А. П. КИСЕЛЁВ

АЛГЕБРА

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

УЧЕБНИК
ДЛЯ 8—10 КЛАССОВ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Утверждено
Министерством просвещения РСФСР

ИЗДАНИЕ СОРОКОВОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва • 1963

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДВЕНАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ.

Настоящее издание печатается без изменения с одиннадцатого, в котором были сделаны некоторые изменения сравнительно с предыдущим изданием. Главнейшие из этих изменений следующие:

1) добавлено возвышение в квадрат многочлена, исследование уравнений и геометрическое представление комплексных чисел;

2) несколько изменён порядок изложения; например, теорема Безу, неравенства и неопределённое уравнение из «дополнений» перенесены в основной курс книги;

3) значительно увеличено число упражнений;

4) исправлены некоторые чертежи и дано несколько новых.

В составлении настоящего учебника принимал частичное участие А. Н. Барсуков.

А. Киселёв.

Ленинград.

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА.

В шестнадцатом и последующих изданиях второй части «Алгебры» Киселёва изменён текст в § 6—12 и в § 138, исправлен ряд мелких неточностей в других параграфах.

В двадцать четвёртом издании в соответствии с требованиями программы по теме «Комплексные числа» дополнено: § 140а и § 140б — Тригонометрическая форма комплексного числа. Добавлена тема «Исследование квадратного трёхчлена». Неравенства второй степени, § 182—187.

Дополнительный материал написан А. Н. Барсуковым.

Настоящее издание книги печатается без изменения с предыдущего издания.

А. П. Киселёв

АЛГЕБРА. ч. II.

Редактор *Л. А. Сидорова*. Технический редактор *Н. Н. Махова*
Корректор *Т. М. Графовская*

Подписано к печати с матриц 9/VII 1962 г. $60 \times 90/_{16}$. Печ. л. 14,5.
Уч.-изд. л. 15,13. Тираж 500 тыс. экз.
Учпедгиз, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.
Цена без переплёта 19,5 коп. Переплёт бум. 7,5 коп., коленкор. 15 коп.
Заказ № 602.

Типография изд-ва «Уральский рабочий», Свердловск, ул. имени Ленина, 49.

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ.

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СО СТЕПЕНЯМИ И КОРНЯМИ.

I. Возвышение в степень.

√ 1. **Действие возвышения в степень.** В начале курса мы уже видели, что возвышение в степень есть действие, посредством которого данное число (основание степени) берётся сомножителем столько раз, сколько единиц содержится в другом данном числе (показателе степени).

$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^5=32;\qquad (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=(-3)^4=81.$

$$a\cdot a\cdot a=a^3.$$

Вообще:
$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}}=a^n.$$

2. **Степень отрицательного числа.** При умножении относительных чисел мы видели, что произведение бывает положительно, если число отрицательных множителей чётное. В противном случае произведение будет отрицательным. Применяя это свойство к произведению разных отрицательных сомножителей, т. е. возвышению в степень отрицательного числа, мы получили правило (ч. I, § 30).

Чётная степень отрицательного числа положительна, нечётная — отрицательна.

Так: $(-2)^2=4;\qquad (-2)^6=64;\qquad (-5)^4=625;$
$(-2)^5=-32;\ (-2)^7=-128;\ (-5)^5=-3125$ и т. п.

3. **Возвышение в степень одночленов.** В первой части мы вывели правила возвышения одночлена в квадрат и куб. Покажем теперь, что по тем же правилам производится возвышение одночлена в любую степень.

а) Возвысим в степень n произведение abc. Пользуясь известными свойствами умножения, получим:

$$(abc)^n=\underbrace{(abc)\cdot(abc)\cdot(abc)\cdot\ldots\cdot(abc)}_{n\text{ раз}}=abc\cdot abc\cdot\ldots\cdot abc=$$

$$=\underbrace{(aa\ldots a)}_{n\text{ раз}}\cdot\underbrace{(bb\ldots b)}_{n\text{ раз}}\cdot\underbrace{(cc\ldots c)}_{n\text{ раз}}=a^nb^nc^n.$$

Чтобы возвысить в степень произведение, надо возвысить в эту степень каждый сомножитель отдельно и результаты перемножить.

б) Таким же способом найдём степень дроби $\frac{a}{b}$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n \text{ раз}}=\frac{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}=\frac{a^n}{b^n}.$$

Чтобы возвысить в степень дробь, надо возвысить в эту степень отдельно числитель и знаменатель и первый результат разделить на второй.

в) Пусть требуется возвысить в степень n число a^m. Будем иметь:

$$(a^m)^n=\underbrace{a^m\cdot a^m\cdot a^m\cdot\ \ldots\ \cdot a^m}_{n \text{ раз}}=a^{m+m+m+\cdots+m}=a^{mn}.$$

Чтобы возвысить степень какого-либо числа в другую степень, надо перемножить показатели степеней.

г) Возьмём теперь какой-либо одночлен, например $2a^2b^3$. Возвысим его в какую-либо степень n. Применяя выведенные правила, получим:

$$(2a^2b^3)^n=2^na^{2n}b^{3n}.$$

Чтобы возвысить в степень одночлен, надо возвысить в эту степень коэффициент, а показатели букв умножить на показатель степени, в которую возвышается одночлен.

Упражнения.

Произвести возвышение в степень.

1. $(-3)^5$; $(-7)^3$; $(-4)^1$; $(-10)^6$; $(-0,1)^5$.
2. $(3a^2b)^3$; $(-2a^2b^3)^3$; $(-5a^4b^2c)^4$.
3. $\left(\frac{x^3y}{z^3}\right)^4$; $\left(-\frac{3ab^3}{2c^2}\right)^3$; $\left(\frac{0,2a^3bc}{d^2}\right)^6$.

II. Возвышение в квадрат многочлена.

4. Вывод формулы. Пользуясь формулой $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, мы можем возвысить в квадрат трёхчлен $a+b+c$, рассматривая его как двучлен $(a+b)+c$:

$$[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)\cdot c+c^2=$$
$$=a^2+2ab+b^2+2(a+b)\cdot c+c^2.$$

Таким образом, с прибавлением к двучлену $a+b$ третьего члена c после возвышения суммы в квадрат прибавились два члена: 1) удвоенное произведение суммы первых двух членов на третий член и 2) квадрат третьего члена.

Теперь нетрудно четырёхчлен $a+b+c+d$ возвысить в квадрат, принимая сумму $a+b+c$ за один член:

$$[(a+b+c)+d]^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)\cdot d+d^2.$$

Подставляя вместо $(a+b+c)^2$ то выражение, которое мы нашли раньше, получим:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)\cdot c+c^2+ \\ +2(a+b+c)\cdot d+d^2.$$

Мы опять замечаем, что с прибавлением нового члена к возвышаемому в квадрат многочлену к степени прибавляются два члена: 1) удвоенное произведение суммы прежних членов на новый член и 2) квадрат нового члена. Очевидно, что такое прибавление к степени двух членов будет идти и дальше по мере прибавления новых членов к возвышаемому в квадрат многочлену. Значит:

Квадрат многочлена равен квадрату 1-го члена, плюс удвоенное произведение 1-го члена на 2-й, плюс квадрат 2-го члена, плюс удвоенное произведение суммы первых двух членов на 3-й, плюс квадрат 3-го члена, плюс удвоенное произведение суммы первых трёх членов на 4-й, плюс квадрат 4-го члена и т. д.

Конечно, члены многочлена могут быть и отрицательными.

Если в правой части последнего равенства раскроем скобки, то получим после перестановки членов:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+ \\ +2ad+2bc+2bd+2cd.$$

Можно поэтому предыдущее правило формулировать так:

Квадрат многочлена равен сумме квадратов всех его членов, сложенной с удвоенными произведениями каждого члена на каждый из последующих.

5. Замечание о знаках. В окончательном результате возвышения в квадрат многочлена со знаком плюс окажутся, во-первых, квадраты всех членов многочлена и, во-вторых, те удвоенные произведения, которые появились при умножении членов с одинаковыми знаками.

Например:

$$(3x^2-2x+1)^2=(3x^2)^2+2(3x^2)\cdot(-2x)+(-2x)^2+ \\ +2(3x^2-2x)\cdot 1+1^2=9x^4-12x^3+4x^2+6x^2-4x+1= \\ =9x^4-12x^3+10x^2-4x+1.$$

Упражнения.

4. $\left(2a^2-\frac{1}{2}a+1\right)^2$. 5. $\left(\frac{1}{2}x^2-4x-3\right)^2$.

6. $(-5a^3x+3a^2x^2-ax^3+3x^4)^2$. 7. $\left(0{,}3x^3-0{,}1x^2-\frac{3}{4}x+0{,}5\right)^2$.

Убедиться на следующих двух примерах, что квадрат многочлена не изменится, если мы переменим знаки перед всеми его членами на обратные.

8. $(a-b+c)^2=(-a+b-c)^2$.
9. $(2x^3-x^2-3x+1)^2=(-2x^3+x^2+3x-1)^2$.
10. Если верно равенство $(a-b)^2=(m-n)^2$, можно ли из него заключить, что $a-b=m-n$?