизонтальной плоскости проекций (она называется **горизонтально-проектирующей плоскостью**) и другую — перпендикулярную к вертикальной плоскости проекций (она называется **вертикально-проектирующей плоскостью**). Пересечение этих плоскостей с плоскостями проекции даст проекции ab и $a'b'$.

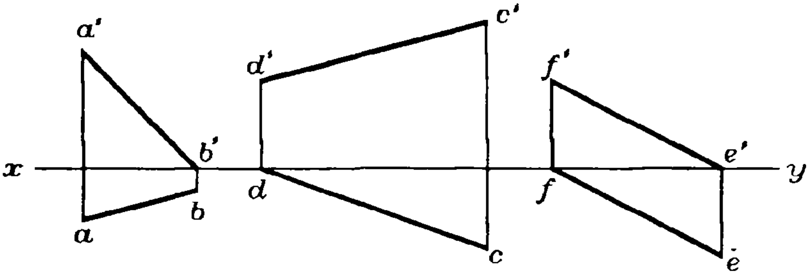


Рис. 51.

Заметим, что если отрезок прямой обозначен буквами AB, то его проекции обозначаются ab (горизонтальная) и $a'b'$ (вертикальная); если неограниченная прямая обозначена одной буквой, например K, то проекции ее обозначаются тоже одной буквой (малой) k (горизонтальная) и k' (вертикальная).

57. Частные случаи. 1) Один конец отрезка AB лежит на горизонтальной плоскости.

2) Один конец отрезка CD лежит на вертикальной плоскости.

3) Отрезок EF упирается своими концами в плоскости проекций. Эти три случая изображены в перспективном виде на рисунке 50 и проекциями на эпюре на рисунке 51.

4) Отрезок AB перпендикулярен к вертикальной плоскости проекций и упирается в нее (рис. 52 и 53).

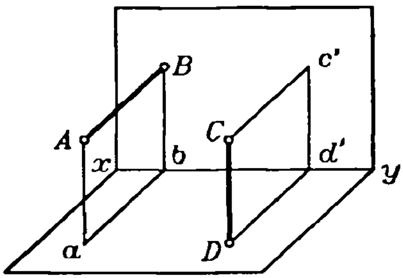


Рис. 52.

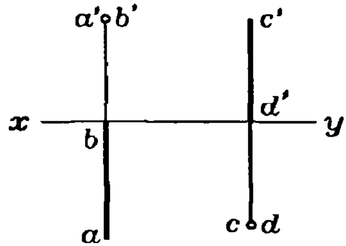


Рис. 53.

5) Отрезок CD перпендикулярен к горизонтальной плоскости и упирается в нее (рис. 52 и 53).

6) Отрезок AB лежит в некоторой плоскости P, перпендикулярной к оси xy. Тогда обе проектирующие плоскости совпадают с плоскостью P и потому на эпюре ab, $a'b'$ расположены на одном перпендикуляре к оси xy (рис. 54 и 55).

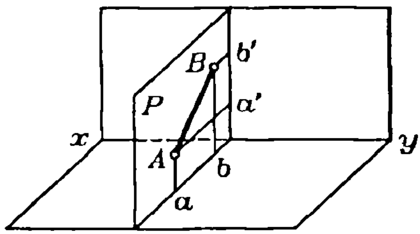


Рис. 54.

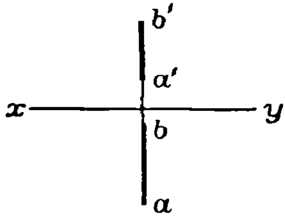


Рис. 55.

7) Отрезок AB параллелен вертикальной плоскости. Тогда его горизонтальная проекция параллельна оси xy (рис. 56 и 57), а вертикальная проекция равна и параллельна AB.

8) Отрезок AB параллелен горизонтальной плоскости (рис. 58 и 59); тогда его вертикальная проекция параллельна оси xy, а горизонтальная проекция равна и параллельна самому отрезку AB.

58. Проекция пересекающихся прямых. Очевидно, что если две прямые (K и L) пересекаются, то пересекаются также и их одноименные проекции (рис. 60), причем точки пересечения m и m' лежат на одном перпендикуляре к оси xy. Обратно, если одноименные проекции двух прямых пересекаются, причем точки пересечения лежат на одном перпендикуляре к оси xy, то и сами прямые пересекаются, так как точка (m, m'), определяемая точками пересечения проекций, принадлежит обеим прямым.

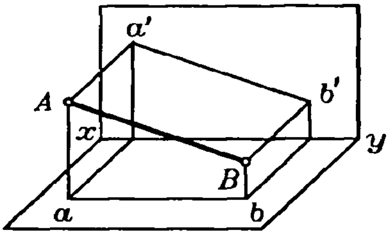


Рис. 56.

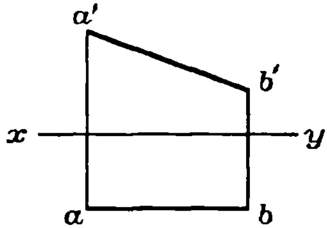


Рис. 57.

59. Проекции параллельных прямых параллельны. Действительно, если $AB||CD$ (рис. 61), то стороны углов BAa и DCc параллельны и потому проектирующие плоскости также параллельны (§ 15), а параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью (P) по параллельным прямым (ab и cd) (§ 16).

60. Изображениями прямых с помощью двух ее проекций на две взаимно перпендикулярные плоскости можно пользоваться для решения различных задач, касающихся положения прямых в пространстве.

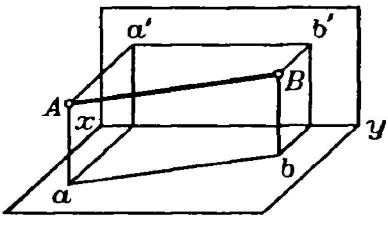


Рис. 58.

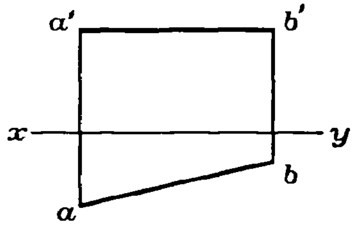


Рис. 59.

Рассмотрим несколько примеров таких задач.

Задача 1. *На эпюре даны проекции ab и $a'b'$ некоторого отрезка AB* (рис. 62). *Определить действительную величину этого отрезка.*

Первый способ решения. Чтобы легче было вообразить положение отрезка в пространстве, возьмем перспективное изображение отрезка AB и его горизонтальной проекции ab (рис. 63), т. е. такое изображение, которым мы пользовались в первой главе.

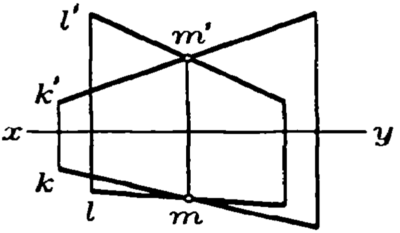


Рис. 60.

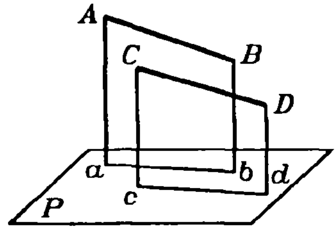


Рис. 61.

Четырехугольник $ABba$ представляет собой прямоугольную трапецию с прямыми углами при точках a и b. Проведя в этой трапеции прямую AC, параллельную ab, получим прямоугольный треугольник ABC.

В этом треугольнике отрезок AB является гипотенузой, катет AC, очевидно, равен горизонтальной проекции ab отрезка AB. Эта проекция на эпюре задана. Катет BC равен разности отрезков Bb и Aa.

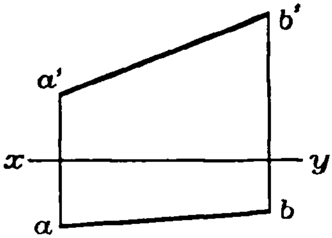


Рис. 62.

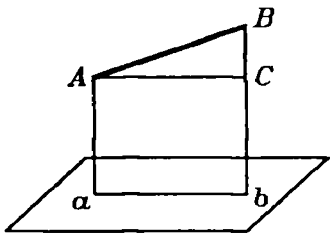


Рис. 63.

Отрезки Bb и Aa на эпюре также даны; именно они равны соответственно расстояниям точек b' и a' от оси xy, следовательно, разность их также можно найти на эпюре. Она равна разности расстояний точек b' и a' от оси xy. Отсюда следует: чтобы найти действительную длину отрезка AB, нужно построить прямоугольный треугольник, одним из катетов которого служит горизонтальная проекция ab искомого отрезка, а другим — отрезок, равный разности расстояний вертикальных проекций a' и b' концов отрезка от оси xy. Гипотенуза этого треугольника и дает действительную длину отрезка AB.

Второй способ. Представим себе, что отрезок AB в пространстве неизменно скреплен с прямой Aa, и будем вращать отрезок AB около этой прямой до тех пор, пока он не станет параллелен вертикальной плоскости проекций (рис. 64).

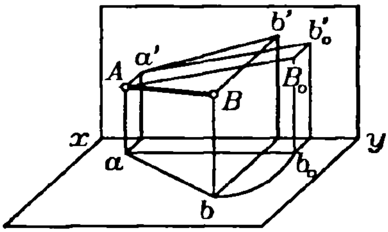


Рис. 64.

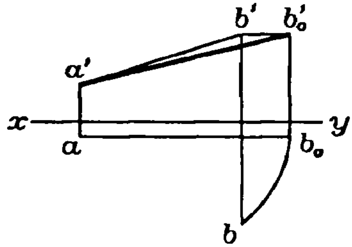


Рис. 65.

При этом его вертикальная проекция будет давать его действительную длину.

При таком вращении отрезка AB его проекции ab и $a'b'$ на эпюре будут меняться. Но его угол наклона к прямой Aa не будет меняться, а следовательно, не будет меняться и длина его горизонтальной проекции (меняется только ее направление). Значит, при этом вращении отрезка его горизонтальная проекция изменится так, что точка a на эпюре остается неподвижной, а точка b перемещается по дуге окружности. Когда отрезок AB станет параллелен вертикальной плоскости, его горизонтальная проекция сделается параллельной оси xy. Вертикальная проекция $a'b'$ при вращении также меняется, но так как расстояние точки B от горизонтальной плоскости остается неизменным, то расстояние точки b' от оси xy также не будет меняться. Отсюда следует, что точка b' будет перемещаться по прямой, параллельной оси xy. Из сказанного следует, что можно получить на эпюре проекции отрезка AB, после его поворота вокруг оси Aa, с помощью следующего построения (рис. 65): описываем дугу окружности с центром в точке a радиусом, равным ab, и находим точку ее пересечения b_0 с прямой, параллельной оси xy и проходящей через точку a; через b' проводим прямую, параллельную оси xy, и продолжаем ее до пересечения в некоторой точке b'_0 с перпендикуляром к оси xy, проведенным через точку b_0. Отрезки

ab_0 и $a'b_0'$ будут проекциями отрезка AB после поворота. Его вертикальная проекция $a'b_0'$ будет при этом давать действительную длину отрезка AB.

61. Задача 2. *На эпюре даны проекции l и l' некоторой прямой* (рис. 66). *Найти точки пересечения этой прямой с плоскостями проекций (эти точки называются* **следами** *прямой на плоскостях проекций).*

Решение. Точка встречи данной прямой с вертикальной плоскостью имеет своей горизонтальной проекцией точку на оси xy. С другой стороны, горизонтальная проекция этой точки должна лежать на прямой l. Следовательно, для нахождения на эпюре вертикального следа прямой продолжаем ее горизонтальную проекцию l до встречи в точке f с осью xy. Точка f будет горизонтальной проекцией искомого вертикального следа. Чтобы найти его вертикальную проекцию, восставим в точке f перпендикуляр к оси xy и продолжим его до пересечения в точке f' с прямой l'. Эта точка f' и будет искомой вертикальной проекцией вертикального следа, она, очевидно, совпадает с самим вертикальным следом. Таким же путем найдем и горизонтальный след прямой: продолжаем l' до встречи в точке m' с осью xy, в точке m' восставляем перпендикуляр к оси xy до встречи в точке m с прямой l; точка m искомая.

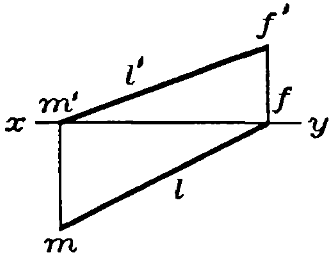


Рис. 66.

62. Проекция треугольника. Если в пространстве дан треугольник, то можно построить горизонтальные и вертикальные проекции его вершин и сторон. На эпюре получаются, таким образом, два треугольника, которые служат горизонтальной и вертикальной проекциями данного треугольника в пространстве.

Если форма и положение треугольника в пространстве не указаны заранее, то проекции его вершин можно задавать произвольно, соблюдая лишь условие, чтобы вертикальная и горизонтальная проекции одной и той же вершины лежали на одном перпендикуляре к оси xy. Действительно, положение плоскости в пространстве вполне определяется положением трех ее точек, которые можно брать в пространстве совершенно произвольно, лишь бы они не располагались на одной прямой.

На рисунке 67 представлены проекции некоторого треугольника *ABC*. Пользуясь этими проекциями, можно на эпюре решать различные задачи, касающиеся положения треугольника в пространстве.

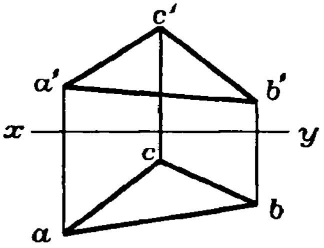


Рис. 67.

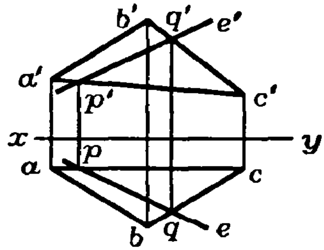


Рис. 68.

63. Задача 1. *Даны проекции abc и a'b'c' треугольника* (рис. 68). *Построить на эпюре вертикальную проекцию прямой, лежащей в плоскости этого треугольника, горизонтальная проекция которой задана.*

Решение. Пусть прямая *e* есть заданная горизонтальная проекция, она встречает прямые *ac* и *bc* соответственно в точках *p* и *q*.

Так как эта прямая проведена в плоскости треугольника *ABC*, то она пересекается со сторонами *AC* и *BC* в точках, для которых *p* и *q* служат горизонтальными проекциями. Для получения вертикальных проекций тех же точек, очевидно, следует из точек *p* и *q* опустить перпендикуляры на ось *xy* и продолжить их до встречи в точках *p'* и *q'* соответственно с прямыми *a'c'* и *b'c'*. Прямая *p'q'* есть искомая вертикальная проекция прямой, лежащей в плоскости данного треугольника.

64. Задача 2. *На эпюре даны проекции abc и a'b'c' треугольника ABC* (рис. 69). *Кроме того, дана горизонтальная проекция d точки D, лежащей в плоскости этого треугольника. Построить вертикальную проекцию этой точки.*

Решение. Соединив точки *d* и *a*, мы получим горизонтальную проекцию *ad* прямой, лежащей в плоскости треугольника *ABC* и соединяющей точку *D* с вершиной *A* (рис. 70). Точка *p*, в которой прямая *ad* встречает *bc*, есть горизонтальная проекция точки пересечения P прямой AD со стороной BC (рис. 70).

На прямой $b'c'$ находим вертикальную проекцию p' той же точки, опустив из p перпендикуляр на ось. Далее, проводим прямую $a'p'$ и на ней таким же способом находим искомую вертикальную проекцию d' точки D (рис. 69).

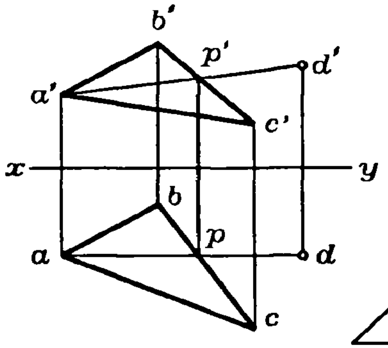


Рис. 69.

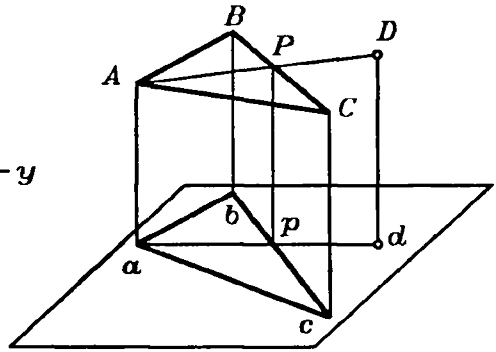


Рис. 70.

65. Проекции многоугольников. При построении проекций многоугольника уже нельзя произвольно задавать проекции его вершин. Если взять произвольные горизонтальные проекции вершин многоугольника, из вертикальных их проекций произвольно (но на одном перпендикуляре с соответствующими горизонтальными проекциями) можно взять только три. Действительно, эти три вертикальные проекции вместе с горизонтальными вполне определяют плоскость, в которой лежит многоугольник.

Поэтому вертикальные проекции остальных вершин следует брать так, чтобы они служили проекциями точек, лежащих в этой плоскости.

На рисунке 71 даны проекции прямоугольника, лежащего в плоскости, перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекции, имеющего две вертикальные стороны.

На рисунке 72 представлено построение проекций шестиугольника, причем горизонтальные проекции a, b, c, d, e, f его вершин взяты произвольно.

Вертикальные проекции a', b', c' выбраны на перпендикулярах к оси проекций, проведенных через точки a, b, c. При этом точку a' можно брать где угодно на перпендикуляре к оси проекций, проведенном через a, точку b' — где угодно на перпендикуляре к оси, проведенном через b, и точку c' — где угодно на перпендикуляре к оси, проведенном через c. Вертикальные проекции остальных вершин можно построить, применяя способ, указанный в § 64. Соединив точки a, b и c, получим горизонтальные проекции двух сторон шестиугольника (ab и bc) и одной его диагонали (ac). Соединив точки a', b' и c', получим вертикальные проекции тех же сторон ($a'b'$ и $b'c'$) и той же диагонали ($a'c'$). Соединим после этого точку b с горизонтальными проекциями d, e и f остальных вершин шестиуголь-

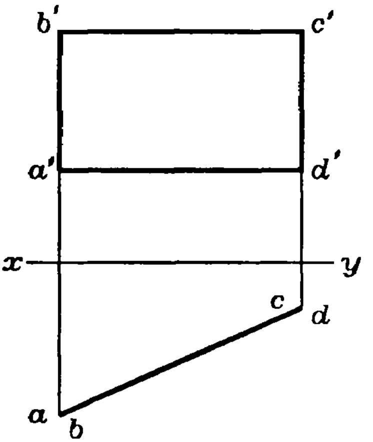


Рис. 71.

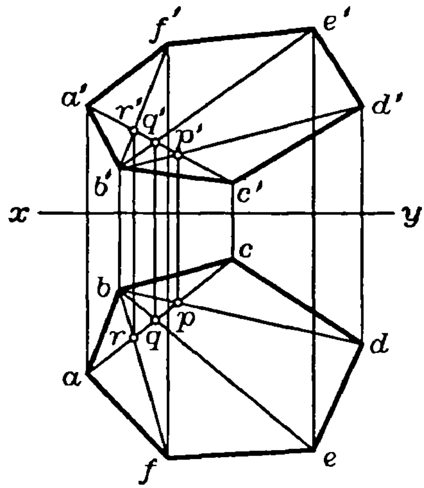


Рис. 72.

ника. Точки пересечения прямых bd, be и bf с прямой ac обозначим соответственно через p, q и r. Проведя через точки p, q и r прямые, перпендикулярные к оси проекций, продолжим их до пересечения с прямой $a'c'$, тогда мы получим на этой прямой вертикальные проекции p', q' и r' точек пересечения трех диагоналей шестиугольника с четвертой, для которой вертикальной проекцией служит прямая $a'c'$. Вертикальные проекции этих трех диагоналей мы получим, соединяя точки p', q' и r' с точкой b. Если теперь продолжить прямую $b'p'$, а через точку d провести прямую, перпендикулярную к оси проекций, до пересечения с прямой $b'p'$, то точка пересечения этих прямых d' будет служить вертикальной проекцией четвертой вершины шестиугольника. Таким же образом, продолжая прямые $b'q'$ и $b'r'$ и опуская из точек e и f перпендикуляры на ось проекций, найдем вертикальные проекции e' и f' пятой и шестой вершин шестиугольника. Соединив последовательно точки a', b', c', d', e', f', получим искомую вертикальную проекцию шестиугольника.

66. Замечание. Метод изображения фигур и тел в ортогональных проекциях на две плоскости был разработан французским ученым Гаспаром Монжем (1746—1818). Гаспар Монж был крупнейшим французским геометром конца XVIII и начала XIX в. Во время французской революции был одним из основателей знаменитой Политехнической школы, созданной конвентом. Метод Монжа в настоящее время является одним из основных в той области геометрии, которая разрабатывает методы изображения геометрических тел на плоскости и носит название **начертательной геометрии**. Метод Монжа имеет широкое применение в технике при вычерчивании проектов сооружений, планов зданий, частей и деталей машин и т. д. При этом методе построения на эпюре выполняются иногда по сложным правилам, пользоваться которыми можно, лишь хорошо усвоив главные факты и предложения стереометрии. Поэтому в учебниках геометрии, как и в настоящей книге, при изображении геометрических фигур и тел применяются упрощенные рисунки.

Эти рисунки представляют собой проекции изучаемых фигур, но не на две плоскости, а лишь на одну, именно на плоскость чертежа.

Как следует из всего предыдущего, одна такая проекция еще не определяет ни положения фигуры в пространстве, ни ее точных размеров, но она дает ясное представление о виде изучаемой фигуры. Этого представления достаточно, чтобы, основываясь на общих теоремах стереометрии, изучать свойства геометрических фигур и тел.

ГЛАВА III

МНОГОГРАННИКИ

1. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД И ПИРАМИДА

67. Многогранник. Многогранником называется тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Общие стороны смежных многоугольников называют **ребрами** многогранника. Многоугольники, которые ограничивают многогранник, называются его **гранями**. Грани многогранника, сходящиеся в одной точке, образуют многогранный угол; вершины таких многогранных углов называются **вершинами** многогранника. Прямые, соединяющие две какие-нибудь вершины, не лежащие на одной грани, называются **диагоналями** многогранника.

Мы будем рассматривать только выпуклые многогранники, т. е. такие, которые расположены по одну сторону от плоскости каждой из его граней.

Наименьшее число граней в многограннике — четыре; такой многогранник получается от пересечения трехгранного угла какой-нибудь плоскостью.

68. Призма. Призмой называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани — параллелограммы.

Чтобы показать возможность существования такого многогранника, возьмем (рис. 73) какой-нибудь многоугольник $ABCDE$ и через его вершины проведем ряд параллельных прямых, не лежащих в его плоскости. Взяв затем на одной из этих прямых произвольную точку A_1, проведем через нее плоскость, параллельную плоскости $ABCDE$; через каждые две соседние параллельные прямые также проведем плоскости. Пересечение всех этих плоскостей определит многогранник $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, удовлетворяющий определению призмы. Действительно, параллельные плоскости $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ пересекаются боковыми плоскостями по параллельным прямым (§ 16); поэтому фигуры AA_1E_1E, EE_1D_1D и т. д. — параллелограммы. С другой стороны, у многоугольников $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ равны соответственно стороны (как противоположные стороны параллелограммов) и углы (как углы с параллельными и одинаково направленными сторонами); следовательно, эти многоугольники равны.

Многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$, лежащие в параллельных плоскостях, называются **основаниями** призмы, перпендикуляр OO_1, опущенный из какой-нибудь точки одного основания на плоскость другого, называется **высотой** призмы. Параллелограммы AA_1B_1B, BB_1C_1C и т. д. называются **боковыми гранями** призмы, а их стороны AA_1, BB_1 и т. д., соединяющие соответственные вершины оснований, — **боковыми ребрами**. У призмы все боковые ребра равны, как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями.

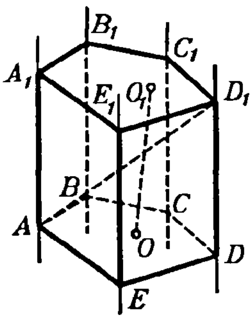


Рис. 73.

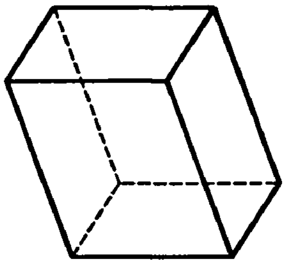


Рис. 74.

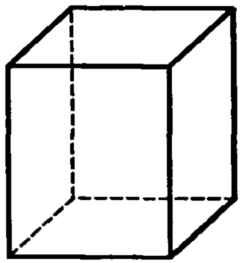


Рис. 75.

Отрезок прямой, соединяющий какие-нибудь две вершины, не прилежащие к одной грани, называется **диагональю** призмы. Таков, например, отрезок AD_1 (рис. 73).

Плоскость, проведенная через какие-нибудь два боковых ребра, не прилежащие к одной боковой грани призмы (например, через ребра AA_1 и CC_1, рис. 73), называется **диагональной плоскостью** (на рисунке не показанной).

Призма называется **прямой или наклонной**, смотря по тому, будут ли ее боковые ребра перпендикулярны или наклонны к основаниям. У прямой призмы боковые грани — прямоугольники. За высоту такой призмы можно принять боковое ребро.

Прямая призма называется **правильной**, если ее основания — правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани — равные прямоугольники.

Призмы бывают треугольные, четырехугольные и т. д., смотря по тому, что является основанием: треугольник, четырехугольник и т. д.

69. Параллелепипед. Параллелепипедом называют призму, у которой основаниями служат параллелограммы (рис. 74).

Параллелепипеды, как и всякие призмы, могут быть прямые и наклонные. Прямой параллелепипед называется **прямоугольным**, если его основание — прямоугольник (рис. 75).

Из этих определений следует:

1) у параллелепипеда все шесть граней — параллелограммы;

2) у прямого параллелепипеда четыре боковые грани — прямоугольники, а два основания — параллелограммы;

3) у прямоугольного параллелепипеда все шесть граней — прямоугольники.

Три ребра прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, называются его **измерениями**; одно из них можно рассматривать как длину, другое — как ширину, а третье — как высоту.

Прямоугольный параллелепипед, имеющий равные измерения, называется **кубом**. У куба все грани — квадраты.

70. Пирамида. Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань, называемая основанием, есть какой-нибудь многоугольник, а все остальные грани, называемые боковыми, — треугольники, имеющие общую вершину.

Чтобы получить пирамиду, достаточно какой-нибудь многогранный угол S (рис. 76) пересечь произвольной плоскостью $ABCD$ и взять отсеченную часть $SABCD$.

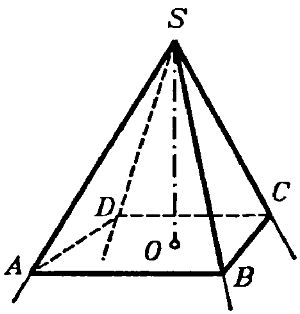


Рис. 76.

Общая вершина S боковых треугольников называется **вершиной** пирамиды, а перпендикуляр SO, опущенный из вершины на плоскость основания, — **высотой** ее.

Обыкновенно, обозначая пирамиду буквами, пишут сначала ту, которой обозначена вершина, например $SABCD$ (рис. 76).

Плоскость, проведенная через вершину пирамиды и через какую-нибудь диагональ основания (например, через диагональ BD, рис. 78), называется **диагональной плоскостью**.

Пирамиды бывают треугольные, четырехугольные и т. д., смотря по тому, что является основанием — треугольник, четырехугольник и т. д. Треугольная пирамида (рис. 77) называется иначе **тетраэдром**; все четыре грани у такой пирамиды — треугольники.

Пирамида называется **правильной** (рис. 78), если, во-первых, ее основание есть правильный многоугольник и, во-вторых, высота проходит через центр этого многоугольника. В правильной пирамиде все боковые ребра равны между собой (как наклонные с равными проекциями). Поэтому все боковые грани правильной пирамиды суть равные равнобедренные треугольники. Высота SM (рис. 78) каждого из этих треугольников называется **апофемой**. Все апофемы в правильной пирамиде равны.

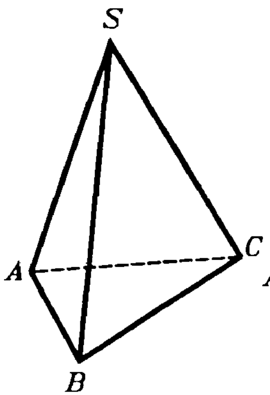


Рис. 77.

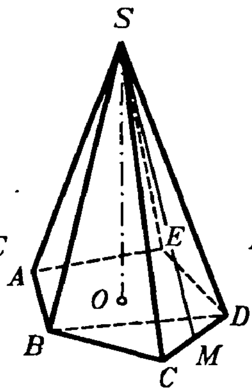


Рис. 78.

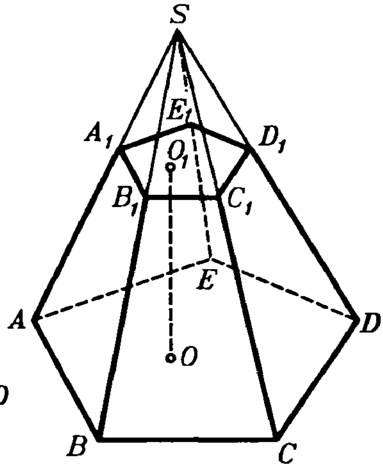


Рис. 79.

71. Усеченная пирамида. Часть пирамиды (рис. 79), заключенная между основанием ($ABCDE$) и секущей плоскостью ($A_1B_1C_1D_1E_1$), параллельной основанию, называется **усеченной пирамидой**. Параллельные грани называются **основаниями**, а отрезок перпендикуляра OO_1, опущенного из какой-нибудь точки O_1 основания $A_1B_1C_1D_1E_1$ на другое основание, — **высотой** усеченной пирамиды. Усеченная пирамида называется **правильной**, если она составляет часть правильной пирамиды.

Свойства граней и диагоналей параллелепипеда

72. Теорема. ***В параллелепипеде:***

1) ***противолежащие грани равны и параллельны;***

2) ***все четыре диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.***

1) Грани (рис. 80) BB_1C_1C и AA_1D_1D параллельны, потому что две пересекающиеся прямые BB_1 и B_1C_1 одной грани параллельны двум пересекающимся прямым AA_1 и A_1D_1

другой (§ 15); эти грани и равны, так как $B_1C_1=A_1D_1$, $B_1B=A_1A$ (как противоположные стороны параллелограммов) и $\angle BB_1C_1=\angle AA_1D_1$.

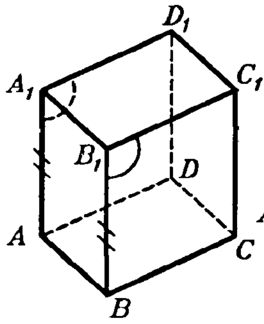


Рис. 80.

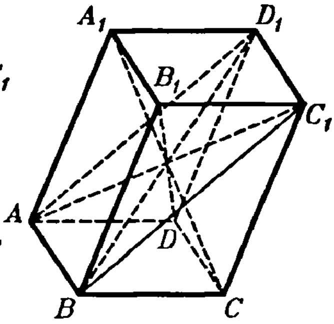


Рис. 81.

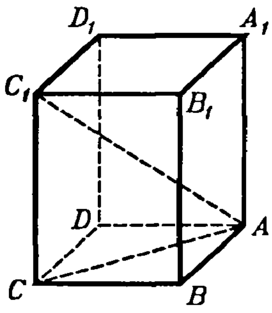


Рис. 82.

2) Возьмем (рис. 81) какие-нибудь две диагонали, например AC_1 и BD_1, и проведем вспомогательные прямые AD_1 и BC_1. Так как ребра AB и D_1C_1 соответственно равны и параллельны ребру DC, то они равны и параллельны между собой; вследствие этого фигура AD_1C_1B есть параллелограмм, в котором прямые C_1A и BD_1 — диагонали, а в параллелограмме диагонали делятся в точке пересечения пополам. Возьмем теперь одну из этих диагоналей, например AC_1, с третьей диагональю, положим с B_1D. Совершенно так же мы можем доказать, что они делятся в точке пересечения пополам. Следовательно, диагонали B_1D и AC_1 и диагонали AC_1 и BD_1 (которые мы раньше брали) пересекаются в одной и той же точке, именно в середине диагонали AC_1. Наконец, взяв эту же диагональ AC_1 с четвертой диагональю A_1C, мы также докажем, что они делятся пополам. Значит, точка пересечения и этой пары диагоналей лежит в середине диагонали AC_1. Таким образом, все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной и той же точке и делятся этой точкой пополам.

73. Теорема. ***В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали*** (AC_1, рис. 82) ***равен сумме квадратов трех его измерений.***

Проведя диагональ основания AC, получим треугольники AC_1C и ACB. Оба они прямоугольные: первый потому, что параллелепипед прямой и, следовательно, ребро CC_1 перпендикулярно к основанию; второй потому, что параллелепипед **прямоугольный** и, значит, в основании его лежит прямоугольник. Из этих треугольников находим:

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 \text{ и } AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Следовательно,

$$AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Следствие. *В прямоугольном параллелепипеде все диагонали равны.*

Свойства параллельных сечений в пирамиде

74. Теорема. ***Если пирамида*** (рис. 83) ***пересечена плоскостью, параллельной основанию, то:***

1) ***боковые ребра и высота делятся этой плоскостью на пропорциональные части;***

2) ***в сечении получается многоугольник (abcde), подобный основанию;***

3) ***площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины.***

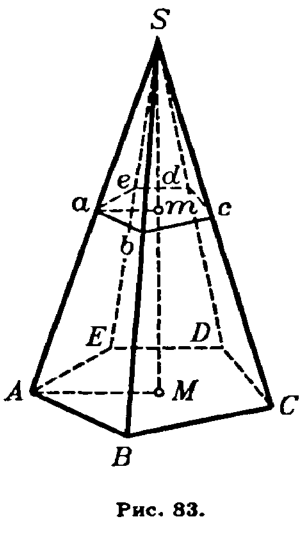


Рис. 83.

1) Прямые ab и AB можно рассматривать как линии пересечения двух параллельных плоскостей (основания и секущей) третьей плоскостью ASB; поэтому $ab \| AB$ (§ 16). По той же причине $bc \| BC$, $cd \| CD$, ... и $am \| AM$; вследствие этого

$$\frac{Sa}{aA} = \frac{Sb}{bB} = \frac{Sc}{cC} = \ldots = \frac{Sm}{mM}.$$

2) Из подобия треугольников ASB и aSb, затем BSC и bSc и т. д. выводим:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BS}{bS}; \quad \frac{BS}{bS} = \frac{BC}{bc},$$

откуда

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}.$$

Так же $\dfrac{BC}{bc} = \dfrac{CS}{cS}$; $\dfrac{CS}{cS} = \dfrac{CD}{cd}$, откуда $\dfrac{BC}{bc} = \dfrac{CD}{cd}$.

Так же докажем пропорциональность остальных сторон многоугольника $ABCDE$ и $abcde$. Так как, сверх того, у этих многоугольников равны соответственные углы (как образованные параллельными и одинаково направленными сторонами), то они подобны.

3) Площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон; поэтому

$$\frac{\text{площадь } ABCDE}{\text{площадь } abcde} = \frac{AB^2}{ab^2} = \left(\frac{AB}{ab}\right)^2,$$

но

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AS}{aS} = \frac{MS}{mS},$$

значит,

$$\frac{\text{площадь } ABCDE}{\text{площадь } abcde} = \left(\frac{MS}{mS}\right)^2 = \frac{MS^2}{mS^2}.$$

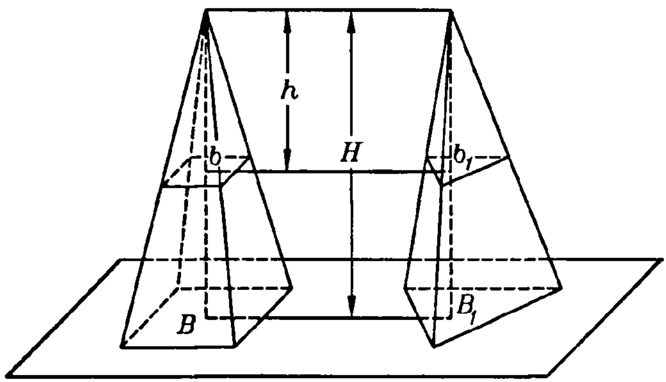


Рис. 84.

75. Следствие. *У правильной усеченной пирамиды верхнее основание есть правильный многоугольник, подобный нижнему основанию, а боковые грани суть равные и равнобочные трапеции* (рис. 83).

Высота любой из этих трапеций называется апофемой правильной усеченной пирамиды.

76. Теорема. ***Если две пирамиды с равными высотами рассечены на одинаковом расстоянии от вершины плоскостями, параллельными основаниям, то площади сечений пропорциональны площадям оснований.***

Пусть (рис. 84) B и B_1 — площади оснований двух пирамид, H—высота каждой из них, b и b_1—площади сечений плоскостями, параллельными основаниям и удаленными от вершин на одно и то же расстояние h.

Согласно предыдущей теореме мы будем иметь:

$$\frac{b}{B}=\frac{h^2}{H^2} \text{ и } \frac{b_1}{B_1}=\frac{h^2}{H^2},$$

откуда

$$\frac{b}{B}=\frac{b_1}{B_1} \text{ или } \frac{b}{b_1}=\frac{B}{B_1}.$$

77. Следствие. Если $B=B_1$, то и $b=b_1$, т. е. *если у двух пирамид с равными высотами основания равновелики, то равновелики и сечения, равноотстоящие от вершины.*

Боковая поверхность призмы и пирамиды[1]

78. Теорема. ***Боковая поверхность призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.***

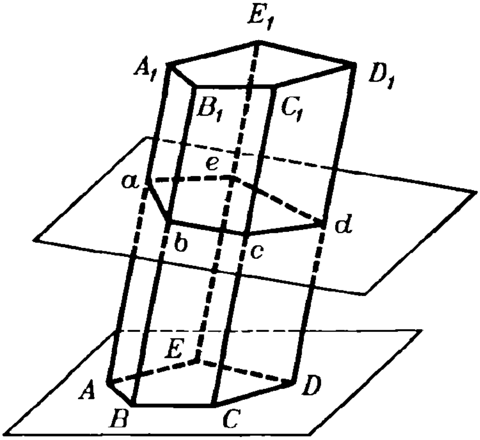


Рис. 85.

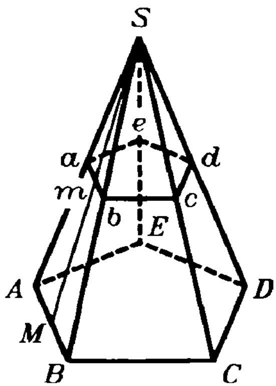


Рис. 86.

Перпендикулярным сечением (рис. 85) называется многоугольник $abcde$, получаемый от пересечения призмы плоскостью, перпендикулярной к боковому ребру. Стороны этого многоугольника перпендикулярны к ребрам (§ 31, 24).

[1] В § 78—81, а также и в дальнейшем ради краткости термин «боковая поверхность» употребляется вместо «площадь боковой поверхности».

Боковая поверхность призмы представляет собой сумму площадей параллелограммов; в каждом из них за основание можно взять боковое ребро, а за высоту — сторону перпендикулярного сечения. Поэтому боковая поверхность призмы равна:

$AA_1 \cdot ab + BB_1 \cdot bc + CC_1 \cdot cd + DD_1 \cdot de + EE_1 \cdot ea = (ab + bc + cd + de + ea) \cdot AA_1$.

79. Следствие. *Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту* потому, что в такой призме за перпендикулярное сечение можно взять само основание, а боковое ребро ее равно высоте.

80. Теорема. ***Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению периметра основания на половину апофемы.***

Пусть (рис. 86) $SABCDE$—правильная пирамида и SM — ее апофема. Боковая поверхность этой пирамиды есть сумма площадей равных равнобедренных треугольников. Площадь одного из них, например ASB, равна $AB \cdot \frac{1}{2} SM$. Если всех треугольников n, то боковая поверхность равна: $AB \cdot \frac{1}{2} SM \cdot n = AB \cdot n \cdot \frac{1}{2} SM$, где $AB \cdot n$ есть периметр основания, а SM — апофема.

81. Теорема. ***Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров обоих оснований на апофему.***

Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды есть сумма площадей равных трапеций. Площадь одной трапеции, например $AabB$ (рис. 86), равна $\frac{1}{2}(AB + ab) \cdot Mm$. Если число всех трапеций есть n, то боковая поверхность равна:

$$\frac{AB + ab}{2} \cdot Mm \cdot n = \frac{AB \cdot n + ab \cdot n}{2} \cdot Mm,$$

где $AB \cdot n$ и $ab \cdot n$ суть периметры нижнего и верхнего оснований.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Высота прямой призмы, основание которой есть правильный треугольник, равна 12 м, сторона основания 3 м. Вычислить полную поверхность призмы.

2. Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна 1714 $м^2$, а неравные стороны основания равны 25 м и 14 м. Вычислить боковую поверхность и боковое ребро.

3. В прямоугольном параллелепипеде с квадратным основанием и высотой h проведена секущая плоскость через два противоположных боковых ребра. Вычислить полную поверхность параллелепипеда, зная, что площадь сечения равна S.

4. Правильная шестиугольная пирамида имеет сторону основания a и высоту h. Вычислить боковое ребро, апофему, боковую поверхность и полную поверхность.

5. Вычислить полную поверхность и высоту треугольной пирамиды, у которой каждое ребро равно a.

6. Правильная шестиугольная пирамида, у которой высота 25 см, а сторона основания 5 см, рассечена плоскостью, параллельной основанию. Вычислить расстояние этой плоскости от вершины пирамиды, зная, что площадь сечения равна $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ $см^2$.

7. Высота усеченной пирамиды с квадратным основанием равна h, сторона нижнего основания a, а верхнего b. Найти полную поверхность усеченной пирамиды.

8. Высота усеченной пирамиды равна 6, а площади оснований 18 и 8. Пирамида рассечена плоскостью, параллельной основаниям и делящей высоту пополам. Вычислить площадь сечения.

II. ОБЪЕМ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ

82. Основные допущения в объемах. Величина части пространства, занимаемого геометрическим телом, называется **объемом** этого тела.

Мы ставим задачу—найти для этой величины выражение в виде некоторого числа, измеряющего эту величину. При этом мы будем руководствоваться следующими исходными положениями:

1) *Равные тела имеют равные объемы.*

2) *Объем какого-нибудь тела* (например, каждого параллелепипеда, изображенного на рис. 87), *состоящего из частей* (P и Q), *равен* ***сумме объемов*** *этих частей.*

Два тела, имеющие одинаковые объемы, называются равновеликими.

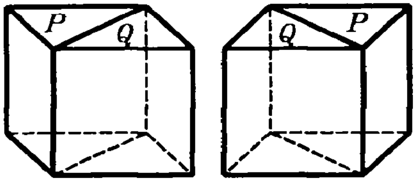


Рис. 87.

83. Единица объема. За единицу объемов при измерении их берут объем такого куба, у которого каждое ребро равно линейной единице. Так, употребительны кубические метры ($м^3$), кубические сантиметры ($см^3$) и т. д.

Объем параллелепипеда

84. Теорема. ***Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.***

В таком кратком выражении теорему эту надо понимать так: число, выражающее объем прямоугольного параллелепипеда в кубической единице, равно произведению чисел, выражающих три его измерения в соответствующей линейной единице, т. е. в единице, являющейся ребром куба, объем которого принят за кубическую единицу. Так, если x есть число, выражающее объем прямоугольного параллелепипеда в кубических сантиметрах, и a, b и c—числа, выражающие три его измерения в линейных сантиметрах, то теорема утверждает, что $x=abc$.

При доказательстве рассмотрим особо следующие три случая:

1) Измерения выражаются целыми числами.

Пусть, например, измерения будут (рис. 88): $AB=a$, $BC=b$ и $BD=c$, где a, b и c — какие-нибудь целые числа (например, как изображено у нас на чертеже: $a=4$, $b=2$ и $c=5$). Тогда основание параллелепипеда содержит ab таких квадратов, из которых каждый представляет собой соответствующую квадратную единицу. На каждом из этих квадратов, очевидно, можно поместить по одной кубической единице. Тогда получится слой (изображенный на рисунке), состоящий из ab кубических единиц. Так как высота этого слоя равна одной линей-

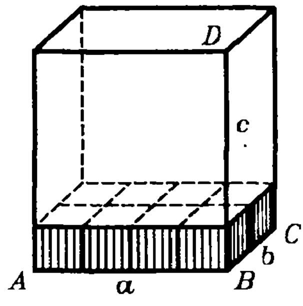


Рис. 88.

ной единице, а высота всего параллелепипеда содержит c таких единиц, то внутри параллелепипеда можно поместить c таких слоев. Следовательно, объем этого параллелепипеда равен abc кубических единиц.

2) Измерения выражаются **дробными числами.**

Пусть измерения параллелепипеда будут:

$$\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \frac{r}{s}$$

(некоторые из этих дробей могут равняться целому числу).

Приведя дроби к одинаковому знаменателю, будем иметь:

$$\frac{mqs}{nqs}, \frac{pns}{nqs}, \frac{rnq}{nqs}.$$

Примем $\frac{1}{nqs}$ долю линейной единицы за новую (вспомогательную) единицу длины. Тогда в этой новой единице измерения данного параллелепипеда выразятся целыми числами, а именно: mqs, pns и rnq, и потому по доказанному (в случае 1) объем параллелепипеда равен произведению $(mqs)\cdot(pns)\cdot(rnq)$, если измерять этот объем новой кубической единицей, соответствующей новой линейной единице. Таких кубических единиц в одной кубической единице, соответствующей прежней линейной единице, содержится $(nqs)^3$; значит, новая кубическая единица составляет $\frac{1}{(nqs)^3}$ прежней. Поэтому объем параллелепипеда, выраженный в прежних единицах, равен:

$$\frac{1}{(nqs)^3}\cdot(mqs)\cdot(pns)\cdot(rnq) =$$

$$= \frac{mqs}{nqs}\cdot\frac{pns}{nqs}\cdot\frac{rnq}{nqs} = \frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}.$$

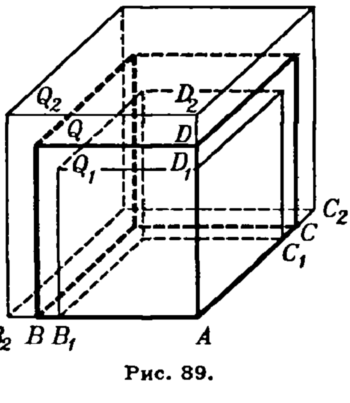


Рис. 89.

3) Измерения выражаются **иррациональными числами.**

Пусть у данного параллелепипеда (рис. 89), который для краткости мы обозначим буквой Q, измерения будут:

$$AB=\alpha;\quad AC=\beta;\quad AD=\gamma,$$

где все числа α, β и γ или только некоторые из них иррациональные.

Каждое из чисел α, β и γ может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби. Возьмем приближенные значения этих дробей с n десятичными знаками сначала с недостатком, а затем с избытком. Значения с недостатком обозначим α_n, β_n, γ_n, значения с избытком α'_n, β'_n, γ'_n. Отложим на ребре AB, начиная от точки A, два отрезка $AB_1=\alpha_n$ и $AB_2=\alpha'_n$. На ребре AC от той же точки A отложим отрезки $AC_1=\beta_n$ и $AC_2=\beta'_n$ и на ребре AD от той же точки — отрезки $AD_1=\gamma_n$ и $AD_2=\gamma'_n$.

При этом будем иметь:

$$AB_1 < AB < AB_2; \quad AC_1 < AC < AC_2; \quad AD_1 < AD < AD_2.$$

Построим теперь два вспомогательных параллелепипеда; один (обозначим его Q_1) с измерениями AB_1, AC_1 и AD_1 и другой (обозначим его Q_2) с измерениями AB_2, AC_2 и AD_2. Параллелепипед Q_1 будет весь помещаться внутри параллелепипеда Q, а параллелепипед Q_2 будет содержать внутри себя параллелепипед Q.

По доказанному (в случае 2) будем иметь:

$$\text{объем } Q_1=\alpha_n\beta_n\gamma_n, \tag{1}$$

$$\text{объем } Q_2=\alpha'_n\beta'_n\gamma'_n, \tag{2}$$

причем объем Q_1<объема Q_2.

Начнем теперь увеличивать число n. Это значит, что мы берем приближенные значения чисел α, β, γ все с большей и большей степенью точности. Посмотрим, как при этом изменяются объемы параллелепипедов Q_1 и Q_2.

При неограниченном возрастании n объем Q_1, очевидно, увеличивается и в силу равенства (1) при беспредельном увеличении n имеет своим пределом предел произведения $(\alpha_n\beta_n\gamma_n)$. Объем Q_2, очевидно, уменьшается и в силу равенства (2) имеет пределом предел произведения $(\alpha'_n\beta'_n\gamma'_n)$. Но из алгебры известно, что оба произведения $\alpha_n\beta_n\gamma_n$ и $\alpha'_n\beta'_n\gamma'_n$ при неограниченном увеличении n имеют общий предел, который является произведением иррациональных чисел $\alpha\beta\gamma$.

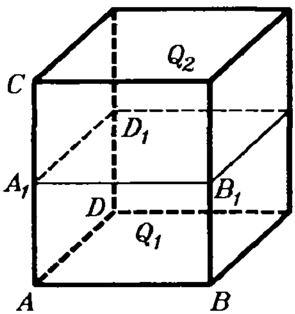


Рис. 90.

Этот предел мы и принимаем за меру объема параллелепипеда Q: объем $Q=\alpha\beta\gamma$. Можно доказать, что определенный таким образом объем удовлетворяет тем условиям, которые установлены для объема (§ 82). В самом деле, при таком определении объема равные параллелепипеды, очевидно, имеют равные объемы. Следовательно, первое условие (§ 82) выполняется. Разобьем теперь данный параллелепипед Q плоскостью, параллельной его основанию, надвое: Q_1 и Q_2 (рис. 90). Тогда будем иметь:

$$\text{объем } Q = AB{\cdot}AC{\cdot}AD,$$

$$\text{объем } Q_1 = AB{\cdot}AA_1{\cdot}AD,$$

$$\text{объем } Q_2 = A_1B_1{\cdot}A_1C{\cdot}A_1D_1.$$

Складывая почленно два последних равенства и замечая, что $A_1B_1 = AB$ и $A_1D_1 = AD$, получим: объем Q_1 + объем $Q_2 = AB{\cdot}AA_1{\cdot}AD + AB{\cdot}A_1C{\cdot}AD = AB{\cdot}AD(AA_1 + A_1C) = AB{\cdot}AD{\cdot}AC$, отсюда получаем:

$$\text{объем } Q_1 + \text{объем } Q_2 = \text{объему } Q.$$

Следовательно, и второе условие § 82 тоже выполняется, если параллелепипед складывать из двух частей, полученных разрезанием его плоскостью, параллельной одной из граней.

85. Следствие. Пусть измерения прямоугольного параллелепипеда, служащие сторонами его оснований, выражаются числами a и b, а третье измерение (высота) — числом c. Тогда, обозначая объем его в соответствующих кубических единицах буквой V, можем написать:

$$V=abc.$$

Так как произведение ab выражает площадь основания, то можно сказать, что ***объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.***

Замечание. Отношение двух кубических единиц разных названий равно третьей степени отношения тех линейных единиц, которые служат ребрами для этих кубических единиц. Так, отношение кубического метра к кубическому дециметру равно 10^3, т. е. 1000. Поэтому, например, если мы имеем куб с ребром длиной a линейных единиц и другой куб с ребром $3a$ линейных единиц, то отношение их объемов будет равно 3^3, т. е. 27, что ясно видно из рисунка 91.

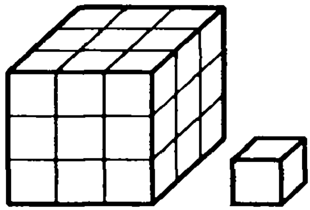


Рис. 91.

86. Лемма. ***Наклонная призма равновелика такой прямой призме, основание которой равнс перпендикулярному сечению наклонной призмы, а высота — ее боковому ребру.***

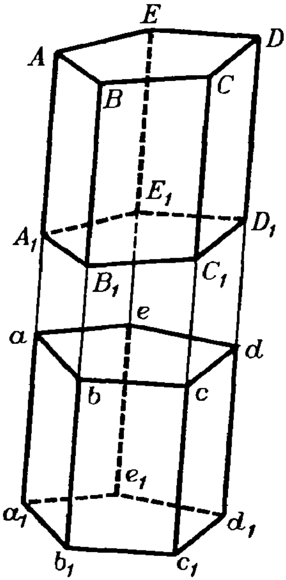


Рис. 92.

Пусть дана наклонная призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 92). Продолжим все ее боковые ребра и боковые грани в одном направлении.

Возьмем на продолжении одного какого-нибудь ребра произвольную точку a и проведем через нее перпендикулярное сечение $abcde$. Затем, отложив $aa_1=AA_1$, проведем через a_1 перпендикулярное сечение $a_1b_1c_1d_1e_1$. Так как плоскости обоих сечений параллельны, то $bb_1=cc_1=dd_1=ee_1=aa_1=AA_1$ (§ 17). Вследствие этого многогранник a_1d, у которого за основания приняты проведенные нами сечения, есть прямая призма, о которой говорится в теореме. Докажем, что данная наклонная призма равновелика этой прямой. Для этого предварительно убедимся, что многогранники aD и a_1D_1 равны. Основания их $abcde$ и $a_1b_1c_1d_1e_1$ равны как основания призмы a_1d; с другой стороны, прибавив к обеим частям равенства $A_1A=a_1a$ по одному и тому же отрезку прямой A_1a, получим: $aA=a_1A_1$; подобно этому $bB=b_1B_1$, $cC=c_1C_1$ и т. д. Вообразим теперь, что многогранник aD вложен в многогранник a_1D_1 так, что основания их совпали; тогда боковые ребра, будучи перпендикулярны к основаниям и соответственно равны, также совпадут; поэтому многогранник aD совместится с многогранником a_1D_1; значит, эти тела равны. Теперь заметим, что если к прямой призме a_1d добавим многогранник aD, а к наклонной призме A_1D добавим многогранник a_1D_1, равный aD, то получим один и тот же многогранник a_1D. Из этого следует, что две призмы A_1D и a_1d равновелики.

87. Теорема. ***Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.***

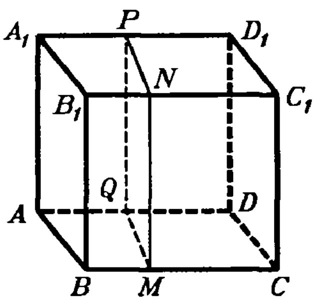


Рис. 93.

Ранее мы доказали эту теорему для параллелепипеда прямоугольного, теперь докажем ее для параллелепипеда прямого, а потом и наклонного.

1) Пусть (рис. 93) AC_1—прямой параллелепипед, т. е. такой, у которого основание $ABCD$—какой-нибудь параллелограмм, а все боковые грани—прямоугольники. Возьмем в нем за основание боковую грань AA_1B_1B; тогда параллелепипед будет наклонный. Рассматривая его как частный случай наклонной призмы мы на основании леммы предыдущего параграфа можем утверждать, что этот параллелепипед равновелик такому прямому параллелепипеду, у которого основание есть перпендикулярное сечение $MNPQ$, а высота BC. Четырехугольник $MNPQ$—прямоугольник, потому что его углы служат линейными углами прямых двугранных углов; поэтому прямой параллелепипед, имеющий основанием прямоугольник $MNPQ$, должен быть прямоугольным и, следовательно, его объем равен произведению трех его измерений, за которые можно принять отрезки MN, MQ и BC. Таким образом,

$$\text{объем } AC_1 = MN \cdot MQ \cdot BC = MN \cdot (MQ \cdot BC).$$

Но произведение $MQ \cdot BC$ выражает площадь параллелограмма $ABCD$, поэтому

$$\text{объем } AC_1 = (\text{площади } ABCD) \cdot MN = (\text{площади } ABCD) \cdot BB_1.$$

2) Пусть (рис. 94) AC_1—наклонный параллелепипед. Он равновелик такому прямому, у которого основанием служит перпендикулярное сечение $MNPQ$ (т.е. перпендикулярное к ребрам AD, BC, ...), а высотой — ребро BC. Но, по доказанному, объем прямого параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту; значит,

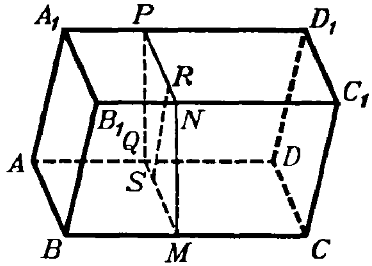


Рис. 94.

$$\text{объем } AC_1 = (\text{площади } MNPQ) \cdot BC.$$

Если RS есть высота сечения $MNPQ$, то площадь $MNPQ = MQ \cdot RS$, поэтому

$$\text{объем } AC_1 = MQ \cdot RS \cdot BC = (BC \cdot MQ) \cdot RS.$$

Произведение $BC \cdot MQ$ выражает площадь параллелограмма $ABCD$, следовательно,

$$\text{объем } AC_1 = (\text{площади } ABCD) \cdot RS.$$

Остается теперь доказать, что отрезок RS представляет собой высоту параллелепипеда. Действительно, сечение $MNPQ$, будучи перпендикулярно к ребрам BC, B_1C_1, ... должно быть перпендикулярно к граням $ABCD$, BB_1C_1C,..., проходящим через эти ребра (§ 43). Поэтому, если мы из точки S восставим перпендикуляр к плоскости $ABCD$, то он должен лежать весь в плоскости $MNPQ$ (§ 44) и, следовательно, должен слиться с прямой SR, лежащей в этой плоскости и перпендикулярной к MQ. Значит, отрезок SR есть высота параллелепипеда. Таким образом, объем и наклонного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

Следствие. Если V, B и H суть числа, выражающие в соответствующих единицах объем, площадь основания и высоту параллелепипеда, то можно написать:

$$V = BH.$$

Объем призмы

88. Теорема. ***Объем призмы равен произведению площади основания на высоту.***

Сначала докажем эту теорему для треугольной призмы, а потом и для многоугольной.

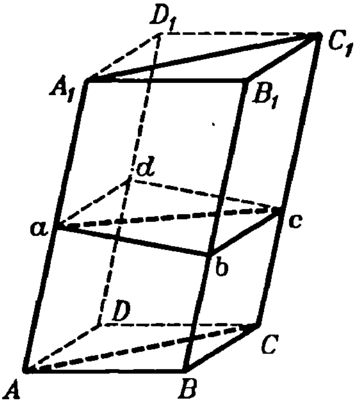


Рис. 95.

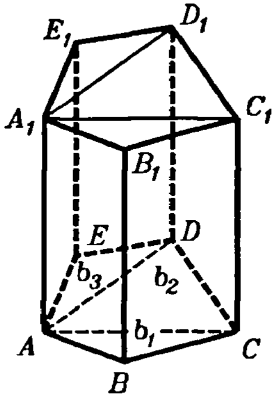


Рис. 96.

1) Проведем (рис. 95) через ребро AA_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельную грани BB_1C_1C, а через ребро CC_1 — плоскость, параллельную грани AA_1B_1B; затем продолжим плоскости обоих оснований призмы до пересечения с проведенными плоскостями. Тогда мы получим параллелепипед BD_1, который диагональной плоскостью AA_1C_1C делится на две треугольные призмы (из них одна есть данная). Докажем, что эти призмы равновелики. Для этого проведем перпендикулярное сечение $abcd$. В сечении получится параллелограмм, который диагональю ac делится на два равных треугольника. Данная призма равновелика такой прямой призме, у которой основание есть Δabc, а высота — ребро AA_1 (§ 86). Другая треугольная призма равновелика такой прямой, у которой основание есть Δabc, а высота — ребро AA_1. Но две прямые призмы с равными основаниями и равными высотами равны (потому что при вложении они совмещаются), значит, призма $ABCA_1B_1C_1$ и $ADCA_1D_1C_1$ равновелики. Из этого следует, что объем данной призмы составляет половину объема параллелепипеда BD_1; поэтому, обозначив высоту призмы через H, получим:

$$\text{объем треугольной призмы} = \frac{(\text{площади } ABCD)\cdot H}{2} =$$

$$= \frac{\text{площади } ABCD}{2}\cdot H = (\text{площади } ABC)\cdot H.$$

Проведем через ребро AA_1 многоугольной призмы (рис. 96) диагональные плоскости AA_1C_1C и AA_1D_1D. Тогда данная призма рассечется на несколько треугольных призм. Сумма объемов этих призм составляет искомый объем. Если обозначим площади их оснований через b_1, b_2, b_3, а общую высоту через H, то получим: объем многоугольной призмы $= b_1{\cdot}H+b_2{\cdot}H+b_3{\cdot}H = (b_1+b_2+b_3){\cdot}H =$ (площади $ABCDE$)$\cdot H$.

Следствие. Если V, B и H будут числа, выражающие в соответствующих единицах объем, площадь основания и высоту призмы, то, по доказанному, можно написать:

$$V=BH.$$

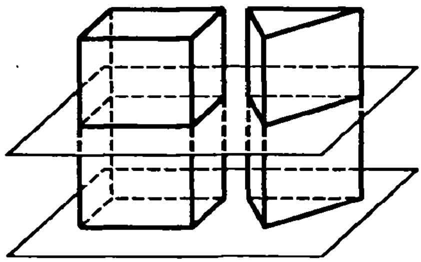


Рис. 97.

89. Принцип Кавальери. Итальянский математик XVII в. Кавальери высказал без доказательства следующее утверждение:

Если два тела (ограниченные плоскостями или кривыми поверхностями — все равно) *могут быть помещены в такое положение, при котором всякая плоскость, параллельная какой-нибудь данной плоскости и пересекающая оба тела, дает в сечении с ними равновеликие фигуры, то объемы таких тел одинаковы.*

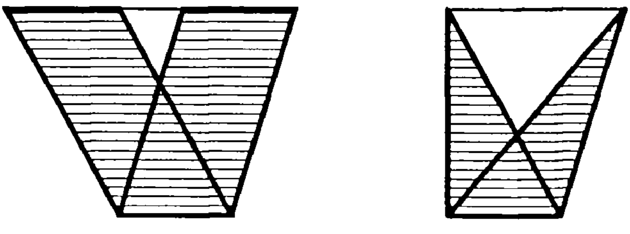


Рис. 98.

Это предложение может быть строго доказано, но доказательство его выходит за пределы элементарной математики, и потому мы ограничимся проверкой его на отдельных примерах.

Условиям принципа Кавальери удовлетворяют, например, две прямые призмы (треугольные или многоугольные — все равно) с равновеликими основаниями и равными высотами (рис. 97). Такие призмы, как мы знаем, равновелики. Вместе с тем если поставим такие призмы основаниями на какую-нибудь плоскость, то всякая плоскость, параллельная основаниям и пересекающая одну из призм, пересечет и другую, причем в сечениях получатся равновеликие фигуры, так как фигуры эти равны основаниям, а основания равновелики. Значит, принцип Кавальери подтверждается в этом частном случае.

Принцип этот подтверждается также и в планиметрии в применении к площадям, а именно: *если две фигуры могут быть помещены в такое положение, что всякая прямая, параллельная какой-нибудь одной прямой, пересекающая обе фигуры, дает в сечении с ними равные отрезки, то такие фигуры равновелики.* Примером могут служить два параллелограмма или два треугольника с равными основаниями и равными высотами (рис. 98).

Объем пирамиды

90. Лемма. ***Треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами равновелики.***

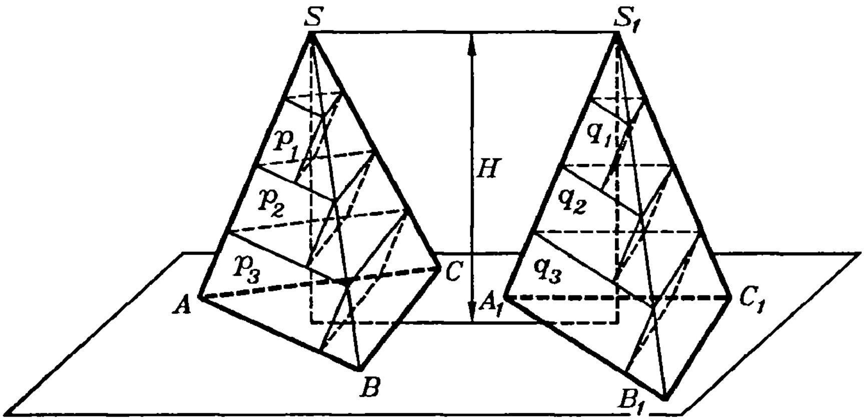


Рис. 99.

Доказательство наше будет состоять из трех частей. В первой части мы докажем равновеликость не самих пирамид, а вспомогательных тел, составленных из ряда треугольных призм, поставленных друг на друга. Во второй части мы докажем, что объемы этих вспомогательных тел при увеличении числа составляющих их призм приближаются к объемам пирамид как угодно близко. Наконец, в третьей части мы убедимся, что сами пирамиды должны быть равновелики.

I. Вообразим, что пирамиды поставлены основаниями на некоторую плоскость (как изображено на рис. 99), тогда их вершины будут находиться на одной прямой, параллельной плоскости оснований, и высота пирамид может быть изображена одним и тем же отрезком прямой H. Разделим эту высоту на какое-нибудь целое число n равных частей (например, на 4, как это указано на рисунке) и через точки деления проведем ряд плоскостей, параллельных плоскости оснований. Плоскости эти, пересекаясь с пирамидами, дают в сечениях ряд треугольников, причем треугольники пирамиды S будут равновелики соответствующим треугольникам пирамиды S_1 (§ 77). Поставим внутри каждой пирамиды ряд таких призм, чтобы верхними основаниями у них были треугольники сечений, боковые ребра были параллельны ребру SA в одной пирамиде и ребру S_1A_1 в другой, а высота каждой призмы равнялась бы $\frac{H}{n}$. Таких призм в каждой пирамиде окажется $n-1$; они образуют собой некоторое ступенчатое тело, объем которого, очевидно, меньше объема той пирамиды, в которой призмы построены. Обозначим объемы призм пирамиды S по порядку, начиная от вершины, буквами p_1, p_2, p_3, ..., p_{n-1}, а объемы призм пирамиды S_1 — также по порядку от вершины буквами q_1, q_2, q_3, ..., q_{n-1}; тогда, принимая во внимание, что у каждой пары соответствующих призм (у p_1 и q_1, у p_2 и q_2 и т. д.) основания равновелики и высоты равны, мы можем написать ряд равенств:

$$p_1=q_1,\ p_2=q_2,\ p_3=q_3,\ ...,\ p_{n-1}=q_{n-1}.$$

Сложив все равенства почленно, найдем:

$$p_1+p_2+p_3+...+p_{n-1}=q_1+q_2+q_3+...+q_{n-1}. \qquad (1)$$

Мы доказали, таким образом, что объемы построенных нами вспомогательных ступенчатых тел равны между собой (при всяком числе n, на которое мы делим высоту H).

II. Обозначив объемы пирамид S и S_1 соответственно буквами V и V_1, положим, что

$$V-(p_1+p_2+p_3+...+p_{n-1})=x$$

и

$$V_1-(q_1+q_2+q_3+...+q_{n-1})=y,$$

откуда

$$p_1+p_2+p_3+...+p_{n-1}=V-x,$$

и

$$q_1+q_2+q_3+...+q_{n-1}=V_1-y.$$

Тогда равенство (1) мы можем записать так:

$$V-x=V_1-y. \qquad (2)$$

Предположим теперь, что число n равных частей, на которое мы делим высоту H, неограниченно возрастает; например, предположим, что, вместо того чтобы делить высоту на 4 равные части, мы разделим ее на 8 равных частей, потом на 16, на 32 и т. д., и пусть каждый раз мы строим указанным образом ступенчатые тела в обеих пирамидах. Как бы ни возросло число призм, составляющих ступенчатые тела, равенство (1), а следовательно, и равенство (2) остаются в полной силе. При этом объемы V и V_1, конечно, не будут изменяться, тогда как величины x и y, показывающие, на сколько объемы пирамид превосходят объемы соответствующих ступенчатых тел, будут, очевидно, все более и более уменьшаться. Докажем, что величины x и y могут сделаться как угодно малы (другими словами, что они с т р е м я т с я к н у л ю). Это достаточно доказать для какой-нибудь одной из двух величин x и y, например для x.

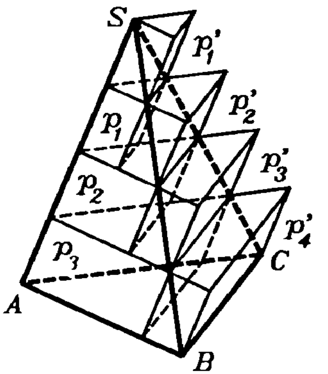


Рис. 100.

С этой целью построим для пирамиды S (рис. 100) еще другой ряд призм, который составит тоже ступенчатое тело, но по объему большее пирамиды. Призмы эти мы построим так же, как строили внутренние призмы, с той только разницей, что треугольники сечений мы теперь примем не за верхние основания призм, а за нижние. Вследствие этого мы получим теперь ряд призм, которые некоторой своей частью будут выступать из пирамид наружу, и потому они образуют новое ступенчатое тело с объемом бо́льшим, чем объем пирамиды. Таких призм будет теперь не $n-1$, как внутренних призм, а n. Обозначим их объемы по порядку, начиная от вершины, буквами p'_1, p'_2, p'_3, ..., p'_{n-1}, p'_n. Рассматривая чертеж, мы легко заметим, что

$$p'_1=p_1,\quad p'_2=p_2,\quad p'_3=p_3,\ \dots,\ p'_{n-1}=p_{n-1}.$$

Поэтому

$$(p'_1+p'_2+p'_3+\dots+p'_{n-1}+p'_n) - (p_1+p_2+p_3+\dots+p_{n-1}) = p'_n.$$

Так как $$p'_1+p'_2+p'_3+\dots+p'_{n-1}+p'_n > V,$$

а $$p_1+p_2+p_3+\dots+p_{n-1} < V,$$

то $$V - (p_1+p_2+p_3+\dots+p_{n-1}) < p'_n,$$

т. е.

$$x < p'_n.$$

Но $\quad p'_n$ = площади $ABC \cdot \dfrac{H}{n}$ (если ABC есть основание);

поэтому

$$x < \text{площади } ABC \cdot \frac{H}{n}.$$

При неограниченном возрастании числа n величина площади $\dfrac{H}{n}$, очевидно, может быть сделана как угодно малой (стремится к нулю). Поэтому и произведение: площадь $ABC \cdot \dfrac{H}{n}$, в котором множимое не изменяется, а множитель стремится к нулю, тоже стремится к нулю, и так как положительная величина x меньше этого произведения, то она и подавно стремится к нулю.

То же самое рассуждение можно было бы повторить и о величине y.

Мы доказали, таким образом, что при неограниченном увеличении числа призм объемы вспомогательных ступенчатых тел приближаются к объемам соответствующих пирамид как угодно близко.

III. Заметив это, возьмем написанное выше равенство (2) и придадим ему такой вид:

$$V - V_1 = x - y.$$

Докажем теперь, что это равенство возможно только тогда, когда $V=V_1$ и $x=y$. Действительно, разность $V=V_1$, как всякая разность постоянных величин, должна равняться постоянной величине, разность же $x-y$, как всякая разность между переменными величинами, стремящимися к нулю, должна или равняться некоторой переменной величине (стремящейся к нулю), или равняться нулю. Так как постоянная величина не может равняться переменной, то из двух возможностей надо оставить только одну: разность $x-y=0$; но тогда $V=V_1$ и $x=y$.

Мы доказали, таким образом, что рассматриваемые пирамиды равновелики[1].

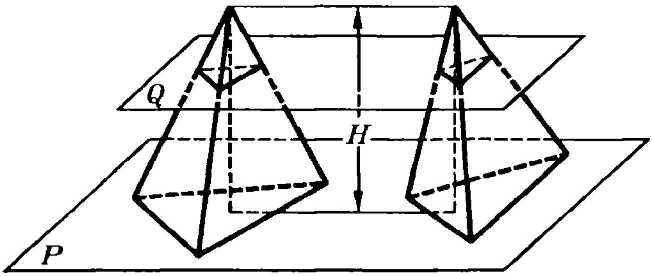


Рис. 101.

Доказанная лемма очень просто выводится также из принципа Кавальери. Действительно, вообразим, что две данные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами поставлены основаниями на какую-нибудь плоскость P (рис. 101), тогда всякая секущая плоскость Q, параллельная P, дает в сечении с пирамидами треугольники равновеликие (§ 77); следовательно, пирамиды эти удовлетворяют условиям принципа Кавальери, и потому объемы их должны быть одинаковы. Но это доказательство нельзя считать строгим, так как принцип Кавальери нами не был доказан.

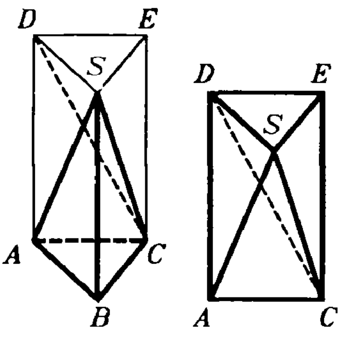


Рис. 102.

91. Теорема. ***Объем пирамиды равен произведению площади ее основания на треть ее высоты.***

Сначала докажем эту теорему для пирамиды треугольной, а затем и многоугольной.

1) На основании треугольной пирамиды $SABC$ (рис. 102) построим такую призму $SABCDE$, у которой высота равна высоте пирамиды, а одно боковое ребро совпадает с ребром SB. Дока-

---

[1] Необходимость столь сложного доказательства этой теоремы объясняется тем фактом, что два равновеликих тела нельзя так легко преобразовать одно в другое, как это можно было делать с равновеликими многоугольниками на плоскости. Именно, если даны два равновеликих многогранника, то в общем случае оказывается возможным разбить один из них на такие части (даже при помощи дополнений), из которых можно было бы составить другой. В частности, это невозможно для двух произвольных треугольных пирамид с равновеликими основаниями и равными высотами.

жем, что объем пирамиды составляет третью часть объема этой призмы. Отделим от призмы данную пирамиду. Тогда останется четырехугольная пирамида $SADEC$ (которая для ясности изображена отдельно). Проведем в ней секущую плоскость через вершину S и диагональ основания DC. Получившиеся от этого две треугольные пирамиды имеют общую вершину S и равные основания DEC и DAC, лежащие в одной плоскости; значит, согласно доказанной выше лемме пирамиды эти равновелики. Сравним одну из них, именно $SDEC$, с данной пирамидой. За основание пирамиды $SDEC$ можно взять ΔSDE; тогда вершина ее будет в точке C и высота равна высоте данной пирамиды. Так как $\Delta SDE = \Delta ABC$, то согласно той же лемме пирамиды $SDEC$ и $SABC$ равновелики.

Призма $ABCDES$ нами разбита на три равновеликие пирамиды: $SABC$, $SDEC$ и $SDAC$. (Такому разбиению, очевидно, можно подвергнуть всякую треугольную призму. Это является одним из важных свойств треугольной призмы.) Таким образом, сумма объемов трех пирамид, равновеликих данной, составляет объем призмы; следовательно,

$$\text{объем } SABC = \frac{1}{3}\text{объема } SDEABC = \frac{(\text{площади } ABC)\cdot H}{3} =$$

$$= (\text{площади } ABC)\cdot\frac{H}{3},$$

где H есть высота пирамиды.

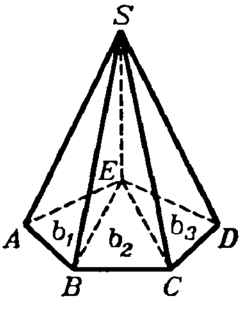


Рис. 103.

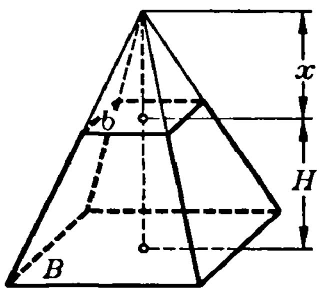


Рис. 104.

2) Через какую-нибудь вершину E (рис. 103) основания многоугольной пирамиды $SABCDE$ проведем диагонали EB и EC. Затем через ребро SE и каждую из этих диагоналей проведем секущие плоскости. Тогда многоугольная пирамида ра-

зобьется на несколько треугольных, имеющих высоту, общую с данной пирамидой. Обозначив площади оснований треугольных пирамид через b_1, b_2, b_3 и высоту через H, будем иметь:

$$\text{объем } SABCDE = \frac{1}{3} b_1 \cdot H + \frac{1}{3} b_2 \cdot H + \frac{1}{3} b_3 \cdot H =$$

$$= (b_1 + b_2 + b_3) \cdot \frac{H}{3} = (\text{площади } ABCDE) \cdot \frac{H}{3}.$$

Следствие. Если V, B и H означают числа, выражающие в соответствующих единицах объем, площадь основания и высоту какой угодно пирамиды, то

$$V = \frac{1}{3} BH.$$

92. Теорема. ***Объем усеченной пирамиды равен сумме объемов трех пирамид, имеющих высоту, одинаковую с высотой усеченной пирамиды, а основаниями: одна — нижнее основание данной пирамиды, другая — верхнее основание, а площадь основания третьей пирамиды равна среднему геометрическому площадей верхнего и нижнего оснований.***

Пусть площади оснований усеченной пирамиды (рис. 104) будут B и b, высота H и объем V (усеченная пирамида может быть треугольная или многоугольная — все равно). Требуется доказать, что

$$V = \frac{1}{3} BH + \frac{1}{3} bH + \frac{1}{3} H\sqrt{Bb} = \frac{1}{3} H(B + b + \sqrt{Bb}),$$

где $\sqrt{Bb}$ есть среднее геометрическое между B и b. Для доказательства на меньшем основании поместим малую пирамиду, дополняющую данную усеченную пирамиду до полной. Тогда объем усеченной пирамиды V мы можем рассматривать как разность двух объемов — полной пирамиды и верхней дополнительной.

Обозначив высоту дополнительной пирамиды буквой x, мы найдем, что

$$V = \frac{1}{3} B(H + x) - \frac{1}{3} bx = \frac{1}{3}(BH + Bx - bx) = \frac{1}{3}[BH + (B - b)x].$$

Для нахождения высоты x воспользуемся теоремой § 74, согласно которой мы можем написать уравнение:

$$\frac{B}{b}=\frac{(H+x)^2}{x^2}.$$

Для упрощения этого уравнения извлечем из обеих частей его арифметический квадратный корень:

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}}=\frac{H+x}{x}.$$

Из этого уравнения (которое можно рассматривать как пропорцию) получим:

$$x\sqrt{B}=H\sqrt{b}+x\sqrt{b},$$

откуда

$$(\sqrt{B}-\sqrt{b})x=H\sqrt{b},$$

и, следовательно,

$$x=\frac{H\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}.$$

Подставив это выражение в формулу, выведенную нами для объема V, найдем:

$$V=\frac{1}{3}\left[BH+\frac{(B-b)H\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}\right].$$

Так как $B-b=(\sqrt{B}+\sqrt{b})(\sqrt{B}-\sqrt{b})$, то по сокращении дроби на разность $\sqrt{B}-\sqrt{b}$ получим:

$$V=\frac{1}{3}[BH+(\sqrt{B}+\sqrt{b})H\sqrt{b}]=\frac{1}{3}(BH+H\sqrt{Bb}+bH)=$$

$$=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb}),$$

т. е. получим ту формулу, которую требовалось доказать.

III. ПОДОБИЕ МНОГОГРАННИКОВ

93. Определение. Два многогранника называются **подобными**, если они имеют соответственно равные многогранные углы и соответственно подобные грани. Соответственные элементы подобных многогранников называются **сходственными**.

Из этого определения следует, что в подобных многогранниках:

1) двугранные углы соответственно равны и одинаково расположены, потому что многогранные углы равны;

2) сходственные ребра пропорциональны, потому что в каждых двух подобных гранях отношение сходственных ребер одно и то же, и в каждом многограннике соседние грани имеют по одному общему ребру.

Возможность существования подобных многогранников доказывается следующей теоремой.

94. Теорема. ***Если в пирамиде проведем*** (рис. 105) ***секущую плоскость*** $(A_1B_1C_1D_1E_1)$ ***параллельно основанию, то отсечем от нее другую пирамиду*** $(SA_1B_1C_1D_1E_1)$, ***подобную данной.***

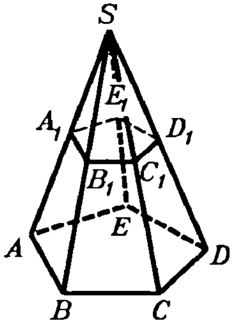


Рис. 105.

Так как $A_1B_1 || AB$, $B_1C_1 || BC$ и т. д., то боковые грани двух пирамид подобны; основания их также подобны (§ 74). Остается доказать равенство многогранных углов. Угол S у обеих пирамид общий; трехгранные углы A_1, B_1, C_1, ... равны соответственно углам A, B, C, ..., потому что у каждой пары этих углов имеется по одному и тому же двугранному углу, расположенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными плоскими углами; так, у углов A и A_1 один и тот же двугранный угол (с ребром AS) лежит между равными плоскими углами: $SA_1E_1 = SAE$ и $SA_1B_1 = SAB$.

95. Теорема. ***Поверхности подобных многогранников относятся как квадраты сходственных ребер.***

Пусть P_1, P_2, P_3, ..., P_n означают площади отдельных граней одного из подобных многогранников, а p_1, p_2, p_3, p_n— площади сходственных граней другого; положим еще, что L и l будут длины двух каких-нибудь сходственных ребер. Тогда вследствие подобия сходственных граней и пропорциональности всех сходственных ребер будем иметь:

$$\frac{P_1}{p_1}=\frac{L^2}{l^2};\ \frac{P_2}{p_2}=\frac{L^2}{l^2};\ \frac{P_3}{p_3}=\frac{L^2}{l^2};\ ...;\ \frac{P_n}{p_n}=\frac{L^2}{l^2},$$

откуда по свойству ряда равных отношений получим:

$$\frac{P_1+P_2+P_3+...+P_n}{p_1+p_2+p_3+...+p_n}=\frac{L^2}{l^2}.$$

96. Теорема. ***Объемы подобных многогранников относятся как кубы сходственных ребер.***

Ограничимся доказательством этой теоремы только для подобных пирамид. Пусть (рис. 106) пирамиды $SABCDE$ и $S_1A_1B_1C_1D_1E_1$ подобны. Вложим вторую пирамиду в первую так, чтобы у них совпали равные многогранные углы S и S_1.

Тогда основание $A_1B_1C_1D_1E_1$ займет некоторое положение $abcde$, причем стороны ab, bc, ... будут соответственно параллельны сторонам AB, BC, ... (вследствие того, что соответствующие плоские углы трехгранных углов A и A_1, B и B_1 и т. д. равны). Поэтому плоскость $abcde$ параллельна $ABCDE$. Пусть SO и So — высоты двух пирамид. Тогда объем $SABCDE =$ $=$ (площади $ABCDE$)$\cdot\frac{1}{3}SO$;

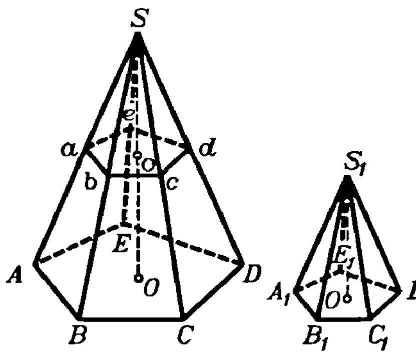


Рис. 106.

$$\text{объем } Sabcde = (\text{площади } abcde)\cdot\frac{1}{3}So.$$

Следовательно,

$$\frac{\text{объем } SABCDE}{\text{объем } Sabcde}=\frac{\text{площадь } ABCDE}{\text{площадь } abcde}\cdot\frac{SO}{So},$$

но

$$\frac{\text{площадь } ABCDE}{\text{площадь } abcde}=\frac{SO^2}{So^2},$$

поэтому

$$\frac{\text{объем } SABCDE}{\text{объем } Sabcde}=\frac{SO^3}{So^3}=\frac{SA^3}{Sa^3}.$$

IV. ПОНЯТИЕ О ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКАХ

Многогранник называется **правильным**, если все его грани—равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны (таков, например, куб). Из этого определения следует, что в правильных многогранниках равны все плоские углы, все двугранные углы и все ребра.

97. Перечисление правильных многогранников. Примем во внимание, что в многогранном угле наименьшее число граней — три и что сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше $4d$ (§ 51). Каждый угол правильного треугольника равен $\frac{2}{3}d$. Если повторим $\frac{2}{3}d$ слагаемыми 3, 4 и 5 раз, то получим суммы, меньшие $4d$, а если повторим $\frac{2}{3}d$ слагаемым 6 раз или более, то получим в сумме $4d$ или более. Поэтому из плоских углов, равных углам правильного треугольника, можно образовать выпуклые многогранные углы только трех видов: трехгранные, четырехгранные и пятигранные. Следовательно, если гранями правильного многогранника служат правильные треугольники, то в вершине многогранника могут сходиться или 3 ребра, или 4 ребра, или 5 ребер. Соответственно с этим имеется три вида правильных многогранников с треугольными гранями:

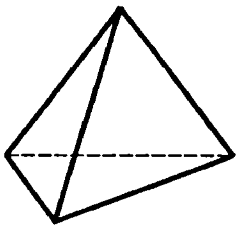


Рис. 107.

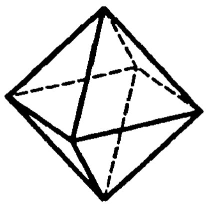


Рис. 108.

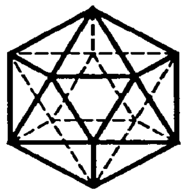


Рис. 109.

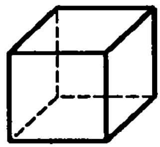


Рис. 110.

1) Правильный четырехгранник, или **тетраэдр**, поверхность которого составлена из четырех правильных треугольников (рис. 107). Он имеет 4 грани, 4 вершины и 6 ребер.

2) Правильный восьмигранник, или **октаэдр**, поверхность которого составлена из восьми правильных треугольников (рис. 108). Он имеет 8 граней, 6 вершин и 12 ребер.

3) Правильный 20-гранник, или **икосаэдр**, образованный двадцатью правильными треугольниками (рис. 109). Он имеет 20 граней, 12 вершин и 30 ребер.

Угол квадрата равен d, а угол правильного пятиугольника равен $\frac{6}{5}d$; повторяя эти углы слагаемыми 3 раза, получаем суммы, меньшие $4d$, а повторяя их 4 раза или более, получаем $4d$ или более. Поэтому из плоских углов, равных углам квадрата или правильного пятиугольника, можно образовать только трехгранные углы.

А поэтому если гранями многогранника служат квадраты, то в каждой вершине могут сходиться лишь три ребра. Имеется единственный правильный многогранник этого рода — это правильный шестигранник, или **гексаэдр**, или куб (рис. 110). Он имеет 6 граней, 8 вершин и 12 ребер.

Если гранями правильного многогранника служат правильные пятиугольники, то в каждой вершине могут сходиться лишь три ребра.

Существует единственный правильный многогранник такого рода — правильный 12-гранник, или **додекаэдр**. Он имеет 12 граней, 20 вершин и 30 ребер (рис. 111).

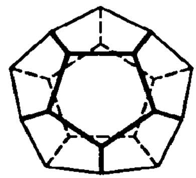


Рис. 111.

Угол правильного шестиугольника равен $\frac{4}{3}d$; поэтому из таких углов нельзя образовать даже трехгранного угла. Из углов правильных многоугольников, имеющих более 6 сторон, подавно нельзя образовать никакого выпуклого многогранного угла.

Отсюда следует, что гранями правильного многогранника могут служить лишь правильные треугольники, квадраты и правильные пятиугольники.

Таким образом, всего может существовать лишь пять видов правильных многогранников, указанных выше.

98. Построение правильных многогранников. Изложенные выше рассуждения о возможных видах правильных многогранников доказывают, что может существовать не более пяти видов правильных многогранников.

Но из этих рассуждений еще не вытекает, что все эти пять видов правильных многогранников действительно существуют, т. е. что можно проведением плоскостей в пространстве осуществить построение каждого из этих пяти возможных правильных многогранников. Чтобы убедиться в существовании всех правильных многогранников, достаточно указать способ построения каждого из них. Способ построения куба указать весьма легко. Действительно, берем произвольную плоскость P и в ней какой-либо квадрат; через стороны этого квадрата проводим плоскости, перпендикулярные к плоскости P. Таких плоскостей будет четыре. Далее проводим плоскость Q параллельно P и отстоящую от нее на расстоянии, равном стороне квадрата. Шесть полученных плоскостей образуют грани куба; двенадцать прямых — пересечения каждой пары пересекающихся плоскостей — являются гранями куба, а восемь точек пересечения каждой тройки пересекающихся плоскостей служат вершинами куба. В этом легко убедиться, непосредственно рассматривая полученную совокупность точек, прямых и плоскостей. Умея построить куб, легко найти способы построения всех других правильных многогранников.

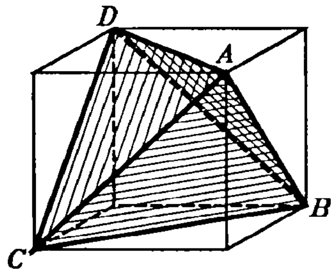


Рис. 112.

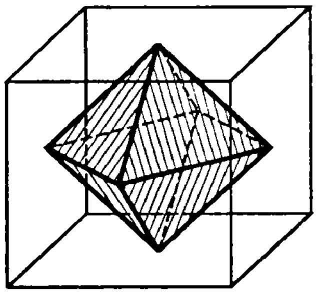


Рис. 113.

Построение правильного тетраэдра. Пусть дан куб (рис. 112). Возьмем какую-нибудь его вершину, например A. В ней сходятся три грани куба, имеющие форму квадратов. В каждом из этих квадратов берем вершину, противоположную точке A. Пусть это будут вершины куба B, C и D. Точки A, B, C и D служат вершинами правильного тетраэдра. Действительно, каждый из отрезков AB, BC, CD, AD, BD и AC, очевидно, служит диагональю одной из граней куба. А потому все эти отрезки равны между собой. Отсюда следует, что в треугольной пирамиде с вершиной A и основанием BCD все грани — правильные треугольники, следовательно, это пирамида — правильный тетраэдр. Этот тетраэдр вписан в данный куб.

Полезно заметить, что оставшиеся четыре вершины куба служат вершинами второго правильного тетраэдра, равного первому и также вписанного в данный куб.

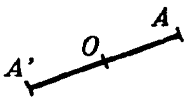
Построение октаэдра. Если в данном кубе построить центры всех его граней, то шесть полученных точек служат вершинами октаэдра. В этом легко убедиться, рассматривая рисунок 113.

Построение додекаэдра и икосаэдра. Если через каждое из 12 ребер куба провести плоскость, не имеющую с поверхностью куба других общих точек, кроме точек того ребра, через которое она проведена, то полученные 12 плоскостей образуют грани некоторого 12-гранника. Более подробное изучение формы этого многогранника показывает, что можно так подобрать наклон этих плоскостей к граням куба, что полученный 12-гранник будет додекаэдром.

Наконец, если мы умеем построить додекаэдр, то построение икосаэдра не представляет затруднений: центры граней додекаэдра служат вершинами икосаэдра.

V. ПОНЯТИЕ О СИММЕТРИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

99. Центральная симметрия. Две фигуры называются симметричными относительно какой-либо точки O пространства, если каждой точке A одной фигуры соответствует в другой фигуре точка A', расположенная на прямой OA по другую сторону от точки O (рис. 114). Точка O называется центром симметрии фигур.



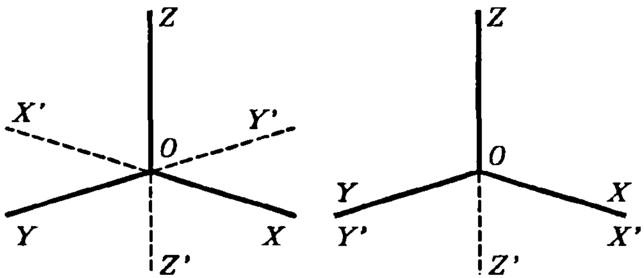


Рис. 114. Рис. 115.

Пример таких симметричных фигур в пространстве мы уже встречали (§ 53), когда, продолжая за вершину ребра и грани многогранного угла, получали многогранный угол, симметричный данному. Соответственные отрезки и углы, входящие в состав двух симметричных фигур, равны между собой. Тем не менее фигуры в целом не могут быть названы равными: их нельзя совместить одну с другой вследствие того, что порядок расположения частей в одной фигуре иной, чем в другой, как это мы видели на примере симметричных многогранных углов.

В отдельных случаях симметричные фигуры могут совмещаться, но при этом будут совпадать несоответственные их части. Например, возьмем прямой трехгранный угол (рис. 115) с вершиной в точке O и ребрами OX, OY, OZ.

Построим ему симметричный угол $OX'Y'Z'$. Угол $OXYZ$ можно совместить с $OX'Y'Z'$ так, чтобы ребро OX совпало с OY', а ребро OY с OX'. Если же совместить соответственные ребра OX с OX' и OY с OY', то ребра OZ и OZ' окажутся направленными в противоположные стороны.

Если симметричные фигуры составляют в совокупности одно геометрическое тело, то говорят, что это геометрическое тело имеет центр симметрии. Таким образом, если данное тело имеет центр симметрии, то всякой точке, принадлежащей этому телу, соответствует симметричная точка, тоже принадлежащая данному телу. Из рассмотренных нами геометрических тел центр симметрии имеют, например: 1) параллелепипед, 2) призма, имеющая в основании правильный многоугольник с четным числом сторон.

Правильный тетраэдр не имеет центра симметрии.

100. Симметрия относительно плоскости. Две пространственные фигуры называются симметричными относительно плоскости P, если каждой точке A в одной фигуре соответствует в другой точка A', причем отрезок AA' перпендикулярен к плоскости P и в точке пересечения с данной плоскостью делится пополам.

Теорема. ***Всякие два соответственных отрезка в двух симметричных фигурах равны между собой.***

Пусть даны две фигуры, симметричные относительно плоскости P. Выделим какие-нибудь точки A и B первой фигуры, пусть A' и B' — соответствующие им точки второй фигуры (рис. 116, на рисунке фигуры не изображены). Пусть далее C — точка пересечения отрезка AA' с плоскостью P, D — точка пересечения отрезка BB' с той же плоскостью. Соединив прямолинейным отрезком точки C и D, получим два четырехугольника $ABDC$ и $A'B'DC$. Так как $AC=A'C$, $BD=B'D$ и $\angle ACD=\angle A'CD$, $\angle BDC=\angle B'DC$, как прямые углы, то эти четырехугольники равны (в чем легко убеждаемся наложением). Следовательно, $AB = A'B'$. Из этой теоремы непосредственно вытекает, что соответствующие плоские и двугранные углы двух фигур, симметричных относительно плоскости, равны между собой. Тем не менее совместить эти две фигуры одну с другой так, чтобы совместились их соответственные части, невозможно, так как порядок расположения частей в одной фигуре обратный тому, который имеет место в другой (это будет доказано ниже, § 102). Простейшим примером двух фигур, симметричных относительно плоскости, являются: любой предмет и его отражение в плоском зеркале; всякая фигура симметрична со своим зеркальным отражением относительно плоскости зеркала.

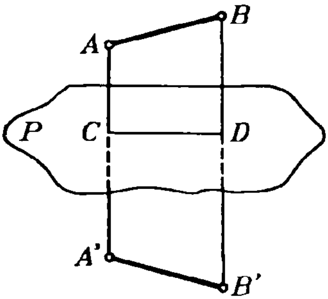


Рис. 116.

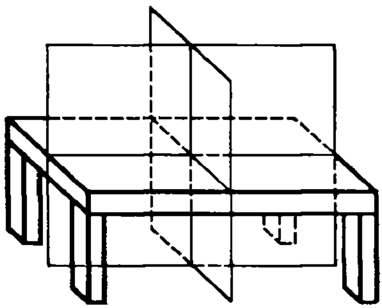


Рис. 117.

Если какое-либо геометрическое тело можно разбить на две части, симметричные относительно некоторой плоскости, то эта плоскость называется плоскостью симметрии данного тела.

Геометрические тела, имеющие плоскость симметрии, чрезвычайно распространены в природе и в обыденной жизни. Тело человека и животного имеет плоскость симметрии, разделяющую его на правую и левую части.

На этом примере особенно ясно видно, что симметричные фигуры нельзя совместить. Так, кисти правой и левой рук симметричны, но совместить их нельзя, что можно видеть хотя бы из того, что одна и та же перчатка не может подходить и к правой и к левой руке. Большое число предметов домашнего обихода имеет плоскость симметрии: стул, обеденный стол, книжный шкаф, диван и др. Некоторые, как, например, обеденный стол, имеют даже не одну, а две плоскости симметрии (рис. 117).

Обычно, рассматривая предмет, имеющий плоскость симметрии, мы стремимся занять по отношению к нему такое положение, чтобы плоскость симметрии нашего тела, или по крайней мере нашей головы, совпала с плоскостью симметрии самого предмета. В этом случае симметричная форма предмета становится особенно заметной.

101. Симметрия относительно оси. Ось симметрии второго порядка. Две фигуры называются симметричными относительно оси l (ось — прямая линия), если каждой точке A первой фигуры соответствует точка A' второй фигуры, так что отрезок AA' перпендикулярен к оси l, пересекается с нею и в точке пересечения делится пополам. Сама ось l называется осью симметрии второго порядка.

Из этого определения непосредственно следует, что если два геометрических тела, симметричные относительно какой-либо оси, пересечь плоскостью, перпендикулярной к этой оси, то в сечении получатся две плоские фигуры, симметричные относительно точки пересечения плоскости с осью симметрии тел.

Отсюда далее легко вывести, что два тела, симметричные относительно оси, можно совместить одно с другим, вращая одно из них на 180° вокруг оси симметрии. В самом деле, вообразим все возможные плоскости, перпендикулярные к оси симметрии.

Каждая такая плоскость, пересекающая оба тела, содержит фигуры, симметричные относительно точки встречи плоскости с осью симметрии тел. Если заставить скользить секущую плоскость саму по себе, вращая ее вокруг оси симметрии тела на 180°, то первая фигура совпадет со второй.

Это справедливо для любой секущей плоскости. Вращение же всех сечений тела на 180° равносильно повороту всего тела на 180° вокруг оси симметрии. Отсюда и вытекает справедливость нашего утверждения.

Если после вращения пространственной фигуры вокруг некоторой прямой на 180° она совпадает сама с собой, то говорят, что фигура имеет эту прямую своей осью симметрии второго порядка.

Название «ось симметрии второго порядка» объясняется тем, что при полном обороте вокруг этой оси тело будет в процессе вращения дважды принимать положение, совпадающее с исходным (считая и исходное). Примерами геометрических тел, имеющих ось симметрии второго порядка, могут служить: 1) правильная пирамида с четным числом боковых граней; осью ее симметрии служит ее высота;

2) прямоугольный параллелепипед; он имеет три оси симметрии: прямые, соединяющие центры его противоположных граней;

3) правильная призма с четным числом боковых граней. Осью ее симметрии служит каждая прямая, соединяющая центры любой пары ее противоположных граней (боковых граней и двух оснований призмы). Если число боковых граней призмы $2k$, то число таких осей симметрии будет $k+1$. Кроме того, осью симметрии для такой призмы служит каждая прямая, соединяющая середины ее противоположных боковых ребер. Таких осей симметрии призма имеет k.

Таким образом, правильная $2k$-гранная призма имеет $2k+1$ осей симметрии.

102. Зависимость между различными видами симметрии в пространстве. Между различными видами симметрии в пространстве — осевой, плоскостной и центральной — существует зависимость, выражаемая следующей теоремой.

Теорема. ***Если фигура F симметрична с фигурой F' относительно плоскости P и в то же время симметрична с фигурой F'' относительно точки O, лежащей в плоскости P, то фигуры F' и F'' симметричны относительно оси, проходящей через точку O и перпендикулярной к плоскости P.***

Возьмем какую-нибудь точку A фигуры F (рис. 118). Ей соответствует точка A' фигуры F' и точка A'' фигуры F'' (сами фигуры F, F' и F'' на рисунке не изображены).

Пусть B — точка пересечения отрезка AA' с плоскостью P. Проведем плоскость через точки A, A' и O. Эта плоскость будет перпендикулярна к плоскости P, так как проходит через прямую AA', перпендикулярную к этой плоскости. В плоскости $AA'O$ проведем прямую OH, перпендикулярную к OB. Эта прямая OH будет перпендикулярна и к плоскости P. Пусть далее C — точка пересечения прямых $A'A''$ и OH.

В треугольнике $AA'A''$ отрезок BO соединяет середины сторон AA' и AA'', следовательно, $BO \| A'A''$, но $BO \perp OH$, значит, $A'A'' \perp OH$. Далее, так как O — середина стороны AA'' и $CO \| AA'$, то $A'C=A''C$. Отсюда заключаем, что точки A' и A'' симметричны относительно оси OH. То же самое справедливо и для всех других точек фигуры. Значит, наша теорема доказана. Из этой теоремы непосредственно следует, что две фигуры, симметричные относительно плоскости, не могут быть совмещены так, чтобы совместились их соответственные части. В самом деле, фигура F' совмещается с F'' путем вращения вокруг оси OH на 180°. Но фигуры F'' и F не могут быть совмещены как симметричные относительно точки, следовательно, фигуры F и F' также не могут быть совмещены.

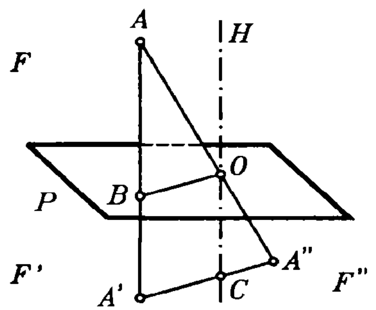


Рис. 118.

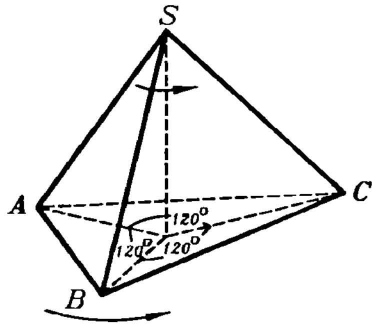


Рис. 119.

103. Оси симметрии высших порядков. Фигура, имеющая ось симметрии, совмещается сама с собой после поворота вокруг оси симметрии на угол в 180°. Но возможны случаи, когда фигура приходит к совмещению с исходным положением после поворота вокруг некоторой оси на угол, меньший 180°. Таким образом, если тело сделает полный оборот вокруг этой оси, то в процессе вращения оно несколько раз совместится со своим первоначальным положением. Такая ось вращения называется осью симметрии высшего порядка, причем число положений тела, совпадающих с первоначальным, называется порядком оси симметрии. Эта ось может и не совпадать с осью симметрии второго порядка. Так, правильная треугольная пирамида не имеет оси симметрии второго порядка, но ее высота служит для нее осью симметрии третьего порядка. В самом деле, после поворота этой пирамиды вокруг высоты на угол в 120° она совмещается сама с собой (рис. 119). При вращении пирамиды вокруг высоты она может занимать три положения, совпадающие с исходным, считая и исходное. Легко заметить, что всякая ось симметрии четного порядка есть в то же время ось симметрии второго порядка.

Примеры осей симметрии высших порядков:

1) Правильная n-угольная пирамида имеет ось симметрии n-го порядка. Этой осью служит высота пирамиды.

2) Правильная n-угольная призма имеет ось симметрии n-го порядка. Этой осью служит прямая, соединяющая центры оснований призмы.

104. Симметрия куба. Как и для всякого параллелепипеда, точка пересечения диагоналей куба есть центр его симметрии.

Куб имеет девять плоскостей симметрии: шесть диагональных плоскостей и три плоскости, проходящие через середины каждой четверки его параллельных ребер.

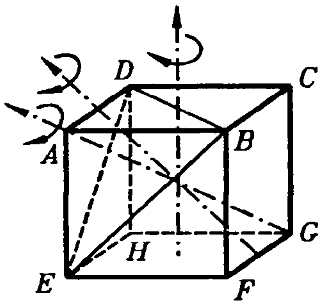


Рис. 120.

Куб имеет девять осей симметрии второго порядка: шесть прямых, соединяющих середины его противоположных ребер, и три прямые, соединяющие центры противоположных граней (рис. 120). Эти последние прямые являются осями симметрии четвертого порядка. Кроме того, куб имеет четыре оси симметрии третьего порядка, которые являются его диагоналями. В самом деле, диагональ куба AG (рис. 120), очевидно, одинаково наклонена к ребрам AB, AD и AE, а эти ребра одинаково наклонены одно к другому. Если соединить точки B, D и E, то получим правильную треугольную пирамиду $ADBE$, для которой диагональ куба AG служит высотой. Когда при вращении вокруг высоты эта пирамида будет совмещаться сама с собой, весь куб будет совмещаться со своим исходным положением. Других осей симметрии, как нетрудно убедиться, куб не имеет. Посмотрим, сколькими различными способами куб может быть совмещен сам с собой. Вращение вокруг обыкновенной оси симметрии дает одно положение куба, отличной от исходного, при котором куб в целом совмещается сам с собой.

Вращение вокруг оси третьего порядка дает два таких положения, а вращение вокруг оси четвертого порядка — три таких положения. Так как куб имеет шесть осей второго порядка (это обыкновенные оси симметрии), четыре оси третьего порядка и три оси четвертого порядка, то имеются $6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 23$ положения куба, отличные от исходного, при которых он совмещается сам с собой.

Легко убедиться непосредственно, что все эти положения отличны одно от другого, а также и от исходного положения куба. Вместе с исходным положением они составляют 24 способа совмещения куба с самим собой.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Ребро данного куба равно a. Найти ребро другого куба, объем которого вдвое более объема данного куба.

Замечание. Эта задача об удвоении куба, известная с древних времен, легко решается вычислением (именно: $x=\sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2} = a \cdot 1{,}25992\ldots$), но построением (с помощью циркуля и линейки) она решена быть не может, так как формула для неизвестного содержит радикал третьей степени из числа, не являющегося кубом рационального числа.

2. Вычислить поверхность и объем прямой призмы, у которой основание — правильный треугольник, вписанный в круг радиуса $r=2$ м, а высота равна стороне правильного шестиугольника, описанного около того же круга.

3. Определить поверхность и объем правильной восьмиугольной призмы, у которой высота $h=6$ м, а сторона основания $a=8$ м.

4. Определить боковую поверхность и объем правильной шестиугольной пирамиды, у которой высота основания равна 1 м, а апофема составляет с высотой угол в 30°.

5. Вычислить объем треугольной пирамиды, у которой каждое боковое ребро равно l, а стороны основания суть a, b и c.

6. Дан трехгранный угол $SABC$, у которого все три плоских угла прямые. На его ребрах отложены длины:

$SA=a$; $SB=b$ и $SC=c$. Через точки A, B и C проведена плоскость. Определить объем пирамиды $SABC$.

7. Высота пирамиды равна h, а основание — правильный шестиугольник со стороной a. На каком расстоянии x от вершины пирамиды следует провести плоскость, параллельную основанию, чтобы объем образовавшейся усеченной пирамиды равнялся V?

8. Определить объем правильного тетраэдра с ребром a.

9. Определить объем октаэдра с ребром a.

10. Усеченная пирамида, объем которой $V=1465$ см^3, имеет основаниями правильные шестиугольники со сторонами: $a=23$ см и $b=17$ см. Вычислить высоту этой пирамиды.

11. Объем V усеченной пирамиды равен 10,5 м^3, высота $h=\sqrt{3}$ м и сторона a правильного шестиугольника, служащего нижним основанием, равна 2 м. Вычислить сторону правильного шестиугольника, служащего верхним основанием.

12. На каком расстоянии от вершины S пирамиды $SABC$ надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы отношение объемов частей, на которые рассекается этой плоскостью пирамида, равнялось m?

13. Пирамида с высотой h разделена плоскостями, параллельными основанию, на три части, причем объемы этих частей находятся в отношении $m:n:p$. Определить расстояние этих плоскостей до вершины пирамиды.

14. Сумма объемов двух подобных многогранников равна V, а отношение сходственных ребер равно $m:n$. Определить их объемы.

15. Разделить усеченную пирамиду плоскостью, параллельной основаниям B и b, на две части, чтобы объемы находились в отношении $m:n$.

16. Найти центр, оси и плоскости симметрии фигуры, состоящей из плоскости и пересекающей ее прямой, не перпендикулярной к этой плоскости.

Ответ: центр симметрии — точка пересечения прямой с плоскостью; плоскость симметрии — плоскость, перпендикулярная данной, проходящая через данную прямую; осью симметрии служит прямая, лежащая в данной плоскости и перпендикулярная к данной прямой.

17. Найти центр, оси и плоскости симметрии фигуры, состоящей из двух пересекающихся прямых.

Ответ: фигура имеет две плоскости симметрии и три оси симметрии (указать какие).

ГЛАВА IV

КРУГЛЫЕ ТЕЛА

I. ЦИЛИНДР И КОНУС

105. Поверхность вращения. Поверхностью вращения называется поверхность, которая получается от вращения какой-нибудь линии (MN, рис. 121), называемой **образующей**, вокруг неподвижной прямой (AB), называемой **осью**, при этом предполагается, что образующая (MN) при своем вращении неизменно связана с осью (AB).

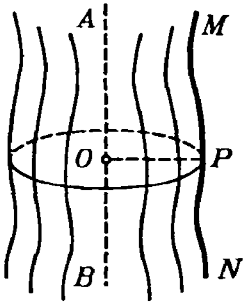


Рис. 121.

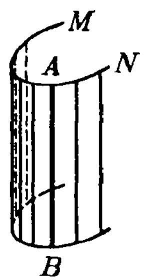


Рис. 122.

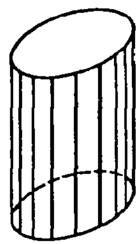


Рис. 123.

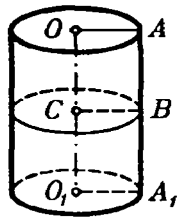


Рис. 124.

Возьмем на образующей какую-нибудь точку P и опустим из нее на ось перпендикуляр PO. Очевидно, что при вращении не изменяются ни длина этого перпендикуляра, ни величина угла AOP, ни положение точки O. Поэтому каждая точка образующей описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна к оси AB и центр которой л жит на пересечении этой плоскости с осью. Отсюда следует:

Плоскость, перпендикулярная к оси, пересекаясь с поверхностью вращения, дает в сечении окружность.

Всякая секущая плоскость, проходящая через ось, называется **меридиональной** плоскостью, а линия ее пересечения с поверхностью вращения — меридианом. Все меридианы равны между собой, потому что при вращении каждый из них проходит через то положение, в котором ранее был всякий другой меридиан.

106. Цилиндрическая поверхность. Цилиндрической поверхностью называется поверхность, производимая движением прямой (AB, рис. 122), перемещающейся в пространстве параллельно данной прямой и пересекающей при этом данную линию (MN). Прямая AB называется **образующей**, а линия MN — **направляющей**.

107. Цилиндр. Цилиндром называется тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями (рис. 123).

Часть цилиндрической поверхности, заключенная между плоскостями, называется **боковой поверхностью**, а части плоскостей, отсекаемые этой поверхностью, — **основаниями** цилиндра. Расстояние между плоскостями оснований есть **высота** цилиндра. Цилиндр называется **прямым** или **наклонным**, смотря по тому, перпендикулярны или наклонны к основаниям его образующие.

Прямой цилиндр (рис. 124) называется **круговым**, если его основания — круги. Такой цилиндр можно рассматривать как тело, происходящее от вращения прямоугольника OAA_1O_1 вокруг стороны OO_1 как оси; при этом сторона AA_1 описывает боковую поверхность, а стороны OA и O_1A_1 — круги оснований. Всякий отрезок BC, параллельный OA, описывает также круг, плоскость которого перпендикулярна к оси. Отсюда следует:

Сечение прямого кругового цилиндра плоскостью, параллельной основаниям, есть круг.

В элементарной геометрии рассматривается только прямой круговой цилиндр; для краткости его называют просто цилиндром.

Иногда приходится рассматривать такие призмы, основания которых — многоугольники, вписанные в основания цилиндра или описанные около них, а высоты равны высоте цилиндра; такие призмы называются **вписанными** в цилиндр или **описанными** около него.

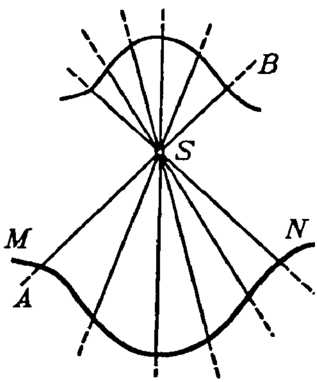


Рис. 125.

108. Коническая поверхность. Конической поверхностью называется поверхность, производимая движением прямой (AB, рис. 125), перемещающейся в пространстве так, что она при этом постоянно проходит через неподвижную точку (S) и пересекает данную линию (MN). Прямая AB называется **образующей**, линия MN — **направляющей**, а точка S — **вершиной конической поверхности**.

109. Конус. Конусом называется тело, ограниченное частью конической поверхности, расположенной по одну сторону от вершины, и плоскостью, пересекающей все образующие по ту же сторону от вершины (рис. 126). Часть конической поверхности, ограниченная этой плоскостью, называется **боковой поверхностью**, а часть плоскости, отсекаемая боковой поверхностью,— **основанием** конуса. Перпендикуляр, опущенный из вершины на плоскость основания, называется **высотой** конуса.

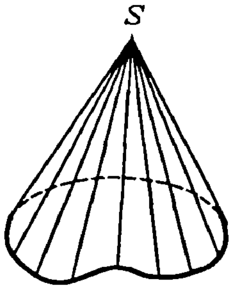


Рис. 126.

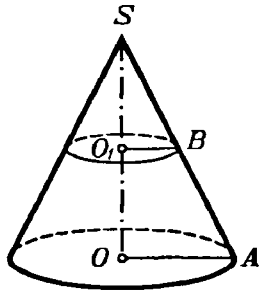


Рис. 127.

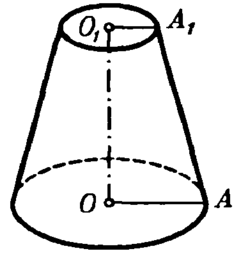


Рис. 128.

Конус называется **прямым круговым**, если его основание есть круг, а высота проходит через центр основания (рис. 127). Такой конус можно рассматривать как тело, происходящее от вращения прямоугольного треугольника SOA вокруг катета SO как оси. При этом гипотенуза SA описывает боковую поверхность, а катет OA — основание конуса. Всякий отрезок BO_1, параллельный OA, описывает при вращении круг, плоскость которого перпендикулярна к оси. Отсюда следует:

Сечение прямого кругового конуса плоскостью, параллельной основанию, есть круг.

В элементарной геометрии рассматривается только прямой круговой конус, который для краткости называется просто конусом.

Иногда приходится рассматривать такие пирамиды, основания которых суть многоугольники, вписанные в основание конуса или описанные около него, а вершина совпадает с вершиной конуса. Такие пирамиды называются **вписанными** в конус или **описанными** около него.

110. Усеченный конус. Так называется часть полного конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

Круги, по которым параллельные плоскости пересекают конус, называются **основаниями** усеченного конуса.

Усеченный конус (рис. 128) можно рассматривать как тело, происходящее от вращения прямоугольной трапеции OAA_1O_1 вокруг стороны OO_1, перпендикулярной к основаниям трапеции.

Поверхность цилиндра и конуса

111. Определения. Боковые поверхности цилиндра и конуса принадлежат к поверхностям **кривым**, т. е. к таким, никакая часть которых не может совместиться с плоскостью. Поэтому мы должны особо определить, что́ надо разуметь под величиной боковой поверхности цилиндра или конуса, когда сравнивают эти поверхности с плоской единицей площади. Мы будем придерживаться следующих определений:

1) *За величину боковой поверхности цилиндра принимают предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной в этот цилиндр правильной призмы, когда число сторон правильного многоугольника, вписанного в основание, неограниченно удваивается* (и, следовательно, площадь каждой боковой грани неограниченно убывает).

2) *За величину боковой поверхности конуса* (полного или усеченного) *принимается предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной в этот конус правильной*

пирамиды (полной или усеченной), *когда число сторон правильного многоугольника, вписанного в основание, неограниченно удваивается* (и, следовательно, площадь каждой боковой грани неограниченно убывает).

112. Теорема. ***Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту.***

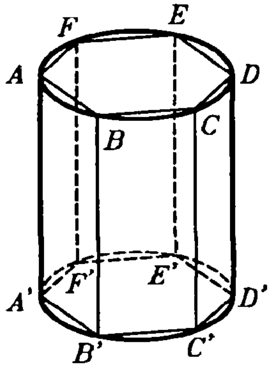


Рис. 129.

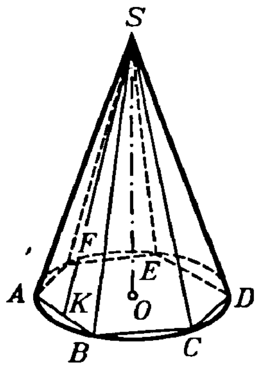


Рис. 130.

Впишем в цилиндр (рис. 129) какую-нибудь правильную призму. Обозначим буквами p и H числа, выражающие длины периметра основания и высоты этой призмы. Тогда боковая поверхность ее выразится произведением $p \cdot H$. Предположим теперь, что число сторон вписанного в основание многоугольника неограниченно возрастает.

Тогда периметр p будет стремиться к пределу, принимаемому за длину C окружности основания, а высота H останется без изменения; следовательно, боковая поверхность призмы, равная всегда произведению $p \cdot H$, будет стремиться к пределу $C \cdot H$. Этот предел и принимается за величину боковой поверхности цилиндра. Обозначив боковую поверхность цилиндра буквой S, можем написать:

$$S = C \cdot H.$$

113. Следствия. 1) Если R обозначает радиус основания цилиндра, то $C=2\pi R$, поэтому боковая поверхность цилиндра выразится формулой:

$$S = 2\pi R \cdot H.$$

2) Чтобы получить полную поверхность цилиндра, достаточно приложить к боковой поверхности сумму площадей двух оснований; поэтому, обозначая полную поверхность через T, будем иметь:

$$T = 2\pi RH + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi R(H+R).$$

114. Теорема. ***Боковая поверхность конуса равна произведению длины окружности основания на половину образующей.***

Впишем в конус (рис. 130) какую-нибудь правильную пирамиду и обозначим буквами p и l числа, выражающие длины периметра основания и апофемы этой пирамиды. Тогда боковая поверхность ее выразится произведением $\frac{1}{2}p\cdot l$. Предположим теперь, что число сторон вписанного в основание многоугольника неограниченно возрастает. Тогда периметр p будет стремиться к пределу, принимаемому за длину C окружности основания, а апофема l будет иметь пределом образующую конуса (так как из ΔSAK следует, что $SA - SK < AK$); значит, если образующую конуса обозначим буквой L, то боковая поверхность вписанной пирамиды, постоянно равная $\frac{1}{2}p\cdot l$, будет стремиться к пределу $\frac{1}{2}C\cdot L$. Этот предел и принимается за величину боковой поверхности конуса. Обозначив боковую поверхность конуса буквой S, можем написать:

$$S=\frac{1}{2}C\cdot L=C\cdot\frac{1}{2}L.$$

115. Следствия. 1) Так как $C=2\pi R$, то боковая поверхность конуса выразится формулой:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot L=\pi RL.$$

2) Полную поверхность конуса получим, если боковую поверхность сложим с площадью основания; поэтому, обозначая полную поверхность через T, будем иметь:

$$T=\pi RL+\pi R^2=\pi R(L+R).$$

116. Теорема. ***Боковая поверхность усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.***

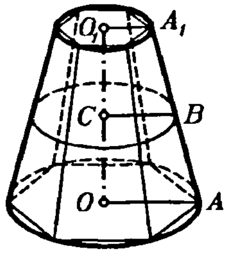


Рис. 131.

Впишем в усеченный конус (рис. 131) какую-нибудь правильную усеченную пирамиду и обозначим буквами p, p_1 и l числа, выражающие в одинаковых линейных единицах длины периметров нижнего и верхнего оснований и апофемы этой пирамиды. Тогда боковая поверхность вписанной пирамиды равна $\frac{1}{2}(p+p_1)l$.

При неограниченном возрастании числа боковых граней вписанной пирамиды периметры p и p_1 стремятся к пределам, принимаемым за длины C и C_1 окружностей оснований, а апофема l имеет пределом образующую L усеченного конуса. Следовательно, величина боковой поверхности вписанной пирамиды стремится при этом к пределу, равному $\frac{1}{2}(C+C_1)L$. Этот предел и принимается за величину боковой поверхности усеченного конуса. Обозначив боковую поверхность усеченного конуса буквой S, будем иметь:

$$S=\frac{1}{2}(C+C_1)L.$$

117. Следствия. 1) Если R и R_1 означают радиусы окружностей нижнего и верхнего оснований, то боковая поверхность усеченного конуса будет:

$$S=\frac{1}{2}(2\pi R+2\pi R_1)L=\pi(R+R_1)L.$$

2) Если в трапеции OO_1A_1A (рис. 131), от вращения которой получается усеченный конус, проведем среднюю линию BC, то получим:

$$BC=\frac{1}{2}(OA+O_1A_1)=\frac{1}{2}\cdot(R+R_1),$$

откуда

$$R+R_1=2BC.$$

Следовательно,

$$S=2\pi BC\cdot L,$$

т.е. *боковая поверхность усеченного конуса равна произведению длины окружности среднего сечения на образующую.*

3) Полная поверхность T усеченного конуса выразится так:

$$T=\pi(R^2+R_1^2+RL+R_1L).$$

118. Развертка цилиндра и конуса. Впишем в цилиндр (рис. 132) какую-нибудь правильную призму и затем вообразим, что боковая ее поверхность разрезана вдоль бокового ребра. Очевидно, что вращая ее грани вокруг ребер, мы можем **развернуть** эту поверхность в плоскую фигуру без разрывов и без складок. Тогда получится то, что называется разверткой боковой поверхности призмы. Она представляет собой прямоугольник $KLMN$, составленный из стольких отдельных прямоугольников, сколько в призме боковых граней. Основание его MN равно периметру основания призмы, а высота KN есть высота призмы.

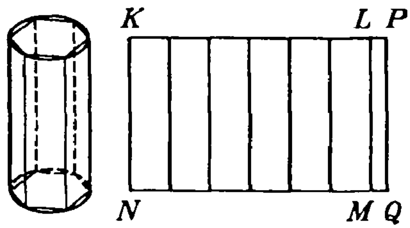


Рис. 132.

Вообразим теперь, что число боковых граней вписанной призмы неограниченно удваивается; тогда ее развертка будет все удлиняться, приближаясь к предельному прямоугольнику $KPQN$, у которого длина основания равна длине окружности основания цилиндра, а высота есть высота цилиндра. Этот прямоугольник называется **разверткой** боковой поверхности цилиндра.

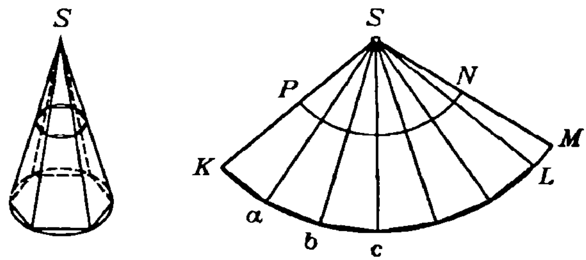


Рис. 133.

Подобно этому вообразим, что в конус вписана какая-нибудь правильная пирамида (рис. 133). Мы можем разрезать ее боковую поверхность по одному из ребер и затем, повертывая грани вокруг ребер, получить ее плоскую развертку в виде многоугольного сектора SKL, составленного из стольких равнобедренных треугольников, сколько в пирамиде боковых граней. Отрезки SK, Sa, Sb, ... равны боковому ребру пирамиды (или образующей конуса), а длина ломаной $Kab...L$ равна периметру основания пирамиды. При неограниченном удвоении числа боковых граней вписанной пирамиды развертка ее увеличивается, приближаясь к предельному сектору SKM, у которого длина дуги KM равна длине окружности основания, а радиус SK равен образующей конуса. Этот сектор называется **разверткой** боковой поверхности конуса.

Подобно этому можно получить развертку боковой поверхности усеченного конуса (рис. 133) в виде части кругового кольца $KMNP$. Легко видеть, что боковая поверхность цилиндра или конуса равна площади соответствующей развертки.

Объем цилиндра и конуса

119. Определения. 1) *За величину объема цилиндра принимается предел, к которому стремится объем правильной призмы, вписанной в цилиндр, когда число боковых граней этой призмы неограниченно удваивается.*

2) *За величину объема конуса* (полного или усеченного) *принимается предел, к которому стремится объем правильной пирамиды* (полной или усеченной), *когда число боковых граней пирамиды неограниченно удваивается.*

120. Теоремы. 1) ***Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.***

2) ***Объем конуса равен произведению площади основания на треть высоты.***

Впишем в цилиндр какую-нибудь правильную призму, а в конус — какую-нибудь правильную пирамиду; тогда, обозначив площадь основания призмы или пирамиды буквой B_1, высоту их буквой H и объем V_1, получим:

$$\text{для призмы } V_1=B_1H; \text{ для пирамиды } V_1=\frac{1}{3}B_1H.$$

Вообразим теперь, что число боковых граней призмы и пирамиды неограниченно удваивается. Тогда B_1 будет иметь пределом площадь B основания цилиндра или конуса, а высота H остается без изменения; значит, произведения B_1H и $\frac{1}{3}B_1H$ будут стремиться к пределам BH и $\frac{1}{3}BH$, и потому объем V цилиндра или конуса будет:

для цилиндра $V=BH$; для пирамиды $V=\frac{1}{3}BH$.

121. Следствие. Если радиус основания цилиндра или конуса обозначим через R, то $B=\pi R^2$, поэтому объем цилиндра $V=\pi R^2H$; объем конуса $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$.

122. Теорема. ***Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех конусов, имеющих одинаковую высоту с усеченным конусом, а основаниями: один — нижнее основание этого конуса, другой — верхнее, третий — круг, площадь которого есть среднее геометрическое между площадями верхнего и нижнего оснований.***

Теорему эту докажем совершенно так же, как раньше мы доказали теорему для объема усеченной пирамиды (§ 92).

На верхнем основании усеченного конуса (рис. 134) поместим такой малый конус (с высотой h) который дополняет данный усеченный конус до полного. Тогда объем V усеченного конуса можно рассматривать как разность объемов полного конуса и дополнительного. Поэтому

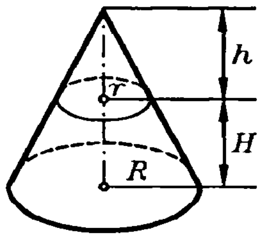


Рис. 134.

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2(H+h)-\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi[R^2H+(R^2-r^2)h].$$

Из подобия треугольников находим:

$$\frac{R}{r}=\frac{H+h}{h},$$

откуда получаем:

$$Rh=rH+rh; \quad (R-r)h=rH; \quad h=\frac{rH}{R-r}.$$

Поэтому

$$V=\frac{1}{3}\pi[R^2H+(R+r)rH]=\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)=$$

$$=\frac{1}{3}\,\pi R^2H+\frac{1}{3}\,\pi RrH+\frac{1}{3}\,\pi r^2H.$$

Так как πR^4 выражает площадь нижнего основания, πr^2 — площадь верхнего основания и $\pi Rr=\sqrt{\pi R^2\cdot\pi r^2}$ есть среднее геометрическое между площадями верхнего и нижнего оснований, то полученная нами формула вполне подтверждает теорему.

Подобные цилиндры и конусы

123. Определение. Два цилиндра или конуса называются **подобными**, если они произошли от вращения подобных прямоугольников или прямоугольных треугольников вокруг сходственных сторон.

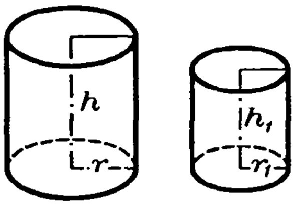


Рис. 135.

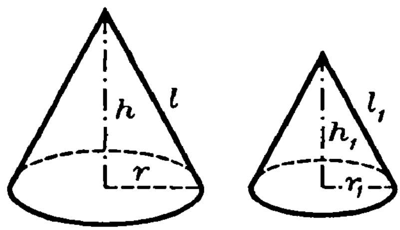


Рис. 136.

Пусть (рис. 135 и 136) h и h_1 будут высоты двух подобных цилиндров или конусов, r и r_1 — радиусы их оснований, l и l_1 — образующие; тогда согласно определению

$$\frac{r}{r_1}=\frac{h}{h_1}\quad\text{и}\quad\frac{r}{r_1}=\frac{l}{l_1},$$

откуда (по свойству равных отношений) находим:

$$\frac{r+h}{r_1+h_1}=\frac{r}{r_1}\quad\text{и}\quad\frac{r+l}{r_1+l_1}=\frac{r}{r_1}.$$

Заметив эти пропорции, докажем следующую теорему.

124. Теорема. ***Боковые и полные поверхности подобных цилиндров или конусов относятся как квадраты радиусов или высот; объемы — как кубы радиусов или высот.***

Пусть S, T и V будут соответственно боковая поверхность, полная поверхность и объем одного цилиндра или конуса; S_1, T_1 и V_1 — те же величины для другого цилиндра или конуса, подобного первому. Тогда будем иметь для цилиндров:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{2\pi rh}{2\pi r_1 h_1} = \frac{rh}{r_1 h_1} = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{h}{h_1} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{T}{T_1} = \frac{2\pi r(r+h)}{2\pi r_1(r_1+h_1)} = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{r+h}{r_1+h_1} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\pi r^2 h}{\pi r_1^2 h_1} = \frac{r^2}{r_1^2} \cdot \frac{h}{h_1} = \frac{r^3}{r_1^3} = \frac{h^3}{h_1^3};$$

для конусов:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\pi rl}{\pi r_1 l_1} = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{l}{l_1} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{T}{T_1} = \frac{\pi r(r+l)}{\pi r_1(r_1+l_1)} = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{r+l}{r_1+l_1} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1} = \frac{r^2}{r_1^2} \cdot \frac{h}{h_1} = \frac{r^3}{r_1^3} = \frac{h^3}{h_1^3}.$$

II. ШАР

Сечение шара плоскостью

125. Определение. Тело происходящее от вращения полукруга вокруг диаметра, называется **шаром**, а поверхность, образуемая при этом полуокружностью, называется **шаровой** или **сферической** поверхностью. Можно также сказать, что эта поверхность есть геометрическое место точек, одинаково удаленных от одной и той же точки (называемой **центром** шара).

Отрезок, соединяющий центр с какой-нибудь точкой поверхности, называется **радиусом**, а отрезок, соединяющий две точки поверхности и проходящий через центр, называется **диаметром** шара. Все радиусы одного шара равны между собой; всякий диаметр равен двум радиусам.

4 Зак 4873 А

Два шара одинакового радиуса равны, потому что при вложении они совмещаются.

126. Теорема. ***Всякое сечение шара плоскостью есть круг.***

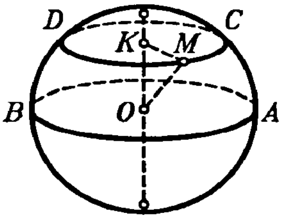


Рис. 137.

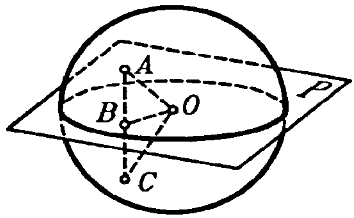


Рис. 138.

1) Предположим сначала, что (рис. 137) секущая плоскость AB проходит через центр O шара. Все точки линии пересечения принадлежат шаровой поверхности и поэтому одинаково удалены от точки O, лежащей в секущей плоскости; следовательно, сечение есть круг с центром в точке O.

2) Положим теперь, что секущая плоскость CD не проходит через центр. Опустим на нее из центра перпендикуляр OK и возьмем на линии пересечения какую-нибудь точку M. Соединив ее с O и K, получим прямоугольный треугольник MOK, из которого находим:

$$MK=\sqrt{OM^2-OK^2}\,. \qquad (1)$$

Так как длины отрезков OM и OK не изменяются при изменении положения точки M на линии пересечения, то расстояние MK есть величина постоянная для данного сечения; значит, линия пересечения есть окружность, центр которой есть точка K.

127. Следствие. Пусть R и r будут длины радиуса шара и радиуса круга сечения, а d — расстояние секущей плоскости от центра, тогда равенство (1) примет вид: $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

Из этой формулы выводим:

1) *Наибольший радиус сечения получается при* d=0, т. е. *когда секущая плоскость проходит через центр шара.* В

этом случае $r=R$. Круг, получаемый в этом случае, называется **большим кругом.**

2) *Наименьший радиус сечения получается при* $d=R$. В этом случае $r=0$, т. е. круг сечения обращается в точку.

3) *Сечения, равноотстоящие от центра шара, равны.*

4) *Из двух сечений, неодинаково удаленных от центра шара, то, которое ближе к центру, имеет больший радиус.*

128. Теорема. ***Всякая плоскость*** (P, рис. 138), ***проходящая через центр шара, делит его поверхность на две симметричные и равные части.***

Возьмем на поверхности шара какую-нибудь точку A; пусть AB есть перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость P. Продолжим AB до пересечения с поверхностью шара в точке C. Проведя BO, мы получим два равных прямоугольных треугольника AOB и BOC (общий катет BO, а гипотенузы равны, как радиусы шара); следовательно, $AB=BC$; таким образом, всякой точке A поверхности шара соответствует другая точка C этой поверхности, симметричная относительно плоскости P с точкой A. Значит, плоскость P делит поверхность шара на две симметричные части.

Эти части не только симметричны, но и равны, так как, разрезав шар по плоскости P, мы можем вложить одну из двух частей в другую и совместить эти части.

129. Теорема. ***Через две точки шаровой поверхности, не лежащие на концах одного диаметра, можно провести окружность большого круга и притом только одну.***

Пусть на шаровой поверхности (рис. 139), имеющей центр O, взяты какие-нибудь две точки, например C и N, не лежащие на одной прямой с точкой O. Тогда через точки C, O и N можно провести плоскость. Эта плоскость, проходя через центр O, даст в пересечении с шаровой поверхностью окружность большого круга.

Другой окружности большого круга через те же две точки C и N провести нельзя. Действительно, всякая окружность большого круга должна, по определению, лежать в плоскости, проходящей через центр шара; следовательно, если бы через C и N можно было провести еще другую окружность большого круга, тогда выходило бы, что через три точ-

ки, C, N и O, не лежащие на одной прямой, можно провести две различные плоскости, что невозможно.

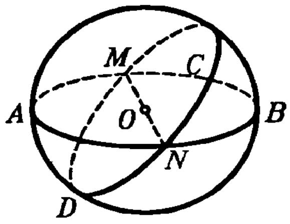


Рис. 139.

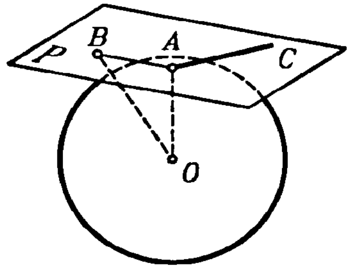


Рис. 140.

130. Теорема. ***Окружности двух больших кругов при пересечении делятся пополам.*** Центр O (рис. 139), находясь на плоскостях обоих больших кругов, лежит на прямой, по которой эти круги пересекаются; значит, эта прямая есть диаметр того и другого круга, а диаметр делит окружность пополам.

Плоскость, касательная к шару

131. Определение. Плоскость, имеющая с шаровой поверхностью только одну общую точку, называется **касательной плоскостью.** Возможность существования такой плоскости доказывается следующей теоремой.

132. Теорема. ***Плоскость*** (P, рис. 140), ***перпендикулярная к радиусу*** (AO) ***в конце его, лежащем на поверхности шара, есть касательная плоскость.***

Возьмем на плоскости P произвольную точку B и проведем прямую OB. Так как OB — наклонная, а OA — перпендикуляр к плоскости P, то $OB > OA$. Поэтому точка B лежит вне шаровой поверхности; следовательно, у плоскости P есть только одна общая точка A с шаровой поверхностью; значит, эта плоскость касательная.

133. Обратная теорема. ***Касательная плоскость*** (P, рис. 140) ***перпендикулярна к радиусу*** (OA), ***проведенному в точку касания.***

Так как, по определению, точка A есть единственная общая точка у плоскости с шаровой поверхностью, то всякая другая точка плоскости лежит вне шаровой поверхности и, следовательно, отстоит от центра на большее расстояние, чем A; таким образом, отрезок OA есть кратчайшее расстояние точки O до плоскости P, т. е. OA есть перпендикуляр к P.

Прямая, имеющая одну общую точку с шаровой поверхностью, называется касательной к шару. Легко видеть, что существует бесчисленное множество прямых, касающихся шара в данной точке. Действительно, всякая прямая (AC, рис. 140), лежащая в плоскости, касательной к шару, в данной точке (A) и проходящая через точку касания (A), есть касательная к шару в этой точке.

Поверхность шара и его частей

134. Определения. 1) Часть шаровой поверхности (рис. 141), отсекаемая от нее какой-нибудь плоскостью (AA_1), называется **сегментной поверхностью**.

Окружность AA_1 называется **основанием**, а отрезок KM радиуса, перпендикулярного к плоскости сечения, — **высотой** сегментной поверхности.

2) Часть шаровой поверхности, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями (AA_1 и BB_1), называется **шаровым поясом** или **зоной**.

Окружности сечения AA_1 и BB_1 называются **основаниями**, а расстояние KL между параллельными плоскостями — **высотой** пояса.

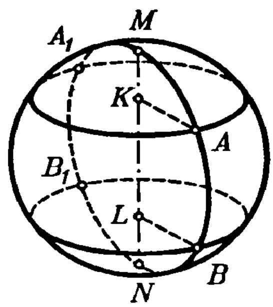


Рис. 141.

Шаровой пояс и сегментную поверхность можно рассматривать как поверхность вращения, в то время как полуокружность $MABN$, вращаясь вокруг диаметра MN, описывает шаровую поверхность, часть ее AB описывает пояс, а часть MA — сегментную поверхность.

Для нахождения величины шаровой поверхности и ее частей мы докажем следующую лемму.

135. Лемма. ***Боковая поверхность каждого из трех тел: конуса, усеченного конуса и цилиндра — равна произведению высоты тела на длину окружности, у которой***

радиус есть перпендикуляр, восставленный к образующей из ее середины до пересечения с осью.

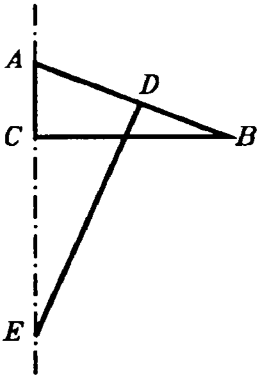


Рис. 142.

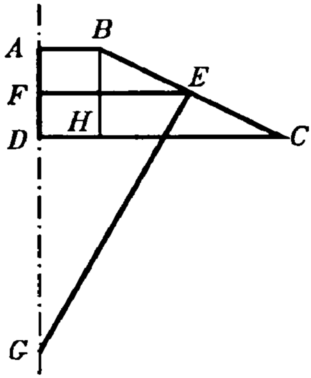


Рис. 143.

1) Пусть конус образуется (рис. 142) вращением треугольника ABC вокруг катета AC. Если D есть середина образующей AB, то (§ 115)

$$\text{боковая поверхность конуса} = 2\pi \cdot BC \cdot AD. \qquad (1)$$

Проведя $DE \perp AB$, получим два подобных треугольника ABC и ADE (они прямоугольные и имеют общий угол A); из их подобия выводим:

$$BC:ED = AC:AD,$$

откуда

$$BC \cdot AD = ED \cdot AC,$$

и равенство (1) дает:

$$\text{боковая поверхность конуса} = 2\pi \cdot ED \cdot AC,$$

что и требовалось доказать.

2) Пусть усеченный конус (рис. 143) образуется вращением трапеции $ABCD$ вокруг стороны AD.
Проведя среднюю линию EF, будем иметь (§ 117):

$$\text{боковая поверхность усеченного конуса} = 2\pi \cdot EF \cdot BC. \qquad (2)$$

Проведем $EG \perp BC$ и $BH \perp DC$; тогда получим два подобных треугольника EFG и BCH (стороны одного перпендикулярны к сторонам другого); из их подобия выводим:

$$EF:BH = EG:BC,$$

откуда

$$EF \cdot BC = BH \cdot EG = AD \cdot EG.$$

Поэтому равенство (2) можно записать так:

боковая поверхность усеченного конуса $= 2\pi \cdot EG \cdot AD$,

что и требовалось доказать.

3) Теорема остается верной и в применении к цилиндру, так как окружность, о которой говорится в теореме, равна окружности основания цилиндра.

136. Определение. За величину поверхности шарового пояса, образуемого вращением (рис. 144) какой-нибудь части (BE) полуокружности вокруг диаметра (AF), принимают **предел**, к которому стремится поверхность, образуемая вращением вокруг того же диаметра правильной вписанной ломаной линии ($ECDE$), когда ее стороны неограниченно уменьшаются (и, следовательно, число сторон неограниченно увеличивается).

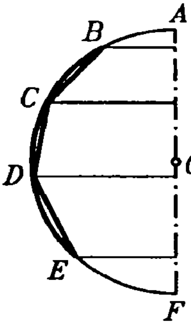


Рис. 144.

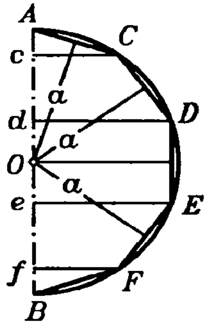


Рис. 145.

Это определение сохраняется и на сегментную поверхность, и на шаровую поверхность; в последнем случае ломаная линия вписывается в целую окружность.

137. Теоремы. 1) ***Сегментная поверхность равна произведению ее высоты на длину окружности большого круга.***

2) ***Поверхность шарового пояса равна произведению его высоты на длину окружности большого круга.***

1) Впишем в дугу AF (рис. 145), образующую при вращении сегментную поверхность, правильную ломаную линию $ACDEF$ с произвольным числом сторон.

Поверхность, получающаяся от вращения этой ломаной, состоит из частей, образуемых вращением сторон AC, CD, DE и т. д. Эти части представляют собой боковые поверхности или полного конуса (от вращения AC), или усеченного конуса (от вращения CD, EF, ...), или цилиндра (от вращения DE, если $DE \| AB$). Поэтому мы можем применить к ним лемму § 135. При этом заметим, что каждый из перпендикуляров, восставленных из середин образующих до пересечения с осью, равен апофеме ломаной линии. Обозначив эту апофему буквой a, получим:

поверхность, образованная вращением $AC = Ac \cdot 2\pi a$;

" " " $CD = cd \cdot 2\pi a$;

" " " $DE = de \cdot 2\pi a$ и т. д.

Сложив эти равенства почленно, найдем:

поверхность, образованная вращением $ACDEF = Af \cdot 2\pi a$.

При неограниченном увеличении числа сторон вписанной ломаной апофема a стремится к пределу, равному радиусу шара R, а отрезок Af остается без изменения; следовательно, предел поверхности, образованной вращением $ACDEF = Af \cdot 2\pi R$. Но предел поверхности, образованной вращением $ACDEF$, принимают за величину сегментной поверхности, а отрезок Af есть высота H сегментной поверхности; поэтому:

$$\text{сегментная поверхность} = H \cdot 2\pi R = 2\pi RH.$$

2) Предположим, что правильная ломаная линия вписана не в дугу AF, образующую сегментную поверхность, а в какую-нибудь дугу CF, образующую шаровой пояс (рис. 145). Это изменение, как легко видеть, нисколько не влияет на ход предыдущих рассуждений, поэтому и вывод остается тот же, т. е. что

$$\text{поверхность шарового пояса} = H \cdot 2\pi R = 2\pi RH,$$

где буквой H обозначена высота cf шарового пояса.

138. Теорема. ***Поверхность шара равна произведению длины окружности большого круга на диаметр,***

или: ***поверхность шара равна учетверенной площади большого круга.***

Поверхность шара, образуемую вращением полуокружности ADB (рис. 145), можно рассматривать как сумму поверхностей, образуемых вращением дуг AD и DB. Поэтому согласно предыдущей теореме можно написать:

$$\text{поверхность шара} = 2\pi R \cdot Ad + 2\pi R \cdot dB = 2\pi R(Ad + dB) = \\ = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

139. Следствие. *Поверхности шаров относятся как квадраты их радиусов или диаметров*, потому что, обозначая через R и R_1 радиусы, а через S и S_1 поверхности двух шаров, будем иметь:

$$S : S_1 = 4\pi R^2 : 4\pi R_1^2 = R^2 : R_1^2 = 4R^2 : 4R_1^2 = (2R)^2 : (2R_1)^2.$$

Объем шара и его частей

140. Определение. Тело, получаемое от вращения (рис. 146) кругового сектора (COD) вокруг диаметра (AB), не пересекающего ограничивающую его дугу, называется **шаровым сектором.** Это тело ограничено боковыми поверхностями двух конусов и поверхностью шарового пояса; последняя называется основанием шарового сектора. Один из радиусов кругового сектора может совпадать с осью вращения; например, сектор AOC, вращаясь вокруг AO, производит шаровой сектор $OCAC_1$, ограниченный боковой поверхностью конуса и сегментной поверхностью. Для нахождения объема шарового сектора и целого шара мы предварительно докажем следующую лемму.

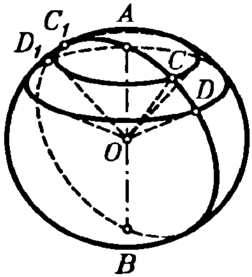


Рис. 146.

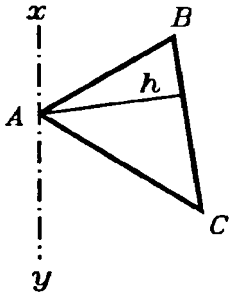


Рис. 147.

141. Лемма. ***Если*** ΔABC (рис. 147) ***вращается вокруг оси*** xy***, которая лежит в плоскости треугольника, проходит через его вершину*** A***, но не пересекает сторону*** BC***, то объем тела, получаемого при этом вращении, равен произведению поверхности, образуемой противоположной стороной*** BC***, на одну треть высоты*** h***, опущенной на эту сторону.***

При доказательстве рассмотрим три случая:

1) Ось совпадает со стороной AB (рис. 148). В этом случае искомый объем равен сумме объемов двух конусов, получаемых вращением прямоугольных треугольников BCD и DCA. Первый объем равен $\frac{1}{3}\pi CD^2 \cdot DB$, а второй $\frac{1}{3}\pi CD^2 \cdot DA$; поэтому

объем, образованный вращением ABC, равен

$$= \frac{1}{3}\pi CD^2(DB+DA) = \frac{1}{3}\pi CD \cdot CD \cdot BA .$$

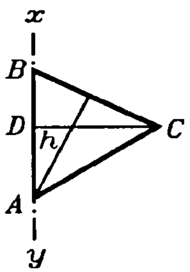


Рис. 148.

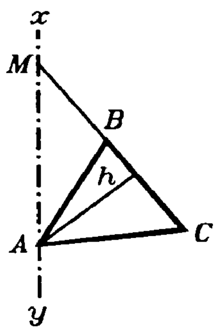


Рис. 149.

Произведение $CD \cdot BA$ равно $BC \cdot h$, так как каждое из этих произведений выражает двойную площадь ΔABC; поэтому

$$\text{объем } ABC = \frac{1}{3}\pi CD \cdot BC \cdot h .$$

Но произведение $\pi CD \cdot BC$ равно боковой поверхности конуса BDC; значит,

$$\text{объем } ABC = (\text{поверхность } BC) \cdot \frac{1}{3} h.$$

2) Ось не совпадает с AB и не параллельна BC (рис. 149). В этом случае искомый объем равен разности объемов тел, производимых вращением треугольников AMC и AMB. По доказанному в первом случае

$$\text{объем } AMC = \frac{1}{3} h \cdot (\text{поверхность } MC),$$

$$\text{объем } AMB = \frac{1}{3} h \cdot (\text{поверхность } MB);$$

следовательно,

$$\text{объем } ABC = \frac{1}{3} h \cdot (\text{поверхность } MC - \text{поверхность } MB) =$$

$$= \frac{1}{3} h \cdot (\text{поверхность } BC).$$

3) Ось параллельна стороне BC (рис. 150). Тогда искомый объем равен объему, производимому вращением $DEBC$ без суммы объемов, производимых вращением треугольников AEB и ACD; первый из них равен $\pi DC^2 \cdot ED$; второй $\frac{1}{2}\pi EB^2 \cdot EA$ и третий $\frac{1}{3}\pi DC^2 \cdot AD$. Приняв теперь во внимание, что $EB=DC$, получим:

$$\text{объем } ABC = \pi DC^2\left[ED - \frac{1}{3}(EA + AD)\right] =$$

$$=\pi DC^2\left(ED-\frac{1}{3}ED\right)=\frac{2}{3}\cdot\pi DC^2\cdot ED.$$

Произведение $2\pi DC\cdot ED$ выражает боковую поверхность цилиндра, образуемую стороной BC; поэтому

$$\text{объем } ABC=(\text{поверхность } BC)\cdot\frac{1}{3}DC=(\text{поверхность } BC)\cdot\frac{1}{3}h.$$

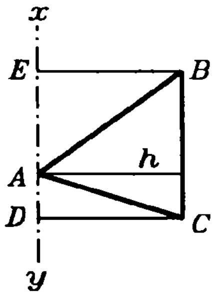


Рис. 150.

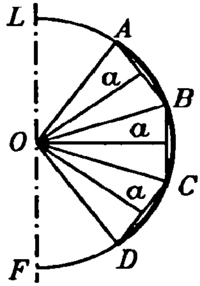


Рис. 151.

142. Определение. За величину объема шарового сектора, получаемого вращением вокруг диаметра (EF, рис. 151) кругового сектора (AOD), принимается предел, к которому стремится объем тела, образуемого вращением многоугольного сектора, который ограничен крайними радиусами (OA и OD) и правильной ломаной линией ($ABCD$), вписанной в дугу кругового сектора, когда число сторон ее неограниченно увеличивается.

143. Теорема. ***Объем шарового сектора равен произведению поверхности соответствующего шарового пояса (или соответствующей сегментной поверхности) на треть радиуса.***

Пусть шаровой сектор производится вращением вокруг диаметра EF (рис. 151) сектора AOD.

Определим его объем V. Для этого впишем в дугу AD правильную ломаную линию $ABCD$ с произвольным числом сторон. Многоугольный сектор $OABCD$ образует при вращении некоторое тело, объем которого обозначим буквой V_1. Объем этот есть сумма объемов тел, получаемых вращением треугольников OAB, OBC, OCD вокруг оси EF.

Применим к этим объемам лемму, доказанную в § 141, причем заметим, что высоты треугольников равны апофеме a вписанной ломаной. Согласно этой лемме будем иметь:

$$V_1 = (\text{поверхность } AB) \cdot \frac{a}{3} + (\text{поверхность } BC) \cdot \frac{a}{3} + \ldots =$$

$$= (\text{поверхность } ABCD) \cdot \frac{a}{3}.$$

Вообразим теперь, что число сторон ломаной линии неограниченно увеличивается. При этом условии поверхность $ABCD$ стремится к пределу, именно к поверхности шарового пояса AD, а апофема a имеет пределом радиус R; следовательно,

$$V = \text{пределу } V_1 = (\text{поверхность пояса } AD) \cdot \frac{R}{3}.$$

Замечание. Теорема и ее доказательство не зависят от того, будет ли один из радиусов кругового сектора совпадать с осью вращения или нет.

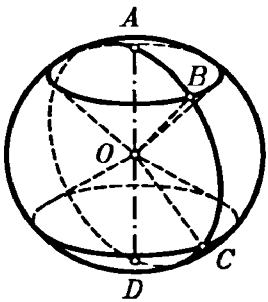


Рис. 152.

144. Теорема. ***Объем шара равняется произведению его поверхности на треть радиуса.***

Разбив полукруг $ABCD$ (рис. 152), производящий шар, на какие-нибудь круговые секторы AOB, BOC, COD, мы заметим, что объем шара можно рассматривать как сумму объемов шаровых секторов, производимых вращением этих круговых секторов. Так как согласно предыдущей теореме

$$\text{объем } AOB = (\text{поверхность } AB) \cdot \frac{1}{3} R,$$

$$\text{объем } BOC = (\text{поверхность } BC) \cdot \frac{1}{3} R,$$

$$\text{объем } COD = (\text{поверхность } CD) \cdot \frac{1}{3} R,$$

то

$$\text{объем шара} = (\text{поверхность } AB + \text{поверхность } BC +$$

$$+ \text{поверхность } CD) \cdot \frac{1}{3} R = (\text{поверхность } ABCD) \cdot \frac{1}{3} R.$$

Замечание. Можно и непосредственно рассматривать объем шара как объем тела, образованного вокруг диаметра кругового сектора, центральный угол которого равен 180°.

В таком случае объем шара можно получить как частный случай объема шарового сектора, у которого шаровой пояс составляет всю поверхность шара.

В силу предыдущей теоремы *объем шара будет при этом равен его поверхности, умноженной на одну треть радиуса.*

145. Следствие 1. Обозначим высоту шарового пояса или сегментной поверхности через H, радиус шара — через R, а диаметр — через D; тогда поверхность пояса или сегментная поверхность выразится, как мы видели (§ 137), формулой $2\pi RH$, а поверхность шара (§ 138) — формулой $4\pi R^2$; поэтому

$$\text{объем шарового сектора} = 2\pi RH\cdot\frac{1}{3}R = \frac{2}{3}\pi R^2H;$$

$$\text{объем шара} = 4\pi R^2\cdot\frac{1}{3}R = \frac{4}{3}\pi R^3\ [1],$$

или

$$\text{объем шара} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

Отсюда видно, что *объемы шаров относятся как кубы их радиусов или диаметров.*

---

[1] Объем шара может быть выведен (не вполне, впрочем, строго) следующим простым рассуждением. Вообразим, что вся поверхность шара разбита на очень малые участки и что все точки контура каждого участка соединены радиусами с центром шара. Тогда шар разделится на очень большое число маленьких тел, их которых каждое можно рассматривать как пирамиду с вершиной в центре шара. Так как объем пирамиды равен произведению поверхности основания на третью часть высоты (которую можно принять равной радиусу шара), то объем шара, равный, очевидно, сумме объемов всех пирамид, выразится так:

$$\text{объем шара} = S\cdot\frac{1}{3}R,$$

где S — сумма поверхностей оснований всех пирамид. Но эта сумма поверхностей оснований должна составить поверхность шара, и, значит,

$$\text{объем шара} = 4\pi R^2\cdot\frac{1}{3}R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Таким образом, объем шара может быть найден посредством формулы его поверхности. Обратно, поверхность шара может быть найдена с помощью формулы его объема из равенства:

$$S\cdot\frac{1}{3}R = \frac{4}{3}\pi R^3,\ \text{откуда}\ S = 4\pi R^2.$$

146. Следствие 2. *Поверхность и объем шара соответственно составляют $\frac{2}{3}$ полной поверхности и объема цилиндра, описанного около шара.*

Действительно, у цилиндра, описанного около шара, радиус основания равен радиусу шара, а высота равна диаметру шара; поэтому для такого цилиндра

$$\text{полная поверхность описанного цилиндра} = 2\pi R\cdot 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2,$$
$$\text{объем описанного цилиндра} = \pi R^2\cdot 2R = 2\pi R^3.$$

Отсюда видно, что $\frac{2}{3}$ полной поверхности этого цилиндра равны $4\pi R^2$, т. е. равны поверхности шара, а $\frac{2}{3}$ объема цилиндра составляют $\frac{4}{3}\pi R^3$, т. е. объем шара.

Это предложение было доказано Архимедом (в III в. до н. э.). Архимед выразил желание, чтобы чертеж этой теоремы был изображен на его гробнице, что и было исполнено римским военачальником Марцеллом (Ф. Кэджори. История элементарной математики).

Предлагаем учащимся как полезное упражнение доказать, что поверхность и объем шара составляют $\frac{4}{9}$ соответственно полной поверхности и объема описанного конуса, у которого образующая равна диаметру основания. Соединяя это предложение с указанным в следствии 2, мы можем написать такое равенство, где Q обозначает поверхность или объем:

$$\frac{Q_{\text{шара}}}{4} = \frac{Q_{\text{цилиндра}}}{6} = \frac{Q_{\text{конуса}}}{9}.$$

147. Замечание. Формулу для объема шара можно весьма просто получить, основываясь на принципе Кавальери (§ 89), следующим образом.

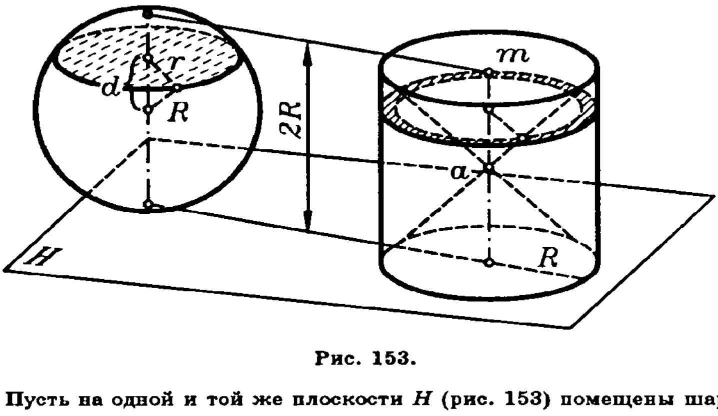


Рис. 153.

Пусть на одной и той же плоскости H (рис. 153) помещены шар радиуса R и цилиндр, радиус основания которого равен R, а высота $2R$ (значит, это такой цилиндр, который может быть описан около шара радиуса R). Вообразим далее, что из цилиндра вырезаны и удалены два конуса, имеющие общую вершину на середине a оси цилиндра, а основания — у одного верхнее основание цилиндра, у другого нижнее. От цилиндра останется тогда некоторое тело, объем которого, как мы сейчас увидим, равен объему нашего шара. Проведем какую-нибудь плоскость, параллельную плоскости H и которая пересекалась бы с обоими телами. Пусть расстояние этой плоскости от центра шара будет d, а радиус круга, полученного в сечении плоскости с шаром, пусть будет r. Тогда площадь этого круга окажется равной $\pi r^2 = \pi(R^2 - d^2)$. Та же секущая плоскость дает в сечении с телом, оставшимся от цилиндра, круговое кольцо (оно на рисунке покрыто штрихами), у которого радиус внешнего круга равен R, а внутреннего d (прямоугольный треугольник, образованный этим радиусом и отрезком am, равнобедренный, так как каждый острый угол его равен 45°). Значит, площадь этого кольца равна $\pi R^2 - \pi d^2 = \pi(R^2 - d^2)$. Мы видим, таким образом, что секущая плоскость, параллельная плоскости H, дает в сечении с шаром и телом, оставшимся от цилиндра, фигуры одинаковой площади, следовательно, согласно принципу Кавальери, объемы этих тел равны. Но объем тела, оставшегося от цилиндра, равен объему цилиндра без удвоенного объема конуса, т. е. он равен:

$$\pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

значит, это и будет объем шара.

148. Определения. 1) Часть шара (ACC', рис. 154), отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью (CC'), называется **шаровым сегментом**. Круг сечения называется **основанием** сегмента, а отрезок Am радиуса, перпендикулярного к основанию,— **высотой** сегмента.

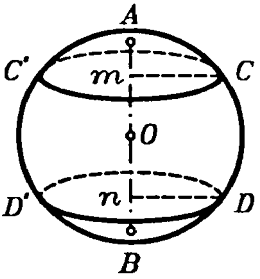


Рис. 154.

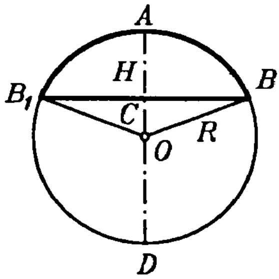


Рис. 155.

2) Часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями (CC' и DD'), называется **шаровым слоем**. Круги параллельных сечений называются основаниями слоя, а расстояние mn между ними — его **высотой**.

Оба эти тела можно рассматривать как происходящие от вращения вокруг диаметра AB части круга AmC или части $CmnD$.

149. Теорема. ***Объем шарового сегмента равен объему цилиндра, у которого радиус основания есть высота***

сегмента, а высота равна радиусу шара, уменьшенному на треть высоты сегмента, т. е.

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{1}{3}H\right),$$

где H есть высота сегмента, а R — радиус шара.

Объем шарового сегмента, получаемого вращением вокруг диаметра AD (рис. 155) части круга ACB, найдется, если из объема шарового сектора, получаемого вращением кругового сектора AOB, вычтем объем конуса, получаемого вращением ΔCOB. Первый из них равен $\frac{2}{3}\pi R^2H$, а второй $\frac{1}{3}\pi CB^2\cdot CO$. Так как CB есть средняя пропорциональная между AC и CD, то $CB^2=H(2R-H)$, поэтому

$$CB^2\cdot CO = H(2R-H)(R-H) = 2R^2H-RH^2-2RH^2+H^3 =$$
$$= 2R^2H-3H^2R+H^3;$$

следовательно,

$$\text{объем } ABB_1 = \text{объему } OBAB_1-\text{объем } OBB_1 = \frac{2}{3}\pi R^2H-$$
$$-\frac{1}{3}\pi CB^2\cdot CO = \frac{2}{3}\pi R^2H-\frac{2}{3}\pi R^2H+\pi RH^2-\frac{1}{3}\pi H^3 = \pi H^2\left(R-\frac{1}{3}H\right).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Объем цилиндра, у которого высота вдвое более диаметра основания, равен 1 м^3. Вычислить его высоту.

2. Вычислить боковую поверхность и объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований равны 27 см и 18 см, а образующая равна 21 см.

3. На каком расстоянии от центра шара, радиус которого равен 2,425 м, следует провести секущую плоскость, чтобы отношение поверхности меньшего сегмента к боковой поверхности конуса, имеющего общее с сегментом основание, а вершину в центре шара, равнялось 7 : 4?

4. Найти объем тела, происходящего от вращения правильного шестиугольника со стороной a вокруг одной из его сторон.

5. Вычислить радиус шара, описанного около куба, ребро которого равно 1 м.

6. Вычислить объем тела, происходящего от вращения правильного треугольника со стороной a вокруг оси, проходящей через его вершину и параллельной противоположной стороне.

7. Дан равносторонний ΔABC со стороной a; на BC строят квадрат $BCDE$, располагая его в противоположную сторону от треугольника. Вычислить объем тела, происходящего от вращения пятиугольника $ABEDC$ вокруг стороны AB.

8. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. Через вершину A проводят прямую AM, перпендикулярную к диагонали AC, и вращают квадрат вокруг AM. Вычислить поверхность, образуемую контуром квадрата, и объем, образуемый площадью квадрата.

9. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной a. Через вершину A проводят прямую AM, перпендикулярную к радиусу OA, и вращают шестиугольник вокруг AM. Вычислить поверхность, образуемую контуром, и объем, образуемый площадью правильного шестиугольника.

10. В шаре, радиус которого равен 2, просверлено цилиндрическое отверстие вдоль его диаметра. Вычислить объем оставшейся части, если радиус цилиндрического отверстия равен 1.

11. Вычислить объем шара, который, будучи вложен в коническую воронку с радиусом основания r=5 см и с образующей l=13 см, касается основания воронки.

12. Около круга радиуса r описан равносторонний треугольник. Найти отношение объемов тел, которые производятся вращением круга и площади треугольника вокруг высоты треугольника.

13. В цилиндрический сосуд, у которого диаметр основания равен 6 см, а высота 36 см, налита вода до половины высоты сосуда. На сколько поднимется уровень воды в сосуде, если в него погрузить шар диаметром 5 см?

14. Железный пустой шар, внешний радиус которого равен 0,154 м, плавает в воде, погружаясь в нее наполовину. Вычислить толщину оболочки этого шара, зная, что удельный вес железа равен 7,7.

15. Диаметр Марса составляет половину земного. Во сколько раз поверхность и объем Марса меньше, чем соответственные величины для Земли?

16. Диаметр Юпитера в 11 раз больше земного. Во сколько раз Юпитер превышает Марс по поверхности и объему?

ДОПОЛНЕНИЕ

ОБ АКСИОМАХ ГЕОМЕТРИИ

1. Геометрия среди других областей математики (алгебра, арифметика) выделяется одной, только ей присущей особенностью. Эта особенность состоит в том, что те теоремы и свойства фигур, которые изучаются в геометрии, не только устанавливаются путем ряда рассуждений, но во многих случаях могут служить объектом непосредственного созерцания; справедливость этих свойств не только доказывается, но и подтверждается непосредственным зрительным впечатлением. Так, равенство углов при основании равнобедренного треугольника и многие другие свойства фигур можно непосредственно созерцать.

Наглядность геометрических объектов помогает обнаруживать и угадывать многие геометрические факты прежде, чем они будут точно доказаны. Непосредственное созерцание геометрических фигур у древних египтян (за 2000 лет до нашей эры) служило главным способом убеждаться в наличии тех или иных свойств. Но такой способ мог быть пригоден лишь для установления простейших геометрических фактов; с такими именно фактами и имели дело египтяне, которые пользовались геометрией для узкопрактических целей. Но уже простое расширение и усложнение практических задач привело к необходимости изучать свойства все более сложных геометрических фигур, а для этого уже недостаточно было простого созерцания чертежа; появилась необходимость применять все более сложные формы рассуждений.

Кроме того, сама наглядность чертежа в применении к более сложным геометрическим фигурам часто весьма обманчива и приводит иногда к неверным заключениям.

Можно привести много примеров, когда общий вид чертежа подсказывает неверное заключение о взаимном расположении и свойствах изображенных на нем фигур. На этом основано много геометрических парадоксов, приводить которые мы здесь не будем.

Древние греки, воспринявшие геометрическую науку от египтян, обобщили отдельные факты, известные египтянам, и выработали определенные формы рассуждений, при помощи которых они обнаруживали новые геометрические факты. Приблизительно за 300 лет до начала нашей эры греческий геометр Евклид в ряде своих книг, носивших общее название «Начала», дал первое научное обоснование геометрии. Он постарался в достаточно отчетливых терминах выразить словами те общие представления о простейших геометрических образах: точках, линиях, поверхностях — и о взаимоотношениях между ними, которые считались до того времени само собой понятными. Базируясь на этом, он дал полное, логически строгое построение геометрии по форме, в высшей степени совершенное и с точки зрения современной науки.

Он прежде всего попытался дать точные определения основных геометрических понятий: точки, линии, в частности прямой линии, поверхности, в частности плоскости и геометрического тела. Приведем данные им определения:

1. *Точка есть то, что не имеет частей.*

2. *Линия есть длина без ширины.*

3. *Границы линии суть точки.*

4. *Прямая линия есть та, которая одинаково расположена относительно всех своих точек.*

5. *Поверхность есть то, что имеет длину и ширину.*

6. *Границы поверхности суть линии.*

7. *Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена относительно всех своих прямых.*

8. *Телом называется то, что имеет длину, ширину и глубину.*

9. *Границы тела суть поверхности.*

Целью этих определений было достигнуть того, чтобы термины «точки», «прямая» и т. д. не только вызывали определенное зрительное представление, но одновременно с тем определяли некоторое понятие, опираясь на которое можно было бы делать дальнейшие логические выводы. И хотя эти определения несовершенны с точки зрения современной науки, но они вполне соответствовали тогдашнему состоянию научной мысли и являлись первым шагом к переходу от образов к понятиям. Они послужили отправным пунктом всех последующих работ по геометрии и определили собой пути ее дальнейшего развития.

Все истины, которые устанавливаются в геометрии, Евклид разделил на три вида: постулаты, аксиомы и теоремы. К первым двум видам[1] были отнесены простейшие истины, которые не возбуждали никаких сомнений, были непосредственно очевидны и могли поэтому служить исходными предложениями, из которых логически выводились другие истины.

Третий вид предложений — теоремы — истины, которые должны доказываться, т. е. путем ряда рассуждений выводиться из двух первых видов истин. Приведем постулаты и аксиомы Евклида:

а) **Постулаты.** Требуется, чтобы:

1) *от каждой точки до каждой другой точки можно было провести одну прямую линию*;

2) *ограниченную прямую можно было непрерывно продолжать по прямой*;

3) *из любого центра можно было описать окружность любым радиусом*;

4) *все прямые углы были равны между собой*;

5) *две прямые, которые при пересечении с третьей образуют с ней по одну сторону внутренние углы, в сумме меньшие двух прямых, при продолжении в ту же сторону пересекались.*

б) **Аксиомы:**

1) *равные одному и тому же равны между собой*;

2) *если к равным прибавить поровну, то суммы будут равны*;

3) *если от равных отнять поровну, то остатки будут равны*;

4) *совмещающиеся друг с другом равны*;

5) *целое больше своей части.*

Эти аксиомы и постулаты Евклида в течение долгого ряда последующих столетий служили базой, на которой строилась вся геометрия.

2. Уже ближайшие потомки Евклида обратили особое внимание на пятый из данных Евклидом постулатов. Он привлекал к себе внимание сложностью своей формулировки и далеко не полной очевидностью. Эта неочевидность вызвала стремление так или иначе доказать справедливость постулата,

---

[1] Принципиальной разницы между теми и другими Евклид не указывает, но с постулатами он обычно связывает утверждение возможности выполнить то или иное построение.

т. е. вывести его из остальных, не возбуждающих сомнений истин. Попытки дать доказательство пятого постулата продолжались в течение 2000 лет, но не привели и, как оказалось впоследствии, не могли привести к положительному результату. Удавалось лишь заменить постулат другим предложением, ему равносильным, но столь же неочевидным и не вытекавшим из остальных геометрических аксиом и постулатов.

Легко показать, что постулат Евклида равносилен утверждению, что в данной плоскости через каждую точку к каждой прямой можно провести единственную прямую, ей параллельную (т. е. не пересекающую данной). Действительно, если принять это положение как аксиому, то из теорем, доказанных в планиметрии, непосредственно вытекает постулат Евклида. Это предложение о единственности параллельной прямой и принимается обычно как аксиома вместо постулата Евклида (как это сделано в настоящей книге). Другим предложением, равносильным постулату Евклида, является теорема о сумме углов треугольника.

Усилия геометров в течение ряда веков были направлены на то, чтобы доказать или самый постулат Евклида, или предложение, ему равносильное. Приведем здесь для иллюстрации несколько таких доказательств.

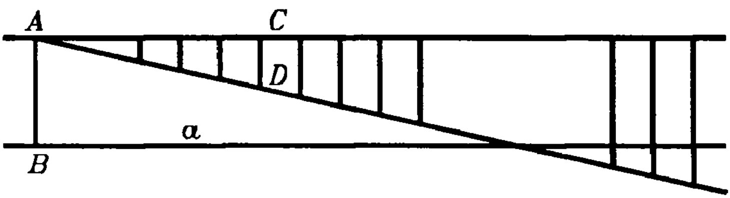


Рис. 156.

Доказательство Прокла (в V в. нашей эры). Возьмем на данной плоскости прямую a и точку A вне ее (рис. 156). Опустим из A перпендикуляр AB на прямую a и в точке A восставим перпендикуляр AC к прямой AB. Прямые a и AC не пересекаются, иначе из точки их пересечения было бы опущено на прямую AB два перпендикуляра. Пусть теперь через A проведена еще какая-либо прямая AD. Прокл доказывает, что она должна встретиться с прямой a. Вот его доказательство.

Будем восставлять перпендикуляры к прямой AC и продолжать их до пересечения с прямой AD. По мере удаления основания перпендикуляра от точки A его длина будет расти, и при достаточном удалении от точки A она станет больше расстояния между параллельными прямыми a и AC. Соответствующие точки прямой AD окажутся, таким образом, лежащими по другую сторону прямой a, т. е. прямая AD перейдет с одной стороны a на другую. А это может случиться только, если она пересечет прямую a. В этом своем доказательстве Прокл опирается на то положение, что расстояние точек одной из двух параллельных прямых от другой не может беспредельно возрастать. Но это положение само есть некоторый постулат, равносильный постулату Евклида.

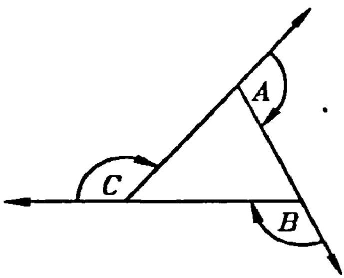


Рис. 157.

Приведем еще пример попытки доказательства теоремы о сумме углов треугольника без помощи свойств параллельных прямых. Это доказательство относится уже к XIX в. и принадлежит профессору Геттингенского университета Thibaut (Тибо). Пусть дан ΔABC (рис. 157). Продолжим сторону CA за точку A, сторону AB за точку B и сторону BC за точку C. Докажем, что образовавшиеся внешние углы составляют в сумме $4d$. Вращаем прямую AC около точки A на величину внешнего угла A. После этого поворота она совпадает с прямой AB. Вращаем далее эту прямую около точки B от ее нового положения на величину внешнего угла B; после поворота она совпадает с прямой BC. Вращаем теперь эту прямую около точки C от ее последнего положения на величину внешнего угла C. После этих трех поворотов прямая вернется в исходное положение. Следовательно, в общей сложности она повернется на полный угол, т. е. на $4d$, но три ее поворота состояли из поворотов на величины трех внешних углов треугольника. Следовательно, сумма этих внешних углов равна $4d$. Но сумма и внешних и внутренних углов треугольника, очевидно, равна $6d$. Следовательно, сумма его внутренних углов равна $6d-4d=2d$.

В этом доказательстве Тибо производил три поворота прямой около различных точек и молчаливо предполагал, что такое вращение равносильно полному повороту около одного центра, когда прямая описывает полный угол.

Такое предположение само составляет некоторое допущение. Подробное изучение этого допущения показывает, что оно равносильно постулату Евклида. Мы не будем приводить других попыток доказательства пятого постулата.

Несмотря на многочисленные неудачи получить строгое доказательство постулата Евклида, попытки его доказательства не прекращались, и причиной этого была полная убежденность геометров в невозможности обойтись без него при построении геометрии.

3. В первой половине XIX в. гениальный русский математик, профессор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский высказал смелую мысль, что постулат Евклида не является логическим следствием остальных аксиом геометрии и потому не может быть доказан и что принятие этого постулата не является необходимым для построения геометрии.

В подтверждение своей мысли он построил новую геометрию, в которой постулат Евклида был заменен другим предложением, а именно, что через данную точку в данной плоскости можно провести бесчисленное множество прямых, не пересекающих данной.

Предложения этой геометрии существенно отличались от теорем геометрии Евклида. Так, сумма углов треугольника оказалась меньше двух прямых углов, к теоремам о равенстве треугольников присоединилась новая: «Треугольники равны, когда три угла одного равны трем углам другого». В этой геометрии, следовательно, не существует треугольников, подобных и неравных между собой.

Первый доклад о созданной им новой геометрии Лобачевский сделал в 1826 г. Идеи Лобачевского были в высшей степени новыми и неожиданными. Несмотря на всю непривычность таких предложений новой геометрии, она имела такую же стройную и законченную форму, как и геометрия Евклида. Впоследствии ей было дано название неевклидовой геометрии. Одновременно с ее открытием возник вопрос: какая же геометрия имеет место в действительном материальном мире и какой геометрией следует пользоваться при решении проблем прикладного знания — физики, астрономии и др.? Лобачевский пытался решить этот вопрос опытным путем — астрономическими наблюдениями.

Но решить этот вопрос столь простыми средствами оказалось невозможным. Дело в том, что наши пространственные восприятия не обладают абсолютной точностью и лишь приблизительно отражают пространственные отношения материального мира.

Геометрия Евклида выросла из наблюдений над материальным миром и потому с большой точностью отражает существующие в нем взаимоотношения, по крайней мере в их простейших проявлениях. В силу этого опыты Лобачевского не дали исчерпывающего ответа на поставленный вопрос: они не обнаружили заметных отклонений от того, что давала геометрия Евклида, но и не установили абсолютного совпадения предложений этой геометрии с пространственными взаимоотношениями материального мира.

Открытие неевклидовой геометрии произвело глубокие изменения в сознании геометров. Самый факт существования стройной и непротиворечивой неевклидовой геометрии подрывал вековое доверие к «наглядности» и «очевидности», руководившим мыслью древних геометров. Многовековой анализ пятого постулата расшатал устои первичных геометрических представлений, на которых покоилась геометрия Евклида. Он вскрыл глубокие зависимости между отдельными, казавшимися далекими одни от других геометрическими фактами и представил в новом свете пространственные взаимоотношения материального мира. Поэтому система аксиом и определений Евклида как база для построения геометрии стала уже недостаточной. В свете новых идей его определения и аксиомы обнаружили недостаточную полноту и не могли уже отвечать возросшим требованиям научной строгости.

Такое, например, определение, как «линия есть длина без ширины», не могло уже удовлетворить геометров, так как в их сознании сами понятия длины и ширины уже утратили тот характер абсолютной ясности и первоначальности, который они имели во времена Евклида. Для геометров нового времени многие определения Евклида не имели силы без некоторых дополнительных предположений, которые явно не высказывались, но молчаливо и незаметно принимались сознанием древних геометров. Иначе трудно объяснить, почему, например, определение 4 нельзя применить к окружности и определение 7 — к поверхности круглого цилиндра или конуса.

Требование большей полноты геометрических определений и аксиом привело к тому, что в конце XIX в. была поставлена задача общего пересмотра и уточнений всей аксиоматической базы геометрии. Эти работы привели к созданию новой аксиоматики геометрии, вполне отвечающей современным требованиям математической строгости. Ниже мы даем краткое изложение современного состояния этого вопроса.

4. Прежде всего поставим вопрос об определении основных геометрических образов: точка, прямая линия и плоскость. Заметим, что определить какое-нибудь понятие — значит выразить его через понятия, ранее уже установленные. Если же искать определение простейших понятий, то дело неизбежно сведется лишь к замене одного термина другим, в свою очередь требующим определения. Так и было у Евклида, который понятие «линии» определил через понятие «длины» или «границы», а эти последние не определял.

Поэтому можно с самого начала не искать определения простейших геометрических понятий, а принять их за исходные, которые нельзя уже выразить через понятия более простые. «Точка», «прямая» и «плоскость» и принимаются за такие первичные, неопределенные геометрические понятия. По отношению к ним устанавливается целая система основных положений «аксиом», принимаемых за исходные недоказуемые положения. По существу эти аксиомы представляют собой лишь целесообразные абстракции пространственных взаимоотношений материального мира.

Мы приведем здесь ту систему аксиом, которая дана немецким математиком Гильбертом. В этой системе все аксиомы геометрии заменяются на 5 групп.

Первая группа аксиом — **«аксиомы соединения»**. Аксиомы этой группы имеют целью установить те взаимоотношения между понятиями точка, прямая и плоскость, которые обычно характеризуются словами «прямая проходит через точку», «точка лежит на прямой или на плоскости» и т. п. Эта группа состоит из следующих аксиом:

1. *Две точки определяют единственную проходящую через них прямую.*

2. *На каждой прямой лежит не менее двух точек; существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

3. *Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость. В каждой плоскости лежит по крайней мере одна точка.*

4. *Если две точки прямой линии лежат в данной плоскости, то и все точки этой прямой лежат в той же плоскости.*

5. *Если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют и еще по крайней мере одну общую точку.*

6. *Существует по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

При первом взгляде на эти аксиомы некоторые из них могут показаться или недостаточными, или вообще ненужными. Так, аксиома 2 как бы противоречит обычному представлению о прямой, на которой мы мыслим бесчисленное множество точек. Не следует забывать, что точки и прямые введены у нас как первичные, не зависящие одно от другого понятия. Они могут существовать раздельно. Поэтому, когда мы говорили, что точка лежит на прямой или что прямая проходит через точку, мы приписывали точке и прямой способность находиться между собой в некотором взаимоотношении. Чтобы яснее представить себе такое раздельное существование точек, прямых и плоскостей и взаимоотношения между ними, будем их представлять себе в виде конкретных физических предметов. Точки будем представлять себе в виде горошин какой-нибудь определенной величины. Эти горошины будем предполагать шарообразной формы и достаточно мягкими (например, разбухшими в воде), чтобы их можно было прокалывать тонкими иглами и резать на части. Прямые линии будем представлять в виде очень тонких стальных иголок, а плоскости — в виде столь же тонких пластинок. Сначала эти пластинки, иглы и горошины представляем себе ничем не связанными и даже находящимися в разных местах: в одном месте — кучка гороха, в другом — груда стальных игл, в третьем — пачка сложенных пластинок. Начнем теперь подчинять их тем условиям, которые содержатся в наших аксиомах. Мы будем считать, что точка лежит на прямой, если игла прокалывает горошину или хотя бы частично входит в нее. Будем считать, что точка лежит на плоскости, если тонкая пластинка режет горошину пополам или лишь надрезает горошину. Наконец, будем считать, что прямая лежит на плоскости, если тонкая игла служит краем пластинки, т. е. если игла прилегает на всем протяжении к краю пластинки, не выдаваясь от нее ни в ту, ни в другую сторону. Что означают при этих условиях аксиомы? Они требуют, чтобы наши горошины, иглы и пластинки приняли такое расположение в пространстве, чтобы каждые две горошины были проколоты по крайней мере одной иглой или нанизаны на одну иглу (акс. 1); каждая игла прокалывала не менее двух горошин (акс. 2); каждые три горошины были разрезаны (или надрезаны) одной пластинкой и чтобы каждая пластинка надрезала по крайней мере одну горошину (акс. 3); если две горошины, нанизанные на одну иглу, надрезать некоторой пластинкой, то и все другие горошины, которые могут оказаться нанизанными на ту же иглу, надрезались бы той же пластинкой (акс. 4); если две пластинки надрезают одну и ту же горошину, то они надрезали бы по крайней мере еще одну горошину (акс. 5); имеются по крайней мере четыре горошины, не разрезанные (и не надрезанные) одной и той же пластинкой (акс. 6). Таким условиям должны удовлетворять наши горошины, иглы и пластинки. И такую комбинацию горошин, игл и пластинок нетрудно построить. Действительно, отделим от пачки пластинок четыре пластинки. Обрежем их по краям так, чтобы каждая из них приняла форму равностороннего треугольника определенного размера. Из груды игл возьмем 6 штук и обломаем их концы так, чтобы все иглы стали одной длины, равной стороне треугольной пластинки. Возьмем далее 4 горошины и составим следующую фигуру: из 4 пластинок составим правильный тетраэдр; в пазы между прилегающими краями пластинок вложим иглы, а на вершинах тетраэдра поместим горошины так, чтобы пластинки их надрезали, а иглы прокалывали. Для этой совокупности горошин, игл и пластинок удовлетворяются все поставленные выше требования, т. е. все наши аксиомы.

Из этого примера видно, что множество точек, прямых и плоскостей, удовлетворяющих аксиомам 1-й группы, может быть конечным. В нашем примере мы имеем всего 4 точки, 6 прямых и 4 плоскости.

Вторая группа аксиом — «аксиомы порядка» — имеет целью в отчетливой форме высказать те положения, на которые мы опираемся, когда говорим о том или ином порядке расположения точек на прямой и на плоскости. Главным понятием здесь является расположение на прямой одной точки **между** двумя другими. Логическое содержание этого понятия и устанавливается аксиомами этой группы. Она состоит из следующих аксиом:

1. *Если B лежит между A и C, то A, B и C — различные точки прямой и B лежит также между C и A.*

2. *При данных двух точках A и B на прямой линии на ней существует по крайней мере одна точка C, такая, что B лежит между A и C.*

3. *Из трех данных точек на прямой не более чем одна лежит между двумя другими.*

4. *Если в данной плоскости даны треугольник ABC и какая-либо прямая a, не проходящая ни через одну из его вершин и пересекающая отрезок AB, то она непременно пересечет или отрезок BC, или отрезок AC.*

Эти аксиомы предъявляют к нашим точкам, прямым и плоскостям требования, которым они должны удовлетворять. Та совокупность граней, ребер и вершин тетраэдра, которая удовлетворяла аксиомам 1-й группы, уже не удовлетворяет нашим аксиомам. В самом деле, на каждой нашей игле были нанизаны лишь две горошины, между тем как вторая аксиома 2-й группы требует, чтобы на прямой было не менее трех точек. А более подробный анализ показывает, что на каждой прямой должно лежать бесчисленное множество точек и что аксиомам 2-й и 1-й групп, вместе взятым, может удовлетворять лишь бесконечное множество точек, прямых и плоскостей[1].

Третья группа аксиом—**«аксиомы конгруэнтности»**— имеет целью установить основные предложения о равенстве отрезков и углов. Она содержит следующие аксиомы:

1. *На любой прямой от любой ее точки можно отложить отрезок, равный данному.*

2. *Два отрезка, равные третьему, равны между собой.*

3. *Пусть A, B, C—точки одной прямой и A_1, B_1, C_1 — также точки одной прямой и $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$; если отрезки AB и BC, а также A_1B_1 и B_1C_1 не имеют общих точек, то $AC=A_1C_1$.*

4. *От любой точки данной прямой по данную ее сторону можно построить один и только один угол, равный данному, каждый угол равен самому себе.*

---

[1] Доказательство этого факта выходит из рамок настоящей книги.

5. *Если в двух треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ стороны $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ и $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$, то $\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$.*

Следует обратить внимание на последнюю аксиому.

В учебниках геометрии эта аксиома есть следствие второго случая равенства треугольников. Но само это равенство треугольников доказывается путем наложения и, следовательно, предполагает возможность перемещения фигур; такое перемещение само составляет некоторую новую аксиому, и притом не включенную в нашу систему. Поэтому предложение 5 и приходится принимать как новую аксиому. Пользование ею заменяет применение в геометрии метода перемещения фигур.

Четвертую группу аксиом составляет одна —**«аксиома о параллельных прямых»**. При этом возможность существования параллельных доказывается без помощи новых аксиом. А потому аксиома требует лишь единственности параллельной прямой: *через данную точку в данной плоскости можно провести не более одной прямой, не пересекающей данной.* Об этой аксиоме мы уже говорили выше.

Наконец, пятую и последнюю группу аксиом составляют **«аксиомы непрерывности»**. Эта группа состоит из двух аксиом:

1. **Аксиома Архимеда.** *Если AB и CD — два произвольных отрезка, то на прямой AB существует ряд точек A_1, A_2, A_3, ..., A_n, таких, что $AA_1=A_1A_2=A_2A_3=\ldots=A_{n-1}A_n=CD$ и что B будет лежать между A_{n-1} и A_n* (рис. 158).

Рис. 158.

2. **Аксиома линейной полноты.** *Точки прямой линии образуют систему точек, которую нельзя дополнить новыми точками, которые можно было бы считать принадлежащими той же прямой, без нарушения ранее установленных аксиом*[1].

Содержание первой из этих аксиом — аксиомы Архимеда — достаточно ясно: аксиома требует, чтобы каждой точки прямой, как бы далеко она ни была намечена, можно было

[1] Точнее: без нарушения первых двух аксиом соединения, аксиом порядка, первой аксиомы конгруэнтности и аксиомы Архимеда.

§ 1. Перпендикуляр и наклонные к плоскости

1. На рисунке 1 изображен прямоугольный параллелепипед.

1) Пересекаются ли прямые DB_1 и D_1C? BB_1 и D_1C?

2) Возможно ли провести плоскость через прямые AD и B_1C_1? через DC и DB_1? через BC и AA_1?

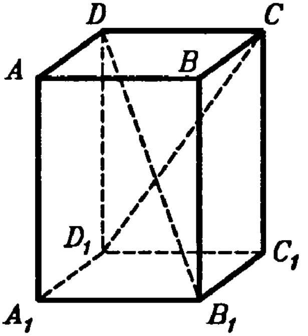


Рис. 1.

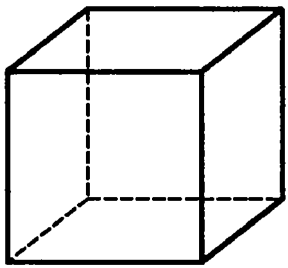


Рис. 2.

2. Провести плоскость, проходящую через концы трех ребер куба, выходящих из одной вершины. Ребро куба равно a. Вычислить площадь сечения (рис. 2).

3. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 3 см, 4 см и 7 см. Определить площадь сечения, проведенного через концы трех ребер, выходящих из одной вершины.

4. Основанием правильной призмы служит треугольник со стороной a. Высота призмы равна b. Провести плоскость через одну из сторон нижнего основания и через противоположную вершину верхнего основания. Вычислить площадь полученного сечения.

5. Через точку, взятую на прямой, провести плоскость, перпендикулярную к этой прямой.

6. Через точку, взятую вне прямой, провести плоскость, перпендикулярную к этой прямой.

7. 1) Из точки A, данной на расстоянии 6 см от плоскости, проведена к ней наклонная AB, равная 10 см. Найти ее проекцию BC на данную плоскость (рис. 3).

2) Из некоторой точки проведены к данной плоскости перпендикуляр, равный a, и наклонная; угол между ними равен 45°. Найти длину наклонной.

8. Определить на данной плоскости геометрическое место точек, удаленных на данное расстояние от точки, лежащей вне плоскости.

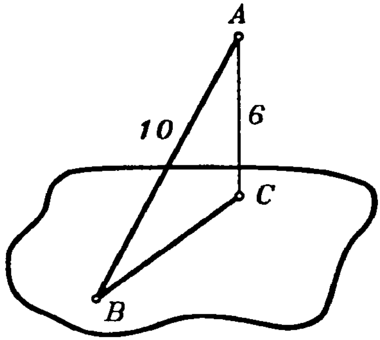


Рис. 3.

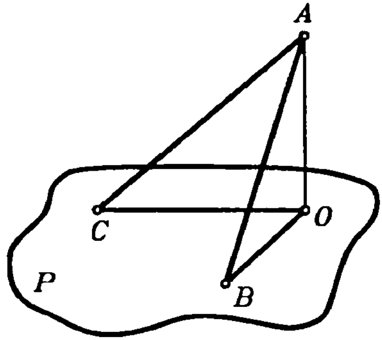


Рис. 4.

9. Из центра круга проведен перпендикуляр к его плоскости. Определить расстояние от конца этого перпендикуляра до точек окружности, если длина перпендикуляра равна a, площадь круга равна Q.

10. Определить геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от всех точек данной окружности или от трех точек, не лежащих на одной прямой.

11. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек.

12. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро $A_1A=56$ см, а стороны основания $AB=33$ см и $AD=40$ см. Определить площадь сечения, проведенного через ребра AD и B_1C_1.

13. Точка O — центр квадрата со стороной a; OA — отрезок, перпендикулярный к плоскости квадрата и равный b. Найти расстояние от точки A до вершин квадрата.

14. Из точки M, отстоящей от плоскости P на расстоянии $d=4$, проведены к этой плоскости наклонные MA, MB, MC под углами в 30°, 45°, 60° к прямой OM, перпендикулярной к P. Определить длину наклонных MA, MB и MC.

15. Из некоторой точки M проведены к плоскости P три наклонные: $MA=MB=MC=l$. Показать, что точки A, B и C (основания наклонных на плоскости P) лежат на одной окружности, центром которой служит точка O — проекция точки M.

16. Дана плоскость; из некоторой точки пространства проведены к этой плоскости две наклонные длиной 20 см и 15 см; проекция первой из них на плоскость равна 16 см; найти проекцию второй наклонной.

17. Из некоторой точки пространства проведены к данной плоскости перпендикуляр, равный 6 см, и наклонная длиной 9 см. Найти проекцию перпендикуляра на наклонную.

18. Сторона равностороннего треугольника равна 3 см. Определить расстояние от его плоскости до точки, которая отстоит от каждой из его вершин на 2 см.

19. 1) Из некоторой точки A (рис. 4) проведены к данной плоскости P перпендикуляр $OA=1$ см и две равные наклонные BA и AC, которые образуют с перпендикуляром $\angle BAO=\angle CAO=60°$, а между собой $\angle CAB=90°$. Найти расстояние BC между основаниями наклонных.

2) Из данной точки проведены к данной плоскости две наклонные, равные каждая 2 см; угол между ними равен 60°, а угол между их проекциями — прямой. Найти расстояние данной точки от плоскости.

3) Из некоторой точки проведены к данной плоскости две равные наклонные; угол между ними равен 60°, угол между их проекциями — прямой. Найти угол между каждой наклонной и ее проекцией.

20. В равнобедренном треугольнике основание и высота содержат по 4 см. Данная точка находится на расстоянии 6 см от плоскости треугольника и на равном расстоянии от его вершин. Найти это расстояние.

21. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием $b=6$ см и боковой стороной $a=5$ см. К плоскости треугольника в центре O вписанного в него круга проведен перпендикуляр $OK=2$ см. Найти расстояние точки K от сторон треугольника и от вершины B.

22. 1) В треугольнике ABC угол B прямой и катет $BC=a$. Из вершины A проведен к плоскости треугольника перпендикуляр AD так, что расстояние между точками D и C равно f. Определить расстояние от точки D до катета BC.

2) Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 15 м и 20 м. Из вершины прямого угла C проведен к плоскости этого треугольника перпендикуляр $CD=35$ м. Найти расстояние от точки D до гипотенузы AB.

3) Стороны треугольника: 10 см, 17 см и 21 см. Из вершины большего угла этого треугольника проведен перпендикуляр к его плоскости, равный 15 см. Определить расстояние от его концов до большей стороны.

23. В треугольнике ABC угол C прямой; CD — перпендикуляр к плоскости этого треугольника. Точка D соединена с A и B. Определить площадь треугольника ADB, если дано: $CA=3$ дм, $BC=2$ дм и $CD=1$ дм.

24. В вершине A прямоугольника $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр AK, конец K которого отстоит от других вершин на расстоянии 6 см, 7 см и 9 см. Найти длину перпендикуляра AK.

25. A и B — точки на плоскости M; AB и BD — перпендикуляры к этой плоскости, причем $AC=a$ и $BD=b$. Доказать, что линии AD и BC пересекаются, и определить расстояние от точки их пересечения до плоскости M.

26. Точка M, лежащая вне плоскости данного прямого угла, удалена от его вершины B на a, а от каждой из сторон — на b. Чему равно расстояние MO точки M от плоскости прямого угла (рис. 5)?

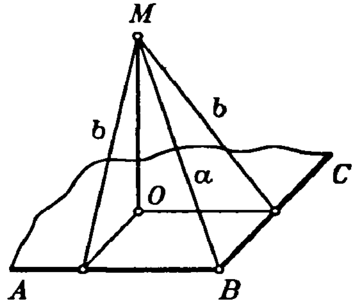


Рис. 5.

27. На плоскости M даны две параллельные прямые AB и CD, расстояние между которыми равно a. Вне плоскости M дана точка S, удаленная от AB на b и от CD на c. Определить расстояние от точки S до плоскости M, если известно, что 1) $a=66$, $b=c=65$; 2) $a=6$, $b=25$, $c=29$.

28. 1) Если на вершины угла, лежащего на плоскости, провести наклонную к плоскости так, чтобы она составляла со сторонами угла равные углы, то проекция этой наклонной будет служить биссектрисой данного угла. Доказать.

2) Из вершины A треугольника ABC проведена вне его плоскости прямая AD, образующая со сторонами AB и AC равные острые углы. На какие части проекция прямой AD на плоскость треугольника делит сторону BC, если $AB=51$ м, $AC=34$ м и $BC=30$ м?

§ 2. Угол прямой линии с плоскостью

1. Ребра основания прямоугольного параллелепипеда имеют длину 4 см и 3 см; высота параллелепипеда равна 5 см. Найти его диагональ и угол диагонали с плоскостью основания.

2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью его основания угол в 45°. Стороны основа-

ния равны 120 см и 209 см. Определить высоту параллелепипеда.

3. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h; апофема наклонена к плоскости основания под углом в $60°$. Найти боковые ребра.

4. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно b и образует с основанием пирамиды угол в $30°$. Найти сторону основания.

5. Наклонная равна a. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если наклонная составляет с плоскостью проекции угол, равный: 1) $45°$; 2) $60°$; 3) $30°$?

6. Точка отстоит от плоскости на h. Найти длину наклонных, проведенных из нее под следующими углами к плоскости: 1) $30°$; 2) $45°$; 3) $60°$.

7. Отрезок длиной 10 см пересекает плоскость; концы его находятся на расстоянии 3 см и 2 см от плоскости. Найти угол между данным отрезком и плоскостью.

8. Под каким углом к плоскости надо провести наклонный отрезок, чтобы его проекция была вдвое меньше самого отрезка?

9. 1) Из точки, отстоящей от плоскости на расстоянии a, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в $45°$, а между собой угол в $60°$. Определить расстояние между концами наклонных.

2) Из точки, отстоящей от плоскости на a, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в $45°$ и $30°$, а между собой прямой угол. Определить расстояние между концами наклонных.

10. Из точки, отстоящей от плоскости на a, проведены две наклонные под углом в $30°$ к плоскости, причем их проекции составляют между собой угол в $120°$. Определить расстояние между концами наклонных.

11. В плоскости M находится прямая AB. Из точки B проведены по одну сторону плоскости перпендикулярные к AB прямые BC и BD, отклоненные от плоскости M на $50°$ и $15°$. Определить угол CBD.

12. Если в равнобедренном прямоугольном треугольнике один катет находится на плоскости M, а другой катет образует с ней угол в $45°$, то гипотенуза образует с плоскостью M угол в $30°$. Доказать это.

13. Если наклонная AB составляет с плоскостью M угол в $45°$, а прямая AC, лежащая в плоскости M, составляет угол в $45°$ с проекцией наклонной AB, то $\angle BAC=60°$. Доказать это.

14. Если в правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания, то боковые ребра составляют с плоскостью основания угол в $60°$. Доказать.

§ 3. Параллельные прямые и плоскости

Параллельные прямые

1. 1) A и B — точки вне плоскости M; AC и BD — перпендикуляры на эту плоскость; AC=3 м, BD=2 м и CD=24 дм. Определить расстояние между точками A и B.

2) На верхние концы двух вертикально стоящих столбов, удаленных один от другого (от поверхности земли) на 3,4 м, опирается концами перекладина. Один из столбов возвышается над землей на 5,8 м, другой — на 3,9 м. Определить длину перекладины.

2. 1) Концы данного отрезка длиной 125 см отстоят от плоскости на 100 см и 56 см. Найти длину его проекции.

2) Телефонная проволока длиной 15 м протянута от телефонного столба, где она прикреплена на высоте 8 м от поверхности земли, к дому, где она прикреплена на высоте 20 м. Определить расстояние между домом и столбом, предполагая, что проволока не провисает.

3. Из точки A плоскости M проведена наклонная прямая линия, и на ней взяты точки B и C, причем AB=8 см и AC=14 см. Точка B удалена от плоскости M на 6 см. Найти расстояние точки C от плоскости M.

4. Отрезок длиной 10 см пересекает плоскость, концы его удалены от плоскости на расстояние 5 см и 3 см. Найти длину проекции отрезка на плоскость.

5. Отрезок пересекает плоскость; концы его отстоят от плоскости на расстоянии 8 см и 2 см. Найти расстояние середины этого отрезка от плоскости.

6. Концы данного отрезка, не пересекающего плоскость, удалены от нее на 30 см и 50 см. Как удалена от плоскости точка, делящая данный отрезок в отношении 3:7? (Два случая.)

7. Правильный треугольник спроектирован на плоскость; вершины его отстоят от плоскости на расстоянии 10 дм, 15 дм и 17 дм. Найти расстояние его центра от плоскости проекций.

8. Данный отрезок AB параллелен плоскости и равен a. Отрезок BA_1, соединяющий конец B с проекцией A_1 другого конца, составляет с плоскостью угол в 60°. Определить длину отрезка BA_1.

9. Из точек A и B плоскости M проведены вне ее параллельные между собой отрезки: $AC=8$ см и $BD=6$ см. Прямая, проведенная через C и D, пересекает плоскость M (почему?) в точке E. Отрезок $AB=4$ см. Определить расстояние BE.

10. AB — отрезок на плоскости M, равный a, AC и BD — отрезки вне плоскости M, равные b, причем отрезок AC перпендикулярен к плоскости M, а BD, будучи перпендикулярен к AB, составляет с плоскостью M угол в 30°. Определить расстояние CD.

Прямая, параллельная плоскости

11. 1) Через данную точку провести прямую, параллельную данной плоскости.

2) Через данную точку провести плоскость, параллельную данной прямой. Сколько возможно провести таких плоскостей?

3) Даны плоскость и параллельная ей прямая. Через точку, взятую на плоскости, провести в этой же плоскости прямую, параллельную данной прямой.

12. Провести через данную точку отрезок a так, чтобы его проекция на данную плоскость была равна самому отрезку.

13. По стороне основания a и боковому ребру b правильной треугольной призмы определить площадь сечения, проведенного через боковое ребро и ось призмы.

14. Из внешней точки A приведен к плоскости M отрезок AB. Он разделен точкой C в отношении 3:4 (от A к B), и через нее проведен параллельно плоскости M отрезок $CD=12$ см. Через точку D проведен к плоскости M отрезок ADE. Определить расстояние между точками B и E.

15. BCD — отрезок, параллельный плоскости M; ABE, ADF и ACG — прямые, проведенные из внешней точки A к плоскости M и пересекающие ее в точках E, F, G. Определить расстояние между точками E и G, если $BC=a$, $AD=b$, $DF=c$.

16. AB и CD — параллельные отрезки, лежащие в двух пересекающихся плоскостях; AE и DF — перпендикуляры на линию пересечения плоскостей. Расстояние

AD=5 см и отрезок EF=4 см. Найти расстояние между прямыми AB и CD.

17. Основание DA трапеции $ABCD$ (рис. 6) находится на плоскости P, а основание CB отстоит от нее на 5 см. Найти расстояние от плоскости P точки M пересечения диагоналей этой трапеции, если $DA : CD = 7:3$.

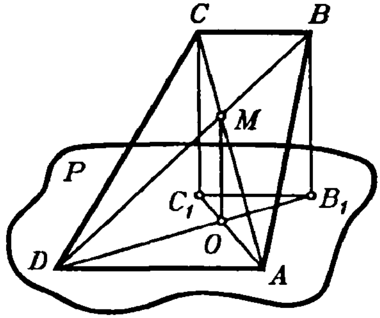


Рис. 6.

18. В параллелограмме $ABCD$ вершины A и D находятся на плоскости M, а B и C — вне ее. Сторона AD=10 см, сторона AB=15 см, проекции диагоналей AC и BD на плоскость M соответственно равны 13,5 см и 10,5 см. Определить диагонали.

19. Через одну из сторон ромба проведена плоскость на расстоянии 4 см от противолежащей стороны. Проекции диагоналей ромба на эту плоскость равны 8 см и 2 см. Найти проекции сторон.

20. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость параллельно гипотенузе на расстоянии 1 дм от нее (рис. 7). Проекции катетов на эту плоскость равны 3 дм и 5 дм. Определить проекцию гипотенузы на эту же плоскость.

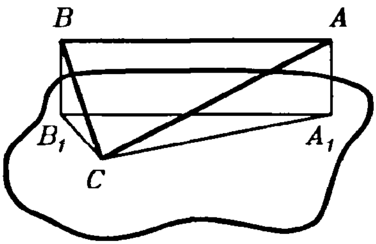


Рис. 7.

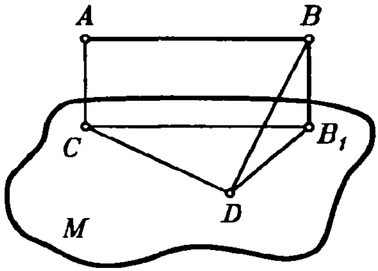


Рис. 8.

21. AB и CD — две параллельные прямые, лежащие в плоскости M на расстоянии 28 см одна от другой; EF — внешняя прямая, параллельная AB и удаленная от AB на 17 см, а от плоскости M на 15 см. Найти расстояние между EF и CD. (Два случая.)

22. Из концов отрезка AB, параллельного плоскости M, проведены к ней перпендикуляр AC и наклонная $BD \perp AB$. Определить расстояние CD, если $AB=a$, $AC=b$ и $BD=c$ (рис. 8).

23. AB — отрезок, параллельный плоскости M; AC и BD — две равные наклонные к плоскости M, проведенные перпендикулярно к отрезку AB и разных направлениях от него. Отрезок AB, равный 2 см, отстоит от плоскости M на 7 см, а отрезки AC и BD содержат по 8 см. Определить расстояние CD.

24. В правильной четырехугольной пирамиде провести плоскость через диагональ основания параллельно боковому ребру. Сторона основания равна a, а боковое ребро равно b. Определить площадь полученного сечения.

25. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания a и боковое ребро равно b. Провести в этой пирамиде плоскость через середины ребер AB и BC параллельно ребру SB. Определить площадь полученного сечения (рис. 9).

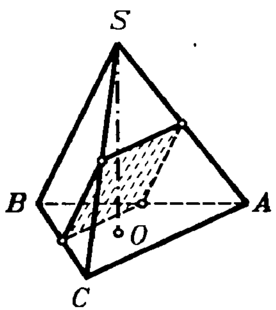


Рис. 9.

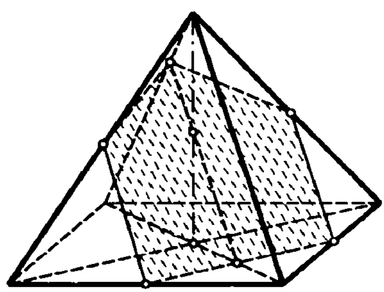


Рис. 10.

26. Каждое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно a. Провести сечение через середины двух смежных сторон основания и середину высоты (рис. 10) и найти его площадь.

Параллельные плоскости

27. Через данную точку провести плоскость, параллельную данной плоскости.

28. В кубе с ребром a провести плоскость, которая проходила бы через середины двух смежных сторон верхнего основания и через центр нижнего. Вычислить периметр сечения.

29. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно 8 дм. Отрезок длиной 10 дм своими концами упирается в эти плоскости. Определить проекции отрезка на каждую плоскость.

30. 1) Плоскости M и P параллельны. Из точек A и B плоскости M проведены к плоскости P наклонные: $AC=37$ см и $BD=125$ см. Проекция наклонной AC на одну из плоскостей равна 12 см. Чему равна проекция наклонной BD?

2) Отрезки двух прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны 51 см и 53 см, а их проекции на одну из этих плоскостей относятся как 6:7. Определить расстояние между данными плоскостями.

31. Между двумя параллельными плоскостями заключены перпендикуляр длиной 4 м и наклонная, равная 6 м. Расстояния между их концами в каждой плоскости равны по 3 м. Найти расстояние между серединами перпендикуляра и наклонной.

32. Два отрезка, сумма которых равна c, упираются своими концами в две параллельные плоскости; проекции их a и b. Найти отрезки.

33. Между двумя параллельными плоскостями P и Q проведены отрезки AC и BD (точки A и B лежат в плоскости P); $AC=13$ см; $BD=15$ см; сумма длин проекций AC и BD на одну из данных плоскостей равна 14 см. Найти длины этих проекций и расстояние между плоскостями.

34. 1) Два прямых угла в пространстве расположены так, что стороны их соответственно параллельны, одинаково направлены и перпендикулярны к отрезку, соединяющему их вершины. Длина этого отрезка равна a. На стороне одного угла отложен от его вершины отрезок b, а на непараллельной ей стороне другого угла отложен отрезок c. Определить расстояние между концами этих отрезков.

2) В предыдущей задаче прямые углы заменить углами в 60° и взять $a=24$, $b=5$ и $c=8$.

35. Вершины равностороннего треугольника со стороной a находятся вне плоскости M на одинаковом от нее расстоянии d. Из центра треугольника проведен перпендикуляр к его плоскости, равный h и направленный в сторону, противоположную плоскости M. Из конца этого перпендикуляра проведены прямые через вершины треугольника до пересечения с плоскостью M. Определить отрезки этих прямых между вершинами треугольника и плоскостью M и расстояния между их концами.

36. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ середины K и L противолежащих ребер AA_1 и CC_1 соединены отрезками прямых с вершинами куба B и D_1. Найти стороны и диагонали получившегося четырехугольника $KBLD_1$ и определить его вид. Ребро куба равно a.

37. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соединить по порядку середины следующих ребер: AA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CD, DA и AA_1. Доказать, что полученная фигура есть правильный шестиугольник, и определить ее площадь по ребру куба a.

38. 1) Основанием правильной призмы служит шестиугольник со стороной 3 дм; высота призмы равна 13 дм. Определить площадь сечения, проведенного через две противолежащие стороны верхнего и нижнего оснований призмы.

2) Правильная шестиугольная призма, у которой боковые грани — квадраты, пересечена плоскостью, проходящей через стороны нижнего основания и противолежащую ей сторону верхнего основания. Сторона основания равна a. Определить площадь полученного сечения.

§ 4. Двугранные углы и перпендикулярные плоскости

1. 1) На одной грани двугранного угла даны две точки A и B (рис. 11); из них опущены перпендикуляры на другую грань: $AC=1$ дм и $BD=2$ дм, и на ребро: $AE=3$ дм и BF. Найти BF.

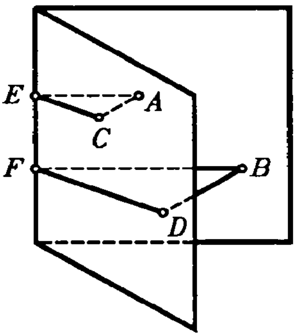


Рис. 11.

2) На одной грани двугранного угла взяты две точки, отстоящие от ребра на 51 см и 34 см. Расстояние первой точки от другой грани равно 15 см. Определить расстояние второй точки.

2. Двугранный угол равен 45°. На одной грани дана точка на расстоянии a от другой грани. Найти расстояние этой точки от ребра.

3. Если равнобедренный прямоугольный треугольник ABC перегнуть по высоте BD так, чтобы плоскости ABD и CBD образовали прямой двугранный угол, то линии DA и DC сделаются взаимно перпендикулярными, а BA и BC составят угол в 60°. Доказать.

4. Определить величину двугранного угла, если точка, взятая на одной из граней, отстоит от ребра вдвое далее, чем от другой грани.

5. 1) Из точки, взятой внутри двугранного угла, опущен перпендикуляр на ребро; он образует с гранями углы в $38°24'$ и $71°36'$. Вычислить величину двугранного угла.

2) Точка, взятая внутри двугранного угла в $60°$, удалена от обеих граней на a. Найти ее расстояние от ребра.

6. 1) A и B — точки на ребре прямого двугранного угла; AC и BD — перпендикуляры к ребру, проведенные в разных гранях. Определить расстояние CD, если $AB=6$ см, $AC=3$ см и $BD=2$ см.

2) В предыдущей задаче прямой двугранный угол заменить углом в $120°$ и взять: а) $AB=AC=BD=a$; б) $AB=3$, $AC=2$, $BD=1$.

7. Треугольник ABC, прямоугольный при C, опирается катетом AC на плоскость M, образуя с ней двугранный угол в $45°$. Катет $AC=2$ м, а гипотенуза AB относится к катету BC как 3:1. Определить расстояние от вершины B до плоскости M.

8. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник ABC, у которого две стороны AB и BC содержат по 7 см, а третья $AC=2$ см. Через сторону AC проведена плоскость под углом в $30°$ к плоскости основания, пересекающая противолежащее боковое ребро в точке D. Определить площадь полученного сечения и отрезок BD бокового ребра.

9. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание, а плоскости их отклонены на $60°$. Общее основание равно 16 см; боковая сторона одного треугольника равна 17 см, а боковые стороны другого взаимно перпендикулярны. Определить расстояние между вершинами треугольников.

10. 1) Катеты прямоугольного треугольника равны 7 см и 24 см. Определить расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол в $30°$ с плоскостью треугольника.

2) Дан треугольник ABC со сторонами: $AB=9$, $BC=6$ и $AC=5$. Через сторону AC проходит плоскость M, составляющая с плоскостью треугольника угол в $45°$. Найти расстояние между плоскостью M и вершиной B.

11. Прямая AB параллельна плоскости M и отстоит от нее на a; через AB проходит плоскость P, образующая с плоскостью M угол в $45°$; в плоскости P проведена прямая линия под углом в 45° к AB. Определить ее отрезок между AB и плоскостью M.

12. AB и CB — параллельные прямые, лежащие в двух пересекающихся плоскостях, образующих угол в 60°. Точки A и D удалены от линии пересечения плоскостей на 8 см и 6,3 см. Найти расстояние между AB и CD.

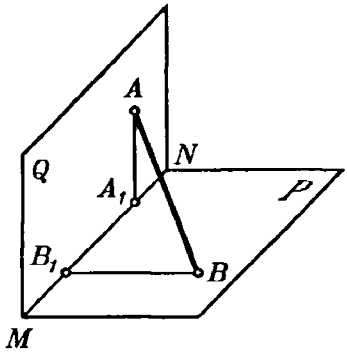


Рис. 12.

13. Отрезок AB упирается своими концами в грани прямого двугранного угла $PMNQ$ (рис. 12); концы отрезка находятся на одинаковых расстояниях от ребра MN двугранного угла. Найти отношение углов, под которыми отрезок наклонен к граням.

14. Найти геометрическое место прямых, перпендикулярных к данной плоскости и пересекающих прямую, данную на той же плоскости.

15. 1) Через данную точку провести плоскость, перпендикулярную к другой плоскости.

2) Через данную прямую провести плоскость, перпендикулярную к другой плоскости. Сколько таких плоскостей можно провести?

16. AB — прямая пересечения двух взаимно перпендикулярных плоскостей M и P; CD — отрезок в плоскости M, проведенный параллельно AB на расстоянии 60 см от нее; E — точка в плоскости P на расстоянии 91 см от AB. Найти расстояние от E до CD.

17. 1) Отрезок AB соединяет точки A и B, лежащие на двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Перпендикуляры, опущенные из точек A и B на линию пересечения плоскостей, соответственно равны a и b, а расстояние между их основаниями равно c. Определить длину отрезка AB и длины его проекций на данные плоскости.

2) Данный отрезок имеет концы на двух взаимно перпендикулярных плоскостях и составляет с одной из них угол в 45°, а с другой — угол в 30°; длина этого отрезка равна a.

Определить часть линии пересечения плоскостей, заключенную между перпендикулярами, опущенными на нее из концов данного отрезка.

18. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды равно 8 дм, сторона основания равна 4 дм. Через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, перпендикулярная к нему. Найти площадь сечения.

19. В правильной четырехугольной пирамиде провести плоскость через сторону основания перпендикулярно к противолежащей боковой грани. Сторона основания a=30 см, а высота пирамиды h=20 см. Определить площадь полученного сечения.

§ 5. Многогранные углы

1. а) Можно ли составить трехгранный угол с такими плоскими углами: 1) 130°, 85° и 36°; 2) 100°, 70° и 40°; 3) 160°, 130° и 80°; 4) 82°, 56° и 26°; 5) 150°, 120° и 90°?

б) Можно ли составить выпуклый четырехгранный угол из таких плоских углов: 1) 40°, 70°, 100° и 150°; 2) 150°, 30°, 70° и 40°; 3) 130°, 50°, 30° и 70°?

2. Если в правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен 60°, то противолежащие боковые ребра взаимно перпендикулярны. Доказать.

3. Из общей внешней точки проведены к плоскости две наклонные, из которых одна составляет с плоскостью угол в 70°, а другая — в 15°. Чему может быть равен угол между этими наклонными?

4. Каждый плоский угол трехгранного угла равен 60°; на одном из ребер отложен от вершины отрезок, равный 3, и из конца его опущен перпендикуляр на противолежащую грань. Найти длину перпендикуляра.

5. В трехгранном угле $SABC$ дано: $\angle BSC$=90°, $\angle ASB$=$\angle ASC$=60° и SA=a. Требуется:

1) найти расстояние от точки A до плоскости BSC;

2) доказать, что ребро SA составляет с плоскостью BSC угол в 45°.

6. Если в трехгранном угле (рис. 13) один плоский угол BSC прямой, а два других угла ASB и ASC содержат по 60°, то плоскость BAC, отсекающая от ребер три равных отрезка, перпендикулярна к плоскости прямого угла. Доказать.

7. В трехгранном угле два плоских угла по 45°, двугранный угол между ними прямой. Найти третий плоский угол.

8. В трехгранном угле два плоских угла по 45°, третий плоский угол 60°. Найти двугранный угол, противолежащий третьему плоскому углу.

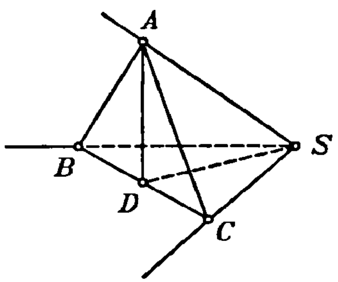


Рис. 13.

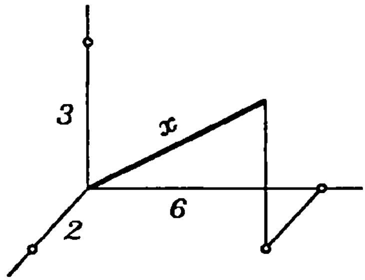


Рис. 14.

9. В трехгранном угле два плоских угла по 60°, третий прямой. Найти угол между плоскостью прямого угла и противолежащим ребром.

10. В трехгранном угле ребра взаимно перпендикулярны. Внутри него из вершины проведен отрезок, проекция которого на каждое из ребер равна 1. Найти его проекции на грани. Сделать чертеж.

11. В трехгранном угле все плоские углы прямые. Внутри него дана точка на расстоянии 1 дм, 2 дм и 2 дм от его граней. Найти расстояние данной точки от вершины угла.

12. В трехгранном угле все плоские углы прямые. Внутри него из вершины проведен отрезок x, проекции которого на ребра 2 см, 3 см и 6 см. Найти длину этого отрезка (рис. 14).

§ 6. Правильные многогранники

1. Ребро правильного октаэдра $a=1$ м (рис. 15). Определить расстояние EF между двумя противолежащими вершинами октаэдра (ось октаэдра).

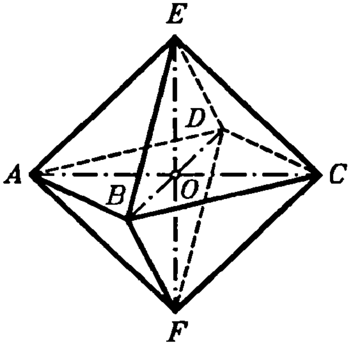


Рис. 15.

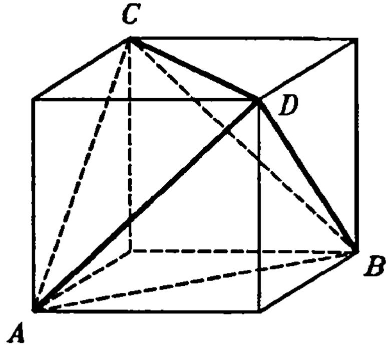


Рис. 16.

2. В кубе (рис. 16) из одной вершины (D) проведены диагонали граней DA, DB и DC и концы их соединены прямыми. Доказать, что многогранник $DABC$, образованный четырьмя плоскостями, проходящими через эти прямые, — правильный тетраэдр.

3. Ребро куба равно a. Вычислить поверхность вписанного правильного октаэдра (рис. 17). Найти ее отношение к поверхности вписанного в тот же куб правильного тетраэдра.

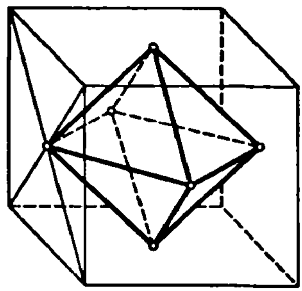


Рис. 17.

4. 1) Сколько плоскостей симметрии можно провести через одну вершину правильного тетраэдра?

2) Сколько плоскостей симметрии вообще можно провести в правильном тетраэдре?

5. Соединить прямыми центры каждых двух смежных граней правильного октаэдра и через смежные прямые провести плоскости. Доказать, что полученный таким образом шестигранник — куб, и вычислить его поверхность, если ребро октаэдра равно a.

6. 1) Ребро правильного октаэдра равно a; найти расстояние между центрами двух соседних граней.

2) Ребро правильного октаэдра равно 3; найти расстояние между противолежащими параллельными гранями.

7. В правильный тетраэдр вписана правильная треугольная призма с равными ребрами так, что вершины одного ее основания находятся на боковых ребрах тетраэдра, а другого — в плоскости его основания. Ребро тетраэдра равно a. Определить ребро призмы.

8. В правильный октаэдр вписан куб так, что его вершины находятся на ребрах октаэдра. Ребро октаэдра равно a. Определить ребро куба.

§ 7. Параллелепипеды и призмы

Диагонали параллелепипеда

1. Определить диагонали прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: 1) 1; 2; 2; 2) 2; 3; 6; 3) 6; 6; 7; 4) 8; 9; 12; 5) 12; 16; 21.

2. 1) Боковое ребро прямого параллелепипеда равно 5 м, стороны основания равны 6 м и 8 м и одна из диагоналей основания равна 12 м. Определить диагонали параллелепипеда.

2) В предыдущей задаче заменить данные числа по порядку следующими: 9 см, 7 см, 11 см и 14 см.

3. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 5 см, а одна из диагоналей основания 4 см. Меньшая диагональ параллелепипеда с плоскостью основания составляет угол в 60°. Определить диагонали параллелепипеда.

4. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 2 см и 5 см; расстояние между меньшими из них 4 см; боковое ребро равно $2\sqrt{2}$ см. Определить диагонали параллелепипеда.

5. Определить диагонали прямого параллелепипеда, у которого каждое ребро равно a, а угол основания равен 60°.

6. 1) В прямом параллелепипеде стороны основания длиной 3 см и 4 см составляют угол 60°, а боковое ребро есть средняя пропорциональная между сторонами основания. Определить диагонали этого параллелепипеда.

2) В прямом параллелепипеде ребра, выходящие из одной вершины, равны 1 м, 2 м и 3 м, причем два мень-

ших образуют угол в 60°. Определить диагонали этого параллелепипеда.

7. Ребро куба равно a. Определить расстояние от вершины куба до его диагонали.

8. Ребро куба равно a. Найти кратчайшее расстояние от диагонали до пересекающего ее ребра.

9. Доказать, что во всяком параллелепипеде сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех ребер.

Сечение параллелепипеда

10. 1) В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 7 дм и 24 дм, а высота параллелепипеда равна 8 дм. Определить площадь диагонального сечения.

2) В прямоугольном параллелепипеде боковое ребро равно 5 см, площадь диагонального сечения 205 см^2 и площадь основания 306 см^2. Определить стороны основания.

11. В прямом параллелепипеде боковое ребро равно 1 м, стороны основания равны 23 дм и 11 дм, а диагонали основания относятся как 2:3. Определить площади диагональных сечений.

12. В прямом параллелепипеде стороны основания 17 см и 28 см; одна из диагоналей основания равна 25 см; сумма площадей диагональных сечений относится к площади основания, как 16:15. Определить площади диагональных сечений.

13. В прямом параллелепипеде с основанием $ABCD$ дано: AB=29 см, AD=36 см, BD=25 см и боковое ребро равно 48 см. Определить площадь сечения AB_1C_1D.

14. В прямом параллелепипеде острый угол основания содержит $\alpha°$; одна из сторон основания равна a; сечение, проведенное через эту сторону и противоположное ей ребро, имеет площадь Q и образует с плоскостью основания угол $90°-\alpha°$. Определить другую сторону основания.

15. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$, в котором $\angle BAD$=60°; боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом в 60°, а плоскость AA_1C_1C перпендикулярна к плоскости основания. Доказать, что площади сечений BB_1D_1D и AA_1C_1C относятся как 2:3.

Призмы

16. (*Устно.*) Сколько диагоналей можно провести в четырехугольной призме? в пятиугольной? в треугольной? в n-угольной?

17. (*Устно.*) Сколько плоских углов в пятиугольной призме? сколько двугранных? сколько трехгранных?

18. (*Устно.*) 1) Какие фигуры представляют собой диагональные сечения параллелепипеда? 2) Сколько диагональных сечений можно провести в пятиугольной призме через одно ее ребро? 3) На сколько частей эти плоскости (вопрос 2) делят данную призму? 4) Какое тело представляет каждая из этих частей (вопросы 2 и 3)?

19. (*Устно.*) Сколько диагональных сечений можно провести в n-угольной призме через все ее боковые ребра?

Правильная призма

20. 1) В правильной четырехугольной призме площадь основания равна 144 см^2, а высота равна 14 см. Определить диагональ этой призмы.

2) Определить диагональ правильной четырехугольной призмы, если диагональ основания равна 8 см, а диагональ боковой грани равна 7 см.

21. Если в правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали B_1D и D_1B взаимно перпендикулярны, то диагонали A_1C и B_1D образуют угол в 60°. Доказать.

22. В правильной четырехугольной призме площадь боковой грани равна Q. Определить площадь диагонального сечения.

23. Основанием призмы служит правильный шестиугольник со стороной a; боковые грани — квадраты. Определить диагонали этой призмы и площади ее диагональных сечений.

24. Внутри правильной шестиугольной призмы, у которой боковые грани — квадраты, провести плоскость через сторону нижнего основания и противолежащую ей сторону верхнего основания. Сторона основания равна a. Определить площадь сечения.

25. Каждое ребро правильной треугольной призмы a=3 м. Через сторону основания и середину оси проведена плоскость. Найти площадь сечения.

26. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 15; высота равна 20. Найти кратчайшее расстояние от стороны основания до непересекающей ее диагонали призмы.

27. Квадрат с проведенной в нем диагональю свернут в виде боковой поверхности правильной четырехугольной призмы, и, таким образом, диагональ квадрата обратилась в ломаную линию (не плоскую). Определить угол между смежными ее отрезками (рис. 18).

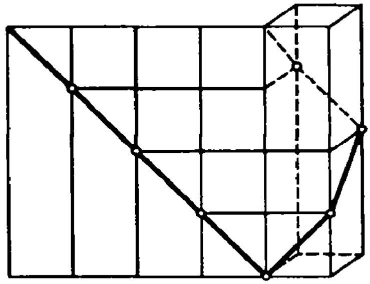


Рис. 18.

Прямая призма

28. В прямой треугольной призме через одну из сторон основания проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро и отклоненная от плоскости основания на 45°. Площадь основания равна Q. Определить площадь сечения.

29. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10 см, 17 см и 21 см, а высота призмы 18 см. Определить площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания.

30. Основанием прямой призмы служит ромб; диагонали призмы равны 8 см и 5 см; высота 2 см. Найти сторону основания.

Наклонная призма

31. Боковое ребро l=15 см наклонной призмы наклонено к плоскости основания под углом α=30°. Определить высоту призмы.

32. В треугольной призме (наклонной) из двугранных углов между боковыми гранями два содержат: 20°43′28″ и 105°27′32″. Чему равен третий угол?

33. В треугольной призме (наклонной) расстояния между боковыми ребрами 37 см, 13 см и 40 см. Найти расстояние между большей боковой гранью и противолежащим боковым ребром.

§ 8. Поверхность параллелепипеда и призмы

Куб и прямоугольный параллелепипед

1. (*Устно.*) Поверхность куба равна 24 м^2. Найти его ребро.

2. а) Определить ребро куба, если его поверхность равна: 1) 5046 см^2; 2) $793\frac{1}{2}$ дм^2; 3) 47 м^2.

б) Определить поверхность куба: 1) по его диагонали l; 2) по данной площади Q его диагонального сечения.

3. 1) Определить поверхность прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: a=10 см, b=22 см и c=16 см.

2) Ребра прямоугольного параллелепипеда относятся как 3:7:8, а поверхность содержит 808 см^2. Определить ребра.

4. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания относятся как 7:24, а площадь диагонального сечения равна 50 дм^2. Определить боковую поверхность.

5. Определить боковую поверхность прямоугольного параллелепипеда, если его высота h, площадь основания Q и площадь диагонального сечения M.

Прямой параллелепипед

6. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 6 м и 8 м и образуют угол в 30°; боковое ребро равно 5 м. Определить полную поверхность этого параллелепипеда.

7. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 10 см и 17 см; одна из диагоналей основания равна 21 см; бóльшая диагональ параллелепипеда равна 29 см. Определить полную поверхность параллелепипеда.

8. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 8 см; угол между ними содержит 60°. Боковая поверхность параллелепипеда равна 220 см^2. Определить полную поверхность и площадь меньшего диагонального сечения.

9. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с диагоналями в 6 см и 8 см; диагональ боковой грани равна 13 см. Определить полную поверхность этого параллелепипеда.

10. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, а площади диагональных сечений M и N. Определить боковую поверхность параллелепипеда.

Правильная призма

11. (*Устно.*) В прямой треугольной призме все ребра равны. Боковая поверхность равна 12 м^2. Найти высоту.

12. (*Устно.*) Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы равна 32 м^2, а полная поверхность 40 м^2. Найти высоту.

13. По стороне основания a и боковому ребру b определить полную поверхность правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

14. Определить полную поверхность правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ равна 14 см, а диагональ боковой грани равна 10 см.

15. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 9 см, а полная поверхность ее равна 144 см^2. Определить сторону основания и боковое ребро.

16. Плоскость, проходящая через сторону основания правильной треугольной призмы и середину противолежащего ребра, образует с основанием угол в 45°. Сторона основания l. Определить боковую поверхность призмы.

Прямая призма

17. Определить полную поверхность прямой треугольной призмы, если ее высота равна 50 см, а стороны основания: 40 см, 13 см, 37 см.

18. В прямой треугольной призме стороны основания равны 25 дм, 29 дм и 36 дм, а полная поверхность содержит 1620 дм^2. Определить боковую поверхность призмы.

19. В прямой треугольной призме стороны основания относятся как 17:10:9, а боковое ребро равно 16 см; полная поверхность этой призмы содержит 1440 см^2. Определить стороны основания.

20. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона относится к основанию как 5:6. Высота призмы равна высоте основания, опущенной на его боковую сторону; полная поверхность содержит 2520 м^2. Определить ребра призмы.

21. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция $ABCD$ со сторонами $AB=CD=13$ см, $BC=11$ см и $AD=21$ см; площадь ее диагонального сечения равна 180 см^2.

Определить полную поверхность этой призмы и площадь сечения AB_1C_1D.

22. Площадь наибольшего диагонального сечения правильной шестиугольной призмы равна 1 м^2. Найти боковую поверхность.

23. Основанием прямой призмы служит правильный десятиугольник, вписанный в круг радиуса R. Боковое ребро призмы равно диагонали основания, проведенной из первой вершины к четвертой. Определить боковую поверхность этой призмы.

Наклонные призмы и параллелепипеды

24. (*Устно.*) Расстояние между боковыми ребрами наклонной треугольной призмы: 2 см, 3 см и 4 см; боковая поверхность равна 45 см^2. Найти боковое ребро.

25. 1) В наклонной четырехугольной призме боковое ребро равно 8 см, а расстояния между последовательными боковыми ребрами: 3 см, 6 см, 2 см и 7 см. Определить ее боковую поверхность.

2) В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны; их общее ребро равно 24 см и отстоит от двух других боковых ребер на 12 см и 35 см. Определить боковую поверхность этой призмы.

26. 1) В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 37 см, 15 см и 26 см, а боковая поверхность равновелика перпендикулярному сечению. Определить боковое ребро.

2) В наклонной треугольной призме боковые ребра содержат по 8 см; стороны перпендикулярного сечения относятся как 9:10:17, а его площадь равна 144 см^2. Определить боковую поверхность этой призмы.

27. 1) Основанием параллелепипеда служит квадрат; одна из вершин верхнего основания одинаково отстоит от всех вершин нижнего основания. Сторона основания равна a, боковое ребро равно b. Определить полную поверхность этого параллелепипеда (рис. 19).

2) В том же параллелепипеде определить диагонали и площади диагональных сечений.

28. Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник со стороной a; длина бокового ребра равна b; одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания углы в 45°. Определить боковую поверхность этой призмы (рис. 20).

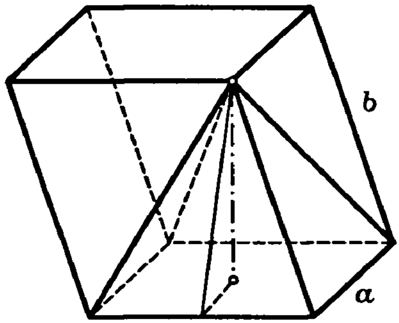


Рис. 19.

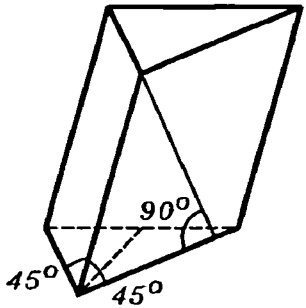


Рис. 20.

29. Основанием наклонной призмы служит равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=AC=10$ см и $BC=12$ см; вершина A_1 равноудалена от вершин A, B и C, и ребро $AA_1=13$ см. Определить полную поверхность этой призмы.

§ 9. Пирамида

1. По данной стороне основания a и боковому ребру b определить высоту правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

2. По данной стороне основания a и высоте h определить апофему правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

3. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7 см, а сторона основания равна 8 см. Определить боковое ребро.

4. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны содержат 3 см и 7 см, а одна из диагоналей 6 см; высота пирамиды, проходящая через точку пересечения диагоналей основания, равна 4 см. Определить боковые ребра пирамиды.

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 6 см и высота 9 см; боковые ребра равны между собой, и каждое содержит 13 см. Определить высоту этой пирамиды.

6. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 см, а боковая сторона 10 см. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы, содержащие по 45°. Определить высоту этой пирамиды.

7. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см; каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Вычислить высоту пирамиды.

8. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах пирамиды, а остальные четыре находятся в плоскости ее основания. Определить ребро куба, если в пирамиде сторона основания равна a, а высота равна h.

Сечения пирамиды

9. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 14 см, а длина бокового ребра 10 см. Определить площадь диагонального сечения.

10. В правильной шестиугольной пирамиде высота равна h, а сторона основания a. Определить площади диагональных сечений.

11. В правильной треугольной пирамиде по стороне основания a и боковому ребру b определить площадь сечения, проведенного через боковое ребро и высоту пирамиды.

12. (*Устно.*) В пирамиде проведено сечение параллельно основанию через середину высоты. Площадь основания равна Q. Определить площадь сечения.

13. Высота пирамиды разделена на четыре равные части, и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Площадь основания равна 400 кв. ед. Определить площади полученных сечений.

14. Высота правильной пирамиды разделена на n равных частей, и через точки деления проведены сечения, параллельные основанию. Площадь основания Q. Найти площади сечений (Q=400, n=5).

15. В пирамиде сечение, параллельное основанию, делит высоту в отношении 3:4 (от вершины к основанию), а площадь сечения меньше площади основания на 200 см^2. Определить площадь основания.

16. На каком расстоянии от вершины пирамиды с высотой h надо провести сечение параллельно основанию, чтобы площадь сечения равнялась: 1) половине площади основания; 2) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ и вообще $\frac{1}{n}$ площади основания?

17. 1) Высота пирамиды равна 16 м; площадь основания равна 512 $м^2$. На каком расстоянии от основания находится сечение, параллельное основанию, содержащее 50 $м^2$?

2) В пирамиде площадь основания равна 150 $см^2$, площадь параллельного сечения 54 $см^2$, расстояние между ними равно 14 см. Определить высоту пирамиды.

18. В правильной треугольной пирамиде через сторону основания проведена плоскость, перпендикулярная к противолежащему боковому ребру. Определить площадь получившегося сечения, если сторона основания равна a, а высота пирамиды h (a=1; h=4).

19. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a. Боковое ребро образует с высотой угол в 30°. Построить сечение, проходящее через вершину основания перпендикулярно к противоположному ребру, и найти его площадь (рис. 21)

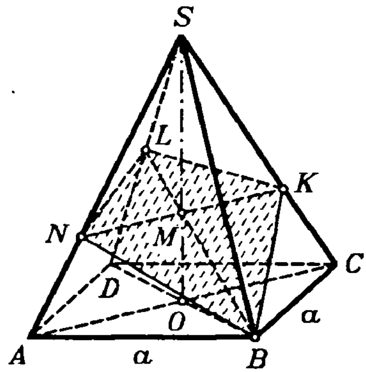


Рис. 21.

§ 10. Поверхность пирамиды

Правильные пирамиды

1. По стороне основания a и высоте h определить полную поверхность правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

2. Определить боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если ее высота равна 4 см, а апофема 8 см.

3. Определить полную поверхность правильной шестиугольной пирамиды, если апофема пирамиды равна k и апофема основания r.

4. Определить высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна a, а боковая поверхность вдвое больше площади основания.

5. В правильной четырехугольной пирамиде боковая поверхность равна 14,76 м^2, а полная поверхность 18 м^2. Определить сторону основания и высоту пирамиды.

6. Определить боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна a и боковое ребро составляет с плоскостью основания угол в 45°.

7. По стороне основания a определить боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, у которой диагональное сечение равновелико основанию.

8. Определить сторону основания правильной четырехугольной пирамиды по ее высоте h и боковой поверхности P.

9. Определить сторону основания и апофему правильной треугольной пирамиды, если ее боковое ребро и боковая поверхность соответственно равны 10 см и 144 см^2.

10. В правильной четырехугольной пирамиде определить сторону основания, если боковое ребро равно 5 см, а полная поверхность 16 см^2.

11. Определить боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, если сторона основания равна a, а боковая грань равновелика диагональному сечению, проведенному через диаметр основания.

12. Определить боковую поверхность правильной десятиугольной пирамиды, если радиус основания пирамиды равен R, а высота пирамиды более радиуса основания на половину стороны основания.

13. Центр верхнего основания куба и середины сторон нижнего основания служат вершинами вписанной в этот куб пирамиды. Определить ее боковую поверхность по данному ребру куба a.

Неправильные пирамиды

14. Основанием пирамиды служит ромб с диагоналями в 6 м и 8 м; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба, лежащего в основании пирамиды, и равна 1 м. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

15. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны содержат 20 см и 36 см, а площадь равна

360 см^2; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 см. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

16. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 5 м и 4 м, а одна из диагоналей 3 м; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 2 м. Определить полную поверхность этой пирамиды.

17. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого одна сторона содержит 40 см, а две другие по 25 см. Высота пирамиды проходит через вершину угла, образуемого равными сторонами основания, и равна 8 см. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

18. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами: 13 см, 14 см и 15 см. Боковое ребро, противолежащее средней по величине стороне основания, перпендикулярно к плоскости основания и равно 16 см. Определить полную поверхность этой пирамиды.

19. Основанием пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC, в котором гипотенуза $AB=26$ см и катет $AC=24$ см; ребро SA перпендикулярно к плоскости основания ABC и равно 18 см. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

20. Основанием пирамиды служит квадрат, ее высота проходит через одну из вершин основания. Определить боковую поверхность этой пирамиды, если сторона основания равна 20 дм, а высота равна 21 дм.

21. Основанием пирамиды служит правильный шестиугольник со стороной a; одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания и равно стороне основания. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

22. Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник со стороной a; одна из боковых граней также равносторонний треугольник и перпендикулярна к плоскости основания. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

§ 11. Усеченная пирамида

1. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7 см. Стороны оснований 10 см и 2 см. Определить боковое ребро пирамиды.

2. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды 4 дм и 1 дм. Боковое ребро 2 дм. Найти высоту.

3. Определить высоту правильных усеченных пирамид: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной, если даны боковое ребро c и стороны a и b нижнего и верхнего оснований.

4. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 63 см, апофема равна 65 см, а стороны оснований относятся как 7:3. Определить эти стороны.

5. (*Устно.*) Сколько диагоналей можно провести в усеченной пятиугольной пирамиде? в усеченной n-угольной пирамиде?

6. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 2 см, а стороны оснований 3 см и 5 см. Определить диагональ этой усеченной пирамиды.

7. Определить стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее высота равна 7 см, боковое ребро 9 см и диагональ 11 см.

8. Диагонали AC_1 и A_1C правильной четырехугольной усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взаимно перпендикулярны; каждая из них равна 2. Найти высоту.

9. Диагонали данной правильной четырехугольной усеченной пирамиды перпендикулярны к боковым ребрам; сторона нижнего основания равна 9 см и боковое ребро равно 8 см. Определить сторону верхнего основания, высоту усеченной пирамиды и расстояние от точки пересечения ее диагоналей до плоскости нижнего основания.

10. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде сторона большего основания a, сторона меньшего b. Боковое ребро образует с основанием угол в 45°. Найти боковое ребро.

11. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды 2 см и 6 см. Боковая грань образует с бóльшим основанием угол в 60°. Найти высоту.

Сечения

12. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 4. Стороны оснований равны 2 и 8. Найти площади диагональных сечений.

13. В правильной треугольной усеченной пирамиде сторона большего основания a, сторона меньшего b. Боковое ребро образует с основанием угол в 45°. Провести сечение через боковое ребро и ось и найти его площадь.

14. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 4 см, диагональ 5 см. Найти площадь диагонального сечения.

15. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде площади оснований Q и q, а боковое ребро составляет с плоскостью нижнего основания угол в 45°. Определить площадь диагонального сечения.

16. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 8 м и 5 м, а высота 3 м. Провести сечение через сторону нижнего основания и противоположную ей вершину верхнего основания. Определить площадь сечения и двугранный угол между сечением и нижним основанием.

17. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 6 см и 8 см, а боковое ребро 10 см. Провести сечение через конец диагонали меньшего основания перпендикулярно к этой диагонали и определить его площадь.

18. Соответственные стороны оснований усеченной пирамиды относятся как 13:17, а периметр среднего сечения равен 45 м. Определить периметры оснований.

19. Площади оснований усеченной пирамиды 9 см^2 и 25 см^2. Найти площадь среднего сечения.

20. Пусть будет в какой-нибудь усеченной пирамиде Q_1 и Q_2 — площади оснований и M — площадь ее среднего сечения. Доказать, что $\sqrt{M} = \frac{\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}}{2}$.

21. Даны площади оснований усеченной пирамиды: 2 м^2 и 98 м^2. Определить площадь параллельного сечения, проведенного через середину высоты.

22. Высота усеченной пирамиды равна h, а площади оснований Q и q. На каком расстоянии от верхнего основания находится параллельное ему сечение, площадь которого есть средняя пропорциональная между площадями оснований?

23. Основания усеченной пирамиды содержат 18 м^2 и 128 м^2. Определить площадь параллельного сечения, делящего высоту в отношении 2:3 (начиная от меньшего основания).

24. Высота усеченной пирамиды разделена на три равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основаниям. Определить площади полученных сечений, если площади оснований Q и q (Q=32; q=2).

§ 12. Поверхность усеченной пирамиды

1. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований 8 м и 2 м. Высота равна 4 м. Найти полную поверхность.

2. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды 6 дм и 12 дм; высота равна 1 дм. Найти боковую поверхность.

3. Стороны оснований правильной шестиугольной усеченной пирамиды 4 см и 2 см; высота 1 см. Найти боковую поверхность.

4. Определить полную поверхность правильной усеченной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной, если даны высота h и стороны оснований a и b ($a>b$).

5. Определить высоту правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если стороны ее оснований a и b, а боковая поверхность равновелика сумме оснований.

6. 1) В правильной четырехугольной усеченной пирамиде апофема равна 12 см, боковое ребро равно 13 см и боковая поверхность 720 см^2. Определить стороны оснований.

2) В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 12 см, разность сторон оснований 10 см и полная поверхность равна 512 см^2. Определить стороны оснований.

7. В правильной треугольной усеченной пирамиде двугранный угол при основании равен 60°, сторона этого основания a и полная поверхность S. Определить сторону другого основания.

8. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде площади оснований Q и q, боковая поверхность P. Определить площадь диагонального сечения.

9. Основаниями усеченной пирамиды служат правильные треугольники со сторонами a и b; одно из боковых ребер, равное c, перпендикулярно к плоскости основания. Определить боковую поверхность этой усеченной пирамиды ($a=5$; $b=3$; $c=1$).

10. Основаниями усеченной пирамиды служат прямоугольники, причем точки пересечения диагоналей оснований находятся на одном перпендикуляре к плоскости основания. Стороны одного прямоугольника равны 54 см и 30 см; периметр другого прямоугольника — 112 см; расстояние между их плоскостями равно 12 см. Определить боковую поверхность этой усеченной пирамиды.

11. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде построить внутреннюю пирамиду, принимая за ее основание верхний квадрат, а за вершину — центр нижнего квадрата.

Стороны квадратов: нижнего a, верхнего b. Чему равна высота пирамид (данной усеченной и внутренней полной), если их боковые поверхности равновелики? (Указать, при каком условии задача имеет решение.)

12. В усеченной пирамиде сходственные стороны оснований относятся как 3:11. В каком отношении ее боковая поверхность делится средним сечением?

§ 13. Цилиндр (прямой круговой)

1. (*Устно.*) Радиус основания цилиндра 2 м, высота 3 м. Найти диагональ осевого сечения.

2. (*Устно.*) Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого Q. Найти площадь основания.

3. (*Устно.*) Высота цилиндра 6 см, радиус основания 5 см. Найти площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее.

4. (*Устно.*) Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм. Цилиндр этот пересечен плоскостью параллельно оси так, что в сечении получился квадрат. Найти расстояние этого сечения от оси.

5. В цилиндре проведена параллельно оси плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 120°. Длина оси h=10 см, ее расстояние от секущей плоскости a=2 см. Определить площадь сечения.

6. Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения, как π:4. Найти угол между диагоналями осевого сечения.

7. Диагональ осевого сечения равностороннего цилиндра (в осевом сечении — квадрат) равна a. Найти объем правильной вписанной в этот цилиндр восьмиугольной призмы.

8. Высота цилиндра 6 дм, радиус основания 5 дм. Концы данного отрезка лежат на окружностях обоих оснований; длина его 10 дм. Найти его кратчайшее расстояние от оси.

9. Высота цилиндра 2 м, радиус основания 7 м. В этот цилиндр наклонно к оси вписан квадрат так, что все вершины его находятся на окружностях оснований. Найти сторону квадрата.

10. Через верхний конец образующей цилиндра под углом в 45° к ней проведена касательная к цилиндру. Радиус основания цилиндра 1 м, высота 4 м. Определить расстояние касательной от центра каждого основания (рис. 22).

Поверхность цилиндра

11. Цилиндрический паровой котел имеет 0,7 м в диаметре; длина его равна 3,8 м. Как велико давление пара на полную поверхность котла, если на 1 $см^2$ пар давит с силой в 10 кг?

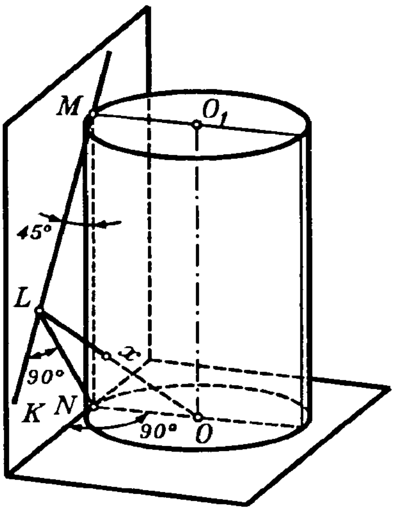


Рис. 22.

12. Высота цилиндра на 10 см больше радиуса основания, а полная поверхность равна 144π $см^2$. Определить радиус основания и высоту.

13. Цилиндрическая дымовая труба с диаметром в 65 см имеет высоту в 18 м. Сколько квадратных метров жести нужно для ее изготовления, если на заклепку уходит 10% всего требующегося количества жести?

14. Полуцилиндрический свод подвала имеет 6 м длины и 5,8 м в диаметре. Определить полную поверхность подвала.

15. При паровом отоплении низкого давления количество тепла, которое дает 1 $м^2$ поверхности нагрева, принимается равным 550 тепловым единицам в час. Сколько погонных метров труб диаметром в 34 мм нужно установить в помещении, для отопления которого по расчетам требуется 4500 единиц тепла в час?

16. (*Устно.*) Стороны прямоугольника a и b. Найти боковую поверхность цилиндра, полученного от вращения этого прямоугольника вокруг стороны, равной a.

17. (*Устно.*) Диаметр основания цилиндра равен 1; высота равна длине окружности основания. Найти $S_{бок}$.

18. (*Устно.*) Высота равностороннего цилиндра равна h. Найти боковую поверхность.

19. (*Устно.*) Радиус основания цилиндра равен R; боковая поверхность равна сумме площадей оснований. Найти высоту.

20. (*Устно.*) Площадь осевого сечения цилиндра равна Q. Найти боковую поверхность.

21. 1) Чему равно отношение боковой поверхности цилиндра к площади его осевого сечения?

2) Какой высоты должен быть цилиндр, чтобы его боковая поверхность была в три раза больше площади основания?

22. Определить полную поверхность равностороннего цилиндра, если боковая поверхность $P=50$ см^2 $\left(\frac{1}{\pi} \approx 0{,}32\right)$.

23. 1) В цилиндре радиус основания $r=2$ см, а высота $h=7$ см. Определить радиус круга, равновеликого полной поверхности этого цилиндра.

2) Найти зависимость между высотой цилиндра и радиусом его основания, если их сумма служит радиусом круга, равновеликого полной поверхности этого цилиндра.

24. 1) Из круглого листа металла выштампован цилиндрический стакан диаметром в 25 см и высотой в 50 см. Предполагая, что при штамповке площадь листа не изменилась, определить диаметр листа.

2) К цилиндрическому стакану (см. предыдущую задачу) выштампована крышка диаметром в 25,2 см и высотой в 0,5 см. Найти диаметр круглого листа, из которого выштампована крышка.

25. В цилиндре площадь основания равна Q и площадь осевого сечения M. Определить полную поверхность этого цилиндра.

26. 1) Какая должна быть зависимость между высотой и радиусом основания, чтобы боковая поверхность цилиндра была равновелика кругу, описанному около его осевого сечения?

2) Такая же задача для полной поверхности.

27. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найти отношение боковых поверхностей цилиндра и призмы.

28. В данном цилиндре проведена плоскость, параллельная основанию, так, что площадь полученного сечения есть средняя пропорциональная между частями боковой поверхности цилиндра. Определить положение секущей плоскости (зная радиус основания R и высоту H цилиндра). Указать условие, при котором задача имеет решение.

29. Определить полную поверхность цилиндра, описанного около куба с ребром a (вершины куба находятся на окружностях оснований цилиндра).

30. Около правильного октаэдра описан цилиндр. Две вершины октаэдра лежат в центрах оснований цилиндра, а остальные четыре — на боковой поверхности его. Ребро октаэдра a=10 см. Найти боковую поверхность цилиндра.

§ 14. Конус (прямой круговой)

1. (*Устно.*) Радиус основания конуса 3 м, высота 4 м. Найти образующую.

2. (*Устно.*) Образующая конуса L наклонена к плоскости основания под углом в 30°. Найти высоту.

3. (*Устно.*) Радиус основания конуса R. Осевым сечением служит прямоугольный треугольник. Найти его площадь.

4. Отношение площади основания конуса к площади осевого сечения равно π. Найти угол наклона образующей к основанию.

5. Высота конуса H. На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость параллельно основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания?

6. 1) Радиус основания конуса R. Через середину высоты проведена плоскость параллельно основанию. Найти площадь сечения.

2) Радиус основания конуса R. Определить площадь параллельного сечения, делящего высоту конуса в отношении $m:n$ (от вершины к основанию).

7. Высота конуса 20, радиус его основания 25. Найти площадь сечения, проведенного через вершину, если его расстояние от центра основания конуса равно 12.

8. В равностороннем конусе (в осевом сечении — правильный треугольник) радиус основания R. Найти площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен 30°.

9. Высота конуса H. Угол между высотой и образующей равен 60°. Найти площадь сечения, проведенного через две взаимно перпендикулярные образующие.

10. 1) В конусе, у которого высота равна радиусу основания R, проведена через вершину плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 90°. Определить площадь полученного сечения.

2) Через вершину конуса под углом в 45° к основанию проведена плоскость, отсекающая четверть окружности основания. Высота конуса равна 10 см. Определить площадь сечения.

11. Через середину высоты конуса проведена прямая параллельно образующей l. Найти длину отрезка прямой, заключенного внутри конуса.

12. Образующая конуса 13 см, высота 12 см. Конус этот пересечен прямой MN, параллельной основанию; расстояние ее от основания равно 6 см, а от высоты 2 см. Найти отрезок этой прямой, заключенный внутри конуса (рис. 23).

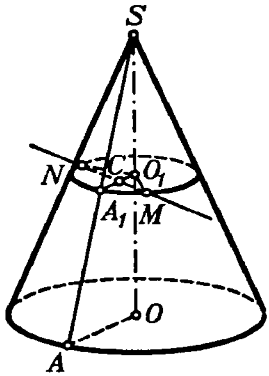


Рис. 23.

13. В конусе даны радиус основания R и высота H. Определить ребро вписанного в него куба.

14. В конусе даны радиус основания R и высота H. В него вписана правильная треугольная призма, у которой боковые грани — квадраты. Определить ребро этой призмы.

Поверхность конуса

15. (*Устно.*) Высота конуса $h=6$, радиус основания $r=8$. Найти боковую поверхность.

16. (*Устно.*) Высота конуса $h=4$, образующая $a=5$. Найти полную поверхность.

17. Конусообразная палатка высотой в 3,5 м с диаметром основания в 4 м покрыта парусиной. Сколько квадратных метров парусины пошло на палатку?

18. Крыша силосной башни имеет форму конуса. Высота крыши 2 м. Диаметр башни 6 м. Сколько листов кровельного железа потребовалось для покрытия крыши, если лист имеет размеры $0{,}7\times1{,}4$ (м^2) и на швы пошло 10% требующегося железа?

19. Поверхность конического шпиля башни равна 250 м^2, диаметр основания 9 м. Найти высоту шпиля.

20. 1) Определить величину поверхности, полученной вращением хорды около диаметра, выходящего из ее конца, если диаметр равен 25 см, а хорда равна 20 см.

2) Из точки A на окружности радиуса $r=7$ м проведена касательная $AB=l=24$ м, а из ее конца B — секущая BOC через центр. Определить величину поверхности, которую описывает отрезок BC секущей, вращаясь вокруг касательной.

21. Равнобедренный треугольник вращается вокруг своей высоты. Определить стороны этого треугольника, если его периметр равен 30 см, а полная поверхность тела вращения равна 60π см^2.

22. Наибольший угол между образующими конуса равен 60°. Найти отношение боковой поверхности к площади основания конуса.

23. 1) Как относятся между собой площадь основания, боковая поверхность и полная поверхность в равностороннем конусе?

2) По высоте H равностороннего конуса определить его полную поверхность.

24. Как относится боковая поверхность равностороннего конуса к боковой поверхности равностороннего цилиндра, имеющего такую же высоту?

25. Найти зависимость между образующей и радиусом основания конуса, у которого боковая поверхность есть средняя пропорциональная между площадью основания и полной поверхностью.

26. 1) Какая должна быть зависимость между образующей конуса и радиусом основания, чтобы его полная поверхность была равновелика кругу, за радиус которого принята высота конуса?

2) Какая должна быть зависимость между образующей конуса и радиусом основания, чтобы его полная поверхность была равновелика кругу, радиус которого равен образующей конуса.

Развертка конуса

27. 1) Высота конуса 4, радиус основания 3; боковая поверхность конуса развернута на плоскость. Найти угол полученного сектора.

2) По радиусу основания R и образующей L определить угол в развертке боковой поверхности конуса. (Рассмотреть особо случай равностороннего конуса.)

3) Вычислить угол в развертке боковой поверхности конуса: а) если наибольший угол между образующими — прямой; б) если образующая составляет с плоскостью основания угол в 30°.

28. 1) Полукруг свернут в коническую поверхность. Найти угол между образующей и высотой конуса.

2) Радиус сектора равен 3 м; его угол 120°. Сектор свернут в коническую поверхность. Найти радиус основания конуса.

29. 1) Боковая поверхность конуса содержит 80 см^2; угол в ее развертке равен 112°30′. Определить площадь основания.

2) Боковая поверхность конуса равна 10 см^2 и развертывается в сектор с углом в 36°. Определить полную поверхность.

3) Боковой поверхностью конуса служит свернутая четверть круга. Определить полную поверхность этого конуса, если площадь его осевого сечения равна M.

Вписанный и описанный конус

30. Если наибольший угол между образующими конуса равен 120°, то его боковая поверхность равновелика боковой поверхности цилиндра, имеющего те же самые основания и высоту. Доказать.

31. В равносторонний конус вписана правильная четырехугольная пирамида. Как относятся боковые поверхности конуса и пирамиды?

32. В данном конусе радиус основания $r=39$ см, а высота $h=52$ см. В него вписан цилиндр такой высоты, что его боковая поверхность равновелика боковой поверхности малого конуса, стоящего на его верхнем основании. Определить высоту цилиндра.

33. В конус с высотой H и образующей L вписан цилиндр, у которого боковая поверхность в n раз менее боковой поверхности конуса. Определить высоту цилиндра ($L=1,5H$; $n=4$).

34. В конус вписан цилиндр, у которого полная поверхность равновелика боковой поверхности конуса. Наибольший угол между образующими конуса равен прямому. Доказать, что расстояние от вершины конуса до верхнего основания цилиндра равно половине образующей конуса.

§ 15. Усеченный конус

1. (*Устно.*) Радиусы оснований усеченного конуса 3 м и 6 м, высота 4 м. Найти образующую.

2. (*Устно.*) Радиусы оснований усеченного конуса R и r; образующая наклонена к основанию под углом в 45°. Найти высоту.

3. Радиусы оснований усеченного конуса 11 см и 16 см; образующая 13 см. Найти расстояние от центра меньшего основания до окружности большего.

4. (*Устно.*) Высота усеченного конуса равна H; определить образующую, если она наклонена к основанию под углом в 30°.

5. Образующая усеченного конуса равна $2a$ и наклонена к основанию под углом в 60°. Радиус одного основания вдвое больше радиуса другого основания. Найти каждый из радиусов.

6. Радиусы оснований усеченного конуса 3 дм и 7 дм; образующая 5 дм. Найти площадь осевого сечения.

7. 1) Площади оснований усеченного конуса 4 м^2 и 16 м^2. Через середину высоты проведена плоскость параллельно основанию. Найти площадь сечения.

2) Площади оснований усеченного конуса M и m. Найти площадь среднего сечения, параллельного основаниям.

8. Площади оснований усеченного конуса 4 и 25. Высота разделена на 3 равные части, и через точки деления проведены плоскости параллельно основаниям. Найти площади сечений.

9. В усеченном конусе площади оснований 1 м^2 и 49 м^2. Площадь параллельного сечения равна их полусумме. На какие части это сечение делит высоту?

10. В усеченном конусе высота $h=10$ см, а радиусы оснований 8 см и 18 см. На каком расстоянии от меньшего основания находится параллельное сечение, площадь которого есть средняя пропорциональная между площадями оснований?

Поверхность усеченного конуса

11. Высота усеченного конуса 4 дм; радиусы его оснований 2 дм и 5 дм. Найти $S_{бок}$.

12. Радиусы оснований усеченного конуса R и r; образующая наклонена к основанию под углом 60°. Найти боковую поверхность.

13. Радиусы оснований усеченного конуса и его образующая относятся как 1:4:5, высота равна 8 см. Найти $S_{бок}$.

14. 1) Определить высоту усеченного конуса, если его полная поверхность равна 572π м^2, а радиусы оснований 6 м и 14 м.

2) В усеченном конусе высота $h=63$ дм, образующая $l=65$ дм и боковая поверхность $S=26\pi$ м^2. Определить радиусы оснований.

15. Сколько квадратных метров латунного листа потребуется, чтобы сделать рупор, у которого диаметр одного конца 0,43 м, другого конца 0,036 м и образующая 1,42 м?

16. Над котлом устроен колпак в форме усеченного конуса, размеры которого (в метрах) даны на рисунке 24[1]. Сколько квадратных метров листового железа потребовалось для его изготовления? (Обрезки не принимаются во внимание.)

17. Сколько олифы потребуется для окраски 100 ведер конической формы, если диаметры ведра 25 см и 30 см, а образующая 27,5 см и если на 1 м^2 требуется 150 г олифы?

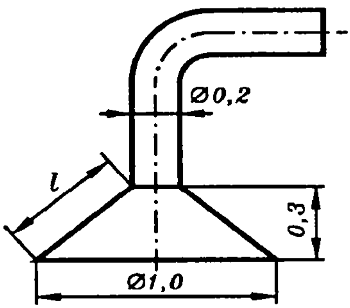


Рис. 24.

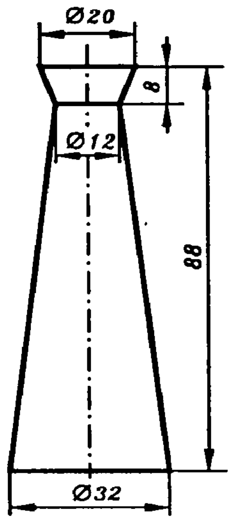


Рис. 25.

18. Сколько материала пойдет на изготовление урны, форма и размеры которой (в сантиметрах) указаны на рисунке 25, если на швы требуется прибавить 3%?

19. 1) В усеченном конусе образующая $l=5$ см, а радиусы оснований 1 см и 5 см. Найти радиус цилиндра с такой же высотой и такой же величиной боковой поверхности.

---

[1] Ø — знак диаметра.

2) В усеченном конусе радиусы оснований 6 см и 10 см, а образующая l=4 см. Требуется: а) найти радиус цилиндра такой же высоты, полная поверхность которого была бы равновелика боковой поверхности данного усеченного конуса; б) найти радиус цилиндра такой же высоты, полная поверхность которого была бы равновелика полной поверхности усеченного конуса.

20. Определить боковую поверхность усеченного конуса, если его образующая составляет с плоскостью основания угол в 30°, а площадь осевого сечения равна F.

21. Боковая поверхность усеченного конуса равна S, а радиусы оснований R и r. Определить боковую поверхность полного конуса.

22. Определить высоту усеченного конуса, если его боковая поверхность равновелика сумме оснований, а их радиусы равны R и r.

23. 1) Определить боковую поверхность усеченного конуса, у которого образующая составляет с плоскостью основания угол в 45°, а радиусы оснований R и r.

2) Определить боковую поверхность усеченного конуса, если его образующая составляет с плоскостью основания угол 60°, а площади оснований Q и q.

24. 1) В усеченном конусе даны: высота H, образующая L и боковая поверхность S. Определить площадь осевого сечения.

2) В усеченном конусе определить площадь осевого сечения, если даны площади оснований Q и q и боковая поверхность S.

25. В усеченном конусе радиусы оснований 1 см и 3 см. Определить образующую, если полная поверхность усеченного конуса должна быть равновелика всему тому круговому кольцу, в часть которого развертывается боковая поверхность усеченного конуса.

§ 16. Объем параллелепипеда, призмы и цилиндра

1. (*Устно.*) Объем куба 8 м^3. Найти его поверхность.

2. Три латунных куба с ребрами 3 см, 4 см и 5 см переплавлены в один куб. Какую длину имеет ребро этого куба?

3. 1) Металлический куб имеет внешнее ребро a=10,2 см и весит 514,15 г. Толщина стенок m=0,1 см. Найти удельный вес металла, из которого сделан куб.

2) Из 10 кг свинца отливают куб. Найти ребро куба. (Удельный вес свинца 11,4; угар во внимание не принимается.)

3) Чугунный полый куб, наружное ребро которого 260 мм, имеет толщину стенок в 30 мм. Найти его вес. (Удельный вес чугуна 7,4.)

4. Определить объем куба: 1) по его диагонали l; 2) по его поверхности S.

5. 1) Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Определить ребро.

2) Если каждое ребро куба увеличить на 1 м, то объем увеличится в 125 раз. Определить ребро.

3) Поверхность (в кв. ед.) и объем куба (в куб. ед.) выражены одним числом. Найти ребро куба.

6. (*Устно.*) Как относятся объемы двух кубов: данного и его модели, уменьшенной в масштабе 1:2; 1:3; 1:4; и т. д.; вообще 1:n?

Прямоугольный параллелепипед

7. Кирпич (25 см×12 см×6,5 см) весит 3,51 кг. Найти его удельный вес.

8. Требуется установить резервуар для воды емкостью в 10 м^3 на площади размером 2,5 м×1,75 м, служащей для него дном. Найти высоту резервуара.

9. Прямоугольный золотой лист имеет размеры 4,7 см×6,2 см и весит 6,3 г. Найти толщину листа. (Удельный вес золота 19,3.)

10. Плот сколочен из 16 балок прямоугольного сечения, из которых каждая имеет 3,6 м длины, 0,20 м ширины и 0,25 м толщины. Какой наибольший груз может он поднять, не затонув? (Удельный вес дерева равен 0,84.)

11. Для учета дров, поступающих в котельную, сделана мерка длиной в 1,5 м (рис. 26). Поступающие в котельную дрова имеют разную длину: 54 см, 71 см и 1 м. Определить высоту кладки для каждого размера, если единица измерения во всех случаях — кубический метр.

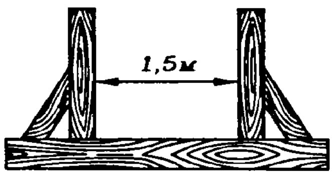


Рис. 26.

12. (*Устно.*) Во сколько раз нужно увеличить каждое из трех измерений прямоугольного бруса, чтобы объем его увеличился вдвое? втрое? вообще в n раз?

13. Измерения прямоугольного бруса: 3 см, 4 см и 5 см. Если увеличить каждое ребро на x сантиметров, то поверхность увеличится на 54 см^2. Как увеличится его объем?

14. 1) Измерения прямоугольного параллелепипеда: 15 м, 50 м и 36 м. Найти ребро равновеликого ему куба.

2) Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2 см, 3 см и 6 см. Найти ребро такого куба, чтобы объемы этих тел относились как их поверхности.

15. 1) Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 35 см, а ребра относятся как 2:3:6. Определить объем параллелепипеда.

2) Стороны основания прямоугольного параллелепипеда относятся как $m:n$, а диагональное сечение — квадрат с площадью Q. Определить объем параллелепипеда.

16. 1) Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда 2 м^2, 3 м^2 и 6 м^2. Найти его объем.

2) Определить объем прямоугольного параллелепипеда по данным площадям его граней: Q_1, Q_2 и Q_3.

17. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с одной гранью угол в 30°, а с другой в 45°. Определить объем.

Прямой параллелепипед

18. В прямом параллелепипеде стороны основания a и b образуют угол в 30°; боковая поверхность равна S. Определить его объем.

19. 1) Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, у которого одна из диагоналей равна 17 см, а стороны равны 9 см и 10 см. Полная поверхность этого параллелепипеда содержит 334 см^2. Определить его объем.

2) В прямом параллелепипеде стороны основания равны 13 дм и 37 дм, а бо́льшая диагональ основания равна 40 дм. Боковое ребро относится к большей диагонали параллелепипеда как 15:17. Определить объем этого параллелепипеда.

20. В прямом параллелепипеде стороны основания равны $2\sqrt{2}$ см и 5 см и образуют угол в 45°; меньшая диагональ параллелепипеда равна 7 см. Определить его объем.

21. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 см и 15 см и образуют угол в 60°; меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол в 30°. Определить объем этого параллелепипеда.

22. 1) Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, площадь которого равна 1 м^2; площади диагональных сечений 3 м^2 и 6 м^2. Найти объем параллелепипеда.

2) Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, площадь которого равна Q; площади диагональных сечений M и N. Определить объем параллелепипеда.

23. Основанием параллелепипеда служит ромб; диагональные сечения перпендикулярны к плоскости основания, и площади их содержат 100 см^2 и 105 см^2, а длина их линии пересечения равна 10 см. Определить объем и боковую поверхность этого параллелепипеда.

24. Основание прямого параллелепипеда — параллелограмм, у которого стороны содержат 3 см и 5 см и образуют угол в 60°; площадь большего диагонального сечения равна 63 см^2. Определить меньшую диагональ параллелепипеда, поверхность и объем.

25. В прямом параллелепипеде с основанием $ABCD$ ребро AB=50 см; перпендикуляр B_1E, опущенный из вершины B_1 на ребро AD, равен 41 см и делит AD на отрезки AE=30 см и ED=18 см. Определить объем параллелепипеда.

Правильная призма

26. По стороне основания a и боковому ребру b определить объем правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

27. Деревянная плитка в форме правильного восьмиугольника со стороной 3,2 см и толщиной в 0,7 см весит 17,3 г. Найти удельный вес дерева.

28. Сколько весит железная колонка, имеющая вид правильной двенадцатиугольной призмы, сторона основания которой a=12 см и высота h=78 см? (Удельный вес железа 7,4.)

29. Чугунная труба имеет квадратное сечение, ее внешняя ширина 25 см, толщина стенок 3 см. Сколько весит погонный метр трубы? (Удельный вес чугуна 7,3.)

30. 1) Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5 м, а диагональ боковой грани 2,5 м. Определить объем.

2) Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 6 см, а боковая поверхность 32 см^2. Определить объем.

31. 1) Сторона основания правильной треугольной призмы равна a; боковая поверхность равновелика сумме оснований. Определить объем.

2) Боковое ребро правильной треугольной призмы равно высоте основания, а площадь сечения, проведенного через них, равна Q. Определить объем призмы.

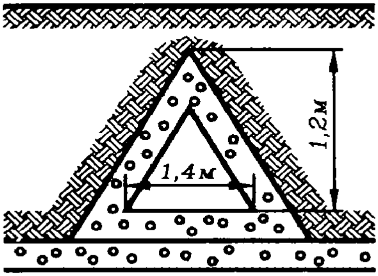


Рис. 27.

32. Основанием призмы служит правильный треугольник, вписанный в круг радиуса R; боковые грани ее — квадраты. Определить объем этой призмы.

33. В правильной шестиугольной призме площадь наибольшего диагонального сечения 4 м^2, а расстояние между двумя противолежащими боковыми гранями 2 м. Найти объем призмы.

34. В правильной шестиугольной призме большее диагональное сечение равновелико основанию, сторона которого a. Определить ребро куба, равновеликого этой призме.

Прямая призма

35. Вычислить максимальную пропускную способность в кубических метрах за 1 час водосточной трубы, сечение которой изображено на рисунке 27. Скорость течения воды 2 м/сек.

36. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, катеты которого относятся как 24:7; гипотенуза основания относится к высоте призмы как 5:2; боковая поверхность содержит 140 м^2. Определить объем призмы.

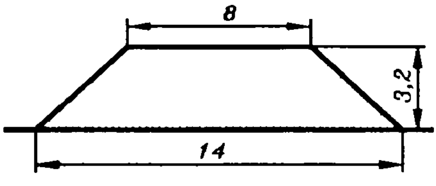


Рис. 28.

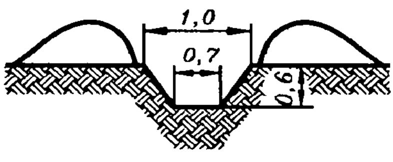


Рис. 29.

37. 1) В прямой треугольной призме стороны основания равны 4 см, 5 см и 7 см, а боковое ребро равно большей высоте основания. Определить объем призмы.

2) Высота прямой треугольной призмы равна 5 м, ее объем равен 24 см^3, а площади боковых граней относятся как 17:17:16. Определить стороны основания.

38. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4 см^2, а площади боковых граней 9 см^2, 10 см^2 и 17 см^2. Определить объем.

39. Железнодорожная насыпь дана в разрезе (рис. 28); размеры указаны в метрах. Найти, сколько кубических метров земли приходится на 1 км насыпи.

40. Сколько надо назначить рабочих, чтобы большими лопатами окончить в 6 часов рытье канавы длиной в 25 м? Размеры (в метрах) поперечного сечения канавы указаны на рисунке 29. (Большой лопатой выкапывают 0,75 м^3 в час.)

41. Основанием прямой призмы служит трапеция $ABCD$, в которой параллельные стороны AD=39 см и BC=22 см, а непараллельные AB=26 см и CD=25 см. Площадь сечения AA_1C_1C содержит 400 см^2. Определить объем этой призмы.

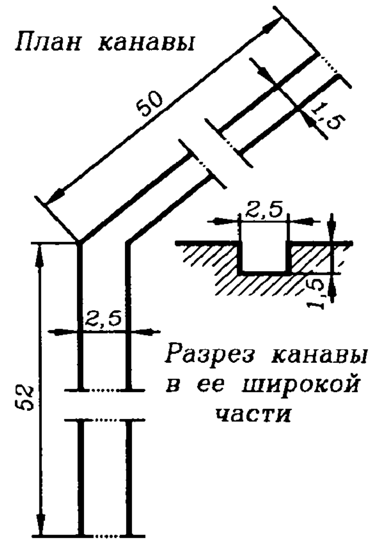


Рис. 30.

42. $ACDB$ — данная полуокружность радиуса R, C—ее середина, D—середина дуги CB. Определить объем прямой призмы, у которой основанием служит треугольник ADB, а боковое ребро равно хорде AC.

43. Вырыта канава глубиной в 1,5 м, вид и размеры которой (в метрах) указаны на рис. 30. Определить объем земляных работ.

Наклонный параллелепипед

44. Основанием наклонного параллелепипеда служит параллелограмм $ABCD$, в котором AB=3 дм, AD=7 дм и BD=6 дм. Диагональное сечение AA_1C_1C перпендикулярно к плоскости основания и равно 1 м^2. Определить объем параллелепипеда.

45. 1) Основанием наклонного параллелепипеда служит квадрат, сторона которого равна 1 м. Одно из боковых ребер образует с каждой прилежащей стороной основания угол в 60° и равно 2 м. Найти объем параллелепипеда.

2) Основанием наклонного параллелепипеда служит квадрат, и одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания равные острые углы. Сторона основания a; боковое ребро b; расстояние между соответственными сторонами двух оснований c. Определить объем параллелепипеда (a=15; b=14; c=10).

46. Грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной a и острым углом в 60°. Определить объем параллелепипеда.

47. Основанием наклонного параллелепипеда служит прямоугольник со сторонами a и b; боковое ребро c образует со сторонами основания углы в 60°. Определить объем параллелепипеда, боковую поверхность и угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

48. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом в 60°. Ребро AA_1 также равно a и образует с ребрами AB и AD углы в 45°. Определить объем этого параллелепипеда.

Наклонная призма

49. Основанием призмы служит треугольник, у которого одна сторона равна 2 см, а две другие по 3 см; боковое ребро равно 4 см и составляет с плоскостью основания угол в 45°. Определить ребро равновеликого куба.

50. 1) Основанием призмы служит треугольник со сторонами 8 см, 5 см и 7 см. Боковое ребро длиной 8 см составляет с плоскостью основания угол в 60°. Определить объем призмы.

2) В наклонной треугольной призме стороны основания равны 5 м, 6 м и 9 м; боковое ребро равно 10 м и составляет с плоскостью основания угол в 45°. Определить объем призмы.

51. Основанием призмы служит правильный треугольник ABC со стороной a; вершина A_1 проектируется в центр нижнего основания, и ребро AA_1 составляет со стороной основания угол в 45°. Определить объем и боковую поверхность призмы.

52. Основанием наклонной призмы служит равносторонний треугольник со стороной a; одна из боковых граней перпендикулярна к плоскости основания и представляет собой ромб, у которого меньшая диагональ равна c. Определить объем призмы.

53. 1) Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 м, а расстояние между ними 26 м, 25 м и 17 м. Определить ее объем.

2) В данной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами относятся как 9:10:17; боковое ребро равно 1 м; боковая поверхность равна 6 м^2. Определить объем этой призмы.

54. Основание наклонной призмы — четырехугольник $ABCD$, в котором диагонали взаимно перпендикулярны; диагональное сечение AA_1C_1C перпендикулярно к плоскости основания. Диагональ BD=16 дм, а площадь AA_1C_1C=250 дм^2. Определить объем.

55. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней m^2, а расстояние ее от противолежащего ребра $2a$. Чему равен объем призмы?

Цилиндр

56. 25 м медной проволоки весят 100,7 г. Найти диаметр проволоки. (Удельный вес меди 8,9.)

57. Погонный метр пенькового каната диаметром в 36 мм весит 0,96 кг. Найти его удельный вес.

58. Столбик ртути в термометре длиной 15,6 см весит 5,2 г. (Удельный вес ртути 13,6.) Найти площадь поперечного сечения столбика.

59. В мензурке (цилиндрический сосуд с делениями на кубические сантиметры) расстояние между двумя смежными делениями 1,8 см. Найти внутренний диаметр мензурки.

60. Насос, подающий воду в паровой котел, имеет два водяных цилиндра. Размеры каждого цилиндра: ход поршня 150 мм, диаметр 80 мм. Определить часовую производительность насоса, если известно, что каждый поршень делает 50 рабочих ходов в 1 минуту.

61. Граната имеет форму цилиндра длиной $3\frac{1}{2}$ калибра[1] и толщину стенок в $\frac{1}{8}$ калибра. Определить в кубических

---

[1] Калибром называется внутренний диаметр дула пушки.

сантиметрах объем взрывчатого вещества, наполняющего внутреннюю пустоту гранаты полевой пушки калибра в 76 мм.

62. (*Устно.*) Найти объем тела, получаемого при вращении квадрата вокруг его стороны a.

63. Осевое сечение цилиндра — квадрат, диагональ которого равна 4. Найти объем цилиндра.

64. (*Устно.*) 1) Как относятся объемы цилиндра и его модели, уменьшенной в масштабе 1:2, 1:3, ..., 1:n?

2) Как относятся объемы двух цилиндров, имеющих равные высоты? равные диаметры оснований?

3) Во сколько раз надо увеличить высоту цилиндра, не меняя основания, чтобы его объем увеличился вдвое? в n раз?

4) Во сколько раз надо увеличить радиус основания цилиндра, не меняя его высоты, чтобы объем его увеличился вдвое? в n раз?

5) Боковая поверхность (в кв. ед.) и объем цилиндра (в куб. ед.) выражаются одним числом. Определить диаметр цилиндра.

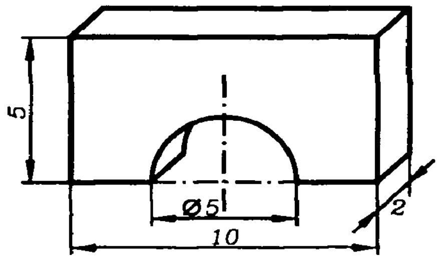


Рис. 31.

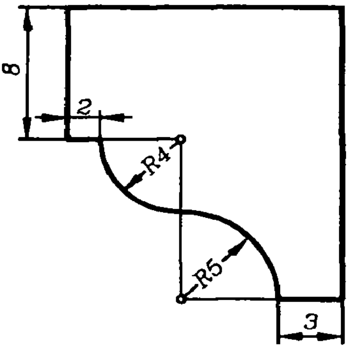


Рис. 32.

65. (*Устно.*) 1) Диаметр основания одного цилиндра равен 0,20 м, высота его 0,60 м. Другой цилиндр имеет высоту 0,30 м и тот же диаметр основания. Сравните между собой объемы обоих цилиндров.

2) Один цилиндр имеет высоту 2,4 м и диаметр основания 1 м; другой цилиндр имеет высоту 1,2 м и диаметр основания 0,5 м. Сравнить между собой объемы обоих цилиндров.

66. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в последнюю вписан цилиндр. Найти отношение объемов обоих цилиндров.

67. Боковая поверхность цилиндра равна S, а длина окружности основания C. Найти объем.

68. 1) Боковая поверхность цилиндра развертывается в квадрат со стороной a. Найти объем. 2) Высота цилиндра равна H, и в развертке его боковой поверхности образующая составляет с диагональю угол в 60°. Определить объем.

69. Прямоугольный лист жести, имеющий 1,6 м длины и 0,8 м ширины, можно согнуть в трубку двояким образом: в первом случае длина трубки будет 1,6 м, во втором 0,8 м. Найти отношение объемов трубок и их поверхностей.

70. Определить объем цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, у которой каждое ребро равно a.

71. Определить вес детали из песчаника, данной на рисунке 31. Размеры указаны в дециметрах. (Удельный вес песчаника 2,4.)

72. Сколько весит погонный метр карниза из известняка, поперечный разрез которого дан на рисунке 32? Размеры даны в сантиметрах. (Удельный вес известняка 2,2.)

73. Свинцовая труба (удельный вес свинца 11,4) с толщиной стенок в 4 мм имеет внешний диаметр в 13 мм. Сколько весят 25 м этой трубы?

74. Стальной вал, имеющий 1,40 м длины и 0,083 м в диаметре, обтачивается на токарном станке, причем диаметр его уменьшается на 0,003 м. Сколько теряет он в весе благодаря обточке? (Удельный вес стали 7,4.)

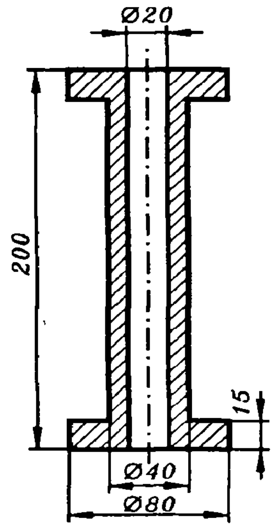


Рис. 33.

75. Вычислить вес деревянной катушки, размеры которой (в миллиметрах) даны на рисунке 33. (Удельный вес дерева 0,8.)

§ 17. Объем пирамиды и конуса

Правильная пирамида

1. По стороне основания a и боковому ребру b определить объем правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

2. (*Устно.*) В правильной четырехугольной пирамиде высота 3 м, боковое ребро 5 м. Найти объем.

3. Объем правильной шестиугольной пирамиды 6 см^3. Сторона основания 1 см. Найти боковое ребро.

4. 1) Апофема правильной треугольной пирамиды равна k, а высота h. Найти объем.

2) Площадь основания правильной четырехугольной пирамиды Q и боковая поверхность S. Определить объем (Q=12; S=24).

5. 1) (*Устно.*) Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно b. Найти объем пирамиды.

2) Определить объем правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, а боковые ребра взаимно перпендикулярны.

6. По ребру a правильного тетраэдра определить его поверхность и объем.

7. По ребру a правильного октаэдра определить его поверхность и объем.

8. Соединив последовательно середины ребер правильного тетраэдра прямыми, получим ребра правильного октаэдра. Ребро тетраэдра a. Найти объем октаэдра и сравнить его с объемом тетраэдра.

9. 1) Центры граней куба служат вершинами правильного октаэдра. Найти отношение граней куба и октаэдра.

2) Центры граней правильного октаэдра служат вершинами куба. Найти отношение граней октаэдра и куба.

10. 1) Сторона основания правильной треугольной пирамиды a, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол в 45°. Определить объем пирамиды.

2) Высота правильной треугольной пирамиды h, а боковая грань образует с плоскостью основания угол в 60°. Определить объем пирамиды.

11. 1) Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды a, а двугранный угол при основании равен 45°. Определить объем пирамиды.

2) В данной правильной шестиугольной пирамиде, имеющей объем V, боковое ребро вдвое более стороны основа-

ния. Определить сторону основания и угол бокового ребра с плоскостью основания.

Неправильная пирамида

12. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами в 9 м и в 12 м; каждое из боковых ребер равно 12,5 м. Найти объем пирамиды.

13. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами в 6 см и 15 см, высота проходит через точку пересечения диагоналей основания, и боковая поверхность равна 126 см^2. Определить объем этой пирамиды.

14. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого равные стороны содержат по 6 см, а третья сторона 8 см. Боковые ребра равны между собой, и каждое содержит 9 см. Определить объем этой пирамиды.

15. Основанием пирамиды служит прямоугольник, у которого угол между диагоналями равен 60°, а площадь равна Q; боковые ребра образуют с плоскостью основания углы в 45°. Определить объем этой пирамиды.

16. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 39 см, 17 см и 28 см; боковые ребра равны каждое 22,9 см. Определить объем этой пирамиды.

17. 1) Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого равные стороны содержат по 39 см, а третья сторона 30 см. Двугранные углы при основании равны между собой, и каждый содержит 45°. Определить объем этой пирамиды.

2) Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого равные стороны содержат по 7 см, а третья сторона 6 см; вершина пирамиды удалена от всех сторон основания на одинаковое расстояние, которое относится к высоте пирамиды как 5:4. Определить объем этой пирамиды.

18. В данной треугольной пирамиде двугранные углы при основании равны между собой; стороны основания: 7 см, 8 см и 9 см; объем пирамиды 40 см^3. Определить ее боковую поверхность.

19. Ромб со стороной в 15 см служит основанием пирамиды, каждая грань которой наклонена к основанию под углом в 45°. $S_{бок}$=3 дм^3. Найти объем пирамиды.

20. (*Устно.*) Боковые ребра треугольной пирамиды a, b и c взаимно перпендикулярны. Найти объем пирамиды.

21. 1) Две взаимно перпендикулярные грани треугольной пирамиды — равносторонние треугольники со стороной в 4 см. Найти объем пирамиды.

2) Боковые грани треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, площади их равны 6 м^2, 4 м^2 и 3 м^2. Найти объем пирамиды.

22. Одно ребро треугольной пирамиды равно 4; каждое из остальных равно 3. Найти объем пирамиды.

23. Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник ABC, в котором AB=15 см, BC=27 см и AC=18 см. Грани SAB и SAC перпендикулярны к плоскости ABC, а грань SBC составляет с ней угол в 45°. Определить объем пирамиды и площадь грани BSC.

24. Основание пирамиды — прямоугольник, площадь которого равна 1 м^2, две боковые грани перпендикулярны к основанию, а две другие наклонены к нему под углами в 30° и 60°. Найти объем.

25. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, у которой параллельные стороны равны 3 см и 5 см, а боковая сторона 7 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания, и большее боковое ребро равно 10 см. Определить объем этой пирамиды.

26. В треугольной пирамиде одна из сторон основания равна 16 см; противоположное ей боковое ребро 18 см; каждое из четырех остальных ребер равно 17 см. Определить объем этой пирамиды.

27. (*Устно.*) 1) Какую часть объема пирамиды отсекает среднее сечение?

2) Высота пирамиды h. На каком расстоянии от вершины пирамиды находится сечение, параллельное основанию и делящее ее объем пополам?

28. Плоскостями, параллельными основанию пирамиды, ее высота разделена на пять равных частей. В каком отношении разделился объем пирамиды?

29. Пирамида разделена на три равновеликие части плоскостями, параллельными основанию. В каком отношении разделилась высота?

30. Площадь сечения, параллельного основанию пирамиды, составляет 0,36 ее основания. В каком отношении сечение делит объем пирамиды?

31. Центры граней правильного тетраэдра служат вершинами нового правильного тетраэдра. Найти отношение их поверхностей и объемов.

Конус

32. (*Устно.*) Высота конуса 3, образующая 5. Найти объем.

33. 122-миллиметровая бомба дает при взрыве воронку диаметром в 4 м и глубиной 1,5 м. Какое количество земли (по весу) выбрасывает эта бомба? 1 м^3 земли весит 1650 кг.

34. Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 2 м и образующая 3,5 м. Сколько надо возов, чтобы перевезти щебень, уложенный в десяти таких кучах? 1 м^3 щебня весит 3 т. На один воз грузят 0,5 т.

35. Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом. Радиус его основания 2,5 м, высота 4 м, причем цилиндрическая часть стога имеет высоту 2,2 м. Удельный вес сена 0,03. Определить вес стога.

36. Жидкость, налитая в конический сосуд, имеющий 0,18 м высоты и 0,24 м в диаметре основания, переливается в цилиндрический сосуд, диаметр основания которого 0,10 м. Как высоко будет стоять уровень жидкости в сосуде?

37. Осевым сечением конуса служит равнобедренный прямоугольный треугольник; площадь его 9 м^2. Найти объем конуса.

38. Площадь основания конуса 9π см^2; полная поверхность его 24π см^2. Найти объем конуса.

39. Высота и образующая конуса относятся как 4:5, а объем конуса 96π см^3. Найти его полную поверхность.

40. Длина образующей конуса равна l, а длина окружности основания C. Определить объем.

41. Определить объем конуса по данной площади Q основания и боковой поверхности S.

42. Высота конуса равна 15 м, а объем равен 320π м^3. Определить полную поверхность.

43. Высота конуса равна 6 см, а боковая поверхность 24π см^2. Определить объем конуса.

44. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол в 30°. Определить объем конуса.

5. 1) Высота усеченной пирамиды равна 15 м; ее объем 475 $м^3$; площади оснований относятся как 4:9. Определить эти площади.

2) В правильной четырехугольной пирамиде объем равен 430 $м^3$, высота равна 10 м и сторона одного основания 8 м. Определить сторону другого основания.

6. 1) В усеченной пирамиде объем равен 76 $м^3$, высота 6 м и площадь одного из оснований равна 18 $м^2$. Определить площадь другого основания.

2) В усеченной пирамиде разность площадей оснований равна 6 $см^2$, высота усеченной пирамиды 9 см и ее объем 42 $см^3$. Определить площади оснований.

7. Объем усеченной пирамиды равен 1720 $м^3$, ее высота 20 м; сходственные стороны двух оснований относятся как 5:8. Определить площади оснований.

8. В треугольной усеченной пирамиде высота 10 м; стороны одного основания: 27 м, 29 м и 52 м; периметр другого основания равен 72 м. Определить объем усеченной пирамиды.

9. По боковому ребру l и сторонам оснований a и b определить объем правильной усеченной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

10. 1) В правильной четырехугольной усеченной пирамиде апофема и стороны оснований относятся как 5:8:2, а объем $1\frac{3}{4}$ $м^2$. Определить ее полную поверхность.

2) Определить объем правильной треугольной усеченной пирамиды, у которой стороны оснований 30 м и 20 м, а боковая поверхность равновелика сумме оснований.

11. Определить объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 9 см, а стороны оснований 7 см и 5 см.

12. Определить объем правильной шестиугольной усеченной пирамиды, если стороны ее оснований a и b, боковое ребро составляет с плоскостью нижнего основания угол в 30°.

13. Правильная четырехугольная усеченная пирамида разделена на три части двумя плоскостями, проведенными через две противоположные стороны меньшего основания перпендикулярно к плоскости большего основания. Определить объем каждой части, если в усеченной пирамиде высота равна 4 см, а стороны оснований 2 см и 5 см. Сделать чертеж.

14. В треугольной усеченной пирамиде через сторону меньшего основания проведена плоскость параллельно противолежащему боковому ребру. В каком отношении разделился объем усеченной пирамиды, если соответственные стороны оснований относятся как 1:2?

15. Правильная четырехугольная усеченная пирамида срезана с двух противоположных боков двумя плоскостями, проведенными через концы диагонали верхнего основания перпендикулярно к этой диагонали. Определить объем оставшейся части усеченной пирамиды, если ее высота h, а стороны оснований a и b.

16. Из правильной четырехугольной усеченной пирамиды вырезана часть ее в виде двух пирамид, имеющих общую вершину в точке пересечения ее диагоналей, а основаниями — ее основания. Определить объем оставшейся части усеченной пирамиды, если ее высота h, а стороны оснований a и b.

17. Через точку пересечения диагоналей правильной четырехугольной усеченной пирамиды проведена параллельно основаниям плоскость. Стороны оснований 6 м и 3 м, высота пирамиды 9 м. Найти диагональ сечения и объем каждой части пирамиды.

18. Даны площади Q и q оснований усеченной пирамиды и ее высота h. Определить объем полной пирамиды и объем отсеченной верхней части.

19. Площади оснований усеченной пирамиды Q и q, а ее объем V. Определить объем полной пирамиды.

20. В усеченной пирамиде сходственные стороны двух оснований относятся как $m:n$. В каком отношении делится ее объем средним сечением? ($m:n=5:2$.)

Усеченный конус

21. Отрезок ствола сосны длиной 15,5 м имеет следующие диаметры своих концов: $d_1=42$ см и $d_2=25$ см. Определить процент ошибки, которую мы делаем, вычисляя объем сосны умножением площади среднего поперечного сечения ствола на его длину.

22. Сосуд имеет форму и размеры (в метрах), показанные на рисунке 34. Найти емкость сосуда.

23. Размеры (в сантиметрах) и форма бидона даны на рисунке 35. Найти вместимость бидона в литрах ($\alpha=45°$.)

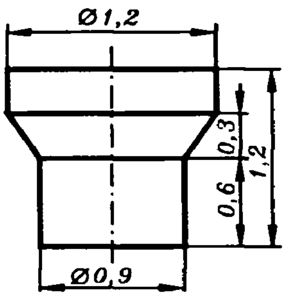


Рис. 34.

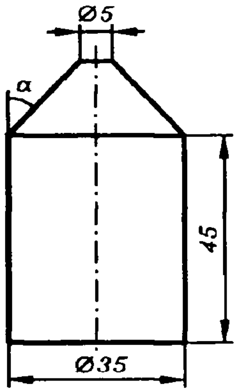


Рис. 35.

24. Радиусы оснований усеченного конуса R и r, образующая наклонена к основанию под углом в 45°. Найти объем.

25. Высота усеченного конуса равна 3. Радиус одного основания вдвое больше другого, а образующая наклонена к основанию под углом в 45°. Найти объем.

26. Радиус одного основания усеченного конуса вдвое больше другого; боковая поверхность равна сумме площадей оснований; площадь осевого сечения равна 36 м^2. Найти объем.

27. 1) Объем усеченного конуса равен 584π см^3, а радиусы оснований 10 см и 7 см. Определить высоту.

2) В усеченном конусе радиусы оснований и образующая относятся как 4:11:25, объем равен 181π м^3. Определить радиусы оснований и образующую.

3) Объем усеченного конуса равен 248π см^3; его высота 8 см; радиус одного из оснований 4 см. Определить радиус второго основания.

28. Усеченный конус, у которого радиусы оснований 3 см и 5 см, и полный конус такой же высоты равновелики. Чему равен радиус основания полного конуса?

29. Объем усеченного конуса равен 52 см^3, площадь одного основания в 9 раз более площади другого. Усеченный конус достроен до полного. Найти объем полного конуса.

30. 1) Равнобедренная трапеция с параллельными сторонами в 7 см и 17 см и площадью 144 $см^2$ вращается около средней высоты. Определить объем полученного тела.

2) AB — диаметр полукруга; $ACDB$ — вписанная трапеция, причем $\angle CAB=60°$. Эта трапеция вращается вокруг радиуса, перпендикулярного к AB. Определить объем тела вращения, если радиус равен R.

31. Площадь осевого сечения усеченного конуса равна разности площадей оснований, а радиусы оснований R и r. Определить его объем.

32. Высота усеченного конуса равна 12 см, площадь среднего параллельного сечения равна 225π $см^2$ и объем 2800π $см^3$. Определить радиусы оснований.

33. Образующая усеченного конуса равна 17 см, площадь осевого сечения 420 $см^2$ и площадь среднего сечения равна 196π $см^2$. Определить объем и боковую поверхность.

34. 1) На меньшем основании усеченного конуса построен цилиндр, второе основание которого лежит в плоскости большего основания конуса. Объем полученного цилиндра составляет седьмую часть объема усеченного конуса. Найти зависимость между радиусами оснований усеченного конуса.

2) Найти зависимость между радиусами оснований усеченного конуса, если его объем разделился пополам конической поверхностью, вершина которой лежит в центре верхнего основания и основанием которой служит нижнее основание усеченного конуса.

35. Усеченный конус, у которого радиусы оснований 4 см и 22 см, требуется превратить в равновеликий цилиндр такой же высоты. Определить радиус основания этого цилиндра.

36. В усеченном конусе высота равна 18 см, а радиусы оснований 5 см и 11 см. Высота разделена на три равные части двумя плоскостями, параллельными основаниям. Определить объем полученных частей усеченного конуса.

37. Радиус одного основания усеченного конуса вчетверо больше радиуса другого. Высота разделена на три равные части, и через точки деления проведены плоскости параллельно основаниям. В каком отношении разделился объем?

38. По данным радиусам оснований R и r определить отношение объема усеченного конуса к объему полного конуса.

39. Деревянный усеченный конус (удельный вес 0,58), высота которого h=48 см и диаметры оснований D_1=44 см и D_2=32 см, просверлен цилиндрически вдоль оси. Оси цилиндра и конуса совпадают. Диаметр цилиндра d=10 см. Просверленная часть заполнена железом (удельный вес 7,5). Найти удельный вес образовавшегося таким образом тела.

40. В усеченном конусе радиусы оснований R и r, высота h. Из него вырезаны два конуса, у которых основаниями служат основания данного усеченного, а образующие одного служат продолжениями образующих другого. Определить объем оставшейся части.

§ 19. Объем призматоида (клина) и усеченной призмы

Формула Ньютона—Симпсона: объем V равен

$$\frac{1}{6}H\left(Q_1+Q_2+4Q_0\right)$$

1. Проверить пригодность формулы Ньютона—Симпсона для вычисления объема призмы, цилиндра, пирамиды, конуса, усеченной пирамиды и усеченного конуса.

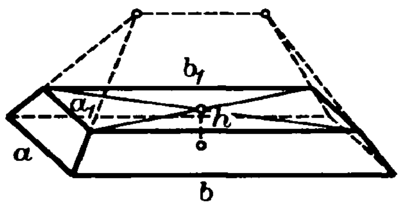


Рис. 36.

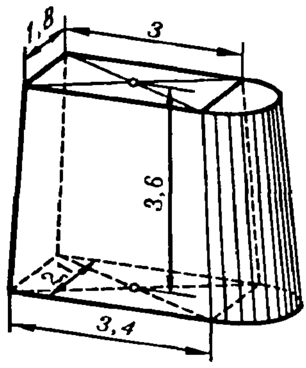


Рис. 37.

2. Запруда имеет форму тела, изображенного на рисунке 36 (призматоид). Сколько тачек земли надо было привезти, чтобы устроить ее? Нижнее основание запруды имеет форму прямоугольника в 58 м длины и 4,6 м ширины, верхнее основание — прямоугольник в 50 м длины и 3,4 м ширины; высота ее равна 2,3 м; тачка же вмещает 0,38 $м^3$ земли.

3. Куча песку насыпана в виде призматоида; нижним основанием его служит прямоугольник со сторонами a и b, верхним — прямоугольник со сторонами a_1 и b_1; высота кучи h. Сколько кубических метров песка содержится в куче, если размеры даны в метрах?

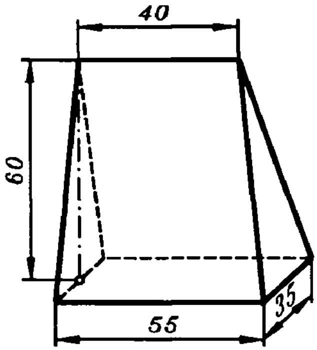


Рис. 38.

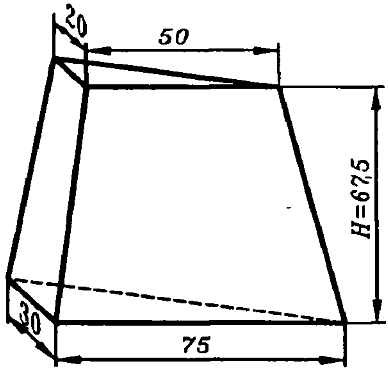


Рис. 39.

4. Кузов телеги имеет следующие размеры: внизу 1,35 м×0,62 м, вверху 1,52 м×0,86 м; глубина его 0,75 м; дно плоское. Кузов наполнен доверху песком, удельный вес которого 1,9. Сколько весит песок?

5. Бетонный бык для моста имеет форму и размеры (в метрах), показанные на рисунке 37. Найти объем быка. (Каждое из оснований быка представляет собой прямоугольник, соединенный с полукругом.)

6. Найти объем клина, форма и размер которого (в сантиметрах) даны на рисунке 38. (В основании лежит прямоугольник; ребро, противолежащее основанию, параллельно основанию.)

7. Найти объем клина, форма и размер которого (в сантиметрах) даны на рисунке 39. (Верхнее и нижнее основания имеют форму прямоугольных треугольников; длина их катетов указана на рисунке.)

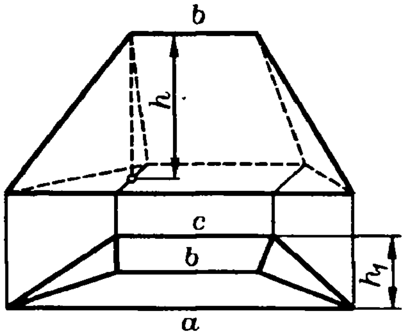


Рис. 40.

8. Найти объем чердачного помещения, план которого представляет собой трапецию с параллельными сторонами a и c и высотой h_1, высота крыши h, конек ее b (рис. 40).

9. В усеченном параллелепипеде три боковых ребра по порядку имеют следующую длину: 15 см, 23 см и 18 см. Определить четвертое боковое ребро.

10. В усеченной правильной четырехугольной призме дано: сторона основания равна a; из боковых ребер — два смежных имеют длину b, два других длину c. Определить объем и боковую поверхность этой усеченной призмы.

11. Основанием прямой усеченной призмы служит прямоугольный треугольник ABC, в котором катет $AC=15$ см и катет $BC=20$ см. Боковые ребра BB_1 и CC_1 содержат по 10 см, а $AA_1=18$ см. Определить объем и полную поверхность этой усеченной призмы.

12. 1) Доказать, что объем треугольной усеченной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на среднее арифметическое длин трех боковых ребер.

2) В треугольной усеченной призме боковые ребра: 17 см, 25 см и 30 см, а расстояния между ними: 18 см, 20 см и 34 см. Определить объем этой усеченной призмы.

13. Определить объем и боковую поверхность треугольной усеченной призмы, у которой боковые ребра равны l, m и n и находятся на расстоянии a одно от другого.

§ 20. Шар и его свойства

1. 1) Шар, радиус которого равен 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Определить площадь сечения.

2) Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

2. Радиус шара равен 63 см. Точка находится на касательной плоскости на расстоянии 16 от точки касания. Найти ее кратчайшее расстояние от поверхности шара.

3. Угол между радиусами, проведенными к двум точкам поверхности шара, равен 60°, а кратчайшее расстояние между этими точками по поверхности шара 5 см. Определить радиус шара $\left(\frac{1}{\pi} \approx 0{,}32\right)$.

4. Радиус шара R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом в 60° к нему. Найти площадь сечения.

5. Дан шар радиуса R. Через одну точку его поверхности проведены две плоскости: первая — касательная к шару, вторая — под углом в 30° к первой. Найти площадь сечения.

6. 1) Радиус земного шара R. Чему равна длина окружности параллельного круга, если его широта равна 60°?

2) Город N находится на 60° северной широты. Какой путь описывает этот пункт в течение одного часа вследствие вращения Земли вокруг своей оси? Радиус Земли принять равным 6000 км.

7. На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними: 6 см, 8 см 10 см. Радиус шара 13 см. Найти расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти три точки.

8. Диаметр шара 25 см. На его поверхности дана точка A и окружность, все точки которой удалены (по прямой линии) от A на 15 см. Найти радиус этой окружности.

9. Радиус шара 15 м. Вне шара дана точка A на расстоянии 10 м от его поверхности. Найти длину такой окружности на поверхности шара, все точки которой отстоят от A на 20 м.

10. Полушар и вписанный в него конус имеют общее основание и общую высоту; через середину высоты проведена плоскость, параллельная основанию. Доказать, что площадь сечения, заключенная между боковой поверхностью конуса и поверхностью полушара, равна половине площади основания.

11. Тело ограничено двумя концентрическими шаровыми поверхностями (полый шар). Доказать, что его сечение плоскостью, проходящей через центр, равновелико сечению, касательному к внутренней шаровой поверхности.

12. 1) Два равных шара радиуса R расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Определить длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

2) Радиусы двух шаров 25 дм и 29 дм, а расстояние между их центрами 36 дм. Определить длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

13. Стороны треугольника: 13 см, 14 см, 15 см. Найти расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касательного к сторонам треугольника. Радиус шара 5 см.

14. Диагонали ромба 15 см и 20 см. Шаровая поверхность касается всех сторон его. Радиус шара 10 см. Найти расстояние его центра от плоскости ромба.

15. На шар, радиус которого 5 дм, наложен ромб так, что каждая сторона его, равная 6 дм, касается шара. Расстояние плоскости ромба от центра шара 4 дм. Найти площадь ромба.

16. Через точку, лежащую на поверхности шара, проведены две взаимно перпендикулярные плоскости, которые пересекают шар по кругам радиусов r_1 и r_2. Найти радиус R шара.

17. Радиус шара 7 см. На его поверхности даны две равные окружности, пересекающиеся по хорде, равной 2 см. Найти радиусы этих окружностей, зная, что плоскости их перпендикулярны.

18. Две касательные к шару плоскости образуют угол в 120°, обращенный к поверхности шара. Кратчайшее расстояние по поверхности шара между точками касания 70 см. Найти радиус шара.

§ 21. Объем шара и его частей

Шар

1. (*Устно.*) 1) Радиус шара 1 м. Найти объем шара.

2) Во сколько раз увеличится объем шара, если радиус его увеличить в 3 раза? в 4 раза?

2. Чугунные шары регулятора весят каждый 10 кг. Найти диаметр каждого шара. (Удельный вес чугуна 7,2.)

3. 1) Требуется перелить в один шар два чугунных шара с диаметрами d_1=25 см и d_2=35 см. Найти диаметр нового шара. (Угар во внимание не принимается.)

2) Радиусы трех шаров: 3 см, 4 см и 5 см. Определить радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

4. Имеется кусок свинца весом в 1 кг. Сколько шариков диаметром в 1 см можно отлить из куска? (Удельный вес свинца 11,4.)

5. (*Устно.*) 1) Свинцовый шар, диаметр которого 20 см, переливается в шарики с диаметром в 10 раз меньшим. Сколько таких шариков получится? Какое данное в задаче лишнее?

2) Нужно отлить свинцовый шар с диаметром в 3 см. Имеются свинцовые шарики с диаметром в 5 мм. Сколько таких шариков нужно взять?

6. Свинцовый шарик, диаметр которого равен 0,012 м, и полый стеклянный шар с диаметром в 0,160 м уравновешены на коромысле весов, т. е. в воздухе имеют равный вес. Если перенести всю эту систему под колокол воздушного насоса и выкачать из-под колокола весь воздух, то какой шар опустится и как велика будет разница в весе шаров? Прибор этот в физике называется бароскопом. (Удельный вес воздуха равен 0,0013.)

7. 1) Из деревянного цилиндра, в котором высота равна диаметру основания (равносторонний цилиндр), выточен наибольший шар. Определить, сколько процентов материала сточено.

2) Из куба выточен наибольший шар. Сколько процентов материала сточено?

8. Если радиусы трех шаров относятся как 1:2:3, то объем большего шара в три раза больше суммы объемов меньших шаров. Доказать.

9. Внешний диаметр полого шара 18 см; толщина стенок 3 см. Найти объем стенок.

10. Внутренний диаметр чугунного полого шара 8 см, а внешний 10 см. Определить вес шара. (Удельный вес чугуна 7,3.)

11. Объем стенок полого шара равен 876π см^3, а толщина стенок 3 см. Определить радиусы его поверхностей: наружной и внутренней.

12. В основание равностороннего цилиндра радиуса R вписан квадрат, и на нем построена правильная четырехугольная пирамида с равносторонними боковыми гранями. Требуется определить радиус шара, объем которого равен сумме объемов цилиндра и пирамиды.

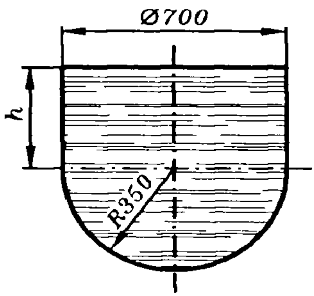


Рис. 41.

13. Сосуд имеет форму опрокинутого конуса, осевое сечение которого — равносторонний треугольник. В него брошен железный шар радиуса R. В сосуд налита вода так, что поверхность воды касается погруженного в нее шара. На какой высоте будет вода, если вынуть шар?

14. Резервуар для воды состоит из полушара радиуса R и цилиндра с таким же радиусом основания (рис. 41). Какой высоты h должна быть цилиндрическая часть его, чтобы объем всего резервуара равнялся 200 м^3? (Размеры даны в сантиметрах.)

Шаровой сегмент

15. Дан шар. Плоскость, перпендикулярная к диаметру, делит его на две части: 3 см и 9 см. На какие части делится объем шара?

16. Какую часть объема шара составляет объем сферического сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара?

17. Высота шарового сегмента составляет 0,4 радиуса шара. Какую часть составляет объем этого сегмента от объема цилиндра, имеющего те же основания и высоту?

18. Газовый резервуар, размеры которого даны на рисунке 42 в метрах, имеет форму цилиндра, на который насажен шаровой сегмент. Определить емкость резервуара.

19. Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Как относится объем общей части шаров к объему целого шара?

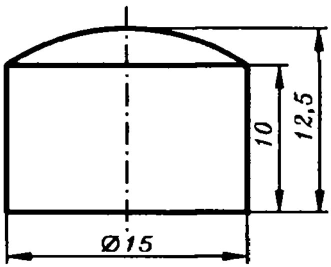


Рис. 42.

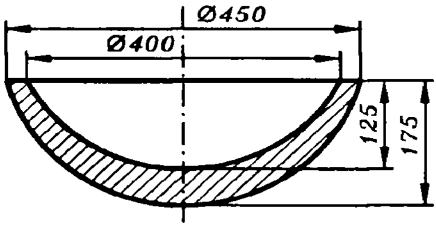


Рис. 43.

20. Диаметр шара, равный 30 см, служит осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12 см. Определить объем части шара, заключенной внутри цилиндра.

21. Литейный ковш имеет продольный разрез, показанный на рисунке 43. Внутренняя и внешняя поверхности — сферические (размеры даны в миллиметрах). Удельный вес 7,9. Найти вес ковша.

22. Радиусы поверхностей двояковыпуклого сферического стекла 10 см и 17 см. Расстояние между их центрами 21 см. Найти объем стекла.

Шаровой сектор

23. Радиус шарового сектора R, угол в осевом сечении 120°. Найти объем.

24. Определить объем шарового сектора, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара равен 75 см.

25. Круговой сектор с углом в 30° и радиусом R вращается около одного из боковых радиусов. Определить объем полученного тела.

26. Полукруг радиуса R, разделенный двумя радиусами на три равные части, вращается вокруг диаметра. Найти объемы тел, полученных от вращения каждой части.

27. Если в сферическом секторе площадь осевого сечения равна $\frac{1}{3}$ площади большого круга, то его объем равен $\frac{1}{4}$ объема шара. Доказать.

Шаровой слой

28. Радиусы оснований шарового слоя 3 м и 4 м, а радиус его шаровой поверхности 5 м. Найти объем слоя. (Два случая.)

29. В шаре, радиус которого равен 65 см, проведены по одну сторону центра две параллельные плоскости, отстоящие от центра на 16 см и 25 см. Определить объем части шара, заключенной между ними.

30. Шаровой слой и цилиндр имеют общую высоту и общие основания. Объем тела, заключенного между их боковыми поверхностями, равен 36π см^3. Найти их высоту.

31. Доказать, что объем тела, полученного при вращении кругового сегмента с хордой a около диаметра, параллельного этой хорде, не зависит от величины радиуса круга.

§ 22. Поверхность шара и его частей

Шар

1. 1) (*Устно.*) Площадь большого круга равна 1 м^2. Найти поверхность шара.

2) Кривая поверхность полушара на M более площади его основания. Найти площадь основания.

3) Дан полушар радиуса R. Найти его полную поверхность.

2. 1) Радиус шара равен 5 см. Определить его поверхность ($\pi=3,1416$).

2) Поверхность шара равна 225π м^2. Определить его объем.

3) По объему шара V определить его поверхность.

3. (*Устно.*) 1) Как изменятся поверхность и объем шара, если радиус увеличить в 4 раза? в 5 раз?

2) Поверхности двух шаров относятся как $m:n$. Как относятся их объемы?

3) Объемы двух шаров относятся как $m:n$. Как относятся их поверхности?

4. Гипотенуза и катеты служат диаметрами трех шаров. Какая существует зависимость между их поверхностями?

5. В шаре проведены по одну сторону от центра два параллельных сечения; площади их равны 49π дм^2 и 4π м^2, а расстояние между ними 9 дм. Определить поверхность шара.

6. 1) Полная поверхность равностороннего конуса равновелика поверхности шара, построенного на его высоте как на диаметре. Доказать.

2) Если равносторонний конус и полушар имеют общее основание, то боковая поверхность конуса равновелика сферической поверхности полушара, а линия их пересечения вдвое короче окружности основания. Доказать.

3) Объем шара (в куб. ед.) и его поверхность (в кв. ед.) выражаются одним и тем же числом. Найти радиус шара.

7. Кусок металла, имевший сначала форму равностороннего цилиндра, перелит в форму шара. Как изменилась величина его поверхности?

8. Поверхность тела, образуемого вращением квадрата около стороны, равновелика поверхности шара, имеющего радиусом сторону квадрата. Доказать.

Шаровой пояс

9. Радиусы оснований шарового пояса 20 м и 24 м, а радиус шара 25 м. Определить поверхность шарового пояса. (Два случая.)

10. По радиусу шара R определить высоту сферического слоя, одно из оснований которого — большой круг шара и боковая поверхность которого равновелика сумме оснований.

11. Высота шарового пояса 7 см, а радиусы оснований 16 см и 33 см. Определить поверхность шарового пояса.

12. Поверхность шарового пояса выразить через высоту h и радиусы оснований r и r_1 ($r>r_1$).

Сектор и сегмент

13. По данному радиусу шара R определить высоту сферического сегмента, у которого боковая поверхность в m раз более площади основания ($m=4$).

14. Если полуокружность, разделенная на три равные части, вращается около своего диаметра, то поверхность, описанная средней дугой, равновелика сумме поверхностей, описанных боковыми дугами. Доказать.

15. Кривую поверхность шарового сегмента определить по его высоте h и радиусу основания r.

16. Круговой сегмент с дугой в $120°$ и площадью Q вращается вокруг своей высоты. Определить полную поверхность полученного тела.

17. Боковая поверхность конуса, вписанного в шаровой сегмент, есть средняя пропорциональная между площадью основания и боковой поверхностью сегмента. Доказать.

18. 1) Радиус шара равен 15 см. Определить часть его поверхности, видимую из точки, удаленной от центра на 25 см.

2) На каком расстоянии от центра шара радиуса R должна быть светящаяся точка, чтобы она освещала $\frac{1}{3}$ его поверхности?

19. Круговой сектор с углом $90°$ и площадью Q вращается вокруг среднего радиуса. Найти поверхность полученного тела.

20. Определить, какую часть объема шара составляет объем сферического сектора, у которого сферическая и коническая поверхности равновелики.

21. Шар радиуса $R=10$ см цилиндрически просверлен по оси. Диаметр отверстия 12 см. Найти полную поверхность тела.

22. По данным задачи № 18 в § 21 определить, сколько квадратных метров жести требуется для изготовления резервуара.

§ 23. Вписанный и описанный шары

Куб, параллелепипед, призма и шар

1. (*Устно.*) Ребро куба равно a. Найти радиусы шаров: вписанного в куб и описанного около него.

2. 1) Ребра прямоугольного параллелепипеда 4 см, 6 см, 12 см. Найти радиус описанного шара.

3. Радиус шара 9 дм. В него вписана правильная четырехугольная призма, высота которой 14 дм. Найти сторону основания призмы.

4. Высота правильной шестиугольной призмы 8 м. Диагональ боковой грани 13 м. Найти радиус описанного шара.

5. Около шара радиуса R описана правильная шестиугольная призма. Определить ее полную поверхность.

6. Боковое ребро правильной треугольной призмы 2 м, сторона основания 3 м. Найти диаметр описанного шара.

7. В шар, радиус которого 14 см, вписана правильная треугольная призма; диагональ ее боковой грани 26 см. Найти сторону основания призмы.

8. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 6 см, 8 см и 10 см. Высота призмы 24 см. Найти радиус описанного шара.

9. Вокруг шара радиуса R описана правильная треугольная призма. Найти поверхность и объем призмы.

10. Как относятся между собой поверхности трех шаров, если первая поверхность касается граней куба, вторая касается его ребер и третья проходит через его вершины?

11. Около шара описана правильная треугольная призма, а около нее описан шар. Как относятся между собой поверхности этих шаров?

Пирамида и шар

12. В правильной четырехугольной пирамиде высота h, боковое ребро b. Найти радиус описанного шара.

13. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды 4 м, высота тоже 4 м. Найти радиус описанного шара.

14. 1) По ребру a правильного тетраэдра определить радиусы шаров описанного и вписанного.

2) Как относятся между собой поверхности трех шаров, если первая поверхность касается граней правильного тетраэдра, вторая касается его ребер, а третья проходит через его вершины?

15. По ребру a вписанного октаэдра определить радиусы шаров описанного и вписанного.

16. 1) Определить радиус шара, вписанного в правильную пирамиду, у которой высота равна h, а двугранный угол при основании равен $60°$. 2) Такая же задача для угла в $45°$.

17. В данной пирамиде все боковые ребра равны 9 см, а ее высота 5 см. Определить радиус описанного шара.

18. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида, высота которой делится центром шара на две части: в 4 см и 5 см. Найти объем пирамиды.

19. Высота правильной треугольной пирамиды h. Боковые ребра взаимно перпендикулярны. Найти радиус описанного шара.

20. В правильной пирамиде высота H, радиус основания R. При каком соотношении между высотой и радиусом основания центр описанного шара лежит: 1) на основании пирамиды, 2) внутри пирамиды и 3) вне пирамиды?

21. Основанием пирамиды служит правильный треугольник, сторона которого равна 3 дм. Одно из боковых ребер равно 2 дм и перпендикулярно к основанию. Найти радиус описанного шара.

Усеченная пирамида и шар

22. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды 7 дм и 1 дм. Боковое ребро наклонено к основанию под углом в 45°. Найти радиус описанного шара.

23. В правильной шестиугольной усеченной пирамиде стороны оснований 3 м и 4 м, высота 7 м. Найти радиус описанного шара.

24. В правильной треугольной усеченной пирамиде высота 17 см, радиусы окружностей, описанных около оснований, 5 см и 12 см. Найти радиус описанного шара.

25. Около шара радиуса R описана правильная четырехугольная усеченная пирамида, у которой двугранный угол при основании равен 45°. Определить ее полную поверхность.

Цилиндр и шар

26. В шар радиуса R вписан равносторонний цилиндр. На какие части делят поверхность шара основания цилиндра?

27. Вокруг шара описан цилиндр. Найти отношение их поверхностей и объемов.

28. В шар вписан цилиндр, у которого радиус основания относится к высоте как $m:n$. Определить полную поверхность этого цилиндра, если поверхность шара равна S.

Конус и шар

29. Высота конуса h, образующая l. Найти радиус описанного шара.

30. Радиус шара 5 см. В шар вписан конус, радиус его основания 4 см. Найти высоту конуса.

31. Радиус шара 2 м. В него вписан равносторонний конус. Найти полную поверхность и объем конуса.

32. Высота конуса 8 м, образующая 10 м. Найти радиус вписанного шара.

33. Найти отношение объемов равностороннего конуса и вписанного в него шара.

34. В конус, у которого радиус основания r, а образующая l, вписан шар. Определить длину линии, по которой поверхность шара касается боковой поверхности конуса.

35. Если около шара описан конус, у которого высота вдвое более диаметра шара, то объем и полная поверхность конуса вдвое более объема и поверхности шара. Доказать.

36. Около шара радиуса r описан конус, наибольший угол между образующими которого прямой. Определить полную поверхность конуса.

37. Высота конуса 20 см, образующая 25 см. Найти радиус вписанного полушара, основание которого лежит на основании конуса.

38. Высота конуса 9 см, радиус основания 12 см. Найти радиус вписанного в конус сегмента, имеющего с ним общее основание.

Усеченный конус и шар

39. Радиусы оснований усеченного конуса 3 м и 4 м; высота 7 м. Найти радиус описанного шара.

40. Радиус шара 10 см. В него вписан усеченный конус. Радиусы оснований конуса 6 см и 8 см. Найти его высоту. (Два случая.)

41. Вокруг шара описан усеченный конус, радиусы оснований которого r и R. Найти радиус шара.

42. Около шара описан усеченный конус, у которого образующая составляет с плоскостью основания угол в 45°. Доказать, что его боковая поверхность вдвое более поверхности шара.

43. Определить боковую поверхность и объем усеченного конуса, описанного около шара, если его образующая равна 13 см, а радиус шара 6 см.

Шаровые сектор и сегмент. Шар

44. Радиус сферического сектора R, дуга в осевом сечении 60°. Найти радиус вписанного в него шара и длину окружности, по которой они касаются.

45. В сферический сектор вписаны два взаимно касающихся шара, радиусы которых 1 дм и 3 дм. Найти радиус данного сектора.

46. Даны четыре равных шара радиуса R, из которых каждый касается трех других. Найти радиус шара, касательного ко всем данным шарам. (Два случая.)

47. Полная поверхность данного шарового сегмента в m раз более поверхности вписанного в него шара. Определить высоту сегмента, зная радиус R его сферической поверхности ($m=2$).

48. Объем данного шарового сегмента в m раз более объема вписанного в него шара. Определить его высоту по радиусу R его сферической поверхности ($m=2$).

49. В шаровой сектор в осевом сечении в $120°$ вписан равносторонний конус. Вершина конуса находится на сферической поверхности сектора, а основание конуса опирается на коническую поверхность сектора. Найти отношение объемов конуса и сектора.

§ 24. Тела вращения

Цилиндр, конус и усеченный конус

1. Квадрат со стороной a вращается вокруг перпендикуляра к диагонали, проведенного через ее конец. Определить объем и поверхность полученного тела.

2. Квадрат со стороной a вращается вокруг внешней оси, которая параллельна его стороне и отстоит от нее на длину стороны. Требуется: 1) определить объем и поверхность полученного тела; 2) определить, в каком отношении объем, образуемый вращением квадрата, разделится поверхностью, которую опишет его диагональ.

3. Равносторонний треугольник вращается вокруг перпендикуляра к стороне, проведенного через ее конец. Как относятся между собой поверхности, описываемые сторонами треугольника?

4. Равносторонний треугольник вращается сначала вокруг стороны, а потом вокруг параллели к стороне, проведенной через вершину. Во второй раз получаются объем и поверхность, вдвое бо́льшие, чем в первый раз. Доказать.

5. Равносторонний треугольник со стороной a вращается вокруг внешней оси, которая параллельна стороне и удалена от нее на расстояние, равное апофеме треугольника. Определить объем и поверхность полученного тела.

6. Одна из сторон a равностороннего треугольника продолжена на равную ей длину, и через конец продолжения проведен перпендикуляр к нему. Определить объем и поверхность тела, которое получится, если вращать треугольник вокруг этого перпендикуляра.

7. Высота равностороннего треугольника продолжена за вершину на свою длину, и через конец продолжения проведен перпендикуляр к нему. По стороне a определить объем и поверхность тела, образуемого вращением треугольника вокруг этого перпендикуляра.

8. Стороны квадрата служат сторонами равносторонних треугольников, построенных снаружи, и образовавшаяся фигура вращается вокруг прямой, соединяющей наружные вершины двух противоположных треугольников. Сторона квадрата a. Определить объем и поверхность полученного тела.

9. По стороне a правильного шестиугольника определить объем и поверхность тел, образуемых его вращением: 1) вокруг диаметра; 2) вокруг апофемы.

10. По стороне a правильного шестиугольника определить объем и поверхность тела, образуемого его вращением вокруг стороны.

11. Правильный шестиугольник со стороной a вращается вокруг оси, проходящей через его вершину перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту вершину. Определить объем и поверхность тела вращения.

12. Правильный шестиугольник со стороной a вращается вокруг внешней оси, которая параллельна стороне и отстоит от нее на длину апофемы. Определить объем и поверхность полученного тела.

13. Прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 12 см вращается вокруг внешней оси, которая параллельна большему катету и отстоит от него на 3 см. Определить объем и поверхность тела вращения.

14. Прямоугольный треугольник с катетами 15 см и 20 см вращается вокруг перпендикуляра к гипотенузе, проведенного через вершину большего острого угла. Определить объем и поверхность тела вращения.

15. Треугольник со сторонами 9 см, 10 см и 17 см вращается вокруг высоты, проведенной из вершины его меньшего угла. Определить объем и поверхность полученного тела.

16. Треугольник со сторонами 8 см и 5 см, заключающими угол в 60°, вращается вокруг оси, проходящей через вершину этого угла, перпендикулярно к меньшей из его сторон. Определить объем и поверхность тела вращения.

17. Объемы, образуемые вращением параллелограмма последовательно вокруг двух смежных сторон, обратно пропорциональны этим сторонам. Доказать.

18. Ромб, площадь которого равна Q, вращается вокруг стороны. Определить поверхность полученного тела.

19. 1) Ромб со стороной a и острым углом в 60° вращается вокруг оси, проведенной через вершину этого угла перпендикулярно к стороне. Определить объем и поверхность тела вращения.

2) Такая же задача для угла в 45°.

20. Равнобедренная трапеция, у которой острый угол равен 45° и боковая сторона равна меньшему основанию, вращается вокруг боковой стороны. По ее длине a определить объем и поверхность тела вращения.

21. В полукруг радиуса R вписана трапеция так, что ее нижним основанием служит диаметр этого круга, а боковая сторона стягивает дугу в 30°. Определить объем и поверхность тела, образуемого вращением этой трапеции вокруг радиуса, перпендикулярного к ее основанию.

22. AB — диаметр данной полуокружности радиуса R; BC — дуга, содержащая 60°. Проведены хорда AC и касательная CD, где D — точка на продолжении диаметра AB. Определить объем и поверхность тела, получаемого при вращении треугольника ACD вокруг оси AD.

Шар и его части

23. На полуокружности радиуса R от конца ее диаметра AB отложена дуга BMC в 60°, и точка C соединена с A. Определить объем и поверхность тела, которое образуется, если вращать вокруг AB фигуру, ограниченную диаметром AB, хордой AC и дугой BMC.

24. На полуокружности радиуса R от конца ее диаметра AB отложена дуга BMC в 45°, из точки C проведена касательная, пересекающая продолжение диаметра AB в точке D. Фигура, ограниченная прямыми BD и CD и дугой BMC, вращается вокруг BD. Определить объем и поверхность полученного тела.

25. O — центр дуги AMC радиуса R; B — точка на продолжении радиуса OA; BC — касательная к дуге AMC; CD — перпендикуляр на радиус OA. Фигура вращается вокруг оси OB. Определить расстояние OD, если поверхность, образуемая вращением дуги AMC, делит пополам объем, образуемый вращением треугольника OCB вокруг оси OB.

26. AMC, CND и DPB — последовательные трети полуокружности с диаметром AB и центром O. Проведены радиусы OC и OD и хорды AC и AD, и фигура вращается вокруг диаметра AB. Доказать, что фигурами $ACND$ и $OCND$ будут описаны равные объемы, составляющие каждый половину объема шара.

27. Круговой сегмент вращается вокруг параллельного хорде диаметра. Доказать, что полученный объем равен объему шара с диаметром, равным хорде сегмента.

28. 1) AOB — квадрант с центром O и радиусом R; AMC — дуга, содержащая 60°; AD — касательная, причем D точка ее пересечения с продолжением радиуса OC. Фигура, ограниченная отрезками AD и CD и дугой AMC, вращается вокруг радиуса OB. Определить объем и поверхность полученного тела.

2) Такая же задача для дуги AMC, равной 45°.

Теоремы Гюльдена

29. Проверить обе теоремы Гюльдена для случаев вращения:

1) прямоугольника вокруг одной из его сторон;

2) ромба со стороной a и высотой h вокруг одной из его сторон;

3) правильного треугольника со стороной a вокруг оси, проходящей через вершину параллельно основанию;

4) прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов;

5) прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы.

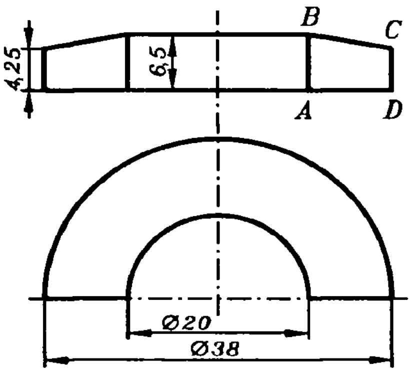


Рис. 44.

30. Поперечное сечение железного кольца — квадрат со стороной a=4 см; средний диаметр кольца d=80 см и удельный вес его 8,6. Найти вес кольца.

31. Спасательный круг, поперечное сечение которого — окружность, можно рассматривать как тело, получившееся от вращения круга вокруг некоторой оси. Диаметр сечения d=12 см; внешний диаметр спасательного круга D=75 см. Вычислить поверхность спасательного круга и его объем.

32. Паровозное депо имеет в плане вид полукольца (рис. 44), внутренний диаметр которого равен 20 м; ширина полукольца 9 м; в поперечном сечении депо имеет вид прямоугольной трапеции $ABCD$, параллельные стороны которой равны 4,25 м и 6,5 м. Найти объем депо.

33. Стороны треугольника 9 см, 10 см и 17 см. Треугольник вращается около большей своей высоты. Определить объем и поверхность тела вращения.

34. Доказать, что объемы, полученные при вращении треугольника вокруг основания и вокруг прямой, параллельной основанию и проходящей через вершину треугольника, относятся как 1:2.

§ 25. Смешанный отдел

1. На рисунке 45 дан внутренний разрез доменной печи; размеры даны в метрах. Определить объем горна, заплечиков, шахты, состоящей из трех частей, и объем всей печи.

2. Плоскость, проведенная в пирамиде параллельно основанию, делит ее боковую поверхность на части, отношение которых равно 4:5, считая от вершины. В каком отношении делится этой плоскостью высота?

3. Диагонали прямого параллелепипеда равны 9 см и $\sqrt{33}$ см; периметр его основания равен 18 см; боковое ребро равно 4 см. Определить полную поверхность и объем этого параллелепипеда.

4. В шар радиуса R вписан куб и на его гранях построены правильные пирамиды с вершинами на поверхности шара. Определить объем образовавшегося многогранника и указать его отношение к объему шара.

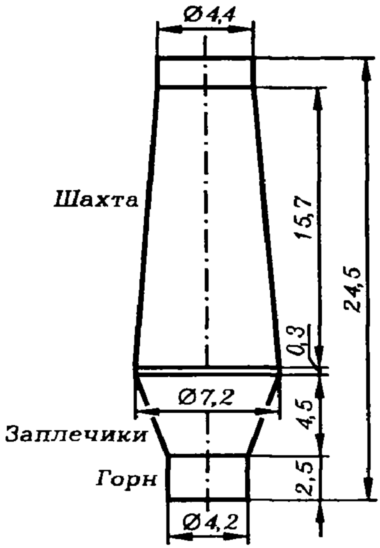


Рис. 45.

5. Полная поверхность конуса разделена пополам сечением, параллельным основанию. Радиус основания равен R, а образующая l. Определить верхний отрезок образующей (R=1, l=8).

6. Около шара описана правильная четырехугольная усеченная пирамида, у которой стороны оснований относятся как $m:n$. Найти отношение ее объема к объему шара.

7. Если в правильной четырехугольной призме боковое ребро равно половине диагонали основания, то полная поверхность такой призмы равновелика правильному восьмиугольнику, построенному на стороне ее основания. Проверить это: 1) с помощью вычисления; 2) без вычисления.

8. В прямом параллелепипеде точка пересечения его диагоналей отстоит от плоскости основания на 3 см, от боковых граней на 2 см и 4 см; периметр основания равен 30 см. Определить полную поверхность и объем параллелепипеда.

9. Для шлифовки мелких костяных изделий требуется сделать из полукотельного железа барабан, имеющий форму правильной шестиугольной призмы со стороной основания в 200 мм и длиной в 800 мм. При работе барабан загружается на 45% объема. Определить количество железа, потребное для изготовления пяти таких барабанов, и вес изделий, шлифуемых одновременно в них, принимая удельный вес кости равным 1,2.

10. Правильная шестиугольная чугунная призма высверлена по оси. Длина ее 4,8 м; удельный вес 7,25. Диаметр цилиндрического отверстия 32 см и сторона основания 32 см. Найти вес призмы.

11. Если плоскость, проходящая через гипотенузу прямоугольного треугольника, составляет с катетами углы в 30° и 45°, то с плоскостью треугольника она составляет угол в 60°. Доказать.

12. Около шара радиуса R описан усеченный конус, объем которого в m раз больше объема шара. Определить радиусы его оснований.

13. Если диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с двумя ребрами углы в 60°, то с третьим ребром она образует угол в 45°. Доказать.

14. Поверхность шара, вписанного в данный конус, равновелика его основанию. Требуется определить: 1) как относится поверхность этого шара к боковой поверхности конуса; 2) какую часть объема конуса составляет объем шара.

15. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, если боковое ребро равно b, а плоский угол при вершине 36°.

16. Как относится объем конуса, описанного около правильного тетраэдра, к объему шара, вписанного в этот тетраэдр?

17. Основанием пирамиды служит ромб со стороной в 25 дм и меньшей диагональю 30 дм; высота пирамиды проходит через вершину тупого угла и равна 32 дм. Определить полную поверхность этой пирамиды.

18. Луночка, ограниченная полуокружностью и дугой в 120°, вращается вокруг прямой, соединяющей середины ее дуг. Хорда луночки равна a. Определить поверхность и объем полученного тела.

19. В равносторонний конус вписан полушар так, что большой круг полушара находится в плоскости основания конуса. В каком отношении окружность касания делит боковую поверхность полушара и боковую поверхность конуса?

20. Основанием правильной четырехугольной пирамиды служит квадрат, вписанный в основание шарового сегмента. Высоты пирамиды и сегмента совпадают. Радиус шара $R=6{,}5$ м, высота $h=5$ м. Найти боковую поверхность пирамиды.

21. Куб, ребро которого равно a, срезан по углам плоскостями, проведенными через середины каждых трех сходящихся ребер. Определить объем и поверхность полученного многогранника.

22. В равносторонний конус с образующей a вписан шар, а в него вписан куб. Определить ребро куба.

23. В данной правильной треугольной призме боковое ребро равно стороне основания a. Определить площадь сечения, проведенного через сторону основания под углом 60° к плоскости основания.

24. В правильном тетраэдре соединены между собой центры боковых граней. Определить, во сколько раз площадь полученного треугольника менее площади основания.

25. Секущая ACD, проведенная через центр окружности, равна 40 см; касательная $AB=20$ см. Определить объем и поверхность тела, образуемого вращением вокруг AD фигуры, ограниченной прямыми AB и AD и дугой BMD.

26. Около шара радиуса r описан конус, у которого боковая поверхность относится к поверхности шара как 3:2. Определить радиус основания.

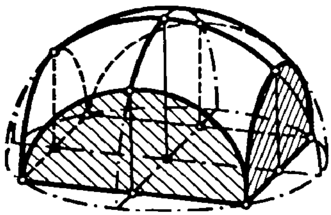


Рис. 46.

27. В основание полушара вписан квадрат. Через стороны квадрата проведены плоскости, перпендикулярные к плоскости основания полушара (рис. 46). Эти плоскости отсекают от полушара четыре сферических полусегмента. Оставшаяся часть дает часто встречающуюся форму свода. Сторона квадрата a=6,5 м. Вычислить объем, занимаемый сводом.

28. В основание полушара вписан прямоугольник со сторонами a и b. Через стороны прямоугольника проведены четыре перпендикулярные к основанию плоскости, отсекающие от полушара четыре части (полусегменты). Найти объем оставшейся части.

29. По сторонам a и b прямоугольника определить объем и поверхность тела, образуемого его вращением вокруг оси, проходящей через вершину параллельно диагонали.

30. По сторонам a и b прямоугольника определить объем и поверхность тела, образуемого его вращением вокруг перпендикуляра к диагонали, проведенного через его конец.

31. Треугольник, площадь которого равна 36 см^2, вращается вокруг одной из сторон. Объем полученного тела 192π см^3, а его поверхность 216π см^2. Определить стороны треугольника и указать, какая из них служила осью.

32. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде даны стороны оснований a и b и высота h. Определить объем ее части, заключенной между боковой гранью и параллельной ей плоскостью, проведенной через сторону верхнего основания.

33. Треугольник, стороны которого относятся между собой как 13:14:15, вращается вокруг средней стороны. В полученное тело вращения вписан шар. Как относится объем шара к объему тела вращения?

34. Прямоугольник со сторонами a и b перегнут по диагонали так, что плоскости треугольников образовали прямой двугранный угол. Определить расстояние между вершинами прямоугольника, не лежащими на ребре двугранного угла.

35. Пусть будут V, V_1 и V_2 объемы тел, полученных вращением прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы и катетов. Доказать, что $\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$.

36. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB=c$ и острым углом в 15°. Если боковые грани C_1CAA_1 и C_1CBB_1 развернуть в одну плоскость и в ней провести линии C_1A и C_1B, то они образуют прямой угол. Определить объем и боковую поверхность этой призмы.

37. В конус вписан ряд шаров, из которых первый касается основания и боковой поверхности, а каждый следующий — боковой поверхности и предыдущего шара. Высота конуса равна 8 см, а радиус основания 6 см. К какому пределу стремится сумма объемов вписанных шаров, если их число неограниченно возрастает.

38. В кубе с ребром a построен шар так, что его поверхность касается всех ребер куба. Определить объем части шара, заключенной внутри куба.

39. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна a, боковое ребро $4a$. Определить площадь сечения, проведенного через диагональ призмы параллельно диагонали основания.

40. Для данной правильной четырехугольной усеченной пирамиды построена равновеликая ей правильная четырехугольная призма так, что центры их оснований совпадают, а боковые ребра взаимно пересекаются. Стороны оснований усеченной пирамиды 2 м и 11 м. Требуется: 1) определить сторону основания призмы; 2) узнать, в каком отношении (считая сверху) делятся боковые ребра точками их пересечения; 3) узнать, в каком отношении делятся линией пересечения боковые поверхности.

41. В шар вписан конус так, что его высота делится центром шара в среднем и крайнем отношении. Определить, во сколько раз объем шара более объема конуса.

42. В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, дано: $\angle BAD=60°$, $AB=8$ см, $AD=5$ см и $BC=CD$. Определить объем и поверхность тела, образуемого вращением этой трапеции вокруг стороны AD.

ОТВЕТЫ

§ 1.

1. 1) Нет; нет; 2) да; да; нет. **2.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **3.** 18,5 см^2. **4.** $\frac{a}{4}\sqrt{3a^2+4b^2}$. **7.** 1) 8 см; 2) $a\sqrt{2}$. **8.** Окружность, центром которой служит основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость. **9.** $\sqrt{\frac{Q}{\pi}+a^2}$. **10.** Прямая, проходящая через центр окружности и перпендикулярная к ее плоскости. **11.** Плоскость, перпендикулярная к отрезку, соединяющему данные точки, и делящая его пополам. **12.** 26 дм^2. **13.** $\sqrt{b^2+\frac{a^2}{2}}$. **14.** $MA=\frac{8\sqrt{3}}{3}$; $MB=4\sqrt{2}$; $MC=8$. **15.** $OA=OB=OC=$ $=\sqrt{l^2-OM^2}$. **16.** 9 см. **17.** 4 см. **18.** 1 см. **19.** 1) $2\sqrt{2}$ см; 2) $\sqrt{2}$ см; 3) 45°. **20.** 6,5 см. **21.** 2,5 см; $KB=\sqrt{10{,}25}\approx3{,}2$ (см). **22.** 1) $\sqrt{f^2-a^2}$; 2) 37 м; 3) 8 см и 17 см. **23.** 3,5 дм^2. **24.** 2 см. **25.** $\frac{ab}{a+b}$, если C и D лежат по одну сторону от плоскости M, и $\frac{ab}{a-b}$ (если $a>b$) или $\frac{ab}{b-a}$ (если $b>a$), если C и D лежат по разные стороны от плоскости M. При $a=b$ в 1-м случае имеем $\frac{a}{2}$, во 2-м ∞. **26.** $\sqrt{2b^2-a^2}$. **27.** 1) 56; 2) 20. **28.** 1) *Указание.* Из произвольной точки наклонной опустить перпендикуляр на плоскость угла и показать, что его основание лежит на биссектрисе угла; 2) 18 м; 12 м.

§ 2.

1. $5\sqrt{2}$ см; 45°. **2.** 241 см. **3.** $\frac{h}{3}\sqrt{15}$. **4.** 1,5b. **5.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **6.** 1) $2h$; 2) $h\sqrt{2}$; 3) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}$. **7.** 30°. **8.** 60°. **9.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) $a\sqrt{6}$. **10.** $3a$. **11.** 35° или 115°.

§ 3.

1. 1) 2,6 м или ≈5,5 м; 2) ≈3,9 м. **2.** 1) 117 см; 2) 9 м. **3.** 10,5 см. **4.** 6 см. **5.** 3 см. **6.** 36 см или 44 см. **7.** 14 дм. **8.** $2a$. **9.** 12 см, $1\frac{5}{7}$ см. **10.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **11.** 1) Через данную точку провести плоскость, пересекающую данную плоскость, и в ней провести прямую, параллельную линии пересечения двух плоскостей. Задача имеет бесконечно много решений. 2) Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой, и через нее произвольную плоскость. Задача имеет бесконечно много решений.

12. *Указание.* Задача имеет бесконечно много решений. **13.** $\frac{ab\sqrt{3}}{2}$. **14.** 28 см.

15. $\frac{a(b+c)}{b}$. **16.** 3 см. **17.** 3,5 см. **18.** 19 см и 17 см. **19.** 5 см и 3 см. **20.** 6 дм.

21. 25 см и 39 см. **22.** $\sqrt{c^2-b^2+a^2}$. **23.** 8 см. **24.** $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$. **25.** $\frac{ab}{4}$.

26. $\frac{5a^2\sqrt{2}}{16}$. **28.** $\frac{a}{2}\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)$. **29.** 6 дм. **30.** 1) 120 см; 2) 45 см. **31.** 2 м. *Указание.* Соединить середину перпендикуляра с концами наклонной. **32.** $\frac{a^2-b^2+c^2}{2c}$; $\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$. **33.** 5 см; 9 см; 12 см. **34.** 1) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

2) $\sqrt{a^2+b^2+c^2-bc}=25$. **35.** $\frac{d}{h}\sqrt{h^2+\frac{a^2}{3}}$; $\frac{a(h+d)}{h}$. **36.** $KB=BL=LD_1=D_1K=$

$=\frac{a}{2}\sqrt{5}$; $BD_1=a\sqrt{3}$; $KL=a\sqrt{2}$; ромб. **37.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **38.** 1) 63 дм^2; 2) $3a^2$.

§ 4.

1. 1) 6 дм; 2) 10 см. **2.** $a\sqrt{2}$. **4.** 30°. **5.** 1) 110°; 2) $2a$. **6.** 1) 7 см; 2) $2a$; 4. **7.** 5 дм. **8.** 8 см^2; 4 см. **9.** 13 см. **10.** 1) 3,36 см; 2) 4. **11.** $2a$. **12.** 7,3 см. **13.** 1. **14.** Плоскость, перпендикулярная к данной плоскости и проходящая через данную прямую. **15.** 1) *Указание.* См. учебн. Киселева, ч. II, § 43 и 36; 2) или одна, или бесконечно много плоскостей. **16.** 109 см. **17.** 1) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; $\sqrt{a^2+c^2}$; $\sqrt{b^2+c^2}$; $\frac{a}{2}$. **18.** 3 дм^3. **19.** 460,8 см^2.

§ 5.

1. а) 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) нет; 5) нет. б) 1) Нет; 2) нет; 3) да. **3.** $55° \le x \le 95°$. **4.** $\sqrt{6}$. **5.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **7.** 60°. **8.** 90°. **9.** 45°. **10.** $\sqrt{2}$. **11.** 3 дм. **12.** 7 см.

§ 6.

1. $a\sqrt{2}$. **2.** $DA=DB=DC=CB=CA=AB=a\sqrt{2}$. **3.** $a^2\sqrt{3}$; $\frac{1}{2}$. **4.** 1) 3; 2) 6. **5.** $\frac{4}{3}a^2$. **6.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$; 2) $\sqrt{6}$. **7.** $a(\sqrt{6}-2)\approx 0{,}45a$. **8.** $a(2-\sqrt{2})\approx 0{,}6a$.

§ 7.

1. 1) 3; 2) 7; 3) 11; 4) 17; 5) 29. **2.** 1) 13 м и 9 м; 2) $\sqrt{277} \approx 16{,}6$ (см) и 15 см. **3.** 8 см и 10 см. **4.** 7 см и 5 см. **5.** $a\sqrt{2}$ и $2a$. **6.** 1) 5 см и 7 см; 2) 4 м и $\sqrt{12} \approx 3{,}464$ (м). **7.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **8.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **10.** 1) 2 м^2; 2) 40 см и 9 см. **11.** 2 м^2 и 3 м^2. **12.** 273 см^2 и 175 см^2. **13.** 1872 см^2. **14.** $\frac{Q}{a}$. **16.** 4; 10; 0; $n(n-3)$. **17.** 30; 15; 10. **18.** 1) Параллелограммы; 2) 2; 3) на три части; 4) призму. **19.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **20.** 1) 22 см; 2) 9 см. **22.** $Q\sqrt{2}$. **23.** $2a$ и $a\sqrt{5}$; $a^2\sqrt{3}$ и $2a^2$. **24.** $3a^2$. **25.** $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9} \approx 6{,}928$ м^2. **26.** 12. **27.** 120°. **28.** $Q\sqrt{2}$. **29.** 144 см^2. **30.** 4,5 см. **31.** 7,5 см. **32.** 53°49′. **33.** 12 см.

§ 8.

1. 2 м. **2.** а) 1) 29 см; 2) $11\frac{1}{2}$ дм; 3) $\sqrt{7\frac{5}{6}} \approx 2{,}8$ (м); б) 1) $2l^2$; 2) $3Q\sqrt{2}$. **3.** 1) 1464 см^2; 2) 6 см; 14 см; 16 см. **4.** 124 дм^2. **5.** $2\sqrt{M^2+2Qh^2}$. **6.** 188 м^2. **7.** 1416 см^2. **8.** $220+24\sqrt{3} \approx 260$ (см^2); 70 см^2. **9.** 288 см^2. **10.** $2\sqrt{M^2+N^2}$. **11.** 2 м. **12.** 4 м. **13.** 1) $3ab+\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$; 2) $4ab+2a^2$; 3) $6ab+3a^2\sqrt{3}$. **14.** $192+32\sqrt{6} \approx 270$ (см^2). **15.** 6 см и 3 см или 4 см и 7 см. **16.** $3l^2\sqrt{3}$. **17.** 4980 см^2. **18.** 9 м^2 и 1 м. **19.** 34 см, 20 см, 18 см. **20.** 25 см, 25 см, 30 см, 24 см. **21.** 906 см^2 и 240 см^2. **22.** 3 м^2. **23.** $10R^2$. **24.** 5 см. **25.** 1) 144 см^2; 2) 2016 см^2. **26.** 1) 2 см; 2) 576 см^2. **27.** 1) $2a^2+2a\sqrt{4b^2-a^2}$; 2) b; $\sqrt{b^2+2a^2}$; $\sqrt{4a^2+b^2}$; $a\sqrt{2b^2-a^2}$; $ab\sqrt{2}$. **28.** $ab\left(\sqrt{2}+1\right)$. **29.** 492 см^2.

§ 9.

1. 1) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{b^2-a^2}$. **2.** 1) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+\frac{a^2}{3}}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+a^2}$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+3a^2}$. **3.** 9 см. **4.** 5 см и 6 см. **5.** 12 см. **6.** 3 см. **7.** 12 см. **8.** $\frac{ah}{a+h}$. **9.** 14 м^2. **10.** ah; $\frac{1}{4}a\sqrt{12h^2+3a^2}$. **11.** $\frac{1}{4}a\sqrt{3b^2-a^2}$. **12.** $\frac{1}{4}Q$. **13.** 25 кв. ед.; 100 кв. ед.; 225 кв. ед. **14.** $\frac{Q}{n^2}$, $\frac{4Q}{n^2}$, $\frac{9Q}{n^2}$, ...,

$\frac{(n-1)^2 Q}{n^2}$; 16, 64, 144,... 15. 245 см². 16. $\frac{h}{\sqrt{2}}$; $\frac{h}{\sqrt{3}}$; $\frac{h}{\sqrt{5}}$; $\frac{h}{\sqrt{n}}$.

17. 1) 11 м; 2) 35 см. 18. $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}=\frac{3}{7}$. 19. $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

§ 10.

1. 1) $\frac{3a}{4}\sqrt{4h^2+\frac{a^2}{3}}+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; 2) $a\sqrt{4h^2+a^2}+a^2$; 3) $\frac{3a}{2}\sqrt{4h^2+3a^2}+$ $+\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. 2. 288 см². 3. $2r(k+r)\sqrt{3}$. 4. $\frac{1}{2}a$. 5. 1,8 м и 4 м. 6. $\frac{1}{4}a^2\sqrt{15}$.

7. $3a^2$. 8. $\sqrt{-2h^2+\sqrt{4h^4+p^2}}$. 9. 16 см и 6 см или 12 см и 8 см.

10. $\sqrt{2}\approx 1{,}4$ (см). 11. $3a^2$. 12. $5R^2$. 13. $\frac{3}{2}a^2$. 14. 26 м². 15. 768 см².

16. $22+\sqrt{136}\approx 33{,}66$ (м²). 17. 540 см². 18. 448 см². 19. 6 дм². 20. 10 м².

21. $\frac{1}{2}a^2\left(6+\sqrt{7}\right)\approx 4{,}3a^2$. 22. $\frac{1}{4}a^2\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)\approx 1{,}40a^2$.

§ 11.

1. 9 см. 2. 1 дм. 3. $\sqrt{c^2-\frac{1}{3}(a-b)^2}$; $\sqrt{c^2-\frac{1}{2}(a-b)^2}$; $\sqrt{c^2-(a-b)^2}$.

4. 56 см и 24 см. 5. 10; $n(n-3)$. 6. 6 см. 7. 2 см и 10 см. 8. $\sqrt{2}$. 9. $1\frac{8}{9}$ см;

$6\frac{2}{9}$ см; $5\frac{1}{7}$ см. 10. $a-b$. 11. 2 см. 2. $20\sqrt{2}\approx 28$. 13. $\frac{1}{4}\left(a^2-b^2\right)$.

14. 12 см². 15. $\frac{1}{2}(Q-q)$. 16. 24 м²; 30°. 17. 14 см². 18. 39 м и 51 м.

19. 16 см². 21. 32 м². 22. $\frac{h\sqrt[4]{q}}{\sqrt[4]{Q}+\sqrt[4]{q}}$. 23. 50 м². 24. $\frac{1}{9}\left(Q+4q+4\sqrt{Qq}\right)=8$;

$\frac{1}{9}\left(4Q+q+4\sqrt{Qq}\right)=18$.

§ 12.

1. 168 м². 2. 54 дм². 3. 36 см². 4. 1) $\frac{3}{4}(a+b)\sqrt{4h^2+\frac{(a-b)^2}{3}}+\frac{\left(a^2+b^2\right)\sqrt{3}}{4}$;

2) $(a+b)\sqrt{4h^2+(a-b)^2}+a^2+b^2$; 3) $\frac{3}{2}(a+b)\sqrt{4h^2+3(a-b)^2}+\frac{3}{2}\left(a^2+b^2\right)\sqrt{3}$.

5. $\frac{ab}{a+b}$. 6. 1) 20 см и 10 см; 2) 2 см и 12 см. 7. $\sqrt{3a^2-\frac{4S}{\sqrt{3}}}$.

8. $\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{P^2-(Q-q)^2}$. 9. $\frac{1}{4}(a+b)\left[4c+\sqrt{4c^2+3(a-b)^2}\right]=16$. 10. 1920 см².

11. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a\left(2b^2-a^2\right)}{2b+a}}$. Задача имеет решение, если $a < b\sqrt{2}$. 12. 5:9.

§ 13.

1. 5 м. 2. $\frac{\pi Q}{4}$. 3. 36 см^2. 4. 3 дм. 5. $40\sqrt{3}\approx 70$ (см^2). 6. 90°. 7. $\frac{1}{4}a^3$. 8. 3 дм. 9. 10 м. 10. 1 м и 3 м. 11. Около 912 т. 12. 4 см и 14 см. 13. Около 40 м^2. 14. Около 116 м^2. 15. Около 77 м. 16. $2\pi ab$. 17. π^2. 18. πh^2. 19. R. 20. πQ. 21. 1) π; 2) $H=\frac{3}{2}R$. 22. $\frac{3}{2}P = 75$ см^2. 23. 1) 6 см; 2) $H=R$. 24. 1) 75 см; 2) $\approx$26,2 (см). 25. $\pi M+2Q$. 26. 1) $H=2R(2\pm\sqrt{3})$; 2) $H=2R(2+\sqrt{5})$. 27. $\pi:3$. 28. Расстояние секущей плоскости от плоскости основания равно: $\frac{1}{2}\left(H\pm\sqrt{H^2-R^2}\right)$; должно быть $H\ge R$. 29. $\pi a^2\left(\sqrt{2}+1\right)$. 30. $2\pi a^2\approx 628$ (см^2).

§ 14.

1. 5 м. 2. $\frac{1}{2}L$. 3. R^2. 4. 45°. 5. $\frac{H\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}7H$. 6. 1) $\frac{1}{4}\pi R^2$; 2) $\pi R^2\cdot\frac{m^2}{(m+n)^2}$. 7. 500. 8. R^2. 9. $2H^2$. 10. 1) $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $100\sqrt{2}\approx 141{,}4$ (см^2). 11. $\frac{3}{4}l$. 12. 3 см. 13. $\frac{HR\sqrt{2}}{H+R\sqrt{2}}$. 14. $\frac{HR\sqrt{3}}{H+R\sqrt{3}}$. 15. 80π. 16. 24π. 17. $\approx$25,3 м^2. 18. $\approx$38 листов. 19. $\approx$17,1 м. 20. 1) 240π см^2; 2) $286{,}72\pi$ м^2. 21. 11 см; 11 см; 8 см. 22. 2:1. 23. 1) 1:2:3; 2) πH^2. 24. 2:3. 25. Радиус основания равен большей части образующей, разделенной в среднем и крайнем отношении. 26. 1) Образующая равна диаметру основания (равносторонний конус); 2) радиус основания равен большей части образующей, разделенной в среднем и крайнем отношении. 27. 1) 216°; 2) $360°\cdot\frac{R}{L}$; в случае равностороннего конуса 180°; 3) а) $\approx$255°; б) $\approx$312°. 28. 1) 30°; 2) 1 м. 29. 1) 25 см^2; 2) 11 см^2; 3) $\frac{\pi M\sqrt{15}}{3}$. 31. $\pi:\sqrt{7}\approx 1{,}2$. 32. 20 см. 33. $\frac{nH\pm\sqrt{n^2H^2-2nHL}}{2n}$; $\frac{3}{4}H$; $\frac{1}{4}H$.

§ 15.

1. 5 м. 2. $R-r$. 3. 20 см. 4. $2H$. 5. a и $2a$. 6. 30 дм^2. 7. 1) 9 м^2; 2) $\frac{1}{4}\left(\sqrt{M}+\sqrt{m}\right)^2$. 8. 9 и 16. 9. $\frac{1}{2}$, считая от большего основания. 10. 4 см. 11. $35\pi\approx 110$ (дм^2). 12. $2\pi(R^2-r^2)$. 13. 100π см^2. 14. 1) 15 м; 2) 28 дм и 12 дм. 15. $\approx$1,04 м^2. 16. $\approx$0,942 м^2. 17. Около 4,3 кг. 18. $\approx$7025 см^2. 19. 1) 5 см; 2) а) 5 см; б) 9 см. 20. $2\pi F$. 21. $\frac{SR^2}{R^2-r^2}$. 22. $\frac{2Rr}{R+r}$. 23. 1) $\pi\left(R^2-r^2\right)\sqrt{2}$;

2) $2(Q-q)$. **24.** 1) $\frac{SH}{L\pi}$; 2) $\frac{l}{\pi}\sqrt{S^2-(Q-q)^2}$. **25.** $1+\sqrt{6}\approx 3{,}45$ (см).

§ 16.

1. 24 м^2. **2.** 6 см. **3.** 1) ≈8,4; 2) ≈9,57 см; 3) ≈71 кг. **4.** 1) $\frac{1}{9}l^3\sqrt{3}$; 2) $\frac{1}{6}S\sqrt{\frac{1}{6}S}$. **5.** 1) 3 см; 2) 25 см; 3) 6 лин. ед. **6.** 1:8; 1:27; 1:64; 1:n^3. **7.** 1,8. **8.** ≈2,29 м. **9.** ≈0,11 мм. **10.** ≈0,46 т. **11.** ≈1,23 м; ≈0,94 м; ≈0,67 м. **12.** $\sqrt[3]{2}\approx 1{,}26$; $\sqrt[3]{3}\approx 1{,}44$; $\sqrt[3]{n}$. **13.** Вдвое. **14.** 1) 30 м; 2) 3 см. **15.** 1) 4500 см^3; 2) $\frac{mnQ\sqrt{Q}}{m^2+n^2}$. **16.** 1) 6 м^3; 2) $\sqrt{Q_1Q_2Q_3}$. **17.** $\frac{1}{8}l^3\sqrt{2}$. **18.** $\frac{abS}{4(a+b)}$. **19.** 1) 360 см^3; 2) 36 м^3. **20.** 60 см^3. **21.** 780 см^3. **22.** 1) 3 м^3; 2) $\sqrt{\frac{MNQ}{2}}$. **23.** 525 см^3; 290 см^2. **24.** 10 см; 144 см^2; $\frac{135\sqrt{3}}{2}\approx 116{,}9$ (см^3). **25.** 17280 см^3. **26.** 1) $\frac{1}{4}a^2b\sqrt{3}$; 2) a^2b; 3) $1{,}5a^2b\sqrt{3}$. **27.** 0,5. **28.** Около 930 кг. **29.** ≈192,72 кг≈190 кг. **30.** 1) 3 м^3; 2) $8\sqrt{2}\approx 11{,}3$ (см^3) или 32 см^3. **31.** 1) $\frac{1}{8}a^3$; 2) $Q\cdot\sqrt{\frac{Q}{3}}$. **32.** $2\frac{1}{4}R^2$. **33.** 6 м^3. **34.** $1\frac{1}{2}a$. **35.** 6048 м^3. **36.** 105 м^3. **37.** 1) 48 см^3; 2) 3,4 м; 3,4 м и 3,2 м. **38.** 12 см^3. **39.** 35200 м^3. **40.** 3 человека. **41.** 7320 см^3. **42.** R^3. **43.** ≈305 м^3. **44.** 200 дм^3. **45.** 1) $\sqrt{2}$ м^3; 2) $a^2\sqrt{2c^2-b^2}=450$. **46.** $\frac{1}{2}a^3\sqrt{2}$. **47.** $\frac{1}{2}abc\sqrt{2}$; $(a+b)c\sqrt{3}$; 45°. **48.** $\frac{1}{2}a^3$. **49.** 2 см. **50.** 1) 45 см^3; 2) 100 м^3. **51.** $\frac{1}{8}a^3\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}a^2\left(2+\sqrt{2}\right)$. **52.** $\frac{1}{8}ac\sqrt{12a^2-3c^2}$. **53.** 1) 3060 м^3; 2) 1 м^3. **54.** 2 м^3. **55.** am^2. **56.** Около 0,75 мм. **57.** Около 0,95. **58.** ≈2,45 мм^2. **59.** ≈8,4 мм. **60.** ≈4500 л. **61.** ≈630 см^3. **62.** πa^3. **63.** $4\pi\sqrt{2}\approx 18$. **64.** 1) 1:8; 1:27; ...; 1:n^3; 2) как квадраты радиусов; как высоты; 3) в 2 раза; в n раз; 4) в $\sqrt{2}\approx 1{,}4$ (раза); в $\sqrt{n}$ раз; 5) 4 лин. ед. **65.** 1) $v_2:v_1=1:2$; 2) $v_2:v_1=1:8$. **66.** 4:1. **67.** $\frac{SC}{4\pi}$. **68.** 1) $\frac{a^3}{4\pi}$; 2) $\frac{3H^3}{4\pi}$. **69.** 1) $V_{\text{I}}:V_{\text{II}}=1:2$; 2) $S_{\text{I}}:S_{\text{II}}=1:1$. **70.** $\frac{3}{4}\pi a^3$. **71.** ≈200 кг. **72.** ≈39 кг. **73.** ≈61 кг. **74.** ≈4,0 кг. **75.** 240 г.

§ 17.

1. 1) $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$; 2) $\frac{1}{6}a^2\sqrt{4b^2-2a^2}$; 3) $\frac{1}{2}a^2\sqrt{3\left(b^2-a^2\right)}$. **2.** 32 м^3. **3.** 7 см. **4.** 1) $h\left(k^2-h^2\right)\sqrt{3}$; 2) $\frac{1}{6}\sqrt{Q\left(S^2-Q^2\right)}=12$. **5.** 1) $\frac{1}{6}b^3$; 2) $\frac{1}{24}a^3\sqrt{2}$.

6. $a^2\sqrt{3}$; $\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$. 7. $2a^3\sqrt{3}$; $\frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$. 8. $\frac{1}{24}a^3\sqrt{2}$; в 2 раза меньше. 9. 1) 6:1; 2) 9:2. 10. 1) $\frac{1}{12}a^3$; 2) $\frac{1}{3}h^3\sqrt{3}$. 11. 1) $\frac{3}{4}a^3$; 2) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}V}$; 60°. 12. 360 м^3. 13. 120 см^3. 14. 48 см^3. 15. $\frac{Q\sqrt{Q}}{3\sqrt[4]{3}}$. 16. 420 см^3. 17. 1) 1800 см^3; 2) 16 см^3. 18. 60 см^2. 19. 500 см^3.20. $\frac{1}{6}abc$. 21. 1) 8 см^3; 2) 4 м^3. 22. $\sqrt{11}$. 23. 400 см^3, 180 см^2. 24. $\frac{1}{3}$ м^3. 25. 80 см^3. 26. 576 см^3. 27. 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{h}{\sqrt[3]{2}} \approx 0{,}8h$. 28. 1:7:19:37:61. 29. $1:\left(\sqrt[3]{2}-1\right):\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right) \approx 50:13:9$. 30. 27:98. 31. 1:9, 1:27. 32. $16\pi \approx 50$. 33. Около 10 т. 34. 72 воза. 35. ≈1,6 т. 36. ≈0,35 м. 37. 9π м$^3 \approx 28$ м^3. 38. 12π см$^3 \approx 38$ см^3. 39. 96π см$^2 \approx 300$ см^2. 40. $\frac{C^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 l^2 - C^2}$. 41. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\left(S^2-Q^2\right)Q}{\pi}}$. 42. 200π м$^2 \approx 628$ м^2. 43. 24π см$^3 \approx 75$ см^3. 44. $\frac{1}{8}\pi l^3$. 45. $\frac{7}{27}V$. 46. 1) $\sqrt{2}:\sqrt{3} \approx 0{,}8$; 2) $\sqrt[3]{3}:\sqrt[3]{2} \approx 1{,}145$. 47. 1) $\frac{3V}{\pi R}$; 2) $\frac{1}{3}M\sqrt{\pi Q}$; $\sqrt{\pi^2 M^2 + Q^2}$. 48. 25:36. 49. ≈2,9 дм^3. 50. $\frac{1}{2}R\sqrt[3]{4} \approx 0{,}8R$. 51. $\frac{\pi a^3}{108}\sqrt{6}$; $\frac{\pi a^2}{4}$. 52. $\pi a^2\sqrt{3}$; $\frac{1}{4}\pi a^3$. 53. $\frac{1}{3}\pi bh^2$. 54. $\frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$; $\frac{\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 55. 1) 4800π см$^3 \approx 15$ дм^3; 1320π см$^2 \approx 41$ дм^2; 2) $\frac{1}{4}\pi a^3$; $\frac{1}{2}\pi a^2\left(3+\sqrt{3}\right) \approx 7{,}4a^2$. 56. 1) 448π см$^3 \approx 1{,}4$ дм^3; 216π см$^2 \approx 6{,}8$ дм^2; 2) 800π см$^3 \approx 2{,}5$ дм^3; 1080π см$^2 \approx 34$ дм^2. 57. 240π см$^3 \approx 0{,}75$ дм^3; $84\pi\sqrt{3}$ см$^2 \approx 4{,}6$ дм^2. 58. $\frac{1}{2}\pi a^3$; $\frac{1}{2}\pi a^2\left(3+\sqrt{3}\right) \approx 7{,}4a^2$.

§ 18.

1. 1) 1520 л; 2) 10 м. 2. ≈52 т. 3. $10\frac{1}{3}$ м^3. 4. 2325 м^3. 5. 1) 20 м^2 и 45 м^2; 2) 5 м. 6. 1) 8 м^2; 2) 2 см^2 и 8 см^2. 7. 128 м^2 и 50 м^2. 8. 1900 м^3. 9. 1) $\frac{1}{12}\left(a^2+ab+b^2\right)\sqrt{3l^2-(a-b)^2}$; 2) $\frac{1}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)\sqrt{l^2-\frac{1}{4}(a-b)^2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(a^2+ab+b^2\right)\sqrt{l^2-(a-b)^2}$. 10. 1) $10\frac{1}{2}$ м^2; 2) 1900 м^3. 11. 109 см^3. 12. $\frac{1}{2}(a^3-b^3)$. 13. Объем средней части равен 28 см^3, объем боковой части

равен 12 см^3. 14. 3:4. 15. abh. 16. $\frac{2}{3}abh$. 17. $4\sqrt{2}$ м; 37 м^3; 152 м^3.

18. $\frac{Qh\sqrt{Q}}{3\left(\sqrt{Q}-\sqrt{q}\right)}$; $\frac{qh\sqrt{q}}{3\left(\sqrt{Q}-\sqrt{q}\right)}$. 19. $\frac{VQ\sqrt{Q}}{Q\sqrt{Q}-q\sqrt{q}}$. 20. $\frac{7m^2+4mn+n^2}{7n^2+4mn+m^2}=\frac{73}{31}$.

21. $\approx 2\%$. 22. ≈ 1 м^3. 23. ≈ 49 л. 24. $\frac{1}{3}\pi\left(R^3-r^3\right)$. 25. $63\pi\approx 200$. 26. $84\pi\approx 264$ (м^3). 27. 1) 8 см; 2) 2 м; 5,5 м; 12,5 м; 3) 7 см. 28. 7 см. 29. 54 см^3. 30. 1) 457π см^3; 2) $\frac{7}{24}\pi R^3\sqrt{3}\approx 1{,}6R^3$. 31. $\frac{1}{3}\pi^2\left(R^3-r^3\right)$. 32. 10 см и 20 см. 33. 3020π см^3; 476π см^2. 34. 1) $R=4r$; 2) $r=R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, т. е. r равно большей части R, разделенного в среднем и крайнем отношении. 35. 14 см. 36. 218π см^3; 386π см^3; 602π см^3. 37. 7:19:37. 38. $\frac{R^3-r^3}{R^3}$. 39. $\approx 1{,}05$. 40. $\frac{2}{3}\pi Rrh$.

§ 19.

2. ≈ 1312 тачек. 3. $\frac{1}{6}h\left[\left(2a+a_1\right)b+\left(2a_1+a\right)b_1\right]$ м^3. 4. $\approx 0{,}79$ т. 5. ≈ 28 м^3. 6. 52,5 дм^3. 7. $\approx 53{,}4$ дм^3. 8. $\frac{1}{6}hh_1(a+b+c)=\frac{hh_1}{2}\cdot\frac{a+b+c}{3}$. 9. 10 см. 10. $\frac{1}{2}a^2(b+c)$; $2a(b+c)$. 11. 1900 см^3; 1080 см^2. 12. 2) 3456 см^3. 13. $\frac{1}{12}a^2\sqrt{3}(l+m+n)$; $a(l+m+n)$.

§ 20.

1. 1) $16\pi\approx 50$ (м^2); 2) 314. 2. 2 см. 3. $\approx 4{,}8$ см. 4. $\frac{1}{4}\pi R^2$. 5. $\frac{1}{4}\pi R^2$. 6. 1) πR; 2) ≈ 785 км. 7. 12 см. 8. 12 см. 9. $24\pi\approx 75$ м. 12. 1) $\pi R\sqrt{3}$; 2) 4π м. 13. 3 см. 14. 8 см. 15. 36 дм^2. 16. $\sqrt{r_1^2+r_2^2}$. 17. 5 см. 18. ≈ 67 см.

§ 21.

1. 1) $\frac{4}{3}\pi\approx 4{,}2$ (м^3); 2) в 27 раз; в 64 раза. 2. Около 14 см. 3. 1) Около 39 см; 2) 6 см. 4. ≈ 168. 5. 1) 1000; 20 см; 2) 216. 6. Прибавка в весе у свинцового шара 0,0012 г, у стеклянного 2,8 г. Следовательно, опустится стеклянный шар. 7. 1) $33\frac{1}{3}\%$; 2) $\approx 47{,}6\%$. 9. ≈ 2148 см^3. 10. 1866 г$\approx$1,9 кг. 11. 10 см и 7 см.

12. $R\sqrt[3]{\frac{3\pi+1}{2\pi}}$. 13. $R\sqrt[3]{15}\approx 2{,}5R$. 14. ≈ 290 см. 15. 45π см^3 и 243π см^3. 16. 0,028.

17. $\frac{13}{24}$. 18. 635,5π≈2000 (м^3). 19. 5:16. 20. 3528 π см^3. 21. ≈62 кг. 22. ≈640 см^3. 23. $\frac{1}{3}\pi R^3$. 24. 112,5π дм^3. 25. $\frac{1}{3}\pi R^3\left(2-\sqrt{3}\right)$. 26. $\frac{1}{3}\pi R^3$, $\frac{2}{3}\pi R^3$ и $\frac{1}{3}\pi R^3$. 28. $12\frac{2}{3}\pi\approx 40$ (м^3) или $144\frac{2}{3}\pi\approx 450$ (м^3). 29. 34 182π см^3≈107 дм^3. 30. 6 см. 31. В выражение объема тела $V=\frac{1}{6}\pi a^3$ не входит радиус круга.

§ 22.

1. 1) 4 м^2; 2) M; 3) $3\pi R^2$. 2. 1) ≈314,16 см^2; 2) 562,5π м^3; 3) $\sqrt[3]{36\pi V^2}$. 3. 1) Увеличится в 16 раз и в 64 раза; в 25 раз и в 125 раз; 2) $\sqrt{m^3}:\sqrt{n^3}$; 3) $\sqrt[3]{m^2}:\sqrt[3]{n^2}$. 4. Большая поверхность равновелика сумме двух других. 5. 25π м^2. 6. 3) 3. 7. $S_ш:S_ц=\sqrt[3]{18}:3\approx 0{,}87$. 9. 400π м^2 или 1100π м^2. 10. $R\left(\sqrt{3}-1\right)$. 11. 910π см^2≈29 дм^2. 12. $\pi\sqrt{\left(r^2-r_1^2-h^2\right)^2+4r^2h^2}$. 13. $2R\frac{m-1}{m}$; $\frac{3}{2}R$. 15. $\pi(r^2+h^2)$. 16. $\frac{21\pi Q}{4\pi-3\sqrt{3}}$. 18. 1) 180π см^2; 2) $3R$. 19. $2Q\left(4-\sqrt{2}\right)\approx 5{,}2Q$. 20. $\frac{1}{5}$. 21. 512π см^2≈16 дм^2. 22. ≈840 м^2.

§ 23.

1. $\frac{1}{2}a$; $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ 2. 1) 7 см; 2) 3 см. 3. 8 дм. 4. 11 м. 5. $12R^2\sqrt{3}\approx 21R^2$. 6. 4 м. 7. 18 см. 8. 13 см. 9. $18R^2\sqrt{3}$; $6R^3\sqrt{3}$. 10. 1:2:3. 11. 1:5. 12. $\frac{b^2}{2h}$. 13. 3 м. 14. 1) $\frac{1}{4}a\sqrt{6}$; $\frac{1}{12}a\sqrt{6}$; 2) 1:3:9. 15. $\frac{1}{2}a\sqrt{2}\approx 0{,}7a$; $\frac{1}{6}a\sqrt{6}\approx 0{,}4a$. 16. 1) $\frac{1}{3}h$; 2) $h\left(\sqrt{2}-1\right)$. 17. 8,1 см. 18. 54 см^3. 19. $1{,}5h$. 20. 1) $H=R$; 2) $H>R$; 3) $H<R$. 21. 2 дм. 22. 5 дм. 23. 5 м. 24. 13 см. 25. $56R^2$. 26. $S_{сегм}=\pi R^2(2-\sqrt{2})$; $S_{пояса}=2\pi R^2\sqrt{2}$. 27. 2:3 (в обоих случаях). 28. $\frac{2Sm(m+n)}{4m^2+n^2}$. 29. $\frac{l^2}{2h}$. 30. 8 см или 2 см. 31. 9π м^2; 3π м^3. 32. 3 м. 33. 9:4. 34. $2\pi r\frac{l-r}{l}$. 36. $\pi r^2(5\sqrt{2}+7)\approx 44r^2$. 37. 12 см. 38. 20 см. 39. 5 м. 40. 2 см или 14 см. 41. $\sqrt{Rr}$. 43. 169π см^2; 532π см^3. 44. $\frac{1}{3}R$; $\frac{1}{3}\pi R\sqrt{3}\approx 1{,}8R$. 45. 9 дм. 46. $\frac{1}{2}R\left(\sqrt{6}\pm 2\right)\approx 2{,}22R$ и ≈0,22R. 47. $\frac{4R}{m+1}$; $\frac{4}{3}R$. 48. $\frac{6R}{m+2}$; $\frac{3}{2}R$. 49. 9:64.

§ 24.

1. $\pi a^3\sqrt{2}$; $4\pi a^2\sqrt{2}$. 2. 1) $3\pi a^3$; $12\pi a^2$; 2) 4:5. 3. 1:2:3. 5. πa^3; $4\pi a^2\sqrt{3}$. 6. $\frac{3}{4}\pi a^3\sqrt{3}$; $9\pi a^2$; 7. $1\frac{1}{4}\pi a^3$; $5\pi a^2\sqrt{3}$. 8. $\frac{1}{6}\pi a^3\left(3+2\sqrt{3}\right)$; $\pi a^3\left(3+\sqrt{3}\right)$. 9. 1) πa^3; $4\pi a^2\sqrt{3}$; 2) $\frac{7}{12}\pi a^3\sqrt{3}$; $3{,}5\pi a^2$. 10. $4{,}5\pi a^3$; $6\pi a^2\sqrt{3}$. 11. $3\pi a^3\sqrt{3}$; $12\pi a^2$. 12. $9\pi a^3$; $12\pi a^2\sqrt{3}$. 13. 280π см^3; 270π см^2. 14. 3400π см$^3\approx11$ дм^3; 1440π см$^2\approx45$ дм^2. 15. 504 π см$^3\approx1{,}6$ дм^3; 504 π см$^2\approx16$ дм^2. 16. $16\pi\sqrt{3}$ см^3; 120π см^2. 18. $4\pi Q$. 19. 1) $\frac{3}{4}\pi a^3\sqrt{3}$; $6\pi a^2$; 2) $\frac{1}{2}\pi a^3\left(\sqrt{2}+1\right)$; $2\pi a^2(2+\sqrt{2}\,)$. 20. $\frac{1}{6}\pi a^3\left(5+3\sqrt{2}\right)$; $3\pi a^2(1+\sqrt{2}\,)$. 21. $\frac{1}{24}\pi R^3\left(7+2\sqrt{3}\right)$; $\frac{1}{2}\pi R^2\left(3{,}5+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{4}\pi R^2\left(7+\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$. 22. $\frac{3}{4}\pi R^3$; $3\pi R^2$. 23. $\frac{7}{12}\pi R^3$; $2\frac{1}{2}\pi R^2$. 24. $\frac{1}{6}\pi R^3\left(3\sqrt{2}-4\right)$; $\frac{1}{2}\pi R^2\left(4-\sqrt{2}\right)$. 25. $\frac{1}{3}R$. 28. 1) $\frac{1}{3}\pi R^3\sqrt{3}$; $1\frac{1}{2}\pi R^2\left(2\sqrt{3}+1\right)$; 2) $\frac{1}{3}\pi R^3\left(2-\sqrt{2}\right)$; $\frac{1}{2}\pi R^2\left(4+3\sqrt{2}\right)$. 30. $\approx34{,}6$ кг. 31. $S\approx75$ дм^2; $V\approx22$ дм^3. 32. $V\approx2200$ м^3. 33. ≈1580 см^3 и ≈1580 см^2.

§ 25.

1. ≈35 м^3; ≈118 м^3; ≈457 м^3; ≈610 м^3. 2. 2:1. 3. 104 см^2; 64 см^3. 4. $2\frac{2}{3}R^3$; $2:\pi\approx\frac{7}{11}$. 5. $\sqrt{\frac{l(R+l)}{2}}=6$. 6. $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{m^2+mn+n^2}{mn}$. 8. 260 см^2; 240 см^3. 9. 5,84 м^2; ≈224 кг. 10. $\approx6{,}5$ т. 12. $\frac{1}{2}R\left(\sqrt{2m+1}+\sqrt{2m-3}\right)$ и $\frac{1}{2}R\left(\sqrt{2m+1}-\sqrt{2m-3}\right)$. 14. 1) 3:5; 2) $\frac{3}{8}$. 15. $\frac{1}{6}b^3\sqrt{2\sqrt{5}-4}$. 16. 8:1. 17. 24 м^2. 18. $\frac{5}{6}\pi a^2$; $\frac{\pi a^3}{216}\left(18-5\sqrt{3}\right)$. 19. Пополам; 9:7. 20. 120 м^2. 21. $\frac{5}{6}a^3$; $a^2\left(3+\sqrt{3}\right)$. 22. $\frac{1}{3}a$. 23. $\frac{4}{9}a^2\sqrt{3}$. 24. В 9 раз. 25. 4800π см^3; 960π см^2. 26. $r\sqrt{3}$ или $r\sqrt{2}$. 27. $\frac{\pi a^3}{12}\left(5-2\sqrt{2}\right)\approx160$ м^3. 28. $\frac{\pi}{24}\left[3a^2b+3ab^2+2a^3+2b^3-2\left(a^2+b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}\right]$. 29. $\frac{2\pi a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\frac{4\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 30. $\pi ab\sqrt{a^2+b^2}$; $2\pi(a+b)\sqrt{a^2+b^2}$. 31. 9 см, 10 см и 17 см; меньшая. 32. $\frac{1}{2}bh(a+b)$. 33. 3:7. 34. $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}}$. 36. $\frac{c^3}{16}$; $\frac{c^2}{4}\left(2+\sqrt{6}\right)$. 37. $\frac{256\pi}{7}\approx115$ (см^3). 38. $\frac{1}{12}\pi a^3\left(15-8\sqrt{2}\right)\approx0{,}97a^3$. 39. $3a^3$. 40. 1) 7 м; 2) 5:4; 3) в призме 5:4; в усеченной пирамиде 5:8. 41. В 4 раза. 42. 864π см^3 $\approx$ 2700 см^3; $326\pi\sqrt{3}$ см^2 $\approx$ 1800 см^3.

ОГЛАВЛЕНИЕ

А. Киселев. ГЕОМЕТРИЯ

Глава IV

Круглые тела

Н. Рыбкин. СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

Учебное издание

Киселев Андрей Петрович
Рыбкин Николай Александрович

ГЕОМЕТРИЯ

С т е р е о м е т р и я

10—11 классы

Учебник и задачник

Ответственный редактор *М. Г. Циновская*
Художественные редакторы
О. И. Белозерский, В. Р. Орловский
Оригинал-макет подготовил *А. Е. Косых*
Корректоры *Г. И. Мосякина, Е. Н. Полищук*

ЛР № 061622 от 23 сентября 1992 г.

Подписано к печати с готовых диапозитивов 24.04.95. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,0. Уч.-изд. л. 16,1. Тираж 30 000 экз. Заказ № 4873.

Качество воспроизведения соответствует качеству присланных диапозитивов.

Издательский дом «Дрофа».
105318, Москва, ул. Щербаковская, 3

Смоленский полиграфический комбинат Комитета Российской Федерации по печати. 214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

*Несколько издательств,
литературных агентств, типографий
и книготорговых фирм входят в состав
Издательского дома «Дрофа» или постоянно
сотрудничают с ним.
В том числе и зарубежные партнеры.
За последние два с небольшим года
увидели свет сотни книг общим тиражом
свыше 15 миллионов экземпляров.*

*Издательская политика «Дрофы» ориентирована
на читателей самых разных возрастов и интересов.
Художественная, энциклопедическая и прикладная
литература для детей и взрослых —
это ежемесячно десятки новых книг,
составляющих несколько серий.
Сегодня в планах «Дрофы» значительное место
занимают учебники, учебная и методическая
литература для всех типов общеобразовательных
учреждений, справочные и познавательные книги
для школы и домашнего образования.
Издательство приглашает к диалогу всех,
кто заинтересован во взаимовыгодном
и долгосрочном сотрудничестве.*