Н. М. Бескин

ВОПРОСЫ ТРИГОНОМЕТРИИ И ЕЕ ПРЕПОДАВАНИЯ

УЧПЕДГИЗ • 1950

Н. М. БЕСКИН

ВОПРОСЫ ТРИГОНОМЕТРИИ И ЕЁ ПРЕПОДАВАНИЯ

Утверждено
Министерством просвещения РСФСР
в качестве учебного пособия
для педагогических институтов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА — 1950

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга возникла из главы „Преподавание тригонометрии", входившей в состав моей книги „Методика геометрии" (Москва, 1947).

Несмотря на значительное увеличение объёма по сравнению с упомянутой главой, эта книга всё-таки не содержит детального разбора отдельных уроков, а посвящена главным образом обсуждению принципиальных вопросов, связанных с построением курса тригонометрии в средней школе. Эти вопросы каждый учитель должен решить для себя прежде, чем он приступит к составлению планов отдельных уроков.

Первые четыре главы изложены более подробно, чем следующие, потому что именно здесь (общий характер школьного курса тригонометрии, определение тригонометрических функций, формулы приведения и формулы сложения) сосредоточены все методические трудности и спорные вопросы преподавания тригонометрии. Всё остальное носит более технический характер и не вызывает столь коренных разногласий.

Ник. Бескин

ГЛАВА I

СОДЕРЖАНИЕ ШКОЛЬНОГО КУРСА ТРИГОНОМЕТРИИ.

§ 1. Критика сложившегося школьного курса тригонометрии.

Разрыв между школьным курсом тригонометрии и наукой.

Ни в одной математической дисциплине нет столь резкого разрыва между школьным курсом и наукой, как в тригонометрии. Школьные курсы алгебры и геометрии, хотя и далеки по своему содержанию от современной науки, но, во всяком случае, не содержат ничего противоречащего ей. Эти курсы содержат элементы науки, и ученик, усвоивший их, может беспрепятственно изучать математику дальше. Школьный же курс тригонометрии, как будет показано в этом параграфе, прививает ученикам антинаучные навыки, приносящие при дальнейшем изучении математики прямой вред. При изучении высшей математики приходится отучаться от многих идей, прививаемых в школьном курсе тригонометрии.

Ниже мы подробно рассмотрим противоречия между школьным курсом тригонометрии и наукой, а пока укажем, что эти противоречия, несмотря на их многообразность, имеют одну общую причину: *тригонометрия как наука представляет главу анализа, а в школьном курсе её рассматривают как главу геометрии.*

Цели преподавания тригонометрии в школе.

Преподавание математики в средней школе преследует различные цели. Одна из них — подготовка учеников к высшей школе. Эта цель — не единственная и даже не главная. Её роль для различных математических предметов различна. В курсе арифметики эта цель почти совсем стушёвывается, потому что арифметика имеет повседневное применение в практической жизни и необходима каждому человеку сама по себе, независимо от того, на какой ступени он прервёт своё образование. В алгебре и геометрии эта цель имеет несколько больший удельный вес. В курсе же тригонометрии эта цель является первостепенной. Непосредственные применения тригонометрии в практической жизни гораздо более ограничены, чем применения арифметики, алгебры и геометрии. Эти применения сводятся почти исключительно к решению прямоугольных треугольников. Есть также некоторые применения тригонометрии в школьном курсе физики: то же решение прямоугольных треугольников плюс теория гармонического колебания. Тот широкий курс тригонометрии, который проходится в средней школе, не может быть оправдан только этими примитивными применениями. Одна из важнейших его целей — подготовка к высшей школе. Само собой разумеется, что эта цель нисколько не исключает других целей и не противоречит им. Мы лишь должны не забывать о ней, рассматривая содержание курса тригонометрии. Изучение свойств тригонометрических функций играет также важную общеобразовательную роль, совершенно не зависящую от решения треугольников. Это изучение обогащает сведения учеников о функциях и их свойствах.

Поэтому содержание школьного курса тригонометрии следует обсудить с точки зрения того, даёт ли этот курс необходимую подготовку для изучения высшей математики и для изучения физики в средней школе и содействует ли он расширению кругозора учащихся в области изучения функций. Говоря о высшей математике, мы будем подразумевать потребности студентов втузов. Во-первых, это — самый многочисленный контингент «потребителей» тригонометрии. Во-вторых, если будет доказано, что школьный курс тригонометрии не годится в качестве фундамента даже для курса высшей математики во втузах, то это тем более будет относиться к гораздо более солидному курсу математики, проходимому на математических факультетах университетов и пединститутов.

Существует ли наука «тригонометрия»?

Часто приходится сталкиваться с возражением: не существует особой науки — тригонометрии. В современной математике тригонометрия никогда не выделяется в особую науку, равноправную с алгеброй или геометрией. О науке, называющейся «тригонометрия», говорят только в школьном курсе. Всё это верно, и тем не менее, в рамках школьного курса, выделение тригонометрии в особую науку вполне законно. Тригонометрия есть глава математического анализа, изучающая свойства некоторого класса функций и некоторые приложения этих функций. Поскольку курс анализа в средней школе отсутствует, эта глава ужé перестаёт быть главой, и её значение вырастает до ранга науки.

Могут ещё сказать, что тригонометрия — не единственный раздел анализа, проходимый в средней школе. Прогрессии, показательная и логарифмическая функции, изучаемые в курсе алгебры, тоже относятся к анализу. Однако нецелесообразно присоединять эти вопросы к тригонометрии. Поскольку в средней школе отсутствуют общие методы исследования функций, теорию тригонометрических функций, с одной стороны, и аналитические элементы в курсе алгебры, с другой стороны, следует рассматривать как обломки анализа, связь между которыми (при тех точках зрения, какие даются в средней школе) незаметна. Если бы изучались какие-нибудь общие вопросы, относящиеся к функциям, то эти обломки осознавались бы как части единого целого. При существующем же положении вполне естественно и законно, говоря о школьном курсе, рассматривать тригонометрию как автономную науку.

Содержание тригонометрии как науки. Для решения вопроса о том, насколько школьный курс тригонометрии пригоден в качестве фундамента для высшей математики и смежных дисциплин, необходимо выяснить:

1. В чём заключается содержание тригонометрии как науки?

2. Каково применение тригонометрии в высшей математике и в смежных дисциплинах?

Тригонометрия изучает свойства особого рода функций, обозначаемых $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и т. д. и называемых тригонометрическими функциями. Эти функции имеют многочисленные применения в разных областях математики и других наук. Естественно подразделить тригонометрию на две части:

а) изучение тригонометрических функций и их свойств,

б) применение этих функций к разным вопросам (сюда относятся вопросы, в которых тригонометрические функции не являются самоцелью, а вводятся как аппарат, дающий возможность решить вопрос).

Определение тригонометрических функций при помощи дифференциального уравнения. Изучение тригонометрических функций, разумеется должно начинаться с их определения. Это определение может быть дано многими способами. Мы остановимся на трёх из них.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0 \tag{1}$$

и будем искать два его решения y_1 и y_2, удовлетворяющие начальным условиям:

$$\text{при } x=0 \quad y_1=0, \quad \frac{dy_1}{dx}=1,$$

$$\text{»} \quad \text{»} \quad y_2=1, \quad \frac{dy_2}{dx}=0.$$

Если считать, что тригонометрические функции нам неизвестны (мы как раз сейчас занимаемся вопросом об их определении), то уравнение (1) решить нельзя. Это значит, что его решение не может быть выражено как комбинация (в конечном числе) известных нам функций (алгебраических, показательной и логарифмической), но это отнюдь не значит, что решения не существует. Согласно теореме Коши о существовании решения дифференциального уравнения, решения уравнения (1), удовлетворяющие указанным начальным условиям, существуют. Поскольку мы не можем выразить их при помощи известных ранее функций, будем рассматривать их как новые функции и введём для них следующие обозначения:

Функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ *и начальным условиям:* $y\Big|_{x=0}=0, \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=1,$ *называется синусом и обозначается* $\sin x$.

Функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ *и начальным условиям:* $y\Big|_{x=0}=1, \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=0$, *называется косинусом и обозначается* $\cos x$.

Дифференциальные уравнения вообще часто являются средством введения новых функций.

Исходя из этого определения синуса и косинуса, можно вывести все их свойства. Как это сделать—показано, например, в статье Ф. В. Доброхотова «Очерк аналитической теории тригонометрических функций» («Математическое просвещение», вып. 9, М. — Л. 1936).

Определение тригонометрических функций при помощи степенных рядов.

Другое возможное определение синуса и косинуса — при помощи степенных рядов. Ряды, выражающие синус и косинус, могут быть выведены из уравнения (1), но могут также быть взяты в качестве исходного пункта. Будем искать общее решение уравнения (1) в виде степенного ряда:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\dots \qquad (*)$$

Дифференцируя этот ряд два раза, получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=1\cdot 2a_2+2\cdot 3\cdot a_3x+3\cdot 4\cdot a_4x^2+4\cdot 5\cdot a_5x^3+\dots$$

Подставляем эти ряды в уравнение (1):

$$1\cdot 2\cdot a_2+2\cdot 3\cdot a_3x+3\cdot 4\cdot a_4x^2+4\cdot 5\cdot a_5x^3+\dots+a_0+a_1x+ \\ +a_2x^2+a_3x^3+\dots=0.$$

Поскольку левая часть должна быть *тождественно* (при любом x) нулём, то коэфициенты при всех степенях x должны быть нулями. Это приводит к следующей бесконечной системе уравнений:

$$\begin{aligned} a_0+1\cdot 2a_2&=0,\\ a_1+2\cdot 3a_3&=0,\\ a_2+3\cdot 4a_4&=0,\\ a_3+4\cdot 5a_5&=0,\\ a_4+5\cdot 6a_6&=0,\\ a_5+6\cdot 7a_7&=0,\\ \dots\dots&\dots \end{aligned}$$

В этой системе одни уравнения содержат неизвестные с нечётными индексами, а другие — с чётными. Те и другие уравнения не связаны друг с другом (они содержат разные неизвестные). Решая последовательно уравнения, содержащие неизвестные с чётными индексами, мы видим, что a_0 придётся считать произвольным, а остальные коэфициенты с чётными индексами можно выразить через a_0:

$$a_2=-\frac{1}{2!}a_0$$

$$a_4=-\frac{1}{3\cdot 4}a_2=\frac{1}{4!}a_0$$

$$a_6=-\frac{1}{5\cdot 6}a_4=-\frac{1}{6!}a_0$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Аналогично, рассматривая уравнения с нечётными индексами, выражаем все входящие в них коэфициенты через a_1, которое остаётся произвольным:

$$a_3 = -\frac{1}{3!}a_1,$$

$$a_5 = -\frac{1}{4\cdot 5}a_3 = \frac{1}{5!}a_1.$$

$$a_7 = -\frac{1}{6\cdot 7}a_5 = -\frac{1}{7!}a_1.$$

Подставляя найденные значения коэфициентов в ряд (*), получим:

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + \\ + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right). \quad (**)$$

Формула (**) даёт формальное общее решение уравнения (1); это решение содержит две произвольные постоянные a_0 и a_1. Для использования начальных условий найдём производную выражения (**):

$$\frac{dy}{dx} = a_0\left(-\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots\right) + \\ + a_1\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right). \quad (***)$$

Для получения синуса подставим в (**) и (***) $x = 0$ и приравняем $y\Big|_{x=0}$ нулю, а $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$ единице. Получим:

$$0 = a_0,$$
$$1 = a_1.$$

Подставляя в формулу (**) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, найдём:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad (2)$$

Аналогично для определения косинуса положим в формулах (**) и (***) $y\Big|_{x=0} = 1$, $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = 0$.

Найдём:

$$1 = a_0,$$
$$0 = a_1.$$

Теперь формула (**) даст:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad (3)$$

Можно было бы просто написать ряды (2) и (3), не выводя их ни откуда. Эти ряды сходятся при всех значениях x (что́ легко доказать, например, пользуясь признаком сходимости д'Аламбера), и, следовательно, определяют некоторые функции от x; условимся называть эти функции синусом и косинусом.

Определив синус и косинус, мы определяем остальные тригонометрические функции так:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}. \tag{4}$$

Подчёркиваем, что формулы (4) не подлежат доказательству, а являются *определениями* $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ и $\csc x$.

Все свойства $\sin x$ и $\cos x$ могут быть выведены из рядов (2) и (3); эти ряды, таким образом, могут служить исходным пунктом для развития всей гониометрии. При таком построении гониометрия будет независима от геометрических построений: все формулы будут выводиться аналитически.

Геометрическое определение тригонометрических функций.

Наконец, третье определение тригонометрических функций — геометрическое. Это — то определение, которое всегда даётся в школьных учебниках. Оно может иметь различные модификации (например, можно определять тригонометрические функции как отношения сторон прямоугольного треугольника или при помощи тригонометрического круга).

Недостатки геометрического определения тригонометрических функций.

Оставляя пока в стороне методические соображения, зададимся вопросом, являются ли приведённые выше определения равноценными с научной точки зрения?

На этот вопрос следует ответить отрицательно: геометрическое определение хуже.

Первый недостаток геометрического определения тригонометрических функций заключается в том, что свойства этих функций ставятся в зависимость от некоторых положений, имеющих место только в евклидовой геометрии; в действительности же *свойства тригонометрических функций вовсе не зависят от того, какой геометрией мы пользуемся.* Поясним это примерами.

Пример 1. На одной из сторон угла x возьмём точки M_1, M_2, $M_3, \ldots$ и опустим из них перпендикуляры M_1L_1, M_2L_2, $M_3L_3, \ldots$ на другую сторону (черт. 1). Прямоугольные треугольники M_1OL_1, M_2OL_2, $M_3OL_3, \ldots$ подобны между собой. Поэтому отношение катета, противолежащего углу x, к гипотенузе будет во всех этих треугольниках одно и то же:

$$\frac{L_1M_1}{OM_1} = \frac{L_2M_2}{OM_2} = \frac{L_3M_3}{OM_3} = \ldots \tag{5}$$

Мы привели обычное доказательство того, что отношение противолежащего катета к гипотенузе не зависит от положения точки M на стороне угла и, следовательно, зависит только от величины угла.

На этом факте основано определение синуса. Допустим теперь, что мы изучаем геометрию Лобачевского. В ней подобных треугольников не существует, и пропорции (5) неверны. Значит ли это, что в геометрии Лобачевского нельзя пользоваться понятием синуса? Ученик, не знающий о существовании аналитического определения синуса, должен предположить, что в геометрии Лобачевского если и есть синус, то он отличен от евклидова синуса.

Пример 2. Применяя к треугольнику M_1OL_1 теорему Пифагора:

$$M_1L_1^2 + OL_1^2 = OM_1^2$$

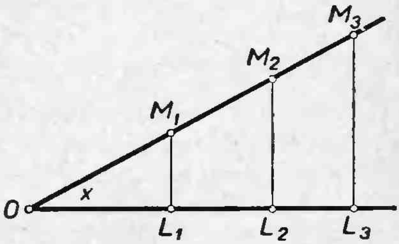
и деля обе части этого равенства на OM_1^2 получим:

$$\left(\frac{M_1L_1}{OM_1}\right)^2 + \left(\frac{OL_1}{OM_1}\right)^2 = 1$$

или

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{6}$$

Это доказательство основано на теореме Пифагора, каковая не имеет места в неевклидовых геометриях, например в геометрии Лобачевского. Естественно, возникает сомнение, справедлива ли в геометрии Лобачевского формула (6).



Черт. 1. $\frac{L_1M_1}{OM_1} = \frac{L_2M_2}{OM_2} = \frac{L_3M_3}{OM_3} = \ldots$

Студенты, изучающие математический анализ и пользующиеся при этом тригонометрическими функциями, обычно не знают, зависят ли результаты анализа от выбора той или иной геометрии. Будет ли, например, ряд Фурье для некоторой функции один и тот же при гипотезах Евклида и Лобачевского? Можно ли вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$ подстановкой $x = \sin t$, если принимать геометрию Лобачевского? Последний вопрос не может быть обойдён даже тем, что этот интеграл вычисляется и без тригонометрической подстановки. Как известно, этот интеграл равен $\frac{\pi}{4}$. Студент, который знает лишь одно определение π как отношения длины окружности к длине диаметра, естественно должен думать, что с этим числом можно иметь дело только в евклидовой геометрии. В геометрии Лобачевского отношение длины окружности к длине диаметра не является постоянным.

В действительности все указанные недоразумения — кажущиеся. Даже в случае принятия гипотезы Лобачевского евклидова геометрия не теряет права на существование. Она является непротиворечивой системой и даже может интерпретироваться в пространстве Лобачевского (как геометрия иа так называемой предельной поверхности).

Поэтому тригонометрические функции, определённые с использованием евклидовой гипотезы, могут, после того как установлены их аналитические свойства, употребляться и независимо от этой гипотезы. Однако требуется высоко развитое абстрактное мышление для уразумения этой идеи. Кроме того, связывать понятие с моментами, не играющими роли, т. е. создавать хотя бы кажущуюся зависимость от этих моментов, во всяком случае нежелательно.

Второй недостаток геометрического определения тригонометрических функций заключается в том, что по этому определению тригонометрические функции являются обязательно *функциями угла*. Это обстоятельство в глазах школьника отличает тригонометрические функции от всех других функций. Школьник смотрит совсем по-разному на функции $\lg x$ и $\sin x$; он понимает, что́ значит логарифм числа, но не понимает, что́ значит синус числа. Если даже углы измеряются в так называемой отвлечённой мере и рассматривается $\sin 2$, то всё-таки под этим символом понимается синус угла, равного двум радианам.

Научная точка зрения на тригонометрические функции.

Научная точка зрения на тригонометрические функции заключается в следующем. Синус и косинус суть функции, определяемые рядами (2) и (3)[1]). Аргумент принимает числовые значения. Все свойства этих функций вытекают из формул (2) и (3) и, следовательно, не зависят от геометрических положений. Во многих формулах фигурирует некоторая константа, обычно обозначаемая буквой π; эта константа может быть *определена* либо как наименьший положительный корень уравнения $\sin x = 0$, либо как половина периода синуса, и множеством других способов. Разумеется, эквивалентность этих определений должна быть доказана. Например, можно действовать так: 1) доказать, что уравнение $\sin x = 0$ имеет наименьший положительный корень; 2) обозначить его через π (при этом можно вычислить этот корень с любой степенью точности); 3) доказать, что $\sin x$ является периодической функцией; 4) доказать, что период $\sin x$ равен 2π, где π — число, определённое выше. Во всяком случае число π определяется аналитически и, следовательно, не зависит от того, какой геометрией мы пользуемся и как разрешается вопрос о длине окружности.

Введённые таким образом тригонометрические функции допускают *геометрическую интерпретацию в системе евклидовой геометрии* (мы имеем в виду их истолкование при помощи тригонометрического круга). Если принять за x отношение длины дуги к радиусу, то отношение линии синуса к радиусу есть как раз та функция от x, какая определена рядом (2). Однако это не *определение* синуса, а лишь *одна из возможных интерпретаций*. При этой интерпретации синус является функцией угла. Свойства тригонометрических функций при этой интерпретации получают наглядную геометрическую иллюстрацию, но эти свойства не зависят от того, справедлива ли евклидова геометрия.

---

[1]) Можно взять какое-нибудь другое *аналитическое* определение.

Аналитические применения тригонометрии. Переходим к вопросу о применениях тригонометрии. Тригонометрия столь органически вросла в математический анализ, механику, физику и другие дисциплины, что нельзя ставить вопрос о перечислении её применений. Мы хотим выяснить лишь преобладающий характер этих применений. Мы увидим, что в подавляющем большинстве случаев в этих применениях тригонометрические функции выступают не как функции угла.

В математическом анализе все переменные рассматриваются как отвлечённые величины (наименования приписываются им лишь в задачах прикладного характера). Отказ от этой точки зрения вызвал бы множество затруднений. Как, например, можно рассматривать функцию $y = x + \sin x$, если x считать углом, а $\sin x$ — отвлечённой величиной?

Укажем ряд примеров, когда рассмотрение тригонометрических функций как функций угла является неудобным. Пусть требуется найти производную синуса. Производная синуса есть следующий предел:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin (x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Как истолковать выражение $\frac{\sin (x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$, если знаменатель рассматривать как угол, а числитель — как отвлечённую величину?

Если бы тригонометрические функции не были введены в элементарной математике, то они возникли бы в задаче об обращении некоторых интегралов, например:

$$y = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}. \tag{7}$$

Эта задача заключается в том, чтобы из равенства (7) выразить x как функцию от y. Имеем: $x = \sin y$; это может служить определением синуса. Как видим, эта задача не имеет никакого отношения к углам.

Дифференциальные уравнения могут приводить к решениям, выражающимся при помощи тригонометрических функций. В вопросах механики аргументом часто является время, и таким образом приходится рассматривать, например, синус времени. Это обычно вызывает затруднения у студентов, привыкших рассматривать тригонометрические функции как функции угла.

Особенно затрудняет студентов рассмотрение необычных комбинаций тригонометрических функций (необычных — в том смысле, что они никогда не встречаются в школьных учебниках). Например, в оптике встречаются так называемые интегралы Френеля:

$$\int_0^\infty \sin (x^2)\, dx = \int_0^\infty \cos (x^2)\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Как понимать выражение $\sin(x^2)$, если рассматривать только синус угла? Придётся приписать x размерность «квадратный корень из угла».

Резюмируем всё сказанное. Точка зрения на тригонометрические функции как на функции угла чрезвычайно неудобна для математического анализа. Правда, во многих случаях можно преодолеть возникающие затруднения путём введения коэфициентов, исправляющих размерность. Например, в уравнении $s = \sin t$ можно ввести коэфициенты:

$$s = a \cdot \sin \omega t,$$

где a имеет размерность «длина», а ω — «угол, делённый на время» (угловая скорость). Однако ясно, что выделение тригонометрических функций как функций неравноправных со всеми остальными (x^2, 2^x, $\lg x$ суть функции *произвольного* аргумента, а $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ — обязательно функции *угла*) совершенно нецелесообразно.

Роль геометрических применений тригонометрии.

Кроме аналитических применений, тригонометрия имеет и геометрическое применение: решение треугольников. Исторически — это первая задача, потребовавшая применения тригонометрии. Задача о решении треугольников возникла в древности в связи с землемерием, астрономией и строительным делом. Этой задаче тригонометрия обязана своим возникновением. Решение треугольников потребовало введения особых функций угла; таким образом и возникли синус, косинус и т. д. [1]) как функции угла. Самое название тригонометрии указывает на то, что первоначально её единственной задачей было решение треугольников (τρίγονον — треугольник, μετρέω — измеряю; таким образом, слово «тригонометрия» обозначает «измерение треугольников»). Решение треугольников в течение многих веков оставалось единственной задачей тригонометрии. Под влиянием этой задачи сложился школьный курс тригонометрии, для которого характерны две особенности: 1) точка зрения на тригонометрические функции как на функции угла, 2) приспособление всей теории тригонометрических функций к задаче решения треугольников. Правда, развитие математического анализа и механики оказало некоторое влияние и на школьный курс тригонометрии. Например, обобщение понятия об угле (введение отрицательных углов и углов любой величины) не вызвано потребностями решения треугольников. Однако эти уступки совершенно недостаточны. Решение треугольников всё-таки остаётся основной задачей в школьном курсе тригонометрии; в этом заключается несоответствие школьного курса современной науке.

Можно только удивляться столь прочному и длительному влиянию исторической традиции. Только по традиции школьный курс тригонометрии игнорирует аналитические приложения тригонометрических функций, ставшие в математике первостепенными по сравнению с геометрическими приложениями уже 200—300 лет назад.

---

[1]) Эти функции не сразу возникли в том виде, в каком мы употребляем их в настоящее время; мы не вдаемся здесь в историю тригонометрических функций.

Мы дальше вскроем подробнее отмеченное здесь несоответствие и покажем, что оно проникло во все детали курса тригонометрии. Пока отметим, что современный школьный курс тригонометрии, помимо того, что он не соответствует науке (это обстоятельство само по себе ещё недостаточно, чтобы осудить школьный курс), не соответствует также тем целям, ради которых тригонометрия преподаётся в школе. Мы указывали, что важнейшие из этих целей — подготовка к высшей школе и развитие функционального мышления.

Школьный курс, во-первых, прививает ученикам такую точку зрения на тригонометрические функции, которая является серьёзной помехой при изучении анализа. Во-вторых, школьный курс содержит много лишних вопросов, общеобразовательное значение которых почти равно нулю. К ним принадлежат чрезвычайно специальные методы решения треугольников (логарифмически-тригонометрические вычисления, формулы Мольвейде и т. д.). Эти вопросы важны для очень ограниченного круга специальностей (например, геодезия). Из всех выпускников средней школы, которые будут пользоваться тригонометрией, подавляющее большинство составляют студенты втузов; они будут пользоваться тригонометрией при изучении математического анализа. Геодезисты составят ничтожное меньшинство. Несмотря на это, школьный курс тригонометрии построен так, как будто единственной задачей средней школы является подготовка геодезистов, причём им даётся не только теоретическая подготовка для решения треугольников, но и все вычислительные детали, как будто они должны прямо со школьной скамьи приступить к практической деятельности.

Историческое замечание.

В связи с поднятыми здесь педагогическими вопросами мы приведём некоторые исторические справки. Мы не собираемся излагать здесь историю или даже схему развития тригонометрии, так как это уведёт нас от темы. Нам достаточно отметить, что тригонометрия древних, возникшая в связи с потребностями астрономии, носила чисто геометрический характер и представляла главным образом «исчисление хорд», т. е. составление таблиц, позволяющих в круге данного радиуса определить длину хорды по соответствующему ей центральному углу. В средние века тригонометрия в общем сохраняла этот характер, хотя иногда в неё вкрапливались некоторые аналитические моменты, особенно в связи с изобретением логарифмов.

Деятельность Эйлера в области тригонометрии.

Мы хотим здесь остановиться лишь на Эйлере и некоторых его преемниках по петербургской школе. Именно здесь в первой половине XVIII века произошёл резкий перелом в тригонометрии, после чего она приняла новое направление. Это имеет для нас не только исторический, но и непосредственный педагогический интерес, так как близко связано с рассматриваемыми в этой главе вопросами.

Тригонометрия, как и всякая область математики, создана коллективным трудом очень многих учёных. Среди этих учёных нет никого, чей единоличный вклад в тригонометрию мог бы сравниться с громадным вкладом Эйлера.

Эйлер с 1727 г. (когда ему было 20 лет) по 1741 г. и с 1766 г. до смерти, последовавшей в 1783 г., работал в Петербургской Академии наук, являясь самым блестящим деятелем и создателем русской математической школы. Его научная плодовитость колоссальна. Он оставил 783 работы во всех отраслях точных наук. Ему принадлежат фундаментальные результаты в тригонометрии, дифференциальном и интегральном исчислении, в теории чисел, дифференциальных уравнениях, вариационном исчислении, механике, астрономии, артиллерии, мореходном деле, теории оптических инструментов и во многих других областях.

Эйлер первый стал рассматривать тригонометрические линии как функции угла. Эта точка зрения настолько привилась, что современный читатель вряд ли может оценить заслугу Эйлера, впервые понявшего её преимущества. Вообще исключительная прозорливость Эйлера видна из того, как много ввёл он в науку определений, обозначений, точек зрения, оказавшихся наиболее целесообразными и выдержавших двухвековое испытание. Большинство математиков вряд ли знает, как много есть в нашей науке положений, столь укоренившихся, что они кажутся чуть ли не извечными, но которые в действительности были введены Эйлером.

Точка зрения на тригонометрические величины как на функции угла привилась не сразу. При этом даже те математики, которые её восприняли, не придавали ей того значения, которое она имеет в наших глазах. Она у них уживалась с прежней точкой зрения. Так, например, в учебнике С. Я. Румовского (подробнее об этом учебнике см. стр. 16), личного ученика Эйлера, проводящего его идеи, на стр. 329 мы находим следующую теорему:

«Синусы, косинусы, тангенсы, котангенсы, синусы обращённые [1]), секансы, косекансы того ж угла, но в разных кругах, содержатся [2]) между собою так, как радиусы, которыми круги описаны».

Таким образом в этом месте Румовский считает, что синус угла зависит от радиуса круга, в котором рассматривается угол. Однако в других местах у него синус *определяется* как линия в круге, радиус которого обязательно принимается за единицу. При таком определении синус зависит только от угла. Не будем спешить обвинять Румовского в непоследовательности. Это просто значит, что он не придаёт этим вопросам существенного значения.

Всё сделанное Эйлером в области тригонометрии разбросано по его многочисленным работам. Однако важнейшие результаты собраны в книге «Introductio in analysin infinitorum», изданной в 1748 г. Имеется современное издание: *Леонард Эйлер*, Введение в анализ

---

[1]) «Синус обращённый» (по тогдашней орфографии — «обращенной») или «sinus versus» — отрезок AP (черт. 7, стр. 48); обозначался sinversz или sinvz. Таким образом $\text{sinversz} = 1 - \cos z$.

[2]) Относятся.

бесконечно малых, том первый, перевод с латинского Е. Л. Пацановского, редакция, вступительная статья и примечания проф. С. Я. Лурье, М.—Л., 1936. В дальнейшем мы ссылаемся на это издание.

Эйлер ввёл обыкновение считать «полный синус» (sinus totus), т. е. радиус или $\sin 90°$, равным единице. До него было принято делить радиус на какое-нибудь число равных частей и измерять синус числом этих частей в линии синуса. Например, Непер делил радиус на 10 миллионов частей; у него $\sin 30° = 5\,000\,000$.

Эйлер ввёл удержавшиеся до сих пор обозначения тригонометрических функций. Вот это место («Введение», гл. VIII):

«127. Пусть z означает какую-либо дугу этого круга, радиус которого я всегда считаю равным единице; наиболее обычно рассматриваются синус и косинус этой дуги. Синус дуги z я буду в дальнейшем обозначать *sin. A. z* [1]) или просто *sin z*, косинус же таким образом: *cos. A. z* или просто *cos. z*». Далее Эйлер вводит обозначения *tang z*, *cot z*, *sec z*, *cosec z*.

В некоторых работах Эйлера встречается определение тригонометрических функций, как отношений сторон прямоугольного треугольника, т. е. он впервые стал рассматривать значения этих функций как числа, а не как отрезки. Правда, он, повидимому, сам не вполне оценивал важность этого нововведения, как видно из того, что в приведённом выше отрывке синус рассматривается как отрезок в круге единичного радиуса. Разумеется, и ученики, впервые приступающие к изучению тригонометрии, склонны смазывать этот момент. Поэтому мы считаем вредным вводить тригонометрические функции в круге единичного радиуса. Следует резко подчёркивать, что тригонометрические функции — это отношения, не зависящие от линейных размеров чертежа.

Мы не имеем возможности даже просто перечислить здесь громадного фактического материала по тригонометрии, изложенного во «Введении». Здесь встречаются степенные ряды для синуса, косинуса и тангенса. Ряды эти были известны и раньше, но Эйлеру принадлежит новое доказательство, не использующее интегрального исчисления. Доказательство Эйлера основано на рассмотрении комплексных чисел. Смелое введение комплексных чисел, которых раньше так боялись, тоже является одной из величайших заслуг Эйлера. В п. 138 мы находим знаменитые «формулы Эйлера», связывающие тригонометрические функции с показательной:

$$\cos v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}; \qquad e^{+v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\cdot\sin v;$$

$$\sin v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}; \qquad e^{-v\sqrt{-1}} = \cos v - \sqrt{-1}\cdot\sin v.$$

---

[1]) *A* — начальная буква слова Arcus (дуга) (*Н. Б.*)

В п. 158 даются бесконечные произведения для синуса и косинуса:

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{16\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{25\pi^2}\right) \text{ и т. д.}^{1)}$$

$$\cos z = \left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{49\pi^2}\right) \text{ и т. д.}$$

Работы Эйлера твёрдо определили аналитическое направление дальнейшего развития тригонометрии.

Деятельность Эйлера сыграла важнейшую роль для развития тригонометрии в России. Русские математики того времени находились под непосредственным личным влиянием Эйлера. Его идеи были восприняты, и в России появились учебники тригонометрии, наиболее передовые по тому времени.

Учебник Румовского.

Первым из них явился учебник С. Я. Румовского. Мы называем его первым, имея в виду учебники в новом духе, но он не был первым в России учебником тригонометрии. Элементы тригонометрии встречаются уже в «Арифметике» Л. Ф. Магницкого (1703 г.), в книге «Геометрия практика» неизвестного автора (вероятно, 1709 г.). Имеется руководство Я. Германа «Сокращение математическое» (1728 г.), не содержащее новых идей. В нём рассматриваются некоторые задачи на решение треугольников, тригонометрические величины рассматриваются как отрезки и определяются лишь для острого угла. В таком же духе излагаются элементы тригонометрии и в книге С. Мордвина «Книги полного собрания о навигации» (1748 г.). С середины XVIII столетия русские учебники, содержащие тригонометрию, становятся весьма многочисленными.

Учебник Румовского называется «Сокращения математики. Часть первая, содержащая начальные основания арифметики, геометрии и тригонометрии, сочинённая Академии Наук Адъюнктом Степаном Румовским. В Санктпетербурге, при Императорской Академии Наук, 1760 года». Тригонометрия занимает в этой книге 35 страниц и состоит из двух глав: «О наименованиях в тригонометрии употребляемых» и «О решении треугольников». При чтении тригонометрии Румовского поражает её сходство с современным изложением. В этой книге очень мало пришлось бы изменить (кроме языка), чтобы сделать её похожей на современный учебник.

В первой главе даются определения тригонометрических функций (как линий в круге единичного радиуса), выводятся формулы, связывающие функции одного угла, формулы приведения, формулы сложения и вычитания и формулы двойных и половинных углов. Вторая глава содержит рассмотрение основных задач на решение треугольников.

---

1) Слова «и т. д.» заменяют принятый в настоящее время знак многоточия.

Учебник Головина. На высоком уровне стоит и учебник М. Е. Головина, посвящённый специально тригонометрии и поэтому значительно более полный по содержанию: «Плоская и сферическая тригонометрия с алгебраическими доказательствами, собранными Михаилом Головиным, Надворным Советником, Академии Наук членом и учительской семинарии Профессором. В Санктпетербурге, при Императорской Академии Наук, 1789 года». Эта книга состоит из двух частей, посвящённых соответственно плоской и сферической тригонометрии. Плоская тригонометрия содержит три главы:

Глава 1. «О названии и свойстве линей Тригонометрических».
„ 2. «О нахождении и употреблении таблиц синусов».
„ 3. «О разрешении треугольников».

Первая и третья главы содержат тот же материал, чтó и учебник Румовского. Материал же второй главы представляет расширение курса. Мы остановимся на этой главе подробно, потому что приёмы, рекомендуемые Головиным для составления таблиц, являются наиболее подходящими и для современной средней школы. Мы хотим восстановить в правах этот незаслуженно забытый методический приём XVIII века. Он забыт, вероятно, потому, что в наше время утрачен тот интерес к вычислениям, который характерен для математиков XVIII века.

Роль вычислений в школьном курсе математики. В высшей степени полезно приучать учеников к самостоятельным вычислениям. Вычисления покажут им, например, что в вычислении тригонометрических функций нет ничего таинственного, что не было бы им доступно [об этом подробнее см. гл. IV, § 3 (стр. 90)]. Далее, это — естественный повод для применения разных формул и теорем. Получение числовых результатов доводит до сознания учеников многие факты, остающиеся непродуманными при абстрактном изучении. Вычисления — один из лучших способов предохранения от формализма.

Эйлер всегда пишет формулы, имея в виду фактические вычисления. Например, в любом современном учебнике анализа степенной ряд для синуса пишется так:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Во «Введении» же Эйлера (гл. VIII, п. 134) он дан в виде:

$$\begin{aligned}\sin\frac{m}{n}\cdot 90^\circ = &+\frac{m}{n}\cdot 1{,}57079\,63267\,94896\,61923\,13216\,916\\ &-\frac{m^3}{n^3}\cdot 0{,}64596\,40975\,06246\,25365\,57565\,639\\ &+\frac{m^5}{n^5}\cdot 0{,}07969\,26262\,46167\,04512\,05055\,495\end{aligned}$$

и т. д., причём этот ряд выписан у Эйлера включительно до члена содержащего отношение $\frac{m}{n}$ в 29-й степени. Как видим, коэфициенты даны с таким расчётом, чтобы для вычисления синуса угла, данного в градусной мере, не требовалось предварительно переводить его в радианы. Эта формула предназначена для того, чтобы действительно вычислять синусы с громадной точностью, а не только смотреть на неё и убеждаться, что такое вычисление возможно.

Составление тригонометрических таблиц по Головину.

Приёмы Эйлера, основанные на степенных рядах, неприменимы в средней школе. Головин же предлагает следующий порядок, полностью приспособленный к средней школе.

Будем пользоваться формулами для синуса и косинуса половинного угла, суммы, разности и формулами:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$

Во второй главе книги Головина проведено детальное исследование того, что́ можно сделать, пользуясь только этим аппаратом.

Исходя из значений $\sin 90^\circ$ и $\cos 90^\circ$, находим $\sin 45^\circ$ и $\cos 45^\circ$. Далее:

$$\sin 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}, \quad \cos 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}}.$$

Головин нигде не производит вычислений. Он только разъясняет последовательность, в которой надо действовать. В дальнейшем выясняется, что вычисления предполагаются в десятичных дробях.

Далее таким же способом найдём $\sin 11^\circ 15'$ и $\cos 11^\circ 15'$. «Но поелику угла $11^\circ 15'$ более на половины разделить не можно...» — эта фраза показывает, что Головин хочет иметь дело лишь с углами, содержащими целое число минут. Теперь берём дополнения найденных углов до 90°:

$$90^\circ - 22^\circ 30' = 67^\circ 30'$$

$$90^\circ - 11^\circ 15' = 78^\circ 45'$$

Наконец:

$$22^\circ 30' + 11^\circ 15' = 33^\circ 45'$$

$$45^\circ + 11^\circ 15' = 56^\circ 15' \quad (\text{или } 90^\circ - 33^\circ 45' = 56^\circ 15')$$

Таким образом, исходя из 90°, мы получим таблицу, содержащую семь углов:

$11^\circ 15'$	$56^\circ 15'$
$22^\circ 30'$	$67^\circ 30'$
$33^\circ 45'$	$78^\circ 45'$
$45^\circ 00'$	

Далее Головин повторяет те же рассуждения, исходя из углов 60°, 36° и 24° (синусы и косинусы этих углов были вычислены в первой главе). Мы далее не будем повторять буквально рассуждений Головина, а перейдём к их вольному изложению.

Идея заключается в том, чтобы пользоваться формулами для синуса и косинуса половинного угла до тех пор, пока получаем угол, выражающийся в целых минутах. Исходя из угла α, мы получим последовательность углов

$$\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{4}, \ldots, \frac{\alpha}{2^n},$$

где $\frac{\alpha}{2^n}$ — наименьший угол такого вида, выражающийся в целых минутах. Ясно, что пользуясь формулами сложения и вычитания, мы вычислим синусы и косинусы всех углов вида

$$\frac{\alpha}{2^n}, \quad 2\cdot\frac{\alpha}{2^n}, \quad 3\cdot\frac{\alpha}{2^n}, \ldots .$$

Что касается рассмотрения дополнительных углов, то оно не всегда приводит к чему-либо новому. Если исходный угол α есть рациональная часть прямого угла:

$$\alpha = \frac{p}{q}\cdot 90^\circ \left(\frac{p}{q} \text{ — несократимая дробь}\right),$$

причём p есть степень двух, то $\frac{\alpha}{2^n}$ будет целой частью прямого угла, и рассмотрение дополнительных углов бесполезно. Во всех же остальных случаях рассмотрение дополнительных углов приводит к новым результатам.

Поясним это примерами. Угол 24° выражается так:

$$24^\circ = \frac{4}{15}\cdot 90^\circ.$$

Беря $\frac{1}{16}$ часть от 24°, придём к последовательности:

$$0^\circ 45', \ 1^\circ 30', \ 2^\circ 15', \ \ldots, \ 88^\circ 30', \ 89^\circ 15'.$$

Беря дополнительные углы, мы получим опять ту же самую последовательность. Иначе получится с углом 54°, потому что

$$54^\circ = \frac{3}{5}\cdot 90^\circ.$$

Здесь числитель не является степенью двух. Беря $\frac{1}{8}$ часть от 54°, мы придём к последовательности:

$$6^\circ 45', \ 13^\circ 30', \ 20^\circ 15', \ \ldots, \ 81^\circ 00', \ 87^\circ 45'.$$

Углы дополнительные к этим образуют новую последовательность:

$$83^\circ 15', \ 76^\circ 30', \ 69^\circ 45', \ \ldots, \ 9^\circ 00', \ 2^\circ 15'.$$

Итак, Головин, получив семь углов, исходя из 90°, повторяет далее аналогичные рассуждения, исходя из 60°. Наименьший угол составляет 3°45'. Повторяя его раз за разом (фактически, впрочем, делается не так, а комбинируются по возможности углы более крупные) и *вычёркивая углы, ужé полученные ранее*, он получает 16 углов:

3°45′	(33°45′)	63°45′
7°30′	37°30′	(67°30′)
(11°15′)	41°15′	71°15′
15°00′	(45°00′)	75°00′
18°45′	48°45′	(78°45′)
(22°30′)	52°30′	82°30′
26°15′	(56°15′)	86°15′
30°00′	60°00′	

В скобки заключены углы, которые следует вычеркнуть. Головин не объясняет, зачем следует рассматривать углы, получающиеся из 90°, когда здесь все эти углы получаются снова. Вероятно, это объясняется заботой о простоте вычислений. Синус и косинус угла 11°15′ проще получить, деля два раза пополам 45°, чем оперируя с более мелкими углами. К тому же при вычислении в десятичных дробях может иметь место накопление ошибок, когда исходными являются числа, ужé полученные в результате приближённых вычислений.

Исходя из 24°, Головин получает синус и косинус угла 45′. Далее можно получить синусы и косинусы всех углов первой четверти через каждые 45′. Часть этих углов ужé была получена ранее. После этого Головин рекомендует прибегнуть к линейной интерполяции, вставляя между каждыми полученными двумя углами два промежуточные угла через каждые 15′.

Мы рекомендуем каждому учителю использовать этот аппарат для составления таблиц. Можно разделить класс на группы по несколько человек и задать каждой группе некоторую часть таблицы. Полученные результаты сводятся вместе и образуют целую таблицу. Её можно вывесить в классе и использовать при решении задач. У учеников не будет досадной мысли, что таблица для них составлена кем-то другим.

§ 2. В каком направлении следует изменить сложившийся школьный курс тригонометрии.

Как определять тригонометрические функции в школе.

До сих пор мы говорили о недостатках существующего курса тригонометрии. Переходим к положительной части: в чём должна заключаться реформа школьного курса? Начнём с общих вопросов, связанных с содержанием курса; детали, относящиеся к отдельным разделам курса, будут рассмотрены в следующих главах.

Как было выяснено выше, курс тригонометрии должен дать ученикам сведения о теории тригонометрических функций, рассматриваемых как функции произвольного (не углового) аргумента. Как это сделать?

Здесь мы сталкиваемся с существенной трудностью: в школьном курсе исходить из аналитического определения тригонометрических функций невозможно. Ученики IX класса не знакомы ни с теорией рядов, ни с теорией дифференциальных уравнений. Пока никто не предложил аналитической теории тригонометрических функций, пригодной для средней школы, мы должны признать, что единственно возможным в школе определением тригонометрических функций является геометрическое [1]). Таким образом первое понятие о тригонометрических функциях ученики получат как о функциях угла.

Читатель не должен расценивать это как отказ от изложенного выше взгляда на тригонометрические функции. Всякий педагог ищет постепенного пути к современной науке, проложенного с учётом возрастных особенностей учащихся. Однако, хотя учитель, стоящий на аналитической точке зрения, входит в тригонометрию через ту же дверь, что и учитель, следующий традиции (потому что есть лишь одна единственная дверь, через которую можно войти вместе с учениками), но дальше их пути сразу расходятся.

Далее, в некотором месте курса даётся обобщение понятия о тригонометрических функциях следующим образом. Пусть x — любое действительное число. Рассмотрим угол, содержащий x радианов; синус этого угла будем по определению считать равным синусу числа x. Такое изложение принято в учебнике А. Ф. Берманта и Л. А. Люстерника [2]), где читатель найдёт все подробности.

К сожалению, вредные традиции, принятые в преподавании тригонометрии, столь укоренились, что даже авторы учебника, специально написанного с целью реформы курса, не могут полностью от них освободиться, как видно из следующей цитаты.

«Пусть дано число x. Что понимается под значением, например, синуса x $(\sin x)$? За значение $\sin x$, где x — некоторое отвлечённое число, принимают значение синуса угла в x радианов.

Пример: $\sin \frac{1}{2} = \sin \frac{1}{2}$ рад.

Для практического отыскания этого значения нужно или непосредственно произвести подходящие построения и измерения (см. § 12), или воспользоваться готовой таблицей. И в том и в другом случае радианную меру обычно удобнее перевести в градусную, потому что и средства измерения углов (транспортир), и таблицы обычно рассчитываются на градусную меру.

Пример: $\sin 2{,}7$ равен значению синуса угла в 2,7 радиана, т. е. угла в $155°$.

Имеем:

$$\sin 2{,}7 = \sin 155° = \sin 25° \approx 0{,}423».$$

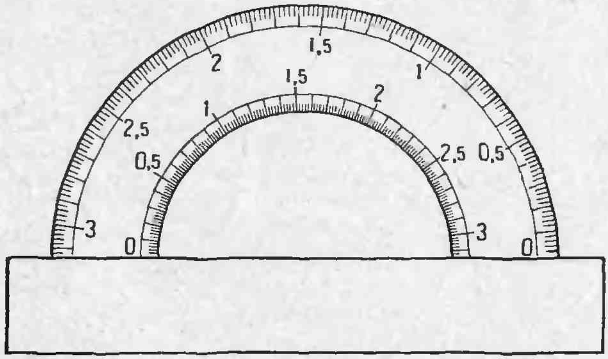
Указание относительно перевода в градусную меру чрезвычайно непоследовательно. Тот факт, что «таблицы обычно рассчитываются на градусную меру», не является убедительным аргументом: от самих авторов зависело дать в своём учебнике другую таблицу. Например,

---

[1]) Геометрическое определение тоже может быть дано по-разному. Вопрос о том, какой вариант избрать, будет рассмотрен в § 3 главы II.

[2]) А. Ф. Бермант и Л. А. Люстерник, Тригонометрия, изд. 2-е, переработанное, Москва, 1947, гл. III, § 37.

по таблице, приведённой на стр. 132, сразу находим: $\sin 2,7 = 0,427$. Отсутствие в учебнике изображения радианного транспортира (черт. 2) также следует поставить в вину авторам. Уж если вводить радианное измерение углов, так по меньшей мере в качестве равноправного



Черт. 2. Радианный транспортир.

с градусным, а не в качестве второстепенного, для которого нет ни таблиц, ни средств измерения.

Методика вопроса об определении тригонометрических функций отвлечённого аргумента.

Приведённое выше определение синуса отвлечённого числа логически безупречно, но с психологической точки зрения оно представляет большую трудность. Ученикам будет казаться, что здесь всё-таки идёт речь о синусе угла, но почему-то условились опускать наименование.

В учебнике Б. Б. Пиотровского[1]) применён приём, который делает это определение психологически более приемлемым. Автор предварительно вводит числовую шкалу на окружности, подобно тому, как рассматривается числовая шкала на прямой. На окружности выбирается нулевая точка и положительное направление. За единицу длины принимается радиус окружности. Тогда окружность оказывается носителем числовой шкалы. В отличие от числовой прямой, соответствие между точками окружности и числами не будет взаимно однозначным: каждой точке окружности соответствует бесконечное множество чисел вида $x + 2k\pi$.

После этого тригонометрические функции определяются так. Имея число x, надо:

1) найти на числовой окружности точку M, соответствующую этому числу;

2) вектор $\overline{OM}$ спроектировать на нулевую ось (т. е. ось, идущую из центра в нулевую точку окружности).

Полученная проекция называется косинусом числа x. (Напоминаем, что радиус принят за единицу.)

---

[1]) Б. Б. Пиотровский, Тригонометрия, Л. — М. 1925.

Приём, применённый Б. Б. Пиотровским, имеет чисто психологическое значение.

Числовая пометка, стоящая у точки M, взятой на окружности, выражает угол AOM (A — нулевая точка окружности), измеренный в радианах. Однако изучение числовой шкалы на окружности разрушает связь между этими пометками и углами. То обстоятельство, что числовая пометка выражает угол, становится второстепенным, и о нём не вспоминают каждый раз. На первый план выступает другая ассоциация: точки окружности соответствуют отвлечённым числам. Подобно этому, при изучении числовой оси ученики считают, что число x изображается точкой на этой оси, не думая каждый раз, что $|x|$ есть расстояние от начала до данной точки.

Мы полагаем, что изучение числовой шкалы на окружности делает более осязательным определение тригонометрических функций отвлечённого аргумента, приведённое в учебнике А. Ф. Берманта и Л. А. Люстерника.

Роль радианного измерения углов. Однако сообщить ученикам определение тригонометрических функций отвлечённого аргумента совершенно недостаточно, чтобы привить им правильный взгляд на тригонометрические функции. Традиционный курс тригонометрии всем своим подбором задач и приложений прививает взгляд на тригонометрические функции как функции угла. Традиция эта столь сильна, что освободиться от неё очень трудно. Учитель, желающий провести реформу курса и ограничивающийся сообщением ученикам вышеприведённого определения, ничего не достигнет. Необходима коренная перестройка курса в следующих направлениях.

Радианным измерением углов в школьном курсе пренебрегают.

Во-первых, оно применяется гораздо реже градусного. Необходимо отказаться от этого обыкновения и внедрять мысль, что основной приём измерения углов — радианное измерение и лишь в геометрических приложениях удобно пользоваться градусным.

Во-вторых, даже в тех случаях, когда радианное измерение углов используется, оно используется нецелесообразно. Мы заставляем учеников писать:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

вместо

$$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}.$$

Так как в этих примерах радианное измерение никаких преимуществ перед градусным не имеет, то ученики неизбежно должны — сознательно или бессознательно — прийти к следующим выводам. Существует особый способ измерения углов — радианный. Он не имеет никаких преимуществ перед градусным, но для упражнения надо пользоваться то тем, то другим. Учитель иногда заставляет вместо 90° писать $\frac{\pi}{2}$.

В-третьих, сущность радианного измерения углов обычно остаётся непонятной ученикам вследствие того, что почти во всех задачах употребляется измерение углов в долях π, а не в десятичных дробях. Этот совершенно неестественный приём измерения углов объясняется силой традиции: хотя мы и пользуемся радианным измерением углов, но «естественной» или «круглой» единицей мы всё-таки по привычке считаем прямой $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ или развёрнутый угол (π), а не угол в один радиан. Нам показалось бы странным, если бы в какой-нибудь задаче был задан угол, содержащий $\frac{5}{\pi}$ градусов, а угол в $\frac{\pi}{12}$ радианов не вызывает нашего удивления. Подобная практика приводит к тому, что ученики рассматривают $\frac{\pi}{2}$ как некоторое собственное имя для обозначения прямого угла (вроде обозначения прямого угла буквой d) и не понимают, что $\frac{\pi}{2}$ есть количество радианов в прямом угле. В подтверждение этого рекомендуем учителю произвести следующий опыт: задать вопрос, сколько радианов в прямом угле. Многие ученики будут решать этот вопрос, деля 90° на 57° (или на 57°18′).

Тригонометрические таблицы с радианным измерением углов. Пренебрежение к радианному измерению углов нашло яркое выражение в том факте, что никогда ученикам не даются тригонометрические таблицы, где аргумент измеряется в радианной мере. Таких таблиц нет ни в одном сборнике таблиц, предназначенных для средней школы, да и вообще в русской литературе такие таблицы встречаются чрезвычайно редко. Для того чтобы найти $\sin 2{,}7$, ученик, как мы уже видели в приведённой выше цитате из учебника А. Ф. Берманта и Л. А. Люстерника, должен перевести 2,7 радиана в градусную меру, а затем обращаться к имеющимся в его распоряжении таблицам.

В-четвёртых, пренебрежение к радианному измерению углов часто приводит к неверным графикам тригонометрических функций. Этот вопрос более подробно рассмотрен в гл. III, § 3 (стр. 67).

Первое мероприятие, которое должен провести учитель, сочувствующий реформе, это — использование радианного измерения углов в качестве основного (что́, разумеется, не исключает градусного измерения в геометрических вопросах). Для этого прежде всего необходимо снабдить учеников соответствующей таблицей и повседневно пользоваться ею. Эта таблица помещена на стр. 132.

«Нетрадиционные» комбинации тригонометрических функций. Второе мероприятие должно заключаться в насыщении курса задачами с «нетрадиционными» комбинациями тригонометрических функций. Неопределённость этого термина вызывается самим существом дела, так как «традиционные» комбинации не представляют класса функций, допускающего математические определения, а выделяются лишь благодаря тому, что составители учебников и задачников, стремясь скрыть от учащихся, что бывают тригонометрические функции не углового аргумента, как будто сговорились ограничить рассматриваемые функции очень однообразными комбинациями. Поясним на нескольких примерах, что́ мы понимаем под «нетрадиционными» комбинациями.

Пример 1. Вычислить $\sin \lg 3$.

Решение.

$$\sin \lg 3 = \sin 0{,}477 = 0{,}4591.$$

Пример 2. Вычислить $\cos \operatorname{tg} 1$.

Решение.

$$\cos \operatorname{tg} 1 = \cos 1{,}557 = 0{,}0138.$$

Пример 3. Решить уравнение: $\operatorname{tg}(x^2 - 1) = 1$.

Решение.

$$x^2 - 1 = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4} + 1 + n\pi} \approx \pm\sqrt{1{,}79 + 3{,}14n}.$$

В частности:

$$\text{при } n = 0 \quad x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4} + 1} \approx \pm\sqrt{1{,}7854} \approx \pm 1{,}336,$$

$$\text{при } n = 1 \quad x = \pm\sqrt{\frac{5\pi}{4} + 1} \approx \pm\sqrt{4{,}9820} \approx \pm 2{,}221,$$

$$\text{при } n = 2 \quad x = \pm\sqrt{\frac{9\pi}{4} + 1} \approx \pm\sqrt{8{,}0683} \approx \pm 2{,}840.$$

Пример 4. Решить уравнение: $\sin x^2 = \sin x$.

Решение.

$$\sin x^2 - \sin x = 0.$$

$$2 \sin\frac{x^2 - x}{2} \cos\frac{x^2 + x}{2} = 0.$$

Первая возможность:

$$\sin\frac{x^2 - x}{2} = 0,$$

$$\frac{x^2 - x}{2} = n\pi \quad (n \text{ — целое}),$$

$$x^2 - x - 2n\pi = 0,$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8n\pi}}{2}.$$

Условие действительности:

$$1 + 8n\pi > 0, \quad n > -\frac{1}{8\pi} > -0{,}04,$$

так как n — целое, то это условие даёт, что n — любое целое неотрицательное число.

Вторая возможность:

$$\cos\frac{x^2+x}{2}=0,$$

$$\frac{x^2+x}{2}=\frac{\pi}{2}+n\pi=\frac{\pi}{2}(2n+1) \quad (n \text{ — целое}),$$

$$x^2+x-\pi(2n+1)=0,$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\pi(2n+1)}}{2}.$$

Условие действительности:

$$1+4\pi(2n+1)>0,$$

$$n>-\frac{1}{2}-\frac{1}{8\pi}>-0{,}6,$$

т. е. n — любое целое неотрицательное число.

Пример 5. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg}\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}\operatorname{tg}x.$$

Решение.

$$\operatorname{tg}\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}\operatorname{tg}x=0,$$

$$\frac{\cos(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)}{\sin\operatorname{tg}x\cdot\cos\operatorname{ctg}x}=0,$$

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{\pi}{2}+n\pi=\frac{\pi}{2}(2n+1) \quad (n \text{ — целое}),$$

$$\frac{2}{\sin 2x}=\frac{\pi}{2}(2n+1),$$

$$\sin 2x=\frac{4}{\pi(2n+1)}.$$

Условие действительности:

$$-1<\frac{4}{\pi(2n+1)}<1.$$

Этим неравенствам удовлетворяют все целые числа, кроме 0 и -1.

Например, при $n=1$ имеем:

$$\sin 2x=\frac{4}{3\pi}=0{,}42441,$$

откуда $2x=0{,}43831$,

$$x=0{,}21916.$$

По таблицам находим:

$$\operatorname{tg}0{,}21916=0{,}2227,$$

$$\operatorname{ctg}0{,}21916=4{,}4897.$$

Замечая, что сумма последних двух чисел $0{,}2227+4{,}4897=4{,}7124$, что́ совпадает с приближённым значением $\frac{3\pi}{2}$, убеждаемся без дальнейшей проверки по таблицам, что тангенс одного из этих чисел является котангенсом другого.

Пример 6. Построить графики функций:

$$\frac{\sin x}{x}, \quad x \sin x, \quad x^2 \sin x \text{ и т. д.}$$

Ограничимся этими примерами, так как в наши задачи не входит давать полный набор упражнений, а пояснить, что́ мы понимаем под нетрадиционными комбинациями тригонометрических функций.

Установление правильного соотношения между отдельными разделами курса.

Третье мероприятие должно заключаться в изменении удельного веса отдельных разделов курса. Не надо бояться выбросить как ненужный балласт некоторые детали, относящиеся к решению треугольников, и усилить аналитическую сторону тригонометрии. Этот вопрос будет подробно рассмотрен в следующих главах.

ГЛАВА II.

НАЧАЛО КУРСА ТРИГОНОМЕТРИИ.

§ 1. Нужен ли пропедевтический курс тригонометрии.

Два способа начинать курс тригонометрии.

На самом пороге курса тригонометрии мы сталкиваемся с весьма важными спорными вопросами. Речь идёт о том, как определять тригонометрические функции. Понятно, что от того, как мы разрешим эти вопросы, зависит всё дальнейшее развитие курса тригонометрии.

Существуют две основные возможности.

А. Сначала определить тригонометрические функции для острого угла, т. е. определить их как отношения сторон прямоугольного треугольника. На этой базе строится так называемый пропедевтический курс тригонометрии, в который входят элементы гониометрии (для острого угла) и решение прямоугольных треугольников. После этого даётся обобщение понятия о тригонометрических функциях на углы любой величины. Некоторые авторы это обобщение разбивают на два шага: сначала рассматривают тупые углы от 90 до 180°, а затем — любые углы. Снова излагается гониометрия, на этот раз для функций любого угла, и затем даётся решение косоугольных треугольников.

В. Вторая возможность отличается от первой тем, что отсекается начало — пропедевтический курс. Сразу даётся определение тригонометрических функций для углов любой величины. Взяв учебник, составленный по типу А, и вычеркнув из него первую главу, мы получим учебник типа В.

Кроме этого, существует ещё второй спорный вопрос: как определять тригонометрические функции любого угла? Здесь конкурирует несколько определений: при помощи тригонометрического круга, при помощи проекций и некоторые другие.

В этой главе будут рассмотрены оба вопроса.

Необходимость пропедевтического курса для семилетки.

Вопрос о том, нужен ли пропедевтический курс тригонометрии в современной советской школе, осложняется особыми задачами семилетки. Значительная часть учащихся ограничивает своё общее образование семилеткой. Решение прямоугольных треугольников принадлежит к общеобразовательному минимуму; оно необходимо рабочим и мастерам многих специальностей и даже может встречаться каждому человеку в практической жизни. Поэтому решение прямоугольных треугольников должно найти место в курсе семилетки. А так как в семилетке никакого курса тригонометрии, кроме пропедевтического (тригонометрия острого угла), быть не может, мы приходим к *вынужденному* решению вопроса о том, нужен ли пропедевтический курс тригонометрии, т. е. к такому решению, когда один фактор оказывается столь властным, что остальные совсем не принимаются во внимание.

Однако для нас не безразлично, какие факторы оказывают влияние на решение вопроса. Поэтому мы временно абстрагируемся от вопроса о семилетке и решим вопрос в рамках полной средней школы.

Затем мы посмотрим, какие коррективы придётся внести в это решение ради семилетки.

Вредные стороны пропедевтического курса.

Когда какое-нибудь важное понятие вводится в первый раз, то ассоциации, сопутствующие ему, врезаются в сознание учащегося чрезвычайно прочно. Последующие впечатления бывают слабее и иногда всю жизнь не могут стереть того обличия, в котором новое понятие явилось нам впервые. Поэтому решение связать новое понятие первый раз с теми или иными ассоциациями является высоко ответственным.

Определение тангенса как отношения противолежащего катета к прилежащему очень просто и впечатляюще. Оно на всю жизнь врежется в сознание ученика. Другое определение тангенса (например, при помощи тригонометрического круга) не сможет заслонить первого (или для этого понадобится очень много усилий), во-первых, потому, что оно — второе и даётся значительно позже, когда первое определение уже укрепилось и стало привычным, во-вторых, потому, что оно сложнее.

Для чего же ставить тригонометрические функции острого угла в столь привилегированное положение? Для задач полной средней школы и высшего образования совершенно необходимо психологически прочное овладение тригонометрическими функциями *любого* угла.

Единственный довод, который может быть выставлен сторонниками пропедевтического курса, заключается в том, что тригонометрические функции острого угла проще и поэтому должны изучаться раньше.

Этот довод представляется нам неправильным. Он типичен для тех ошибок, которые постоянно делаются в вопросе о концентризме. При концентрическом строении какого-нибудь раздела курса *прохождение первого раздела должно облегчить усвоение второго.*

Первый концентр, принимая на себя часть тех задач, которые стоят перед всем разделом, во всяком случае не должен прививать навыков, которые затруднят усвоение последующего материала. Разберёмся с этой точки зрения в вопросе о пропедевтическом курсе тригонометрии.

Трудности, возникающие в начале гониометрии, носят чисто психологический характер. Они заключаются не в логических тонкостях, а в том, что надо усвоить большое количество связей, относящихся к определению тригонометрических функций. При этом их надо не просто усвоить, а усвоить абсолютно прочно. Ассоциации, связанные с изменением тригонометрических функций при изменении угла, должны быть чрезвычайно прочны. Ученик должен представлять ход тригонометрических функций при изменении угла быстро, безошибочно и без всякого обращения к каким-либо рассуждениям. Трудность выработки этих ассоциаций имеет ту же природу, как трудности обучения чтению или таблице умножения (хотя трудность тригонометрии гораздо меньше). Трудность обучения чтению заключается именно в том, что значение букв и образование слогов должно возникать рефлекторно при виде этих букв. Так же рефлекторно должны быть усвоены формулы таблицы умножения. Если ассоциации, связанные с тригонометрическими функциями, будут недостаточно прочны, то это явится тормозом для всего курса тригонометрии. Выработка этих ассоциаций — самая ответственная задача учителя тригонометрии. При недостаточной прочности этих ассоциаций дальнейшее изучение тригонометрии обречено на неуспех.

И вот нам предлагают облегчить эти трудности, введя пропедевтический курс, где учащимся будут прививаться другие ассоциации (тригонометрические функции, как отношения сторон прямоугольного треугольника), не те, которые нужны на всю жизнь. Мы убеждены, что от этого трудности изучения тригонометрии не только не ослабеют, но, наоборот, усилятся. Пропедевтические определения тригонометрических функций придётся вытравлять и заменять другими. Они нисколько не облегчат рассмотрения хода тригонометрических функций при изменении аргумента от $-\infty$ до $+\infty$.

Самое же откладывание систематического курса тригонометрии на более позднее время тоже неосновательно. Трудности, связанные с необходимостью тренировки и выработки прочных ассоциаций, не ослабевают, а усиливаются с возрастом. Обучать чтению, таблице умножения, музыке или иностранным языкам ребёнка легче, чем взрослого.

Итак, мы видим, что выделять тригонометрию острого угла в первый концентр не следует.

Объём курса тригонометрии в семилетке.

Необходимость включить в курс семилетки решение прямоугольных треугольников заставляет внести корректив в это решение вопроса. Однако изложенные выше соображения существенно повлияют на программу тригонометрии в семилетке. Если бы прохождение тригонометрии в семилетке преследовало две цели:

1) сообщить практически необходимые сведения о решении прямоугольных треугольников,

2) служить подготовительным концентром, который должен облегчить последующее прохождение систематического курса тригонометрии,

то было бы желательно расширить курс тригонометрии в семилетке. Поскольку же мы отрицаем вторую цель, мы приходим к другому решению вопроса: как можно меньше тригонометрии в семилетке! Надо ограничиться необходимыми фактами.

§ 2. С чего начинать курс тригонометрии.

С каких вопросов должен начинаться систематический курс тригонометрии.

Систематический курс тригонометрии должен начинаться совершенно независимо от тех элементов тригонометрии, которые проходились в семилетке. Из всего изложенного в предыдущем параграфе вытекает, что курс тригонометрии должен начинаться с вопросов: 1) обобщение понятия угла, 2) радианное измерение углов.

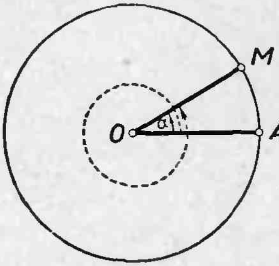
В самом деле, раз мы должны с самого начала курса рассматривать тригонометрические функции углов любой величины — значит предварительно надо познакомить учеников с углом, как величиной, способной изменяться от $-\infty$ до $+\infty$. В курсе геометрии такое понятие угла не фигурировало.

Кроме того, с самого начала курса учащиеся должны быть знакомы с различными системами измерения углов. С измерением углов в градусах или в прямых углах они уже знакомы из курса геометрии. Поскольку радианное измерение углов является единственной новой для учащихся системой измерения и поскольку именно радианное измерение должно являться в курсе тригонометрии основным, нет никаких оснований к откладыванию этого вопроса. Ознакомление с радианым измерением углов должно предшествовать введению тригонометрических функций. Тригонометрические функции должны сразу появиться в своей естественной одежде, в какой они всегда фигурируют в математическом анализе. Радианное измерение углов должно стать наиболее привычным, а стало быть, оно должно употребляться при самом первом знакомстве с тригонометрическими функциями.

Само собой разумеется, что обратный перегиб тоже был бы крайне вреден. Мы хотим восстановить в правах радианное измерение углов, которое при настоящем положении преподавания играет столь ничтожную роль. Однако мы вовсе не хотим вытеснить градусное измерение. Геометрические приложения тригонометрии сохраняют свою громадную важность (мы лишь протестуем против того, чтобы считать их в школьном курсе *единственными*). Во всех геометрических вопросах градусное измерение является естественным и удобным. Можно даже сказать, что измерение *углов* в градусной системе всегда удобнее, чем в радианной, и если мы столь пространно выступаем в защиту радианной системы, то это именно потому, что мы не хотим ограничиваться изучением *углов.* Если перенести центр тяжести на тригонометрические функции числового аргумента, то необходимо выдвинуть на первый план радианное измерение.

От учителя требуется большое чувство меры, чтобы найти в курсе тригонометрии правильное соотношение между измерением углов в градусной и в радианной мере. В частности, заметим, что во всех вопросах, где по существу прямой угол выступает как неделимое целое (например, в формулах приведения), совершенно безразлично, какой из двух систем пользоваться, потому что там дело не в измерении, а просто в обозначении прямого угла. В формулах приведения наиболее естественно было бы обозначать прямой угол буквой d, но мы не решаемся это предложить ввиду непривычности такого написания. Мы в соответствующем месте (гл. III, § 2) пишем формулы приведения для единообразия все в градусной системе, предоставляя учителю самому разнообразить это написание, когда он найдёт нужным, чтобы не создавать у учеников случайных привычек.

Обобщение понятия угла. Применявшееся в курсе геометрии определение угла как части плоскости или системы двух прямых не может обслужить потребностей тригонометрии. В тригонометрии *угол рассматривается как мера вращения,* т. е. с кинематической (вернее, форономической)[1]) точки зрения. Рассмотрим, например, тригонометрический круг и в нём — неподвижный и подвижной радиусы. Угол между ними есть путь, пройденный подвижным радиусом в пучке радиусов от начального положения до конечного. Это определение требует двух пояснений.



Черт. 3.
$(OA,\ OM) = 30^\circ + 360^\circ n$.

Первое пояснение. Задание двух радиусов — начального и конечного не определяет полностью вращения от первого ко второму, или, как принято говорить, определяет его „с точностью до кратных 360°“. Для радиусов OA и OM, изображённых на чертеже 3, угол можно считать в 30° или 390° или вообще в $30^\circ + 360^\circ n$. По этому поводу у учеников постоянно возникает следующее недоразумение: они склонны отождествлять углы в 30° и 390°. Это недоразумение возникает вследствие непривычки к кинематической точке зрения на угол. Если рассматривать угол просто как систему двух лучей, выходящих из одной точки, то углы в 30° и 390° неразличимы. Однако теперь мы смотрим на угол не как на систему двух лучей, а как на поворот, посредством которого первый луч был совмещён со вторым. Этот поворот не определяется одним лишь заданием лучей, а требует дополнительных указаний. Можно привести ряд примеров, чтобы убедить учеников, что во многих вопросах углы, различающиеся на целые обороты, нельзя отождествлять (хотя бывают и такие вопросы, в которых их можно отождествлять).

1) Пружина закручена на 390°. Результат будет не тот же самый, как если бы пружину закрутили на 30°.

2) На какой угол поворачивается минутная стрелка за один час? — На 360°. А за два часа? — На 720°. Разумеется, эти ответы нельзя отождествить.

Второе пояснение. Новая точка зрения на угол требует, чтобы угол рассматривался как относительная величина, так как

---

[1]) Форономия — наука о геометрических свойствах движения, т. е. рассматривающая движение вне времени.

необходимо различать два возможные направления вращения на плоскости. Не безразлично, перевести ли часы на 5 минут назад (т. е. повернуть минутную стрелку на 30°) или на пять минут вперёд (т. е. повернуть минутную стрелку на —30°).

Таким образом, в тригонометрии (в отличие от планиметрии) рассматривается ориентированная плоскость, т. е. *плоскость, в которой различаются два возможные направления вращения.*

Это даёт возможность различать две стороны плоскости, так как одно и то же вращение при рассматривании с одной стороны кажется происходящим против часовой стрелки, а с другой — по часовой стрелке.

Беззначность угла в пространстве.

Заметим, что только в плоскости углу приписывается знак. Угол между двумя направлениями в пространстве рассматривается как величина беззначная. Знак приписывается тем величинам, которые могут изменяться в двух противоположных смыслах или направлениях. На плоскости луч, выходящий из точки O, можно повернуть в двух направлениях: против часовой стрелки или по часовой стрелке. Если бы было указано, что луч повернулся на 30° (без указания, в каком направлении), то существуют два возможные варианта для конечного положения луча. Снабдив угол знаком $+$ или $-$, мы устраним эту двузначность.

Иное положение в пространстве. Там луч, выходящий из точки O, может повернуться вокруг этой точки не в двух, а в бесконечном множестве различных направлений. Если бы было указано, что луч повернулся на 30° (без дополнительных указаний), то существует бесконечное множество возможных конечных положений луча (все эти положения образуют одну полость конической поверхности). Введение для углов знака не может устранить имеющуюся здесь неопределённость.

Различные системы измерения углов.

Поскольку нам постоянно придётся измерять углы, с которыми мы будем иметь дело, естественно предварительно рассмотреть вопрос о системе измерения углов, т. е. о принятой единице для измерения углов.

Существует несколько систем для измерения углов (в градусах, в прямых углах, в градах, в часах, в радианах и другие). Измерение в градусах и прямых углах известно из курса геометрии. Остальные способы (кроме радианного) имеют узко специальное назначение. Поэтому всё внимание в этом месте курса должно быть сосредоточено на радианном измерении углов.

Является ли радианное измерение углов отвлечённым?

В этом вопросе часто допускается путаница, заключающаяся в том, что радианное измерение считают отвлечённым.

Никакая величина не может выражаться отвлечённым числом. Всякая величина выражается в некоторых единицах, причём за единицу принимается определённая величина того же рода: единицей массы служит масса, единицей скорости — скорость, единицей угла — угол. Эта точка зрения очень убедительно изложена в курсе физики О. Д. Хвольсона, и мы настоятельно рекомендуем читателю ознакомиться с соответствующим местом [1]), а здесь ограничимся лишь краткими замечаниями.

Угол не представляет собой исключения. При радианном измерении углов за единицу принимается у г о л, характеризующийся тем, что длина дуги, на которую он опирается, будучи принят за центральный, равна радиусу; этот угол называется радианом. Бессмысленно утверждать, что какой-нибудь угол равен отвлечённому числу 2, но может быть угол, равный двум радианам.

Иногда говорят, что за меру угла принимается отношение данного угла к радиану. Такая точка зрения вполне возможна, и тогда угол действительно будет *характеризоваться* отвлечённым числом. Однако такая точка зрения не имеет специального отношения именно к углам. Любую величину можно характеризовать её отношением к принятой единице; в таком случае массы, площади, силы будут характеризоваться отвлечёнными числами. Кроме того, такая точка зрения не имеет никакого специального отношения к радианному измерению углов: можно было бы принять за единицу угол в 1° и характеризовать всякий угол отвлечённым числом, выражающим отношение этого угла к углу в 1°. Другими словами, можно было бы записывать углы в градусах при помощи отвлечённых чисел, опуская значок «градус» (подобно тому, как мы обычно опускаем слово «радиан»). Угол в 45° при таком соглашении выражался бы отвлечённым числом 45. Мы видим, что радианное измерение углов не более отвлечённо, чем измерение углов в любых других единицах или чем вообще измерение любых величин.

Наконец, говорят, что радианная мера угла есть отношение длины дуги к радиусу и поэтому является отвлечённым числом. Отношение длины дуги к радиусу действительно является отвлечённым числом, но недопустимо утверждать, что угол *равен* этому отношению. Верно лишь то, что число радианов, заключающихся в угле, равно отношению дуги к радиусу, но из численного равенства не вытекает равенства размерностей.

Все отмеченные противоречия устраняются при следующей точке зрения на радианное измерение углов.

1. Радиан есть угол, принимаемый за единицу при радианном измерении углов. Например, говорят: $\alpha = 2$ радианам, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ радианов.

2. При рассмотрении тригонометрических функций любого (не углового) аргумента даётся определение, уже упоминавшееся выше: синус отвлечённого числа x считается (по определению!) совпадающим с синусом угла в x радианов. Это определение и является поводом для недоразумеиий, рассмотренных выше. Дадим несколько пояснений.

Использование в этом определении радианной меры углов является только условностью. С таким же успехом можно было бы условиться

---

[1]) О. Д. Х в о л ь с о н. Курс физики, т. I, Л.—М. 1933. Введение, § 9. Особенно см. критику понятия «удельный вес» (стр. 38), вполне аналогичную нашим соображениям о невозможности отвлечённого измерения углов.

считать синус отвлечённого числа x совпадающим с синусом угла в x градусов; например, синус числа 2 равнялся бы при таком определении $\sin 2^\circ = 0{,}034899$. Если принято синусом отвлечённого числа x считать не синус угла в x градусов, а синус угла в x радианов, то причина этого совсем не в том, что радианное измерение углов отвлечённо, а градусное — нет. Причина этого в том, что общепринятое определение тригонометрических функций отвлечённого аргумента приводит в математическом анализе к более простым формулам, чем всякое иное определение.

В формуле:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$$

буква x обозначает не угол, а отвлечённое число, потому что $\frac{\pi}{2}$ — отвлечённое число. Применительно к углам эту формулу следует писать так:

$$\sin(90^\circ+x)=\cos x$$

или

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\,рад+x\right)=\cos x.$$

Последняя запись, впрочем, никогда не употребляется, и с этим приходится мириться, хотя сделанные выше замечания остаются в силе.

Введение радианного измерения углов.

Остановимся теперь на методической стороне. Разумеется, антинаучная концепция об «отвлечённом» измерении углов должна быть отброшена. Правильная точка зрения в данном вопросе столь проста, что не нуждается ни в каком упрощении (тем более, что здесь под видом упрощения преподносится нечто совершенно неправильное). Вот одна из возможных схем для изложения этого вопроса. Мы перечисляем здесь положения, которые обязательно должны быть доведены до сознания учеников для внесения полной ясности в вопрос.

1. При всякой системе измерения углов за единицу принимается некоторый угол. В математике оказывается весьма удобной такая система, в которой за единицу принимается р а д и а н, т. е. угол, опирающийся (мы представляем его центральным углом в круге) на дугу, длина которой равна радиусу. Преимущества этой системы не могут быть выяснены на данной стадии обучения.

2. Легко доказать, что если центральный угол в круге опирается на дугу, длина которой равна s, то отношение $\frac{s}{R}$ (R — радиус) равно числу радианов в этом угле. Доказательство основывается на том, что центральные углы пропорциональны длинам дуг (в одном круге), на которые они опираются. Обозначая буквой α число радианов в данном угле, имеем:

Угол в α радианов опирается на дугу, длина которой равна s.
„ 1 радиан „ „ „ „ „ R.

Отсюда вытекает пропорция:

$$\frac{\alpha}{1}=\frac{s}{R}, \tag{1}$$

т. е.

$$\alpha=\frac{s}{R}. \tag{2}$$

Как видно из этого вывода, α — не «угол», а «число радианов в угле», т. е. отвлечённое число. Таким образом, нельзя сказать, что центральный угол *равен* отношению своей дуги к радиусу, но можно сказать, что он *измеряется* этим отношением, т. е. число, выражающее этот угол в радианах, равно $\frac{s}{R}$. Сам же угол равен $\frac{s}{R}$ радианов.

Опасения, что эта точка зрения окажется непонятной ученикам, неосновательна. Во-первых, уже в VII классе ученикам внушают, что центральный угол не равен своей дуге, а измеряется ею, т. е. дуга и угол выражаются одинаковыми числами при условии, что дуга измеряется дуговыми градусами, а угол — угловыми градусами. Если такая точка зрения оказывается доступной для учеников VII класса, то нет оснований бояться за учеников IX класса. Во-вторых, правильная точка зрения всегда яснее неправильной. Утверждение, что угол ра́вен отвлечённому числу $\frac{s}{R}$, не может быть понято никем, потому что оно бессмысленно.

Связь между радианным и градусным измерением.

3. Градусная мера угла пропорциональна радианной. Вообще, если одну и ту же переменную величину измерять двумя различными единицами, то числовые значения этой величины, измеренной одной единицей, пропорциональны числовым значениям этой величины, измеренной другой единицей. Коэфициент пропорциональности является отвлечённым числом. Для нахождения этого коэфициента пропорциональности надо для какого-нибудь одного значения нашей величины знать её числовые выражения в той и другой системе. Для углов следует прочно запомнить основное соотношение:

$$\pi\ \textit{рад}=180°. \tag{3}$$

Исходя из этого соотношения и из пропорциональности радианной и градусной мер, рассуждаем так:

$$\pi\ \textit{рад}=180°,$$
$$\alpha\ \textit{рад}=n°.$$

В таком случае,

$$\frac{\alpha}{\pi}=\frac{n}{180} \tag{4}$$

(наименования справа и слева сократились, и в пропорции (4) участвуют только отвлечённые числа). Из пропорции (4) находим:

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{\pi}{180}n,\\ n&=\frac{180}{\pi}\alpha.\end{aligned}\right| \tag{5}$$

Полезно заметить приближённые значения в десятичных дробях коэфициентов, встречающихся в формулах (5). Даём их с шестью значащими цифрами:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi}{180} &= 0{,}0174533, \\ \frac{180}{\pi} &= 57{,}2957 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(оба эти значения — избыточные).

Полагая в первой формуле (5) $n = 1$, найдём число радианов в угле в $1°$:

$$1° = \frac{\pi}{180}\,\textit{рад} = 0{,}0174533\ \textit{рад}. \tag{7}$$

Полагая во второй формуле (5) $\alpha = 1$, найдём число градусов в угле в 1 радиан:

$$1\ \textit{рад} = \frac{180°}{\pi} = 57°{,}2957 = 57°17'44''{,}8. \tag{8}$$

Для дальнейших занятий надо вооружить учеников таблицами для перевода градусной меры в радианную и обратно. На стр. 138 даётся таблица для перевода радианной меры в градусную. Обратные таблицы весьма распространены[1]) и потому мы их не приводим.

Эти таблицы должны войти в повседневное употребление. Весьма важно ввести в повседневную практику измерение углов в десятичных долях радиана. Измерение углов в долях π есть обход (большей частью — бессознательный) радианной системы, потому что при этом „круглым" считается развёрнутый угол, а не угол в один радиан.

Надо также разрушить ту таинственность, которая окутывает равенство:

$$90° = \frac{\pi}{2}\,\textit{рад}.$$

Эта таинственность возникает, во-первых, потому, что в правой части опускают наименование и пишут:

$$90° = \frac{\pi}{2},$$

и, во-вторых, потому, что ученики рассматривают π просто как букву, забывая, что она обозначает число. Часто ученики даже не знают, что буква π в последнем равенстве — та самая, которая выражает отношение длины окружности к диаметру. Они думают, что $\frac{\pi}{2}$ есть собственное имя для прямого угла, так же как буква d. Нам приходилось даже сталкиваться с утверждением, что $\pi = 180°$. Постоянное

---

[1]) См., напр., В. Брадис «Четырёхзначные математические таблицы для средней школы», таблица VII.

употребление десятичных долей радиана является противоядием против этих недоразумений. Если бы мы писали:

$$90^\circ = \frac{\pi}{2}\ \textit{рад} \approx 1{,}57\ \textit{рад},$$

то указанные недоразумения, вероятно, не возникли бы.

§ 3. Определение тригонометрических функций.

Различные возможные способы определения тригонометрических функций.

После обобщения понятия угла и рассмотрения радианной системы измерения углов нет никаких препятствий к определению тригонометрических функций угла таким образом, чтобы это определение не подвергалось в дальнейшем радикальной ломке. Рассмотрим следующие предложения.

I. Общепринятый способ с тригонометрическим кругом.

Он подразделяется на два варианта:

Ia. Круг произвольного радиуса R.

Ib. Круг единичного радиуса.

II. Координатный способ (способ проекций).

III. Векторный способ.

Способы II и III тоже имеют по несколько модификаций, так что вернее сказать, что это — группы способов.

Координатный способ.

Рассмотрим некоторые варианты координатного способа.

IIa. Возьмём окружность единичного радиуса с центром в начале координат. По этой окружности движется точка M (черт. 4). Обозначим через α угол, описанный радиусом OM от начального положения OA (A — точка с координатами $x=1$, $y=0$). Координаты точки M суть функции этого угла. Назовём их косинусом и синусом, т. е. по определению:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= x, \\ \sin\alpha &= y. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Черт. 4.

IIb. Можно взять окружность радиуса R. Тогда косинус и синус определяются как отношения координат к радиусу:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{R}, \\ \sin\alpha &= \frac{y}{R}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Если точка M находится в первой четверти, то определения (10) не отличаются от определений косинуса и синуса как отношений сторон в прямоугольном треугольнике, но в действительности определения (10) — шире. Педагогическая идея этих определений та, что координаты x и y являются относительными числами. Предполагается, что ученики уже́ ранее осведомлены о знаках координат в различных четвертях. Таким образом, определения (9) или (10) в короткой формулировке дают всё, что́ надо: величину и знак косинуса и синуса.

Термины «линия косинуса» «линия синуса» при этом способе не употребляются, так как они дублируют термины «абсцисса» и «ордината» для точки, лежащей на окружности.

IIc. Можно совсем отказаться от основной окружности. Пусть M — любая точка плоскости, и α — угол, пройденный радиусом OM (за начальное положение считается положительное направление оси X). Тогда

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{\rho}, \\ \sin\alpha &= \frac{y}{\rho}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $\rho = OM$. Формулы (11) напоминают формулы (10), но разница между ними та, что ρ не является постоянным. Это значит, что, рассматривая косинусы и синусы разных углов, мы можем брать точки M как угодно разбросанными по плоскости, в то время как при вариантах IIa и IIb они всегда берутся на окружности.

При всех вариантах способа II тангенс определяется как отношение синуса к косинусу:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{12}$$

или как отношение координат точки M:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}. \tag{13}$$

Остальные функции определяются как величины, обратные тангенсу, косинусу и синусу.

Векторный способ.

При векторном способе тоже можно рассматривать окружность единичного радиуса или радиуса R. По этой окружности движется точка M и рассматривается её радиус-вектор OM.

IIIa. Рассматривается окружность единичного радиуса. Тогда, по определению, косинусом и синусом угла α называются проекции радиуса-вектора OM соответственно на оси X и Y:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \text{пр}_x\overline{OM}, \\ \sin\alpha &= \text{пр}_y\overline{OM}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

IIIb. Рассматривается окружность радиуса R. Тогда косинусом и синусом называются отношения проекций радиуса-вектора на координатные оси к радиусу окружности:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\text{пр}_x\overline{OM}}{R}, \\ \sin\alpha &= \frac{\text{пр}_y\overline{OM}}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

В обоих случаях тангенсом называется либо отношение синуса к косинусу, либо отношение проекций:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\text{пр}_x \overline{OM}}{\text{пр}_y \overline{OM}}. \tag{16}$$

При векторном способе должны быть предварительно чётко установлены следующие понятия.

Ось.

1. Ось — *прямая, на которой различаются два возможные направления*. Одно из них называется положительным, а другое — отрицательным.

Направленный отрезок.

2. Направленный отрезок. Так называется отрезок, если он *лежит на оси* и в нём *различаются начало и конец*, т. е. указано, какая из двух ограничивающих его точек служит началом и какая — концом. Не может быть направленных отрезков без соблюдения этих обоих условий. Например, нельзя рассматривать направленные отрезки на прямой, а также отрезки, занимающие различные положения на плоскости или в пространстве, если каждый из них не лежит на специально для него приготовленной оси.

Направленные отрезки выражаются относительными числами: направленный отрезок выражается положительным числом (короче говоря, отрезок положителен), если направление от его начала к концу совпадает с положительным направлением оси; в противном случае отрезок отрицателен.

Два направленные отрезка считаются равными между собой, если они выражаются одним и тем же числом. При этом они могут лежать на различных осях.

Для направленных отрезков имеет место формула Шаля

$$AB + BC = AC. \tag{17}$$

Она справедлива при любом расположении точек A, B и C (на оси!). Повторным применением этой формулы можно доказать обобщённую формулу Шаля:

$$AB + BC + CD + \ldots + JK + KL = AL. \tag{18}$$

Формула Шаля понадобится не при определении тригонометрических функций, а позднее (при доказательстве теоремы о проекции ломаной на ось, стр. 59). Для полноты картины можно дать её сразу при изучении свойств направленных отрезков.

Вектор.

3. Вектор — *отрезок, в котором начало различается от конца и при рассмотрении которого принимается во внимание направление прямой, на которой он расположен*. В отличие от направленных отрезков, *для изучения вектора не нужна ось*, т. е. не нужно устанавливать положительное направление на прямой, на которой расположен вектор. С другой стороны, для вектора существенно его направление в пространстве (или на плоскости), а для направленного отрезка важно только то, в какую

сторону он смотрит на своей оси, направление же оси в пространстве несущественно [1]).

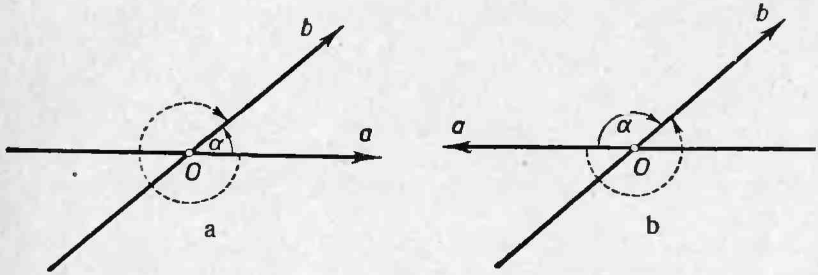
Векторы не выражаются относительными числами, потому что для них существуют не два возможных направления, а бесконечное множество возможных направлений.

Два вектора считаются равными, если они имеют равные длины и одинаковые направления. Последнее условие обозначает, что эти векторы расположены на параллельных прямых и что на этих параллельных прямых они направлены в одну сторону (а не в противоположные).

Вектор, имеющий начало в точке A, а конец — в точке B, обозначается $\overline{AB}$. Черта сверху заменяет слово «вектор». Длина вектора $\overline{AB}$ обозначается $|\overline{AB}|$ или AB.

Угол между осями или векторами.

4. Угол между осями (или между двумя векторами или между вектором и осью). Угол между двумя осями — не то же самое, что угол между двумя прямыми. Для определения угла между двумя осями надо не только знать, на каких прямых расположены эти оси, но



Черт. 5. $(\widehat{a, b}) = \alpha + 2k\pi$.

также и то, как выбраны положительные направления на этих осях. Играет роль также и порядок этих осей, т. е. какая из них считается первой и какая — второй.

Пусть a и b — две оси на плоскости, и O — их точка пересечения (черт. 5). Углом (a, b) (здесь a — первая ось, b — вторая) называется угол, на который надо повернуть вокруг точки O ось a, чтобы она совпала с осью b. Оси считаются совпавшими, если совпадут прямые, являющиеся их носителями, и совпадут положительные направления, т. е. стрелочки будут смотреть в одну сторону, (а не в противоположные).

Угол (a, b) на чертежах 5 а и b отмечен дугой. Если изменить направление на одной из осей, то угол изменится.

---

[1]) Таким образом, в геометрии на прямой (геометрии одного измерения) различия между направленными отрезками и векторами не существует.

Символ (a, b) не является определённым однозначно, а лишь с точностью до кратных 2π. Если α — одно из значений угла (a, b), то все значения даются формулой:

$$\widehat{(a, b)} = \alpha + 2k\pi, \tag{19}$$

где k — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль). Угол, отмеченный пунктирной дугой на чертеже 5а, получается при $k = -1$; угол, отмеченный пунктирной дугой на чертеже 5b, получается при $k = 1$. Угол считается положительным, если вращение происходит против часовой стрелки, и отрицательным — если по часовой стрелке.

Угол между двумя векторами или между вектором и осью определяется аналогично.

Правило цепи для углов.

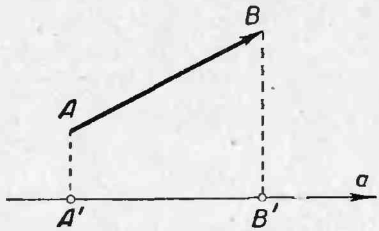
Для углов имеет место п р а в и л о ц е п и:

$$(a, b) + (b, c) = (a, c) \tag{20}$$

и о б о б щ ё н н о е п р а в и л о ц е п и:

$$(a, b) + (b, c) + (c, d) + \ldots + (j, k) + (k, l) = (a, l). \tag{21}$$

Эти правила аналогичны формулам Шаля для направленных отрезков с той разницей, что формулы (20) и (21) верны лишь с точностью до целых оборотов. Если ось a повернуть до совпадения с осью b, а затем ось b — до совпадения с осью c, то сумма этих двух поворотов даст *один из возможных поворотов*, совмещающих ось a с осью c. Таким образом, если (a, b) и (b, c) суть некоторые определённые повороты, то их сумма равна не какому-нибудь, а определённому, не зависящему от нас повороту (a, c). Если же под (a, b), (b, c) и (a, c) понимать какие угодно повороты, совмещающие данные оси, то формулу (20) следовало бы написать так:



Черт. 6. $A'B' = \text{пр}_a\overline{AB}$.

$$(a, b) + (b, c) = (a, c) + 2k\pi. \tag{22}$$

Аналогичное замечание относится и к формуле (21).

Эти соглашения относятся только к углам на плоскости. В пространстве, как было объяснено выше (стр. 33), положительное направление для отсчёта углов не устанавливается и не делается различия между углами (a, b) и (b, a).

Проекция вектора на ось.

5. П р о е к ц и я в е к т о р а н а о с ь. Пусть дан вектор $\overline{AB}$ и ось a (черт. 6). Опустим из A и B перпендикуляры на ось a, и пусть A' и B' — основания этих перпендикуляров. Н а п р а в л е н н ы й о т р е з о к $A'B'$ называется п р о е к ц и е й в е к т о р а $\overline{AB}$ н а о с ь a:

$$A'B' = \text{пр}_a\overline{AB}. \tag{23}$$

Иногда, когда соответствующее различение не играет роли, проекцией вектора на ось называется относительное число, выражающее соответствующий направленный отрезок.

Итак, проекция вектора на ось есть не вектор, а число или направленный отрезок. Другое дело — проекция вектора на прямую или на плоскость, но этих понятий мы не будем касаться.

Векторный способ. Вернёмся теперь к векторному способу определения тригонометрических функций и рассмотрим самый радикальный его вариант IIIс, обходящийся без тригонометрического круга и даже не требующий приведения всех векторов к общему началу.

IIIс. Дана ось a и вектор $\overline{AB}$. Обозначим через α угол от этой оси до вектора $\overline{AB}$. В таком случае косинусом угла α называется отношение проекции вектора $\overline{AB}$ на ось a к длине самого вектора.

$$\cos\alpha = \frac{\text{пр}_a\overline{AB}}{AB}. \tag{24}$$

Синусом угла α называется отношение проекции вектора $\overline{AB}$ на ось b, образующую угол $\frac{\pi}{2}$ с осью a, к длине самого вектора:

$$\left.\begin{aligned} &\sin\alpha = \frac{\text{пр}_b\overline{AB}}{AB}, \\ &\text{где} \quad (\widehat{a, b}) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Важно подчеркнуть, что $(\widehat{a, b})$ положителен, т. е. ось b получается от поворота оси a на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки.

Наконец, тангенсом называется либо отношение синуса к косинусу, либо отношение проекций вектора на оси a и b:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{пр}_b\overline{AB}}{\text{пр}_a\overline{AB}}. \tag{26}$$

Можно ввести координатную систему и рассматривать оси X и Y вместо a и b. Наиболее радикальные сторонники векторного метода считают, что координатные оси ассоциируются с раз навсегда фиксированным положением на чертеже. При изучении тригонометрии, по мысли этих авторов, желательно, чтобы углы брались во всевозможных положениях. Нежелательно, чтобы начальное направление, — будь то неподвижный радиус в тригонометрическом круге или ось X в случае ликвидации тригонометрического круга, — всегда было горизонтальным. Поэтому ось a можно брать каждый раз по-разному. Так же нежелательно, чтобы все углы имели общую вершину. Поэтому сторонники этого метода рекомендуют брать векторы AB всевозможными способами разбросанными по плоскости.

Сравнение различных способов.

Перейдём к оценке перечисленных способов.

Прежде всего заметим, что координатный способ в вариантах IIa и IIb и векторный способ в вариантах IIIa и IIIb весьма мало отличаются от обычного способа Ia или Ib. Эти варианты не устраняют тригонометрического круга. Для обычного способа наиболее характерными являются следующие особенности:

1. Все рассматриваемые углы образованы радиусами одинаковой длины.

2. У всех углов — общая вершина (центр тригонометрического круга).

3. У всех углов — общее начальное направление (неподвижный радиус).

4. Все тригонометрические функции изображаются специальными линиями.

Варианты IIa, IIb, IIIa и IIIb сохраняют первые три особенности обычного способа. Терминологические изменения, которые они вносят в обычный способ, весьма мало существенны. В самом деле, велика ли разница между следующими двумя определениями.

Линией синуса называется длина перпендикуляра, опущенного из конца подвижного радиуса на первый диаметр, снабжённая знаком плюс, если конец подвижного радиуса лежит выше первого диаметра, или знаком минус, если конец подвижного радиуса лежит ниже первого диаметра. Синусом называется отношение линии синуса к радиусу.

Ординатой точки называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на ось X, снабжённая знаком плюс, если точка лежит выше оси X, или знаком минус, если точка лежит ниже оси X. Синусом называется отношение ординаты точки (лежащей на тригонометрической окружности) к радиусу.

Соглашения о знаках отрезков рано или поздно должны быть введены в курс математики. Это может быть сделано либо непосредственно для тригонометрических линий, либо для проекций вектора на ось, либо для координат точки. Само собой разумеется, что если ученики уже знакомы с координатами точки, то при определении синуса и косинуса незачем повторять все подробности, относящиеся к знакам.

Итак, обычный способ «привязывает» все углы к общей вершине и общему начальному направлению. Это — достоинство, потому что этим достигается большая наглядность в изучении изменения тригонометрических функций при изменении угла. В то же время это — недостаток, потому что всякая связанность с определённым положением на чертеже создаёт у учеников заблуждения, заставляя их принимать частное за общее.

Способы IIa, IIb, IIIa и IIIb в том виде, как они изложены выше, обладают громадным недостатком — отсутствием линии тангенса. Если тангенс определяется как дробь, у которой меняются числитель и знаменатель одновременно, то изучение изменения тангенса затрудняется и становится не наглядным. Таким образом, эти способы, обладая теми же недостатками, что и обычный, лишены его достоинства — наглядности.

Из всех точек зрения, отличных от обычной, единственно последовательной является IIIc[1]). Она полностью устраняет недостаток тригонометрического круга — привязанность углов к одной вершине и одному начальному направлению. Но это достигается дорогой ценой: почти полным разрушением наглядности, особенно при изучении тангенса, котангенса, секанса и косеканса.

Выводы. Если бы перед нами стояла только одна задача — изучать изменение тригонометрических функций, то мы безоговорочно высказались бы за обычный способ. Тригонометрический круг, где каждая тригонометрическая функция иллюстрируется специальной линией, является самым наглядным способом для ознакомления учеников с тригонометрическими функциями.

Однако ознакомление с тригонометрическими функциями и изучение их изменения — не единственная задача тригонометрии. В дальнейшем курсе приходится изучать многие формулы, относящиеся к этим функциям. При этом выясняется, что обычное определение тригонометрических функций неудобно при выводе формул приведения и формул сложения. При обычном определении не получается хорошего аппарата (см. § 4 этой главы), который позволял бы выводить формулы во всей общности.

Исходя из этого соображения (которое будет развито дальше), мы рекомендуем определять тригонометрические функции как проекции радиуса-вектора, используя тригонометрический круг и введя линии тангенса и котангенса. Мы покажем детально, как это сделать.

Круг единичного или произвольного радиуса? При этом мы высказываемся за круг произвольного радиуса. В пользу единичного круга выдвигают следующий довод. Если $R = 1$, то линия синуса численно совпадает с синусом, в противном случае приходится усложнять дело рассмотрением отношения линии синуса к радиусу.

Это соображение представляется нам несущественным. Нельзя считать, что для учеников IX и X классов рассмотрение отношения двух отрезков может представлять затруднение. Употребление единичного круга представляет упрощение только в одном случае: когда мы на чертеже графически измеряем тригонометрические функции. В теоретических же вопросах применение единичного круга никаких упрощений не даёт. Зато оно имеет существенные недостатки. Во-первых, затемняется важная идея о том, что синус есть отвлечённая величина, а не отрезок, и создаётся опасность смешения синуса и линии синуса. Во-вторых, нежелательно вводить в определение моменты, не играющие роли для определяемого понятия. Вместо того чтобы привить ученикам мысль, что синус угла не зависит от линей-

---

[1]) Развитие этой точки зрения можно найти в статье В. Синакевича «Основные свойства тригонометрических функций в курсе средней школы» («Математика в школе», 1939, № 4).

ных размеров чертежа, мы связываем определение синуса с чертежом определённых размеров.

Определение косинуса и синуса. Для определения косинуса и синуса *предварительно надо установить два основные направления в тригонометрическом круге* (или иначе: *установить одно основное направление и положительное направление вращения;* тогда второе основное направление получается поворотом первого на $+90^\circ$). Одно из них — направление от центра к начальной точке отсчёта дуг. Название «первый диаметр» не вполне удачно, так как не отражает, какое из двух возможных направлений на этом диаметре считается положительным. Можно, следуя Б. Б. Пиотровскому, говорить «нулевое направление» или «начальное направление» или ещё как-нибудь иначе. Мы будем говорить «горизонтальная ось».

Далее устанавливается направление, которое получается из начального поворотом на 90° в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки). Мы будем называть его «вертикальной осью».

Проекцию вектора на горизонтальную ось будем называть «горизонтальной проекцией» этого вектора, а проекцию вектора на вертикальную ось — «вертикальной проекцией» этого вектора [1]).

Пусть дан угол α, для которого радиус-вектор $\overline{OM}$ является конечным. ***Косинусом угла α называется отношение горизонтальной проекции вектора $\overline{OM}$ к радиусу (к длине радиуса). Синусом угла α называется отношение вертикальной проекции вектора $\overline{OM}$ к радиусу.***

Напоминаем, что проекция вектора на ось рассматривается как относительная величина. Предполагается, что вопрос о знаке проекции основательно выяснен уже ранее. Приведённое определение позволяет наглядно проследить изменение косинуса и синуса при изменении угла. Случаи, когда угол равен $90^\circ n$, не выделяются как особые или затруднительные.

Определение тангенса и котангенса. Можно определить тангенс и котангенс формулами:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

но, как было выяснено выше, необходимо ввести «линии» тангенса и котангенса для наглядного изучения этих функций.

Введём следующие термины.

П е р в а я   к а с а т е л ь н а я — касательная в начальной точке отсчёта дуг; на ней установлено положительное направление — то же са-

---

[1]) Такая терминология введена во втором издании учебника А. Ф. Бермаnта и Л. А. Люстерника. Это даёт возможность при определении тригонометрических функций обходиться более короткими формулировками, чем в первом издании, где каждый раз говорилось о «проекции вектора на горизонтальное (или вертикальное) направление». При этом термин «горизонтальное направление» был неудачен ещё и потому, что он характеризует прямую, а не ось.

мое, что и на вертикальной оси. Таким образом (это очень важно!) *под первой касательной подразумевается не прямая, а ось.*

Радиус-вектор, продолженный до первой касательной. Это — некоторый вектор. Он представляет удлинённый радиус-вектор для углов, оканчивающихся в первой или четвёртой четвертях, в остальных же случаях его направление противоположно направлению радиуса-вектора.

Вторая касательная определяется аналогично первой касательной.

Радиус-вектор, продолженный до второй касательной определяется аналогично радиусу-вектору, продолженному до первой касательной.

Теперь можно доказать следующую теорему:

Проекция на первую касательную радиуса-вектора, продолженного до первой касательной, изображает тангенс (изображает — это значит, что отношение этой проекции к радиусу есть тангенс). Эту проекцию называют линией тангенса.

Доказательство. Мы рекомендуем учителю ввести раз навсегда определённые обозначения для точек, участвующих во всех предыдущих построениях. Это позволит проводить в классе рассуждения, не зависящие от того, в каких четвертях оканчиваются рассматриваемые углы. Учитель может, не делая чертежа на доске, произносить названия точек и отрезков. У учеников в тетрадях при этом могут быть сделаны *различные* чертежи, и, несмотря на это различие, все ученики могут следить по своим чертежам за объяснениями учителя, лишь бы все пользовались одинаковыми обозначениями. Вот, например, сводка возможных обозначений, понятная из чертежа 7, помещенного на следующей странице.

Из подобия треугольников OPM и OAT в любом случае имеем:

$$\frac{|PM|}{|OP|}=\frac{|AT|}{|OA|}$$

($|PM|$ обозначает абсолютную величину отрезка PM). Легко видеть, что последнее равенство останется справедливым и в том случае, если в нём опустить знаки абсолютной величины. В самом деле, отрезок AT положителен, если угол $\alpha=\widehat{AOM}$ оканчивается в первой или третьей четвертях, и отрицателен, если этот угол оканчивается во второй или четвёртой четвертях. Но знак отношения $\frac{PM}{OP}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ — такой же. Отрезок же $OA=R$ не зависит от положения радиуса-вектора $\overline{OM}$ и является положительным. Следовательно:

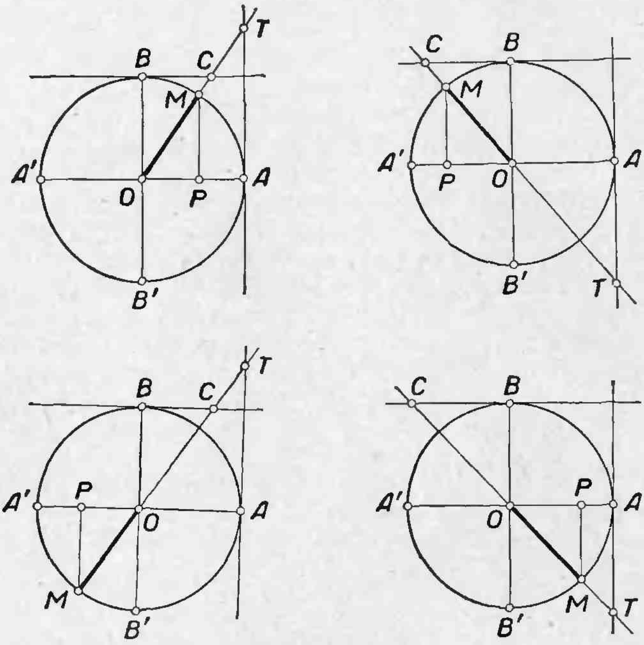
$$\frac{AT}{R}=\operatorname{tg}\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично вводится линия котангенса.

Предлагаемый порядок можно обернуть: принять отношения $\frac{AT}{R}$ и $\frac{BC}{R}$ за определения тангенса и котангенса. Тогда придётся доказать, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

В учебнике А. Ф. Берманта и Л. А. Люстерника тригонометрические функции определяются так, как предлагается выше, за одним



Черт. 7.

исключением: авторы не вводят линий тангенса и котангенса. Однако эти линии возникают у них (без специального названия) в связи с задачей — построить тангенс данного угла (§ 35, стр. 58). Лучше было бы, не стесняясь, ввести эти линии раньше, дать им названия и использовать при изучении тангенса и котангенса.

Секанс и косеканс. Большие разногласия вызывает вопрос о том, необходимо ли знакомить учеников с секансом и косекансом. Говорят, что секанс и косеканс встречаются редко и даже могут совсем не употребляться, потому что вместо них всегда можно рассматривать

$$\frac{1}{\cos \alpha} \text{ и } \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Мы считаем, что вопрос этот не является столь важным. Для учеников старших классов рассмотрение ещё двух добавочных функций не должно вызывать никаких серьёзных затруднений. Введение этих функций представляет некоторые удобства по трём причинам:

1) В прямоугольном треугольнике они необходимы для создания полноты картины, так как отношений сторон может быть шесть.

2) Введение этих функций делает более полным и разнообразным собрание тригонометрических тождеств, что часто оказывается полезным при изучении высшей математики. Например, при вычислении неопределённых интегралов часто оказывается полезным использовать секанс и косеканс.

3) Хотя секанс и косеканс являются обратными величинами косинуса и синуса, при вычислениях удобнее иметь таблицы, где даны готовые значения секанса и косеканса, чем каждый раз прибегать к делению. Поэтому в хороших тригонометрических таблицах обычно даются значения секанса и косеканса (см., напр., И. Петерс, Шестизначные таблицы тригонометрических функций, изд. 3. М. 1941).

Пренебрежение к секансу и косекансу (а иногда даже к котангенсу) отчасти вызвано обычаем производить вычисления исключительно по логарифмически-тригонометрическим таблицам, а не по натуральным. Из того, что

$$\lg \sec x = -\lg \cos x,$$

вытекает, что помещение в таблицах логарифмов секансов было бы излишне. При пользовании же натуральными таблицами отсутствие секанса является неудобством. В настоящее время роль основного средства тригонометрических вычислений переходит от логарифмически-тригонометрических таблиц к натуральным. Это — один из аргументов в пользу введения секанса и косеканса.

Верно, что секанс и косеканс применяются значительно реже, чем остальные тригонометрические функции. Отсюда следует лишь то, что их следует реже применять в задачах.

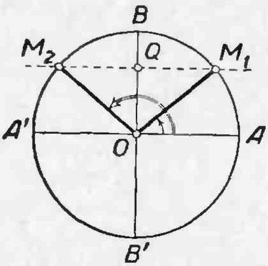
Построение угла по данному значению тригонометрической функции.

В числе самых первых задач и упражнений, решаемых учениками, как только они ознакомились с понятием тригонометрических функций, особо важное значение имеет следующая задача: построить угол, если дано значение одной из его тригонометрических функций.

Обратные задачи всегда полезно решать наряду с прямыми для создания полной картины. Если мы разобрали вопрос, как найти синус (графически), когда дан угол, то естественно возникает обратная задача — построить угол по синусу.

В этом вопросе очень важным является не только установление аналогии или параллелизма между этими задачами (то же самое построение производится в обратном направлении), но также и противопоставление этих задач. Каждому углу соответствует вполне определённый синус, но обратное положение неверно: каждому синусу соответствует бесконечное множество углов. Даже в пределах одного оборота существуют два угла, имеющие данный синус (за исключением случаев, когда синус равен 1 или -1). Этот факт мог встречаться и ранее (при самом определении тригонометрических функций), но он становится особенно осязательным и запоминающимся при попытке построить угол по его синусу.

Итак, пусть, например, $\sin\alpha=\frac{2}{3}$. Строим $OQ=\frac{2}{3}R$ (черт. 8) и проводим через Q прямую, параллельную AA'. Точки M_1 и M_2, в которых эта прямая пересекает окружность, соединяем с центром. Получаем два угла: $\angle AOM_1$ и $\angle AOM_2$.



Черт. 8. Построение угла по данному синусу.

При решении этой задачи следующие ошибки являются обычными:

1) Проводят QM_1 только в одну сторону от точки Q.

2) Если точки M_1 и M_2 получены, то неправильно указывают углы, а именно вместо угла $\angle AOM_2$ отмечают дугой угол $\angle A'OM_2$.

Разумеется, следует рассмотреть также случай, когда синус отрицателен. Затем следует рассмотреть задачу о нахождении угла по значениям остальных тригонометрических функций. Решение этих задач убедительно выясняет важный вопрос: насколько значение какой-нибудь тригонометрической функции определяет угол. Эти сведения используются далее буквально на каждом шагу: при исследовании вопроса о двойных знаках в формулах, выражающих тригонометрические функции через другие функции того же угла, или в формулах для половинных углов, в теории обратных круговых функций, при решении треугольников (двойственный случай), в аналитической геометрии на плоскости и в пространстве и т. д.

Мы рекомендуем учителю обстоятельно разобрать все эти задачи и вывести из этого разбора следующие положения.

1. В интервале $-\infty < x < \infty$ задание значения (возможного) одной тригонометрической функции определяет бесконечное множество углов.

2. В интервале $0 \leqslant x < 2\pi$ задание значения (возможного) одной тригонометрической функции определяет, вообще говоря, два угла, а в некоторых исключительных случаях — один $\left(\text{например, если } \sin x=1, \text{ то } x=\frac{\pi}{2}\right)$.

3. В интервале $0 \leqslant x < 2\pi$ одновременное задание синуса и косинуса вполне определяет единственный угол.

4. Задание значения тангенса или котангенса определяет в пределах одного периода (например, $0 \leqslant x < \pi$) единственное значение угла. Задание значения любой другой тригонометрической функции определяет в пределах одного периода (например, $0 \leqslant x < 2\pi$), вообще говоря, два значения угла.

Если считать *существенно различными* (по отношению к некоторой тригонометрической функции) лишь такие углы, разность которых не кратна периоду этой функции, то в интервале $-\infty < x < \infty$ по значению тангенса и котангенса определяется лишь один основной угол (все остальные получаются от прибавления к этому основному периодов), а по значению любой другой тригонометрической функции определяются, вообще говоря, два основных значения угла.

Ход изменения тригонометрических функций. Далее уместно перейти к изучению хода изменения тригонометрических функций. Мы считаем, что это изучение распадается на две стадии: первая — качественное изучение и вторая — точное изучение. При качественном изучении мы устанавливаем, что в первой четверти синус возрастает от 0 до 1, а во второй убывает от единицы до 0. При точном изучении мы дополнительно устанавливаем, что во второй четверти он повторяет в обратном порядке те же значения, какие принимались в первой. Таким образом, точное изучение включает в себя формулы приведения.

Качественное изучение хода изменения тригонометрических функций не заключает в себе никаких тонких математических вопросов, о которых следовало бы упоминать. Оно основано на чертеже. Ученикам предлагается воображать вращение подвижного радиуса и судить о том, как при этом меняются тригонометрические линии. Всё дело основано на геометрическом воображении и на достаточной тренировке. Трудность этого раздела заключается в том, что требуется выработка чрезвычайно прочных ассоциаций, доходящих до степени рефлекса. Ход изменения тригонометрических функций должен быть усвоен столь же твёрдо, как таблица умножения. Отсутствие прочных ассоциаций в этом вопросе будет служить величайшим тормозом при дальнейшем изучении тригонометрии. Можно сказать, что от степени усвоения этого вопроса зависит успех всего дальнейшего обучения. Поэтому учитель должен отнестись к этому разделу с достаточным терпением и добиться, чтобы к концу его изучения ученики могли бы, не выполняя фактически чертежа, а только представляя его в уме, безошибочно ответить, как изменяется любая тригонометрическая функция в любой четверти.

В этот же раздел естественно включить изучение тригонометрических функций некоторых простейших углов: 30°, 45°, 60°, 90° и т. д.

О бесконечных значениях тригонометрических функций. Вопрос о тангенсе угла в 90° заключает в себе некоторую трудность. С. И. Новоселов[1]), автор курса тригонометрии, поставивший себе целью полную строгость, последовательно проводит ту точку зрения, что угол в 90° не имеет тангенса.

В самом деле, определение тангенса:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

---

[1]) А. Н. Перепёлкина и С. И. Новосёлов, Геометрия и тригонометрия, М.—Л., 1947. Как видно из предисловия, раздел «Геометрия» написан А. Н. Перепёлкиной, а «Тригонометрия» — С. И. Новосёловым. Поэтому мы ссылаемся на С. И. Новосёлова.

теряет смысл при $\cos\alpha = 0$, так как деление на нуль невозможно. Однако, очень тяжело отказаться от записи:

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \pm\infty.$$

В этой записи нет ничего ненаучного, так как она является просто стенографической записью следующего утверждения:

если угол α стремится к 90° слева [т. е. разность $90^\circ - \alpha$, будучи положительной, станет и останется в процессе дальнейшего изменения меньше наперёд заданного числа ε ($\varepsilon > 0$), каково бы ни было это число ε], то $\operatorname{tg}\alpha$ станет и останется в процессе дальнейшего изменения больше наперёд заданного числа N ($N > 0$), каково бы ни было это число N.

Чтобы не упоминать «и останется в процессе дальнейшего изменения...» можно ограничиться монотонным изменением угла.

Аналогично обстоит дело в случае, когда α стремится к 90° справа.

Ясно, что нет оснований возражать против замены этих длинных формулировок краткой условной записью.

§ 4. Тригонометрические тождества.

Связь между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

При определении тригонометрических функций ученики сразу знакомятся с первыми тригонометрическими тождествами, а именно с формулами, связывающими тригонометрические функции одного и того же аргумента. Это знакомство происходит раньше, чем изучение изменения тригонометрических функций, так как при изучении этого изменения иногда полезно опираться на упомянутые формулы.

Тригонометрические тождества (как и тригонометрические уравнения) не представляют собой отдельного раздела, а пронизывают весь курс тригонометрии. Формулы, устанавливающие связь между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента, суть первые тригонометрические тождества, с которыми сталкивается ученик. Далее в курсе будут появляться всё новые тождества (формулы приведения, формулы сложения, соотношения между обратными тригонометрическими функциями и т. д.).

Важная идея, которая должна быть хорошо уяснена учениками, заключается в том, что независимых формул, связывающих $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ и $\csc x$, должно быть пять (учебник Рыбкина, § 13). В качестве этих пяти формул можно взять следующие:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1, \\ \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x}, \\ \operatorname{ctg} x &= \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

$$\left.\begin{aligned} \sec x &= \frac{1}{\cos x}, \\ \csc x &= \frac{1}{\sin x}. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Эти пять формул независимы. В самом деле: в каждой из них (кроме первой) фигурирует функция, которая не встречается в других формулах. Ясно, что такая формула не может быть алгебраически выведена из остальных. Первая же формула не может быть выведена из остальных потому, что для этого пришлось бы исключить четыре величины ($\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ и $\csc x$) из четырёх формул.

К этим пяти формулам обычно присоединяют три непосредственные следствия:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg} x &= \frac{\cos x}{\sin x}, \\ 1 + \operatorname{tg}^2 x &= \sec^2 x, \\ 1 + \operatorname{ctg}^2 x &= \csc^2 x. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Доказательство формул (27) не представляет труда. Первая формула основана на теореме Пифагора. Общность её гарантирована тем, что знаки синуса и косинуса при доказательстве этой формулы не имеют значения. Остальные четыре формулы суть определения.

Нахождение всех тригонометрических функций по одной из них.

Первое применение формулы (27) и (28) находят при решении следующей задачи: *зная значение одной из тригонометрических функций, найти значения остальных.* Возможность такой задачи уже была обоснована геометрически. Мы видели (стр. 49), что задание значения любой тригонометрической функции определяет угол (хотя и не однозначно, а в пределах одного оборота, вообще говоря, двузначно), а следовательно, определяет (хотя бы двузначно) значения остальных тригонометрических функций.

Подобные задачи могут быть как числовыми, так и буквенными. Необходимо каждый раз требовать объяснения двузначности, если она получается. Небрежное отношение к двойному знаку явится серьёзным тормозом при дальнейшем изучении тригонометрии.

Пример. Найти $\cos x$, если $\sin x = 0{,}6$.

Решение.

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm 0{,}8.$$

Пояснение. В пределах $0 \leqslant x < 360^\circ$ существуют два угла, синус которых равен 0,6. Один из них оканчивается в первой четверти, а другой — во второй. Первый из этих углов имеет положительный косинус, а второй — отрицательный.

Подробное исследование вопроса о двойном знаке в формулах типа

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x} = \pm\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}} =$$

$$= \pm\frac{\sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec x} = \frac{1}{\csc x}$$

аналогично такому же исследованию в формулах для половинного аргумента. Мы предпочитаем дать его там (гл. IV, § 2, стр. 79), потому что там оно осложняется необходимостью рассматривать x в пределах двух оборотов:

$$0 \leqslant x < 720°.$$

Здесь это исследование производится так же, как там, но проще, так как можно ограничиться для x одним оборотом:

$$0 \leqslant x < 360°.$$

Понятие о тригонометрических тождествах.

После рассмотрения этой задачи (нахождение значений всех тригонометрических функций по значению одной) можно приступить к задачам на доказательство тригонометрических тождеств. Дадим определение тригонометрического тождества.

Тригонометрическим тождеством называется равенство вида:

$$F(f_1, f_2, \dots f_n) = 0, \tag{29}$$

где $f_1, f_2, \dots f_n$ суть тригонометрические функции от x, удовлетворяющее двум условиям, которые сейчас будут сформулированы. Что касается функций $f_1, f_2, \dots f_n$, то на данной стадии это могут быть только $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ и $\csc x$, но потом, наряду с этими функциями, могут входить $\sin(x + a)$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\operatorname{arc}\sin x$ и т. д.

Равенство (29) должно удовлетворять двум условиям:

1) Оно должно удовлетворяться при всех значениях x или по крайней мере при значениях x, сплошь заполняющих некоторый интервал. Если это условие не соблюдено, то равенство (29) вообще не тождество.

2) Если разные тригонометрические функции, входящие в равенство (29), заменить разными буквами, причём между этими буквами не предполагается никакой связи, то полученное равенство не должно быть тождеством.

Если первое условие соблюдено, а второе — нет, то равенство (29), будучи тождеством, не является тригонометрическим тождеством.

Другими словами: всякое тригонометрическое тождество является следствием не только правил алгебры, но и тригонометрических формул, т. е. формул, устанавливающих связи между различными тригонометрическими функциями.

Примеры.

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x.$$

Это не есть тригонометрическое тождество. При замене $\sin x = a$, $\cos x = b$ оно переходит в тождество. Значит, это — алгебраическое тождество.

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x.$$

Это — тригонометрическое тождество, так как при замене $\sin x = a$, $\cos x = b$, $\sin 2x = c$, оно принимает вид:

$$(a + b)^2 = 1 + 2c,$$

что не является тождеством при независимых a, b и c.

Методика доказательства тригонометрических тождеств.

Техника доказательства тригонометрических тождеств весьма разнообразна. Эти задачи служат очень хорошим средством для лучшего внедрения в память тригонометрических формул. Есть попытки систематизации приёмов доказательства тождеств, но мы сомневаемся в их педагогической полезности, так как они парализуют инициативу ученика, заставляя его не рассуждать о каждом тождестве индивидуально, а вспоминать, под какой случай его подвести.

В огромном материале тригонометрических тождеств лучше всего использовать метод обучения плаванию путём сталкивания в воду. Надо предоставить ученикам возможность барахтаться, приходя в случае необходимости им на помощь в каждом отдельном тождестве, но не спеша навязывать какие-либо общие правила.

ГЛАВА III.

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ И ГРАФИКИ.

§ 1. Аппарат тригонометрии.

Общность формул тригонометрии.

Мы хотим раз навсегда обсудить один принципиальный вопрос, который постоянно возникает во многих разделах математики, когда речь идёт о выборе того или иного способа в изложении этого раздела, — вопрос об аппарате. Формулы тригонометрии обладают общностью. Это значит, что они справедливы, независимо от величины входящих в них углов. Поэтому возникает вопрос, как строить доказательство этих формул так, чтобы из доказательства была видна их общность. Положим, например, что требуется вывести формулу для косинуса суммы двух углов. Во многих учебниках принят следующий способ: рассматривается случай, когда оба угла положительны и сумма их менее 90°. В этом случае вывод даётся на основании частного чертежа. При выводе существенно используется то обстоятельство, что сумма углов менее 90°. Далее дополнительно даётся обобщение этой формулы на различные другие случаи. Это обобщение часто даётся мелким шрифтом и в школе опускается, как нечто несущественное. Мы считаем такой способ нежелательным по следующим причинам:

1) Если обобщение формулы в школе не проходится, то это представляет прямой обман учеников, который воспитывает в них логическую нетребовательность. В самом деле, формулу, которая доказана при некоторых ограничительных условиях, учащиеся используют потом вне этих условий. Такая привычка чрезвычайно вредна с общеобразовательной точки зрения. Она прививает то, чего в действительности ни в математике, ни в какой другой науке делать нельзя, и средняя школа должна разъяснить своим воспитанникам это обстоятельство. Умолчание об общности формул или пропуск соответствующего доказательства находятся в противоречии с общеобразовательными задачами средней школы.

2) В школьном курсе любого предмета могут быть опущены некоторые подробности—слишком трудные или мало существенные. Общность формул тригонометрии не является ни той, ни другой. Во-первых, как сейчас будет показано, она не представляет никаких затруднений. Во-вторых, она является чрезвычайно существенной. Эта общность представляет собой характерную черту тригонометрии и аналитической гео-

метрии, которая отличает эти дисциплины от элементарной геометрии. Использование геометрических величин со знаком обеспечивает эту общность. Это обстоятельство, например, в аналитической геометрии является самым важным признаком этой науки, может быть, даже более важным, чем употребление системы координат. Почти так же дело обстоит в тригонометрии. Если бы мы представили себе тригонометрию, в которой тригонометрическим функциям не приписывался бы знак и каждый вопрос должен был бы расчленяться на множество случаев, в зависимости от того, являются ли рассматриваемые углы острыми, тупыми и т. д., то такая тригонометрия была бы очень мало похожа на настоящую тригонометрию. Таким образом, скрывая от учеников общность формул тригонометрии, мы скрываем от них самую важную и самую характерную черту этой науки, не представляющую притом трудностей для усвоения.

Допустим теперь, что учитель добросовестно воспроизведёт способ, изложенный в учебнике Рыбкина, или какой-либо эквивалентный способ, характеризующийся следующим порядком: сначала даётся вывод формулы для частного случая, а затем её обобщение. Такие способы мы считаем неудовлетворительными. Если вывод даётся для частного случая, а затем мы избавляемся от ограничений (обычно — несколькими шагами), то при этом остаётся непонятным глубокое основание того факта, что формулы справедливы при всех условиях. Это обстоятельство оказывается как бы случайным: мы доказываем формулу для косинуса суммы, существенно опираясь на то, что оба угла острые и сумма их менее 90°, а затем рассматриваем несколько обобщений. Каждый раз случайно оказывается, что формулы сохраняют силу (это выглядит как удивительное совпадение). Не лучше ли сразу дать доказательство, где бы в самом доказательстве не участвовали ограничения, которые оказываются несущественными? *Это доказательство по объему значительно меньше, чем частное доказательство вместе с последующими обобщениями.* Правда, это доказательство требует введения некоторого предварительного аппарата. Мы приведём здесь некоторые соображения в пользу этого аппарата.

Необходимость аппарата в тригонометрии.

Предположим, что в какой-нибудь математической дисциплине очень много раз в различных вопросах встречается одно и то же рассуждение в различных формах. В таком случае целесообразно совершенно выделить схему этого рассуждения и изложить её раз навсегда, чтобы в дальнейшем ограничиваться только ссылками. Это полезно не только с точки зрения экономии времени, но также и потому, что фиксирует внимание учеников на некоторой общей идее и выясняет, почему в различных вопросах получаются аналогичные результаты. Совокупность таких общих положений, на которые постоянно приходится ссылаться в данной математической дисциплине, мы называем её а п п а р а т о м.

Теория проекций как аппарат.

Аппарат тригонометрии может быть выбран по-разному. Весьма совершенным аппаратом является теория проекций. Общность всех тригонометрических формул заложена в том обстоятельстве, что теоремы о проекции вектора (или направленного отрезка) на ось носят общий характер, т. е. не зависят от расположения элементов чертежа.

Начатки этого аппарата были изложены в § 3 главы II (стр. 42). Эти начатки достаточны для определения тригонометрических функций угла. Для полного же построения тригонометрии необходимо дальнейшее развитие аппарата. Прежде всего надо ввести ещё два новые понятия: проекция направленного отрезка на ось и проекция ломаной линии на ось.

Проекция направленного отрезка на ось.

Пусть даны две оси l и m, и на оси m расположен направленный отрезок AB. Пусть A' и B' суть соответственно проекции точек A и B на ось l. В таком случае направленный отрезок $A'B'$ называется проекцией направленного отрезка AB на ось

$$A'B' = \text{пр}_l\, AB.$$

Фактически проектирование направленного отрезка на ось осуществляется так же, как и проектирование вектора. Различие между этими двумя случаями станет ощутительным, когда мы дойдём до вопроса о вычислении проекции (см. ниже теоремы 2 и 3).

Ломаная линия.

Пусть дана ломаная линия $ABC\ldots KL$. Её можно рассматривать двояко: либо считать её звенья векторами, либо направленными отрезками. В первом случае для задания ломаной не требуется никаких дополнительных условий: должны лишь быть даны все её вершины с указанием их последовательности (т. е. A — первая вершина, B — вторая, ..., L — последняя). Звеньями ломаной считаются векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{KL}$. Во втором случае, кроме задания вершин и указания их последовательности, необходимо ещё на каждой из прямых AB, BC, ..., KL установить (как угодно) положительное направление, т. е. превратить её в ось. После этого каждое звено рассматривается как направленный отрезок, имеющий знак плюс или минус. Важно подчеркнуть, что в любом случае направление, в котором проходится каждое звено, обязательно — то самое, которое получается при обходе всей ломаной в установленном на ней порядке. Это значит, что если в ломаной $ABC\ldots KL$ началом является A, то её звенья суть AB, BC, ..., KL. Например, второе звено есть BC (ни в коем случае не CB!). Однако на прямой BC положительное направление может быть установлено как угодно (независимо от того, как установлено положительное направление на прямой AB), и звено BC (в том случае, когда звенья рассматриваются не как векторы, а как направленные отрезки) может быть как положительным, так и отрицательным.

В любом случае (т. е. когда звенья ломаной рассматриваются как векторы или как направленные отрезки) принято рассматривать вектор $\overline{AL}$, т. е. *вектор, идущий из начала ломаной в её конец*. Он называется замыкающим вектором.

Проекция ломаной на ось.

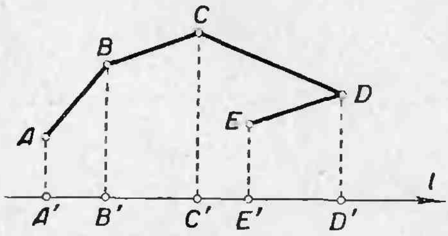
Проекцией ломаной на ось называется сумма проекций её звеньев. Таким образом по определению:

$$\text{пр}_l ABC\ldots KL = \text{пр}_l\overline{AB} + \text{пр}_l\overline{BC} + \ldots + \text{пр}_l\overline{KL}. \tag{1}$$

Если звенья ломаной рассматриваются не как векторы, а как направленные отрезки, то

$$\text{пр}_l ABC\ldots KL = \text{пр}_l AB + \text{пр}_l BC + \ldots + \text{пр}_l KL. \qquad (2)$$

Члены, стоящие в правой части равенства (1) или (2), могут иметь различные знаки, и сумма имеется в виду алгебраическая. Это обстоятельство отличает новое понятие о проекции ломаной от того, какое используется в элементарной или начертательной геометрии. Раньше мы считали бы, что проекцией ломаной $ABCDE$ является отрезок $A'D'$ (черт. 9), теперь же мы проекцией этой ломаной считаем отрезок $A'E'$.



Черт. 9. Проекция ломаной на ось.

Читатель может представить движущуюся точку, проходящую по ломаной от A до E. Её проекция движется по оси l. Всякий участок оси, пройдённый дважды (в противоположных направлениях), уничтожается и в окончательный результат не входит.

Теорема 1. *Проекция ломаной на ось равна проекции её замыкающего вектора на ту же ось.*

Доказательство:

$$\text{пр}_l ABCD\ldots JKL = \text{пр}_l \overline{AB} + \text{пр}_l \overline{BC} + \text{пр}_l \overline{CD} + \ldots + \text{пр}_l \overline{JK} +$$
$$+ \text{пр}_l \overline{KL} = A'B' + B'C' + C'D' + \ldots J'K' + K'L' = A'L' = \text{пр}_l \overline{AL},$$

что́ и требовалось доказать.

Это доказательство не опирается на чертёж, а лишь на определение проекции ломаной на ось и на формулу Шаля. Доказательство не изменяется в том случае, если звенья ломаной рассматриваются как направленные отрезки.

Следствие из теоремы 1. *Две ломаные, имеющие общее начало и общий конец, имеют одну и ту же проекцию* (при проектировании на одну и ту же ось).

Теорема о проекции вектора на ось.

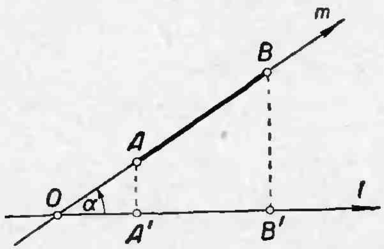
Теорема 2. *Проекция вектора на ось равна длине этого вектора, умноженной на косинус его угла с осью.*

Это является непосредственным следствием из определения косинуса. Напомним, что длина вектора есть величина существенно положительная, а проекция может быть положительной и отрицательной.

Теорема о проекции направленного отрезка на ось.

Теорема 3. *Проекция направленного отрезка на ось равна этому отрезку, умноженному на косинус угла между осью проекций и осью, на которой лежит отрезок.*

Необходимо уяснить различие между этой теоремой и теоремой 2. Во-первых, в теореме 2 «длина этого вектора» — величина существенно положительная, а в теореме 3 «этот отрезок» может иметь любой знак. Во-вторых, в теореме 2 замена вектора $\overline{AB}$ противоположным вектором $\overline{BA}$ влияет на угол с осью проекций. В теореме же 3 замена направленного отрезка AB направленным отрезком BA не оказывает влияния на угол (потому что в теореме 3 участвует угол с осью проекций не самого отрезка, а оси, на которой он расположен). Это явление иллюстрируется чертежом 10:



Черт. 10. Проекция направленного отрезка на ось.

$$\text{пр}_l AB = AB \cdot \cos(l, m),$$
$$\text{пр}_l BA = BA \cdot \cos(l, m).$$

Угол (l, m) в обоих случаях один и тот же; он — острый. $AB > 0$, $BA < 0$.

Доказательство теоремы 3 удобнее дать позже (см. стр. 64), чтобы не пришлось специально для неё предвосхищать вопрос о влиянии на угол между двумя осями перемены направления на одной из них. Теорема 3 понадобится при выводе формулы для косинуса суммы.

Изложенными сведениями исчерпывается весь аппарат, нужный для строгого изложения курса тригонометрии (а также аналитической геометрии на плоскости).

§ 2. Формулы приведения.

Постановка методической задачи.

Всё сказанное выше об аппарате полностью применимо к выводу формул приведения. Мы предлагаем изложить этот вопрос, ставя перед собой две задачи:

1) Избежать вывода столь большого количества не связанных между собой формул (вернее, таких формул, связь между которыми просто констатируется после вывода, а не используется в выводе).

2) Дать вывод, при котором общность полученных формул была бы видна в процессе самого доказательства.

Для внесения большей чёткости в изложение этого раздела полезно выделить и закрепить особыми названиями три основные теоремы. Они — основные в том смысле, что из них вытекают все формулы приведения. При отсутствии такого стержня неприятной особенностью этого раздела является чрезвычайное обилие мелких фактов, которые рассыпаются, а их потом кое-как связывают мнемоническим правилом.

Первая теорема приведения.

Первая теорема — свойство периодичности. *Все тригонометрические функции — периодические.* Период тангенса и котангенса равен 180°, период остальных функций равен 360°.

Вторая теорема приведения.

Вторая теорема — свойство чётности и нечётности. *Косинус и секанс — чётные функции, остальные — нечётные:*

$$\left.\begin{array}{ll} \cos(-\alpha)=\cos\alpha, & \sin(-\alpha)=-\sin\alpha, \\ \sec(-\alpha)=\sec\alpha, & \operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha, \\ & \operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha, \\ & \csc(-\alpha)=-\csc\alpha. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Разумеется, должна быть выяснена *общность* этой теоремы: формулы (3) справедливы при *любом* α.

Третья теорема приведения.

Третья теорема — теорема о прибавлении к аргументу прямого угла:

$$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha. \qquad (4)$$

Доказательства первой и второй теорем не представят затруднений для учителя. Доказательство третьей теоремы мы сейчас дадим. Весьма важно, чтобы это доказательство было общим, так как на этих трёх теоремах покоятся все формулы приведения. Мы не сопровождаем доказательства чертежом.

Рассмотрим три направления в тригонометрическом круге:

l — горизонтальная ось,

m — вертикальная ось,

$\overline{OM}$ — радиус-вектор.

Радиус-вектор $\overline{OM}$ может располагаться в любой четверти. Он ограничивает угол α

$$(l, \overline{OM})=\alpha. \qquad (5)$$

Этот угол может считаться положительным или отрицательным и может включать любое число полных оборотов.

Повернём всю систему наших трёх направлений, как твёрдое тело, на 90° в положительном направлении. При этом:

l перейдёт в l' (l' совпадает с m),

m „ „ m',

$\overline{OM}$ „ „ $\overline{OM'}$.

Итак, теперь мы имеем следующие направления:

старая горизонтальная ось l,

старая вертикальная ось (она же — новая горизонтальная ось l'),

новая вертикальная ось m',

старый радиус-вектор $\overline{OM}$,

новый радиус-вектор $\overline{OM'}$.

Новый радиус-вектор образует со старой горизонтальной осью угол $90^\circ+\alpha$, а с новой горизонтальной осью — угол α.

Рассмотрим теперь проекцию $\overline{OM'}$ на ось l' (она же m). Эта проекция имеет двоякий смысл. Во-первых, она есть проекция радиуса-вектора на *новую горизонтальную ось*. Следовательно, отношение этой проекции к радиусу есть $\cos\alpha$ (потому что радиус-вектор $\overline{OM'}$ в новой системе ограничивает угол α). Во-вторых, она есть проекция радиуса-вектора на *старую вертикальную ось*. Следовательно, отношение этой проекции к радиусу есть $\sin(90°+\alpha)$ (потому что радиус-вектор $\overline{OM'}$ в старой системе ограничивает угол $90°+\alpha$). Таким образом:

$$\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Вывод всех формул приведения. Все формулы приведения могут быть получены аналитически из трёх основных теорем. Покажем, как это можно сделать.

Заменим в формуле (4) α на $-\alpha$. Можно было бы сделать подстановку $\alpha=-\beta$, но нет необходимости вводить новую букву. Поэтому мы не пишем никакого равенства, а ограничиваемся словесной формулировкой: «заменим α на $-\alpha$». Тогда формула (4) даёт:

$$\sin(90°-\alpha)=\cos(-\alpha).$$

На основании второй теоремы (чётность косинуса) заменяем $\cos(-\alpha)$ через $\cos\alpha$:

$$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha. \tag{6}$$

В формуле (4) заменяем α на $\alpha-90°$, а в формуле (6) заменяем α на $\alpha+90°$. Идея этих замен — уничтожить добавочный член $90°$ под знаком синуса (и тем самым ввести его под знаком косинуса). Используя где надо чётность косинуса и нечётность синуса, получим:

$$\sin\alpha=\cos(\alpha-90°)=\cos(90°-\alpha),$$
$$\sin(-\alpha)=\cos(90°+\alpha).$$

Итак, мы уже располагаем следующими формулами:

$$\begin{aligned}\sin(90°+\alpha)&=\cos\alpha, & \sin(90°-\alpha)&=\cos\alpha,\\ \cos(90°+\alpha)&=-\sin\alpha, & \cos(90°-\alpha)&=\sin\alpha.\end{aligned}$$

Делением соответствующих формул можно получить соответственные формулы для остальных функций. Например:

$$\operatorname{tg}(90°+\alpha)=\frac{\sin(90°+\alpha)}{\cos(90°+\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\sec(90°-\alpha)=\frac{1}{\cos(90°-\alpha)}=\frac{1}{\sin\alpha}=\csc\alpha.$$

После того, как мы это проделаем, наша таблица вырастет до таких размеров:

$$\left.\begin{aligned}\sin(90°+\alpha)&=\cos\alpha, & \sin(90°-\alpha)&=\cos\alpha,\\ \cos(90°+\alpha)&=-\sin\alpha, & \cos(90°-\alpha)&=\sin\alpha,\\ \operatorname{tg}(90°+\alpha)&=-\operatorname{ctg}\alpha, & \operatorname{tg}(90°-\alpha)&=\operatorname{ctg}\alpha,\\ \operatorname{ctg}(90°+\alpha)&=-\operatorname{tg}\alpha, & \operatorname{ctg}(90°-\alpha)&=\operatorname{tg}\alpha,\\ \sec(90°+\alpha)&=-\csc\alpha, & \sec(90°-\alpha)&=\csc\alpha,\\ \csc(90°+\alpha)&=\sec\alpha, & \csc(90°-\alpha)&=\sec\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Следующий шаг: во всех формулах (7) левого столбца заменяем α на $90^\circ+\alpha$:

$$\sin(180^\circ+\alpha)=\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(180^\circ+\alpha)=-\sin(90^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$$

и т. д. Во всех формулах (7) правого столбца заменяем α на $\alpha-90^\circ$. Получим:

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\cos(\alpha-90^\circ)=\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\cos(180^\circ-\alpha)=\sin(\alpha-90^\circ)=-\sin(90^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$$

и т. д. Теперь мы получим новую группу формул:

$$\left.\begin{array}{ll}
\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha, & \sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha,\\
\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha, & \cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha,\\
\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha, & \operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,\\
\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha, & \operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha,\\
\sec(180^\circ+\alpha)=-\sec\alpha, & \sec(180^\circ-\alpha)=-\sec\alpha,\\
\csc(180^\circ+\alpha)=-\csc\alpha, & \csc(180^\circ-\alpha)=\csc\alpha.
\end{array}\right\}\qquad(8)$$

Заменяя в формулах (8) в левом столбце α на $90^\circ+\alpha$, а в правом столбце α на $\alpha-90^\circ$, получим формулы приведения для аргументов вида $270^\circ+\alpha$ и $270^\circ-\alpha$.

Можно несколько изменить порядок этих выводов, а именно: посредством указанных выше замен выводить только формулы для синуса и косинуса, а все остальные формулы получать делением.

Было бы нежелательно совсем выбросить за борт те чертежи, которые всегда употреблялись в традиционных учебниках для доказательства формул приведения. Например, если ученика спрашивают, чему равен $\sin(180^\circ+\alpha)$, то он должен представить себе подвижной радиус, находящийся в третьей четверти, сообразить, что синус отрицателен и по абсолютной величине равен $\sin\alpha$, и дать ответ. Однако эти чертежи должны рассматриваться не как средство доказательства, а только как полезное упражнение в развитии геометрического воображения. Эти упражнения удобно проводить до того, как ученики ознакомятся с формальным правилом, охватывающим все формулы приведения.

Изменение направления радиуса-вектора на противоположное. Формулы левого столбца группы (8) имеют особо важное геометрическое значение. Если к углу α прибавить 180°, то радиус-вектор, ограничивающий этот угол, повернётся в противоположную сторону. При этом его проекция на любую ось изменит знак (сохраняя абсолютную величину), откуда и вытекают первые две формулы левого столбца группы (8). Мы приводим это соображение не в качестве доказательства, а в качестве иллюстрации этих формул.

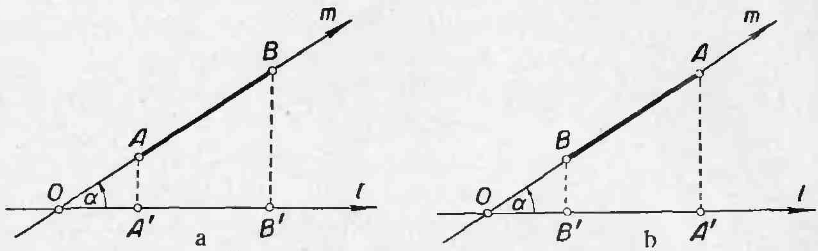
Доказательство теоремы о проекции направленного отрезка на ось.

Теперь легко дать доказательство теоремы о проекции направленного отрезка на ось (стр. 59).

Пусть даны две оси l и m. На оси m расположен направленный отрезок AB, который проектируется на ось l. Одновременно с направленным отрезком AB рассмотрим вектор $\overline{AB}$. По доказанной ранее теореме о проекции вектора на ось имеем:

$$\text{пр}_l \overline{AB} = d \cdot \cos(l, \overline{AB}), \qquad (*)$$

где буквой d обозначена длина вектора $\overline{AB}$; напоминаем, что $d > 0$. Теперь посмотрим, как изменится формула (*), если вместо вектора $\overline{AB}$ проектировать направленный отрезок AB. Совершенно ясно, что проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l и проекция направленного отрезка AB



Черт. 11. $\text{пр}_l\, AB = AB \cdot \cos(l, m)$.

на ось l — это одно и то же; поэтому в левой части равенства (*) мы можем вместо $\text{пр}_l \overline{AB}$ написать $\text{пр}_l AB$. Далее надо различать два случая.

Первый случай. $AB > 0$ (черт. 11a). В этом случае буква d в формуле (*) совпадает с числом, выражающим направленный отрезок

$$d = AB.$$

Кроме того, вектор $\overline{AB}$ имеет то же направление, что́ и ось m, т. е.

$$(l, \overline{AB}) = (l, m).$$

Формула (*) примет вид:

$$\text{пр}_l AB = AB \cdot \cos(l, m).$$

Второй случай. $AB < 0$ (черт. 11b). В этом случае d отличается от AB знаком:

$$d = -AB.$$

Вектор $\overline{AB}$ имеет направление, противоположное направлению оси m, т. е.

$$(l, \overline{AB}) = 180° + (l, m).$$

Подставляем всё это в формулу (*):

$$\text{пр}_l AB = (-AB) \cdot \cos[180° + (l, m)] = AB \cdot \cos(l, m).$$

Итак, во всех случаях имеет место одна и та же формула, что и требовалось доказать.

Применение формул приведения. Формулы приведения обычно используются для приведения тригонометрической функции любого угла к функции острого угла, или даже к функции угла, меньшего 45°. Однако эти формулы имеют более широкую применимость, а именно:

Любую тригонометрическую функцию всегда можно заменить одноимённой тригонометрической функцией угла, оканчивающегося в любой наперёд заданной четверти [т. е. удовлетворяющего неравенству:

$$90^\circ n \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ (n+1),$$

где n — данное целое число]. *Если же отказаться от требования одноимённости, то любую тригонометрическую функцию всегда можно заменить тригонометрической функцией угла, оканчивающегося в любой наперёд заданной «восьмушке»* [т. е. удовлетворяющего неравенству:

$$45^\circ n \leqslant \alpha \leqslant 45^\circ (n+1),$$

где n — данное целое число].

Разумеется, наиболее важным является тот частный случай предыдущего предложения, когда $n=0$. Дадим отдельно формулировку для этого случая.

Любую тригонометрическую функцию всегда можно заменить одноимённой тригонометрической функцией острого угла. Если же отказаться от требования одноимённости, то любую тригонометрическую функцию всегда можно заменить тригонометрической функцией угла (положительного), не превышающего 45°.

Подавляющее большинство задач на формулы приведения должно относиться к упомянутому частному случаю. Однако не следует совершенно исключать задачи, относящиеся к общему случаю. Не имея оперативного значения, они полезны в качестве упражнений и поэтому в небольшой дозе должны предлагаться.

Пример. $\sin(-20^\circ)$ заменить тригонометрической функцией угла, возможно более близкого к 1000°:

a) одноимённой;

b) безразлично какой.

Решение. Следует определить, сколько прямых углов следует прибавить к -20°, чтобы получить угол, возможно более близкий к 1000°. Деля разность $1000^\circ - (-20^\circ) = 1020^\circ$ на 90°, получаем с недостатком 11, а с избытком 12. Имеем:

$$-20^\circ + 90^\circ \cdot 11 = 970^\circ,$$

$$-20^\circ + 90^\circ \cdot 12 = 1060^\circ.$$

Следовательно, угол -20° может быть двумя способами выражен через угол, близкий к 1000°:

$$-20^\circ = 970^\circ - 90^\circ \cdot 11,$$

$$-20^\circ = 1060^\circ - 90^\circ \cdot 12.$$

Какой из этих двух способов предпочесть?

В варианте а) надо пользоваться вторым способом, потому что для того, чтобы получилась одноимённая функция, количество добавляемых прямых углов должно быть чётным. В варианте b) надо пользоваться вторым способом, потому что угол 970° ближе к 1000°, чем угол 1060°. Итак, в варианте а):

$$\sin(-20^\circ) = \sin(1060^\circ - 90^\circ \cdot 12) = \sin 1060^\circ.$$

В варианте b):

$$\sin(-20^\circ) = \sin(970^\circ - 90^\circ \cdot 11) = -\sin(90^\circ \cdot 11 - 970^\circ) =$$
$$= -\sin(90^\circ \cdot 3 - 970^\circ) = -\sin(270^\circ - 970^\circ) = \cos 970^\circ.$$

Повторяемость значений тригонометрических функций в разных четвертях.

Формулы приведения позволяют установить тот факт, что любая тригонометрическая функция в различных четвертях принимает одни и те же значения. Например, формула

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \sin(90^\circ - \alpha),$$

вытекающая из сопоставления первых формул левого и правого столбцов группы (7), показывает, что во второй четверти синус повторяет те же значения, какие он принимал в первой, но в обратном порядке; без установления этого обстоятельства нельзя построить графики тригонометрических функций.

Значение формул приведения для устройства таблиц.

Формулы приведения необходимы для объяснения устройства тригонометрических таблиц. Если аргумент даётся в градусной мере, то таблица составляется лишь для углов от 0° до 45° и по этой таблице можно найти тригонометрическую функцию любого угла. Это является большим удобством градусных таблиц или вообще любых таблиц, где ступень является целой частью прямого угла.

Радианные таблицы таким свойством не обладают, потому что в них ступень (например, 0,01 радиана) не является целой частью прямого угла. Поэтому при переходе во вторую четверть нам встречаются углы, подвижные радиусы которых не симметричны подвижным радиусам углов, бывших в первой четверти (как, например, 88° и 92°). Таким образом при переходе во вторую четверть в таблице встречаются новые значения синуса, не те, которые были помещены в таблице для первой четверти. Поэтому радианные таблицы приходится продолжать возможно дальше.

§ 3. Графики тригонометрических функций.

Два способа построения графиков тригонометрических функций.

При построении графиков тригонометрических функций можно идти двумя путями: аналитическим или геометрическим.

Аналитический способ заключается в том, чтобы, используя тригонометрические таблицы, наносить на чертеже нужные точки по координатам. Геометрический способ заключается в том, что величины тригонометрических линий «снимаются» с чертежа.

Соотношение горизонтальных и вертикальных размеров у графиков тригонометрических функций.

При построении графиков тригонометрических функций весьма распространена следующая ошибка: чертят координатные оси X и Y, откладывают на оси X *в произвольном масштабе* углы, а на оси Y *в произвольном масштабе* значения данной тригонометрической функции. Таким образом, при построении графика $y=\sin x$ может получиться синусоида с произвольным соотношением вертикальных и горизонтальных размеров. Эта ошибка является следствием укоренившейся привычки рассматривать тригонометрические функции только как функции угла. Если в уравнении $y=\sin x$ x и y рассматриваются как величины различной природы, то, разумеется, вопрос об одинаковости масштабов по осям теряет смысл. Если же под x и y понимать переменные одной природы, то линия $y=\sin x$ есть вполне определённая линия, которую нельзя произвольно сжимать или растягивать по одному направлению. У этой линии максимальная высота равна 1, а расстояние между двумя соседними точками пересечения с осью X (полупериод) равно $\pi\approx3{,}14$ [черт. 12 (стр. 70)]. Несоблюдение этого соотношения между горизонтальными и вертикальными размерами приведёт к тому, что, с одной стороны, глаз учеников не привыкает к правильному виду синусоиды $y=\sin x$, а с другой стороны, что́ ещё хуже, они даже и не знают, в чём заключается разница между синусоидами $y=\sin\omega x$ при различных частотах, и не знают, что синусоида $y=\sin x$ является вполне определённой.

Для избежания этой ошибки при построении графиков тригонометрических функций по таблицам необходимо пользоваться таблицами, где аргумент даётся в радианной мере. При пользовании такой таблицей построение графика становится чрезвычайно простым: достаточно взять клетчатую или миллиметровую бумагу и просто наносить на неё точки, руководствуясь таблицей. Само собой разумеется, что изложенные выше соображения о соотношении вертикальных и горизонтальных размеров должны быть сообщены учащимся, т. е. учащиеся должны знать, что синусоида $y=\sin x$ является вполне определённой. Заметим кстати, что построение графиков тригонометрических функций по радианным таблицам, будучи принципиально правильнее, чем другие способы, является в то же время и гораздо более простым, а то, что этот способ не распространён в практике средней школы, объясняется, во-первых, рутиной, а во-вторых, отсутствием радианных таблиц.

При геометрическом построении графика можно поступать так. В тригонометрическом круге построим последовательность углов, например: 0,10°, 20°, 30°, ... и проведём линии синусов этих углов. Затем построим оси координат и *примем за единицу масштаба радиус тригонометрического круга*. На оси X отложим от начала длину окружности, равную $2\pi R \approx 6{,}28R$; этот отрезок будет соответствовать углу 360°. Без этого условия мы не получим графика с правильным соотношением горизонтальных и вертикальных размеров. Разделяя этот отрезок на 36 равных частей, мы получим на оси точки, соответствующие углам через каждые 10°. В этих точках восставляем перпендикуляры к оси X и откладываем на этих перпендикулярах линии синусов соответственных углов, перенося их непосредственно с чертежа тригонометрического круга.

Разумеется, так же строятся графики и остальных тригонометрических функций. Эти графики могут продолжаться неограниченно вправо и влево на основании формул приведения и периодичности тригонометрических функций. Разумеется также, что при геометрическом построении достаточно построить линии синусов только для углов первой четверти, а дальше использовать те же линии синусов, повторяющиеся в надлежащем порядке с тем или иным знаком (руководствуясь формулами приведения).

Против предлагаемого порядка могут быть сделаны два возражения.

Первое: пользование одинаковыми масштабами по координатным осям вообще не является обязательным. Стоит ли в таком случае прививать учащимся мысль, что необходимо употреблять одинаковые масштабы по осям X и Y?

Второе: в физике часто приходится строить графики, где в силу физической сущности вопроса аргумент и функция представляют величины различной природы. Например, движение изображается графиком, где по оси абсцисс откладывается время, а по оси ординат — пройденный путь. При такой постановке вопроса масштабы по разным осям никак не связаны друг с другом: на оси абсцисс некоторая единица длины выражает одну секунду, а по оси ординат та же единица длины выражает сантиметр. Самый вопрос об одинаковости масштабов теряет смысл. Поскольку в физике при построении графиков всегда стоят на такой точке зрения, то не приносим ли мы вреда ученикам, приучая их к такому порядку, который противоречит тому, что́ проходится в физике?

На первое возражение мы предлагаем следующий ответ. Идея о том, что вид графика $y = f(x)$ зависит не только от функции $f(x)$, но и от масштабов, используемых по осям, представляет большой математический интерес и весьма полезна для общего развития учащихся. Мы не против того, чтобы эта идея была сообщена учащимся. По поводу неё можно высказать очень много соображений, особенно в связи с афинными преобразованиями, но мы не касаемся этого вопроса, так как он не относится к нашей теме. Итак, не высказывая никакого суждения по вопросу о том, следует ли при построении графиков любых функций использовать различные масштабы по осям, мы лишь категорически настаиваем на одном положении: тригонометрические функции не должны быть в особом положении. Если учитель вообще уделяет внимание этому вопросу, то он может при построении синусоиды $y = \sin x$ использовать различные масштабы по осям так же, как и при построении графика $y = x^2$. Если же при построении графиков других функций он всегда пользовался одинаковыми масштабами по осям, то так же следует поступать и по отношению к тригонометрическим функциям. Всякая иная практика направлена лишь к тому, чтобы поддерживать в учениках убеждение, что тригонометрические функции суть функции особой природы — функции угла, в то время как все остальные функции суть функции числа. При распространённом способе построения графиков ученики вполне убеждены, что именно по этой причине для всех остальных функций следует употреблять одинаковые масштабы по осям, а для тригонометрических функций этот вопрос не имеет смысла, потому что у них аргумент и функция суть величины разной природы.

Второе возражение, несомненно, справедливо. С ним надо считаться, т. е. учитель должен разъяснить ученикам, что существуют две различные возможные точки зрения на построение графиков: аналитическая и физическая. При аналитической точке зрения аргумент и функция всегда рассматриваются как отвлечённые величины. При физической точке зрения мы имеем дело с именованными величинами. Само собой разумеется, что тригонометрические функции не возбраняется иногда рассматривать как функции угла (мы в этой книге выступаем лишь против того, чтобы они рассматривались *исключительно* как функции угла). В таком случае и вопрос о построении графиков тригонометрических функций приобретает иной характер, и тогда, например, графики, приведённые у Рыбкина, нельзя назвать ошибочными. Однако недопустимо смешивать эти точки зрения. Это порождает путаницу, о которой упоминалось на стр. 67, и затушёвывает принципиально важный вопрос. Учитывая потребности физики, необходимо ознакомить учеников и с той и с другой точками зрения.

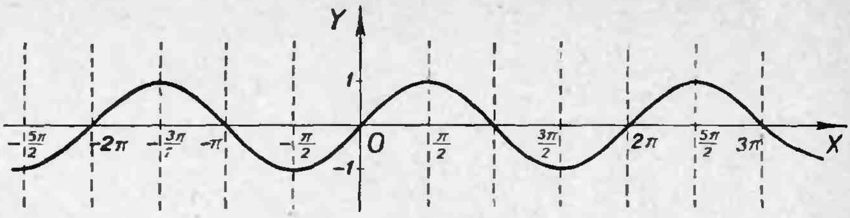
В заключение остановимся на двух чисто методических замечаниях, связанных с графиками тригонометрических функций.

Важность точных графиков.

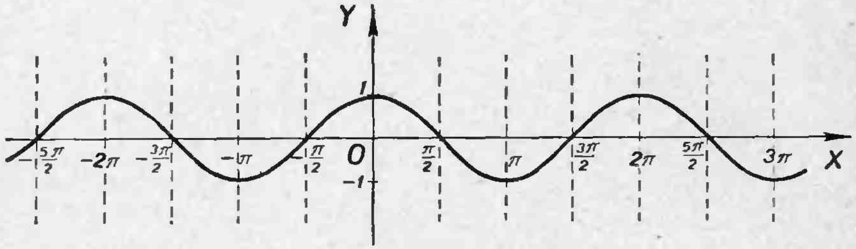
Во-первых, мы считаем полезным, чтобы глаз учащегося привык к метрически правильным графикам. Поэтому полезно, чтобы каждый ученик хотя бы один раз вычертил у себя в тетради точные графики всех тригонометрических функций. Полезно также, чтобы в классе имелись стенные таблицы с достаточно хорошими графиками. Точные графики тригонометрических функций даны на чертежах 12—17 (стр. 70—72).

Психологическая роль графиков тригонометрических функций.

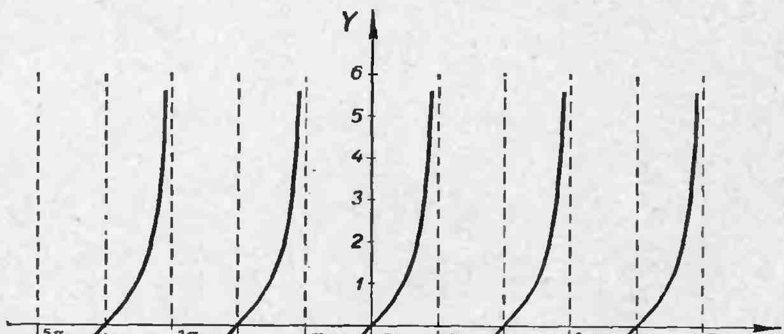
Во-вторых, графики тригонометрических функций могут явиться в сознании учащихся тем стержнем, вокруг которого группируются все ассоциации, связанные с изменением этих функций. Другими словами, если ученику зададут вопрос, как изменяется синус при изменении аргумента от 0 до 2π, то какой наглядный образ он должен вызвать в своём сознании, чтобы ответить на этот вопрос? На предыдущей стадии обучения таким образом являлся тригонометри-



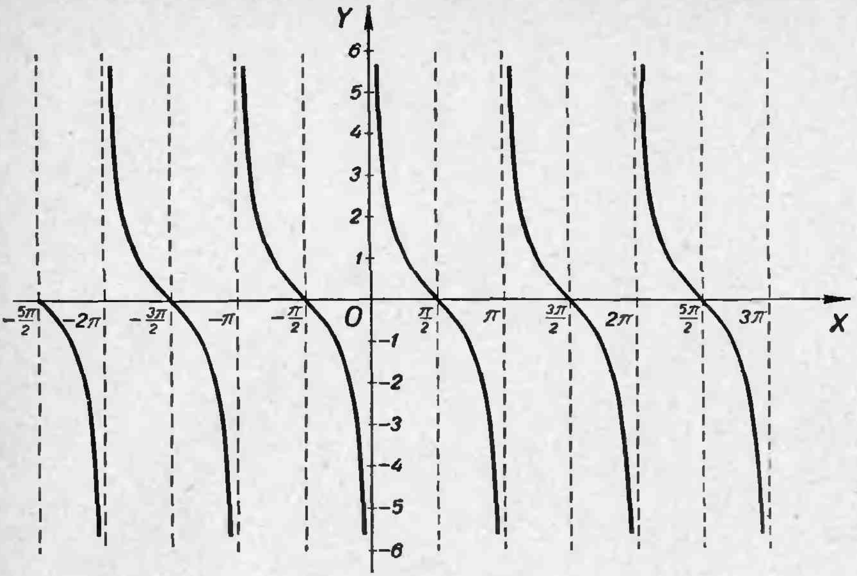
Черт. 12. $y = \sin x$.



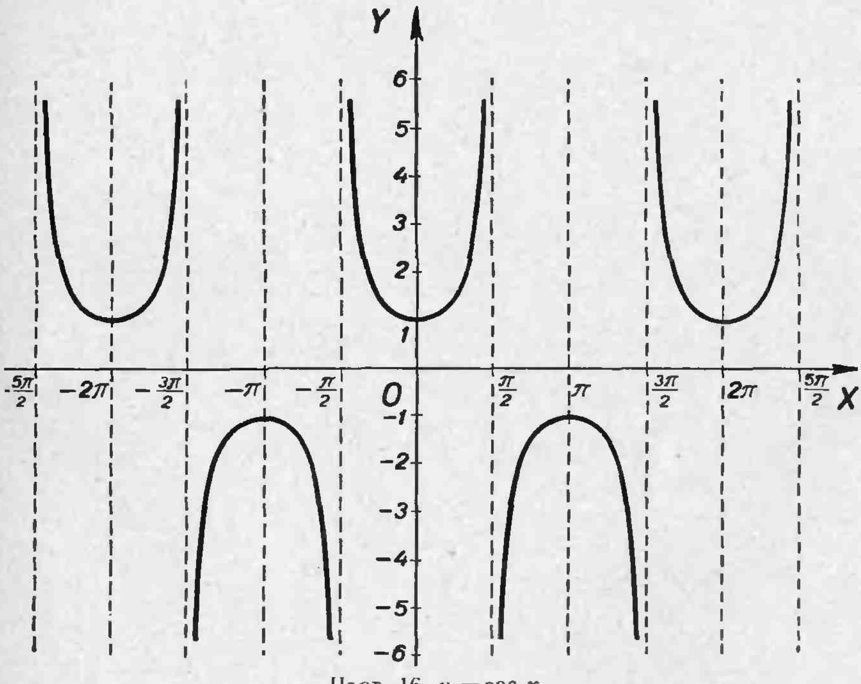
Черт. 13. $y = \cos x$.



Черт. 14. $y = \mathrm{tg}\, x$.

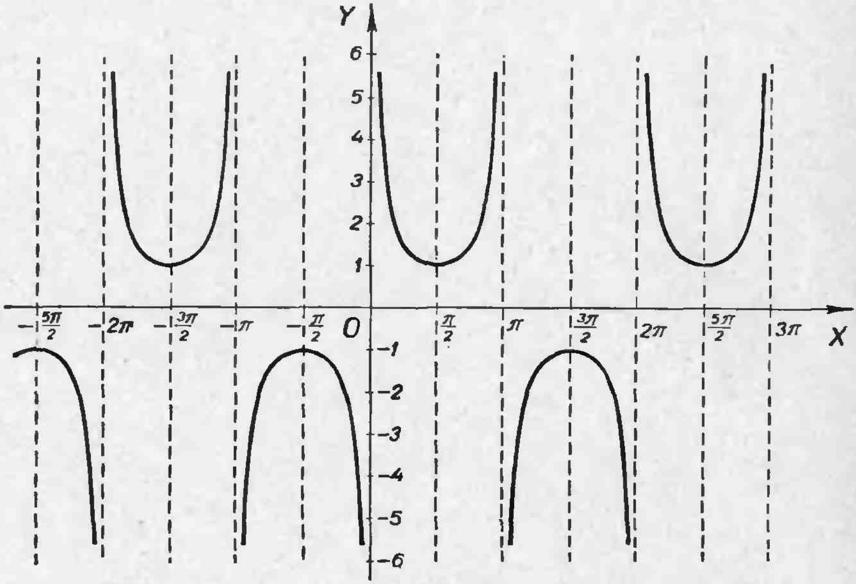


Черт. 15. $y = \operatorname{ctg} x$.



Черт. 16. $y = \sec x$.

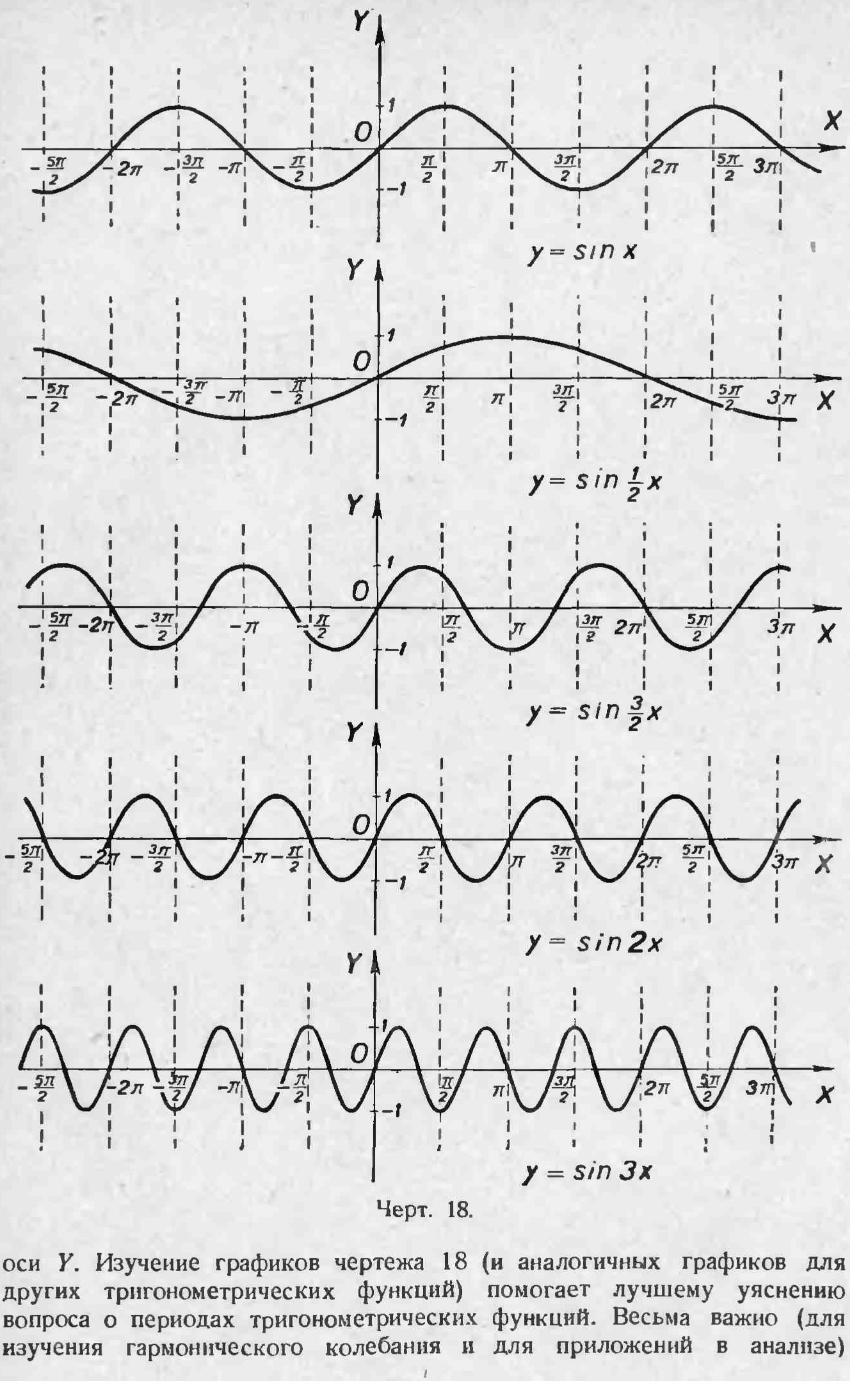
ческий круг. Ученик, воображая тригонометрический круг, представляет в нём вращающийся подвижной радиус и следит за изменением линии синуса, и на основании этого представления отвечает на поставленный вопрос. Однако впоследствии этот образ может быть заменён другим: ученик может представить себе синусоиду. Следя мысленно за ходом этой кривой, вид которой является для него привычным и очень хорошо известным, он соображает, что в первой



Черт. 17. $y = \csc x$.

четверти синус увеличивается от 0 до 1 (синусоида идёт вверх), во второй и третьей четвертях уменьшается от 1 до —1 (синусоида идёт вниз) и т. д. Этот способ является психологически более лёгким и наглядным. Наш опыт показывает, что подавляющее большинство учащихся всегда пользуется наглядным представлением тригонометрического круга (повидимому, по инерции). Учителю тригонометрии следовало бы подумать над этим вопросом и постараться произвести соответствующую замену в сознании учеников. Для этого следует предлагать ученикам ряд подходящих вопросов и требовать ответа на них с мотивировкой, основанной на рассмотрении графика. Например: каково наименьшее положительное значение секанса и когда оно достигается? Ответ: наименьшее положительное значение секанса есть единица, потому что на такой высоте находятся наинизшие точки графика. Это значение достигается при $x = 0$, 2π и т. д.

Влияние частоты. Полезно ознакомить учащихся с влиянием коэфициента при x. На чертеже 18 изображены синусоиды $y = \sin \omega x$. Весьма просто объяснить влияние коэфициента A в уравнении $y = A \cdot \sin \omega x$, вызывающего растяжение кривой вдоль



Черт. 18.

оси Y. Изучение графиков чертежа 18 (и аналогичных графиков для других тригонометрических функций) помогает лучшему уяснению вопроса о периодах тригонометрических функций. Весьма важно (для изучения гармонического колебания и для приложений в анализе) познакомить учеников со связью между частотой ω и периодом T:

$T=\frac{2\pi}{\omega}$ (для синуса, косинуса, секанса и косеканса),

$T=\frac{\pi}{\omega}$ (для тангенса и котангенса).

Графики как иллюстрация формул приведения. Формулы приведения полезно иллюстрировать графиками тригонометрических функций[1]). Например, рассматривая чертежи 12 и 13, мы видим, что график $\sin x$, сдвинутый влево на $\frac{\pi}{2}$, даст график $\cos x$. Следовательно,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x.$$

Если же график $\cos x$ сдвинуть влево на $\frac{\pi}{2}$, то получится кривая, являющаяся зеркальным отражением в оси X графика $\sin x$. Следовательно,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x.$$

Необходимо при этом понимать, что рассмотрение графиков может служить иллюстрацией, но не доказательством формул приведения, так как только на основании этих формул можно утверждать, что косинусоида — это сдвинутая синусоида.

---

[1]) Методическая техника этого вопроса изложена в статье И. Польского «Иллюстрация формул приведения тригонометрии при помощи синусоиды и косинусоиды» («Математика в школе», 1937 г., № 2). Автор рассматривает только формулы для синуса и косинуса; для остальных функций рассуждения аналогичны. Приведённые в статье чертежи имеют обычный недостаток (неправильное соотношение горизонтальных и вертикальных масштабов), что́, впрочем, в данном вопросе не имеет значения.

ГЛАВА IV.

ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НИХ.

§ 1. Вывод формул сложения.

Общность формул сложения. Из того, что́ было сказано в § 1 главы III об аппарате тригонометрии, вытекает наш взгляд на вывод формул сложения. Необходимо в самом выводе обеспечить общность этих формул. Мы не можем согласиться ни с тем порядком, когда эта общность является предметом отдельного доказательства, ни тем более с замалчиванием вопроса об общности.

Подготовленный уже́ аппарат позволяет дать общее доказательство формул сложения. Мы не сопровождаем это доказательство чертежом, чтобы не связывать его ни с каким частным выбором углов. Учитель может, как и при выводе формул приведения, не делать чертежа на доске. Ученики будут следить за его объяснением по разным чертежам в своих тетрадях. Этим будет убедительно подтверждена общность доказательства.

Вывод формул для косинуса суммы. Пусть от горизонтальной оси l отложен угол α, ограниченный подвижным радиусом $\overline{OM}$

$$(l, \overline{OM}) = \alpha.$$

Пусть далее от радиуса-вектора $\overline{OM}$ отложен угол β

$$(\overline{OM}, \overline{OM'}) = \beta.$$

Представим, что система осей l и m (горизонтальная и вертикальная оси) повёрнута вместе (как твёрдое тело) на угол α[1]). При этом оси l и m займут положения l' и m'. Условимся в следующих названиях:

старая горизонтальная ось l,

старая вертикальная ось m,

новая горизонтальная ось l' (имеет то же направление, что́ и $\overline{OM}$),

новая вертикальная ось m'.

---

[1]) Напоминаем, что угол α может иметь любой знак и любую абсолютную величину.

Радиус-вектор $\overline{OM'}$ образует с новой горизонтальной осью угол β, а со старой горизонтальной осью — угол $\alpha+\beta$, потому что

$$(l,\ \overline{OM'})=(l,\ \overline{OM})+(\overline{OM},\ \overline{OM'})=\alpha+\beta.$$

Опустим из точки M' перпендикуляр $M'P'$ на новую горизонтальную ось. Очевидно:

$$\left.\begin{aligned} OP' &= R\cos\beta \\ P'M' &= R\sin\beta \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Спроектируем ломаную линию $OP'M'$ на старую горизонтальную ось и запишем, что её проекция равна проекции её замыкающего вектора $\overline{OM'}$:

$$\text{пр}_l\,\overline{OM'}=\text{пр}_l\,OP'M'.$$

или

$$\text{пр}_l\,\overline{OM'}=\text{пр}_l OP'+\text{пр}_l P'M'. \qquad (**)$$

Для вычисления этих проекций отметим следующие факты:

1) направленный отрезок OP' принадлежит оси l', образующей с осью l угол α;

2) направленный отрезок $P'M'$ принадлежит оси m', образующей с l угол $90^\circ+\alpha$, потому что

$$(l,\ m')=(l,\ m)+(m,\ m')=90^\circ+\alpha.$$

Теперь равенство (**) запишется так:

$$R\cos(\alpha+\beta)=R\cos\beta\cos\alpha+R\sin\beta\cos(90^\circ+\alpha).$$

Сокращаем на R и заменяем $\cos(90^\circ+\alpha)$ по формуле приведения:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

Характер дальнейшего курса тригонометрии

Учитель должен отдавать себе отчёт в том, через какой важный рубеж он перевалил, выведя формулу (1).

Теперь все методические проблемы уже позади. Весь дальнейший курс тригонометрии это — собирание плодов. Вряд ли есть другой предмет преподавания, который в отношении методических трудностей столь резко и отчётливо делился бы на две части, как тригонометрия.

Для того чтобы курс тригонометрии был полноценным, надо обеспечить общность тригонометрических формул и дать аппарат, который бы раз навсегда обеспечил общность выводов. Эта общность дальнейших выводов должна быть обеспечена автоматически, без того, чтобы её надо было каждый раз доказывать. Для достижения такой цели надо:

1) хорошо определить тригонометрические функции,

2) хорошо вывести формулы приведения,

3) хорошо вывести формулу для косинуса суммы.

Если всё это сделано, то вопрос об общности формул больше никогда не причинит нам беспокойства.

Вывод остальных формул сложения.

Заменим в формуле (1) α на $90^\circ + \alpha$:

$$\cos(90^\circ + \alpha + \beta) = \\ = \cos(90^\circ + \alpha)\cos\beta - \sin(90^\circ + \alpha)\sin\beta.$$

Используя формулы приведения, получим:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Заменяя в формулах (1) и (2) β на $-\beta$, получим

$$\left.\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta, \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Делением можно получить формулы для остальных тригонометрических функций суммы и разности.

§ 2. Следствия из формул сложения.

Полагая в формулах сложения $\beta = \alpha$, получим:

Формулы для двойных аргументов.

$$\left.\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha, \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Эти формулы включаются в минимум, подлежащий запоминанию. В качестве упражнения можно получить формулы для тройных аргументов или аргументов ещё более высокой кратности.

Аргументы более высокой кратности.

Формулы для тройных аргументов могут быть получены так:

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cdot\cos\alpha + \cos 2\alpha\cdot\sin\alpha = \\ = 2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha = \\ = 3\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

и аналогично для других функций.

Такой вывод становится очень тягостным по мере увеличения кратности. Мы считаем совершенно необходимым познакомить учеников с выводом, основанным на использовании комплексных чисел. Комплексные числа слишком мало используются в тригонометрии, хотя и входят в программу. Использование комплексных чисел в данном вопросе является необходимым, потому что даёт естественное и простое решение, в то время как другие методы приводят к громоздким выводам.

Рассмотрим выражение $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3$. Его можно преобразовать двумя способами: либо по формуле Моавра

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha,$$

либо по формуле бинома Ньютона

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha - i\sin^3\alpha.$$

Приравниваем полученные выражения:

$$\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha + i(3\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha - \sin^3\alpha).$$

Два комплексных числа равны между собой в том и только в том случае, если порознь равны между собой их действительные части и коэфициенты мнимых частей. Следовательно, последнее равенство распадается на два:

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha,$$
$$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha.$$

Этот метод позволяет легко получить формулы для $\cos n\alpha$ и $\sin n\alpha$. Рассматривая выражение $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ и преобразуя его по формуле Моавра и по формуле бинома Ньютона, получим:

$$\cos n\alpha + i\sin n\alpha = \cos^n\alpha + i\cdot C_n^1\cos^{n-1}\alpha\cdot\sin\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\cdot\sin^2\alpha -$$
$$- i\cdot C_n^3\cos^{n-3}\alpha\cdot\sin^3\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\cdot\sin^4\alpha +$$
$$+ i\cdot C_n^5\cos^{n-5}\alpha\cdot\sin^5\alpha - \ldots + i^{n-3}C_n^3\cos^3\alpha\cdot\sin^{n-3}\alpha +$$
$$+ i^{n-2}C_n^2\cos^2\alpha\sin^{n-2}\alpha + i^{n-1}C_n^1\cos\alpha\cdot\sin^{n-1}\alpha +$$
$$+ i^n\sin^n\alpha.$$

Заметим, что при нечётном n

$$i^n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} i,$$

а при чётном n

$$i^n = (-1)^{\frac{n}{2}}.$$

Таким образом, имеем: при нечётном n:

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\cdot\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\cdot\sin^4\alpha - \ldots +$$
$$+ (-1)^{\frac{n-3}{2}}\cdot C_n^3\cos^3\alpha\cdot\sin^{n-3}\alpha + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\alpha\cdot\sin^{n-1}\alpha,$$
$$\sin n\alpha = C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - \ldots +$$
$$+ (-1)^{\frac{n-3}{2}} C_n^2\cos^2\alpha\cdot\sin^{n-2}\alpha + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n\alpha;$$

а при чётном n:

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-a}\alpha\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \ldots +$$
$$+ (-1)^{\frac{n-2}{2}}\cos^2\alpha\sin^{n-2}\alpha + (-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\alpha,$$
$$\sin n\alpha = C_n^1\cos^{n-1}\alpha\cdot\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\cdot\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\cdot\sin^5\alpha -$$
$$- \ldots + (-1)^{\frac{n-4}{2}}\cdot C_n^3\cos^3\alpha\cdot\sin^{n-3}\alpha + (-1)^{\frac{n-2}{2}} C_n^1\cos\alpha\sin^{n-1}\alpha.$$

Если не требовать выписывания последних членов (что́ вносит усложнение), то можно написать для всех случаев:

$$\left.\begin{aligned} &\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\cdot\sin^4\alpha - \ldots,\\ &\sin n\alpha = C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha +\\ &\qquad + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - \ldots \end{aligned}\right\}\quad (5)$$

Указание. Последний член в каждой формуле содержит первую или нулевую степень косинуса.

Формулы для половинного аргумента.

Из формул:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1,$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha$$

сложением и вычитанием найдём:

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{\alpha}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\\ \sin\frac{\alpha}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

делением находим:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.\tag{7}$$

Последней формуле можно придать более простой вид, избавляясь от иррациональности либо в числителе, либо в знаменателе:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.\tag{8}$$

Таким образом, вывод этих формул основан на некотором искусственном, хотя и весьма простом приёме.

Вопрос о двойном знаке в формулах для половинного аргумента.

Вопрос не будет исчерпан, если мы не выясним необходимость двойного знака в получающихся формулах. Вопрос этот ставится следующим образом. В первой формуле (6) мы по данному значению $\cos\alpha$ вычисляем $\cos\frac{\alpha}{2}$. Требуется доказать, что задача действительно имеет два решения, отличающиеся только знаками.

Будем предполагать, что угол $\frac{\alpha}{2}$ оканчивается в первой окружности, т. е. от 0 до 360°. Это значит, что угол α оканчивается в пределах первых двух окружностей, т. е. от 0 до 720°. Этим предположением мы не уменьшаем общности вопроса потому, что если бы угол α был, например, более, чем 720°, то можно было бы отнять от него 720°, вследствие чего угол $\frac{\alpha}{2}$ уменьшился бы на 360°. При этом ни $\cos\alpha$, ни $\cos\frac{\alpha}{2}$ не изменились бы.

Заметим, что было бы неправильно ограничивать угол α пределами одного оборота, потому что тогда угол $\frac{\alpha}{2}$ мог бы изменяться только в пределах первой половины оборота, что́ не исчерпывало бы всех возможностей. Ниже будет приведен пример, показывающий, что эта ошибка действительно могла бы привести к неправильным заключениям.

Итак, рассмотрим вопрос о необходимости двойного знака в первой формуле (6). Следует рассмотреть два случая: 1) $\cos\alpha > 0$ и 2) $\cos\alpha < 0$.

Первый случай: $\cos\alpha > 0$. Это значит, что угол α оканчивается в I, IV, V или VIII четвертях. Поскольку нам дан $\cos\alpha$, а не самый угол α, мы не можем знать, какой из этих случаев имеет место. Определим в каждом из этих случаев, какова будет величина угла $\frac{\alpha}{2}$.

Здесь мы отвлечёмся в сторону, чтобы показать, какие способы можно рекомендовать ученикам для решения этого часто возникающего вопроса. Можно исходить из неравенств. Например: если угол α оканчивается в IV четверти, то это значит:

$$270^\circ < \alpha < 360^\circ.$$

Деля эти неравенства на 2, получим:

$$135^\circ < \frac{\alpha}{2} < 180^\circ,$$

т. е. угол $\frac{\alpha}{2}$ оканчивается во II четверти.

Однако мы рекомендуем другой способ, который позволяет решать подобные вопросы в уме, не прибегая ни к каким записям. Полезно подчеркнуть следующий очевидный факт: *если угол оканчивается в n-й четверти, то его половина оканчивается в n-й „восьмушке“*.

Восьмушки	Четверти	Восьмушки	Четверти
1 2	1	9 10	5
3 4	2	11 12	6
5 6	3	13 14	7
7 8	4	15 16	8

Составим табличку для перевода восьмушек и четверти (см. табл.)

Пользуясь этой табличкой, рассуждаем так. Раз $\cos\alpha > 0$, то α оканчивается в I, IV, V или VIII четвертях. Следовательно, $\frac{\alpha}{2}$ оканчивается в I, IV, V или VIII восьмушках, т. е. в I, II, III или IV четвертях. Поскольку $\frac{\alpha}{2}$ может оканчиваться в любой четверти, нельзя судить, какой знак имеет $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Если $\cos\alpha < 0$, то α оканчивается во II, III, VI или VII четвертях. Следовательно, $\frac{\alpha}{2}$ оканчивается во II, III, VI или VII восьмушках, т. е. в I, II, III или IV четвертях. В этом случае опять получается, что $\cos\frac{\alpha}{2}$ может оканчиваться в любой четверти, и нельзя судить о его знаке. Следовательно, двойной знак в первой формуле (6) необходим.

Аналогично исследуется вопрос о необходимости двойного знака в остальных формулах (6) и (7). Не повторяя вывода, вернёмся лишь к замечанию, сделанному на странице (79) (последние пять строк). Если бы мы не учли этого замечания, то при исследовании формул для $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ мы не пришли бы к фактическим ошибкам. В самом деле, если бы мы считали, что при $\cos\alpha>0$ угол α оканчивается в I или IV четверти (т. е. игнорировали бы возможность его нахождения в V или VIII четверти), то мы получили бы, что угол $\frac{\alpha}{2}$ оканчивается в I или IV восьмушке, т. е. в I или II четверти, а следовательно, нельзя судить, какой знак имеют $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Однако при исследовании формулы для $\sin\frac{\alpha}{2}$ мы пришли бы к ошибке. Если считать, что угол α обязательно оканчивается в I или IV четверти, а, следовательно, $\frac{\alpha}{2}$ — в I или II четверти, то $\sin\frac{\alpha}{2}$ обязательно положителен, т. е. двойной знак во второй формуле (6) был бы излишен. В действительности же он необходим, потому что при $\cos\alpha>0$ угол α может также оканчиваться в V или VIII четверти, а $\frac{\alpha}{2}$ — в V или VIII восьмушке, т. е. в III или IV четверти и, значит, $\sin\frac{\alpha}{2}$ может быть отрицателен.

Аналогичное исследование должно быть проделано и для формул (8). При выводе этих формул мы извлекали квадратный корень. Он извлёкся точно, и в окончательную формулу радикал не вошёл. Однако при его извлечении мог получиться двойной знак. Следует доказать, что двойной знак в формулах (8) не нужен. Это связано с тем обстоятельством, что *задание одновременно синуса и косинуса вполне определяет в какой четверти оканчивается угол* (с точностью до целых окружностей). Поскольку мы рассматриваем значение α в пределах двух оборотов, то каждый раз, когда заданы $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, мы получаем два угла: α_0 и $\alpha_0+360°$. Половины этих углов суть $\frac{\alpha_0}{2}$ и $\frac{\alpha_0}{2}+180°$; эти углы имеют один и тот же тангенс. Следовательно, двойной знак в формулах (8) не нужен.

Вычисление тригонометрических функций некоторых углов.

Располагая формулами для суммы и разности, а также формулами для двойных и половинных аргументов можно вычислить тригонометрические функции весьма многих углов, например: 15°, 75°, 22° 30′ и многих других. Это обстоятельство следует использовать, так как, во-первых, оно даёт повод к задачам на применение выведенных формул, а во-вторых, если полученные значения записывать и сохранять, то у учеников образуется самодельная таблица тригонометрических функций, которая может быть весьма подробной. Следует различать две задачи: вычисление точных значений тригонометрических функций или приближённых. Изыскание различных углов, тригонометрические функции которых могут быть выражены при помощи квадратичных иррациональностей, представляет собой интересное упражнение, требующее известной изобретательности.

Понижение степени тригонометрических выражений.

Обычно при прохождении вопроса о тригонометрических функциях кратных аргументов наблюдается один недостаток, вообще широко распространённый во многих частях школьного курса математики: одностороннее применение соответствующих преобразований. Формулы для синуса и косинуса двойного аргумента служат для *понижения кратности*, т. е. они выражают $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, но зато они приводят к повышению степени: в правых частях этих формул фигурируют выражения второй степени относительно $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Формулы для $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}\sin 3\alpha &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,\\ \cos 3\alpha &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

причём из самого процесса вывода видно, что при дальнейшем продолжении этой последовательности формул степени в правой части будут повышаться. Можно поставить обратную задачу: выразить $\sin^n\alpha$, $\cos^n\alpha$ и $\sin^m\alpha$, $\cos^m\alpha$ через первые степени синуса и косинуса. При этом обязательно *повысится кратность*, например:

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\alpha &= \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),\\ \cos^2\alpha &= \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),\\ \sin^3\alpha &= \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha),\\ \cos^3\alpha &= \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha),\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

Таким образом, перед нами открывается возможность вести преобразования в двух противоположных направлениях: *понижать кратность, повышая степень, или, наоборот, понижать степень, повышая кратность*. В курсе математики — элементарной и высшей — можно привести множество примеров, когда бывает нужно делать то и другое. Поэтому неправильно в курсе тригонометрии фиксировать всё внимание на формулах для тригонометрических функций кратных аргументов и совершенно оставлять в тени формулы для понижения степени.

Вывод формул типа (10) может быть произведён двумя способами. Один из них заключается в постепенном понижении степени. Если n — чётное, то используются формулы:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),$$

которые суть не что иное, как формулы (6) (стр. 79), только в другом написании. Вот пример использования этих формул:

$$\cos^4\alpha=\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1+2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2\alpha+\frac{1+\cos 4\alpha}{2}\right)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{8}\cos 4\alpha.$$

Если же n — нечётное, то приходится использовать формулы (13) (стр. 85), преобразующие произведение синусов и косинусов в сумму. Пример:

$$\sin^3\alpha=\sin^2\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\sin\alpha=$$
$$=\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{1}{4}(\sin 3\alpha-\sin\alpha)=\frac{3}{4}\sin\alpha-\frac{1}{4}\sin 3\alpha.$$

Второй способ может быть рекомендован только учителю для того, чтобы наиболее быстро и просто получать результат. Он основан на формулах Эйлера, выражающих синус и косинус через показательную функцию:

$$\left.\begin{aligned}\cos x&=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\\ \sin x&=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

Вот пример использования этих формул:

$$\cos^4 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\frac{e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}}{16}=\frac{1}{8}\,\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2}+$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}+\frac{3}{8}=\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8},$$
$$\sin^3 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3=\frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{-8i}=-\frac{1}{4}\,\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}+$$
$$+\frac{3}{4}\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=-\frac{1}{4}\sin 3x+\frac{3}{4}\sin x.$$

Приведение к логарифмическому виду.

Формулы для приведения к логарифмическому виду представляют непосредственные следствия формул сложения. Вывод формул для приведения к логарифмическому виду общеизвестен, и мы не будем на нём останавливаться. По поводу использования этих формул мы имеем некоторые замечания.

Во-первых, мы полагаем, что этот раздел (приведение к логарифмическому виду) занимает место непропорциональное его содержанию (особенно в задачах). Естественно задать вопрос: почему полагается ответ в любой тригонометрической задаче приводить к логарифмическому виду? Причина такого обычая заключается в том, что предполагается, будто ответ обязательно будет вычисляться при помощи логарифмов. Но в настоящее время, благодаря распространению разнообразных таблиц и механических средств вычисления, значение логарифмов для вычислений гораздо меньше, чем несколько десятков лет назад. Предположение, что всякое вычисление должно производиться при помощи логарифмов, является анахронизмом. К тому же учителя увлекаются приведением к логарифмическому виду, превращая его в самоцель. Например, если в какой-нибудь задаче получился ответ:

$$x = \sin 43°15' + \sin 25°45',$$

то обязательно требуют представления его в виде

$$x = 2 \sin 34°30' \cos 8°45',$$

хотя гораздо проще вычислить первое выражение по натуральным тригонометрическим таблицам, чем логарифмировать второе выражение и затем находить значение по его логарифму.

Во-вторых, в любом разделе математики чрезвычайный вред приносит одностороннее применение формул или приёмов преобразований. Надо привить ученикам мысль, что иногда требуется преобразовать сумму в произведение, а иногда наоборот, смотря по тому, для чего мы используем данное выражение. Например, при вычислении интеграла $\int \sin x \cdot \sin 3x \cdot dx$ следует поступать так:

$$\int \sin x \cdot \sin 3x \cdot dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 4x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x + C.$$

При решении же тригонометрического уравнения $\sin 5x - \sin x = 0$, наоборот, следует преобразовать разность в произведение. Поэтому необходимо приучать учеников к преобразованиям сумм в произведения и наоборот.

На основании этих соображений мы предлагаем устранить самое название «приведение к логарифмическому виду», а назвать этот раздел так: «преобразование произведений в суммы и сумм в произведения».

Формулы для преобразования сумм в произведения и обратно

Непрактично требовать от учеников запоминания большого числа формул для преобразования сумм в произведения. Гораздо более надёжным (механическая память может подвести) и более развивающим будет такое требование: во-первых, помнить две основные формулы:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \\ \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

и, во-вторых, уметь в каждом случае, когда это понадобится, получить из этих формул любую другую.

Пример 1. Получить формулу для разности синусов:

$$\sin\alpha - \sin\beta = \sin\alpha + \sin(-\beta) = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Пример 2. Получить формулу для разности косинусов:

$$\cos\alpha - \cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right) =$$
$$= 2\sin\left(\pi + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Основными формулами для преобразования произведений в суммы являются следующие:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha\cdot\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],\\ \sin\alpha\cdot\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],\\ \sin\alpha\cdot\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Формулы (13) при $\beta = \alpha$ принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\alpha &= \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),\\ \sin^2\alpha &= \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),\\ \sin\alpha\cdot\cos\alpha &= \frac{1}{2}\sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Введение вспомогательного угла.

Не входя в детальное рассмотрение типов задач на этот раздел, каковые задачи имеются в любом задачнике, остановимся лишь на вопросе о введении вспомогательного угла. Нам кажется, что этот важнейший метод недооценивается.

Рассмотрим следующие два примера.

Пример 1. Преобразовать в произведение $1+\operatorname{tg}\alpha$.

Решение.

$$1+\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}45^\circ + \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ\cdot\cos\alpha} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}.$$

Пример 2. Преобразовать в произведение $4+5\sin\alpha$.

Решение.

$$4+5\sin\alpha = 5\left(\frac{4}{5}+\sin\alpha\right).$$

Далее находим по таблицам угол, синус которого равен $\frac{4}{5}$. Имеем $\left(\text{с точностью до } \frac{1'}{2}\right)$:

$$\sin 53^\circ 08' = \frac{4}{5}.$$

Далее:

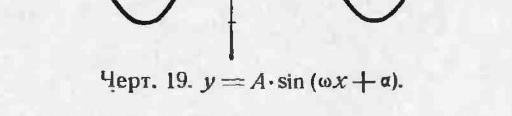
$$4+5\sin\alpha = 5(\sin 53^\circ 08' + \sin\alpha) =$$
$$= 10\sin\left(26^\circ 34' + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(26^\circ 34' - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ясно, что оба приведённые примера аналогичны. Разница заключается лишь в том, что в первом примере вспомогательный угол находится без таблиц, а во втором — по таблицам. В школьной практике чрезмерно преобладают примеры первого рода, причём они рассматриваются вне всякой связи с методом введения вспомогательного угла. Такая практика кажется нам неправильной, потому что: 1) ученики не замечают единства метода, т. е. видят разрозненные приёмы там, где налицо один приём; это уменьшает глубину понимания; 2) нежелательно избегать вычислений и всегда давать задачи с «благополучными» вычислениями, приводящие к «круглым ответам»; это приводит учеников к заблуждению насчёт удельного веса таких задач на практике. В особенности не следует избегать таблиц. Наоборот, следует стараться обращаться к ним возможно чаще, так как развить привычку и умение пользоваться таблицами — одна из важных задач средней школы.

С другой стороны, не стоит откладывать примеры первого типа до тех пор, пока не будет пройден в общей форме метод введения вспомогательного угла. Эти задачи более элементарны и могут решаться независимо от каких-либо общих идей. Однако после прохождения метода введения вспомогательного угла полезно включить задачи первого типа в общий метод и перемешать их с задачами второго типа.

Сложение гармоник с одинаковой частотой.

Метод введения вспомогательного угла позволяет доказать важную теорему о сложении гармоник с одинаковой частотой. Эту теорему мы считаем обязательной для курса тригонометрии. Во-первых, она имеет исключительно важное значение в физике; во-вторых, содержание этой теоремы чисто тригонометрическое, и курс тригонометрии — наиболее естественное место для этой теоремы; в-третьих, она является поводом для разнообразных задач, вычислений и вычерчивания графиков.



Черт. 19. $y = A\cdot\sin(\omega x + \alpha)$.

Гармоникой называется функция

$$f(x) = A\sin(\omega x + \alpha). \quad (15)$$

A называется амплитудой гармоники, ω — частотой, α — начальной фазой. График гармоники есть общая синусоида (слово «общая» указывает на растяжения по обеим осям и сдвиг вдоль оси X). Гармоника (15) имеет период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (16)$$

Если аргументом служит время, а функцией путь, пройденный точкой по прямой от некоторой начальной точки, то формула

$$s = A\cos(\omega t + \alpha)$$

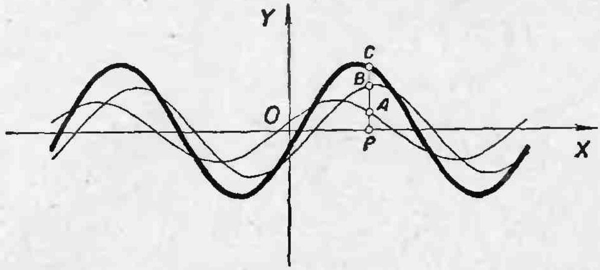
даёт уравнение гармонического колебания.

Теорема, о которой идет речь, гласит:

Сумма двух гармоник с одинаковой частотой есть гармоника с той же частотой.

Укажем механический смысл этой теоремы.

На стене находится доска, совершающая по этой стене гармоническое колебание в горизонтальном направлении (влево и вправо). На доске движется точка, совершающая по этой доске гармоническое



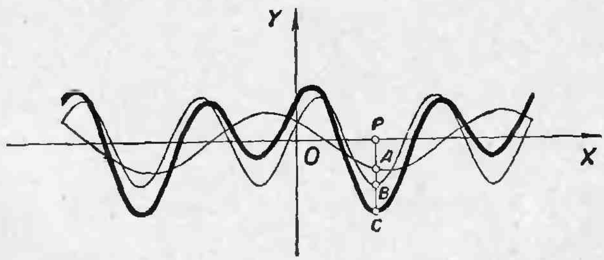
Черт. 20. Сложение гармоник с одинаковой частотой:
$PA + PB = PC$.

колебание в горизонтальном направлении с той же частотой, но, вообще говоря, с другой начальной фазой и другой амплитудой. В таком случае движение этой точки относительно стены тоже есть гармоническое колебание с той же частотой.

Геометрический смысл теоремы понятен из чертежа 20. Тонкие линии суть две синусоиды с одинаковой частотой. Вообразим в каждой точке оси X перпендикуляр к этой оси и сложим ординаты наших двух синусоид, т. е. построим точку C, определяемую равенством

$$PA + PB = PC.$$

Геометрическое место точек C есть жирная линия. Теорема утверждает, что это — тоже синусоида, и притом — с той же частотой.



Черт. 21. Сложение гармоник с различными частотами:
$PA + PB = PC$.

Полезно привести контрпример, показывающий, что при сложении гармоник с различными частотами не получается гармоника. На чертеже 21 при сложении двух гармоник получилась функция, изображающаяся не синусоидой, а неправильной кривой.

Переходим к доказательству теоремы. Оно состоит из двух шагов. Сначала докажем, что сумма

$$A \sin \omega x + B \cos \omega x$$

есть гармоника с частотой ω. Это — частный случай доказываемой теоремы, так как $A \sin \omega x$ есть гармоника с начальной фазой, равной нулю, а $B \cos \omega x$ — гармоника с начальной фазой, равной $\frac{\pi}{2}$, потому что

$$B \cos \omega x = B \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{2} \right).$$

Итак, рассмотрим сумму $A \sin \omega x + B \cos \omega x$ и вынесем за скобку $\sqrt{A^2 + B^2}$:

$$A \sin \omega x + B \cos \omega x =$$
$$= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega x \right).$$

В результате этого преобразования, при $\sin \omega x$ и $\cos \omega x$ оказались коэфициенты, сумма квадратов которых равна единице. Это даёт возможность ввести обозначение:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} &= \cos \alpha, \\ \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} &= \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

после чего получим:

$$A \sin \omega x + B \cos \omega x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin (\omega x + \alpha). \tag{18}$$

Таким образом доказано, что $A \sin \omega x + B \cos \omega x$ есть гармоника с частотой ω.

Переходим к общему случаю:

$$A \sin (\omega x + \alpha) + B \sin (\omega x + \beta) = A \sin \omega x \cos \alpha + A \cos \omega x \sin \alpha +$$
$$+ B \sin \omega x \cdot \cos \beta + B \cos \omega x \cdot \sin \beta = (A \cos \alpha + B \cos \beta) \sin \omega x +$$
$$+ (A \sin \alpha + B \sin \beta) \cos \omega x.$$

После этого дело сводится к предыдущему случаю с заменой A на $A \cos \alpha + B \cos \beta$ и B на $A \sin \alpha + B \sin \beta$.

Заметим, что можно сразу начинать с общего случая. Мы выделяем случай $A \sin x + B \cos x$ лишь для расчленения трудностей.

Пример. Сложить две гармоники (т. е. выразить сумму в виде одной гармоники):

$$2\sin\left(\frac{1}{2}x+18^\circ\right)+3\sin\left(\frac{1}{2}x-50^\circ\right)=$$
$$=2\left(\sin\frac{1}{2}x\cdot\cos 18^\circ+\cos\frac{1}{2}x\cdot\sin 18^\circ\right)+$$
$$+3\left(\sin\frac{1}{2}x\cdot\cos 50^\circ-\cos\frac{1}{2}x\cdot\sin 50^\circ\right)=$$
$$=2\left(0{,}95106\cdot\sin\frac{1}{2}x+0{,}30902\cdot\cos\frac{1}{2}x\right)+$$
$$+3\left(0{,}64279\cdot\sin\frac{1}{2}x-0{,}76604\cdot\cos\frac{1}{2}x\right)=$$
$$=3{,}83049\cdot\sin\frac{1}{2}x-1{,}68008\cdot\cos\frac{1}{2}x=\sqrt{3{,}83049^2+1{,}68008^2}\times$$
$$\times\left(\frac{3{,}83049}{\sqrt{3{,}83049^2+1{,}68008^2}}\sin\frac{1}{2}x-\frac{1{,}68008}{\sqrt{3{,}83049^2+1{,}68008^2}}\cos\frac{1}{2}x\right)=$$
$$=4{,}18274\left(0{,}91578\cdot\sin\frac{1}{2}x-0{,}40167\cdot\cos\frac{1}{2}x\right).$$

Вводим вспомогательный угол:

$$\cos\alpha=0{,}91578,$$
$$\sin\alpha=-0{,}40167,$$

откуда $\alpha=-23^\circ 41'$. Итак:

$$2\sin\left(\frac{1}{2}x+18^\circ\right)+3\sin\left(\frac{1}{2}x-50^\circ\right)=$$
$$=4{,}18274\sin\left(\frac{1}{2}x-23^\circ 41'\right).$$

Задачи на максимум и минимум.

Рассматриваемые преобразования позволяют решать некоторые задачи на максимум и минимум.

Пример. Каковы крайние возможные значения суммы

$$\sin x+\cos x?$$

Решение.

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$$

Отсюда видно, что максимальное значение суммы $\sin x+\cos x$ равно $\sqrt{2}$; оно достигается при $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$. Минимальное значение равно $-\sqrt{2}$; оно достигается при $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi n$.

§ 3. Тригонометрические таблицы.

Воспитательное значение тригонометрических таблиц.

Тригонометрические таблицы имеют воспитательное значение гораздо большее, чем это принято думать. Это, впрочем, относится ко всяким вообще таблицам. Без таблиц изучение математики в школе становится недостаточно конкретным, так как ученики не приучаются доводить каждую задачу до числового ответа. Такая привычка очень важна, потому что иногда в процессе вычислений ученику становится ясным то, что было недостаточно понятно, пока дело ограничивалось чисто теоретическими рассуждениями и не делалось попытки довести задачу до осязательного результата. Кроме того, доведение задач практически до конца даёт большое удовлетворение, которое свойственно испытывать человеку, сделавшему осязаемую вещь, а не только объяснившему, как её сделать.

Вопрос о типе тригонометрических таблиц, которые даются на руки ученикам, весьма небезразличен. Выбор тех или иных таблиц влияет на подбор задач и на метод их решения, т. е. оказывает существенное влияние на весь курс тригонометрии. Так, например, если ученики имеют на руках только таблицы логарифмов тригонометрических функций и не имеют натуральных таблиц, то задачу с вычислением суммы $\sin 20^\circ + \sin 30^\circ$ придётся решать иначе, чем если бы у них были на руках натуральные таблицы. Если мы ставим целью развить в наших учениках достаточную толковость и инициативу, то мы, разумеется, должны дать им в руки разнообразный набор таблиц. При этом ученик должен каждый раз проявить ииициативу и выбрать те таблицы, использование которых в данном случае наиболее разумно. Если же мы даём в руки ученикам только одиу таблицу, то мы тем самым вынуждаем их во многих случаях прибегать к неестественным и никогда не употребляющимся в практике способам вычислений, специально для того, чтобы приспособиться к имеющейся у них таблице. Кажется тривиальным утверждение, что при всякой деятельности желательно иметь набор инструментов, которые могли бы с удобством служить во всех могущих встретиться случаях. Тем не менее в вопросе о тригонометрических вычислениях этот тривиальный факт до сих пор не понят.

Таблицы Вега

В прошлом столетии в русской средней школе в качестве сборника таблиц была наиболее употребительна книга Георга Вега (иногда — начиная с 1835 года — в сокращённой обработке Ф. И. Буссе). В этой книге даны семизначные логарифмы тригонометрических функций через каждые 10 секунд. Однако, постепенно крепло убеждение, что употребление в средней школе столь громоздких таблиц нецелесообразно. Средняя школа должна научить принципам вычислений. Этим принципам можно научить и не обращаясь к семизначным логарифмам. Требование большой точности (вычисление углов при решении треугольников с точностью до 1 секунды) влечёт много кропотливой технической работы, нисколько не содействуя лучшему уяснению самих приёмов вычисления. С другой стороны, это вызывает у учеников ложное представление о том, что такая точность необходима на практике. В действительности, в инженерной практике, как правило, достаточна точность до 1 минуты, а во многих случаях и ещё меньшая. Разумеется, встречаются случаи, когда необходимо вычислить угол с весьма большой точностью, но отсюда совершенно не следует, что нужно тренировать учеников средней школы в вычислениях именно с такой точностью. Человек, усвоивший устройство тригонометрических таблиц, должен суметь, если в этом когда-либо возникнет надобность, вычислять и не по тем таблицам, которые употреблялись в школе.

Таблицы Пржевальского. Вследствие распространения такого убеждения таблицы Вега были вытеснены из средней школы таблицами Е. М. Пржевальского. Таблицы Пржевальского появились в 1868 году. Начиная со второго издания (1879), они приобрели тот вид, который остался совершенно неизменным по сей день (расположение, формат, шрифт). Вытеснение таблиц Вега таблицами Пржевальского происходило очень медленно. В книге Пржевальского имеются следующие таблицы (мы перечисляем только те, которые имеют отношение к тригонометрии).

1) Логарифмы (с пятизначными мантиссами) тригонометрических функций. Аргумент — в градусной мере, через каждую минуту.

2) Натуральные тригонометрические таблицы. Значения функций даны с тремя знаками после запятой. Аргумент — в градусной мере, через каждые 30 минут.

3) Длина дуги круга при радиусе, равном 1 (другими словами — таблица для перевода градусной меры в радианную). Аргумент — через каждую секунду.

Сопоставление первой из этих таблиц со второй (гораздо менее точной) показывает, как велико было пренебрежение к натуральным таблицам. Характерно также, что имеется таблица для перевода градусной меры в радианную, но нет таблицы для обратного перевода. Таким образом предполагалось, что задача «найти sin 2,7» никогда не может быть предложена в средней школе. Эту задачу нельзя решить, пользуясь только таблицами Пржевальского: необходимо предварительно кустарным способом перевести 2,7 радиана в градусную меру.

В настоящее время в средней школе приняты четырёхзначные таблицы В. М. Брадиса; их тематика не отличается от тематики таблиц Пржевальского.

Предлагаемые изменения в содержании таблиц. По причинам, уже высказывавшимся выше, мы считаем необходимым внести следующие изменения в содержание тригонометрических таблиц. Во-первых, натуральные тригонометрические таблицы должны быть, по меньшей мере, столь же подробны, как таблицы логарифмов тригонометрических функций. Именно натуральные, а не логарифмические таблицы должны быть основным средством тригонометрических вычислений. Поэтому они должны давать возможность вычислять с не меньшей точностью, чем логарифмические таблицы.

В противном случае ученик будет искусственно вынужден обращаться к логарифмическим таблицам.

Во-вторых, необходимо внедрить тригонометрические таблицы, где аргумент даётся в радианной мере. Такая таблица дана на стр. 132.

Радианные таблицы приходится продолжать дальше, чем градусные, причина этого была объяснена в § 2 главы III (стр. 66).

Самостоятельное составление таблиц.

Самостоятельное составление тригонометрических таблиц учениками имеет воспитательное значение, которое трудно преувеличить.

Ребёнку окружающий мир кажется непонятным. Он не знает законов, управляющих явлениями природы, и устройства произведений техники. Паровоз, радиоприёмник, электрическая лампочка кажутся чудесами, и ребёнок привыкает мириться с их непонятностью, привыкает считать это недоступным для своего ума.

Одна из важнейших задач средней школы — разрушение этой таинственности. Десятиклассник должен уже прочно привыкнуть к сознанию, что ничего чудесного нет, и всё он может постигнуть, хотя бы в принципе. Он не может (пока) сам спроектировать паровоз во всех деталях, но должен знать принцип его устройства.

Составление математических таблиц — один из участков этой борьбы с таинственностью, и поэтому воспитательное значение составления таблиц далеко выходит за рамки скромного параграфа из курса тригонометрии. Мы не можем (и вовсе не ставим это целью) дать ученику наиболее совершенные методы, употребляемые современными вычислителями. Мы будем вполне удовлетворены, если, познакомившись с некоторыми кустарными способами вычисления тригонометрических функций, ученики скажут: «В составлении тригонометрических таблиц нет ничего таинственного. Мы можем делать это сами!».

Вычисление таблиц даёт ученикам большое удовлетворение и служит поводом для более прочного усвоения многих тригонометрических положений, к которым приходится обращаться в ходе этого вычисления.

Однако было бы крайним преувеличением думать, что надо знакомить учеников с практическими способами, которые действительно используются для составления таблиц. Это совершенно излишне, так как никому из учеников не придётся составлять тригонометрические таблицы ни для каких других целей, кроме упражнения. Важно только показать, что это можно сделать.

Исходя из этих соображений, мы считаем нецелесообразным традиционный способ вычисления таблиц, основанный на теореме

$$x-\frac{x^3}{4}<\sin x<x,$$

где x — радианная мера острого угла.

Эта теорема доказывается специально для составления таблиц. Она недостаточно точна, так как в левой части можно было бы взять $x-\frac{x^3}{6}$ вместо $x-\frac{x^3}{4}$, только это трудно доказать элементарными средствами. Она излишня, потому что и без неё в школьном курсе тригонометрии есть множество способов для вычисления таблиц.

К этим средствам относятся формулы половинного угла, суммы и разности. Полезной оказывается также формула

$$\sin\frac{180^\circ}{n}=\frac{a_n}{2R},$$

где a_n — сторона правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса R. Например, полагая $n=10$, получим:

$$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=0{,}309017.$$

Теперь можно найти $\cos 18^\circ$ и $\operatorname{tg} 18^\circ$.

Пользуясь этим аппаратом, можно найти тригонометрические функции многих углов. Этот вопрос был нами рассмотрен в связи с разбором учебника М. Е. Головина (стр. 17). При известной изобретательности изложенный там материал можно пополнить ещё многими примерами.

ГЛАВА V.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ.

§ 1. Понятие о тригонометрических уравнениях.

Определение понятия «тригонометрическое уравнение».

По вопросу о том, что такое «тригонометрическое уравнение», в учебной литературе встречаются неясности. Желая избежать цитирования большого числа источников, предоставим голос Н. А. Рыбкину, как автору стабильного учебника [1]), Е. С. Березанской, как автору специального методического пособия, посвящённого тригонометрическим уравнениям [2]), и С. И. Новосёлову, как автору новейшего руководства по тригонометрии [3]).

Н. А. Рыбкин (стр. 58): «Уравнение называется тригонометрическим, если содержит неизвестное под знаком тригонометрической функции...»

Это определение неясно. В самом деле: будут ли следующие уравнения тригонометрическими:

$$\lg \sin x = -0{,}4,$$
$$\sin \lg x = 0{,}3,$$
$$\sin x + x = 1?$$

Н. А. Рыбкин продолжает:

«... таковы, например, уравнения:

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 0; \qquad \sin 5x = \sin 4x; \qquad \operatorname{tg}(a + x) = m \cdot \operatorname{tg} x$$

(в первом уравнении неизвестное служит аргументом, во втором — входит в состав аргумента, в третьем — то и другое)».

Неясно, что́ значит, что неизвестное входит в состав аргумента. Как входит? Например, в уравнении $\lg \sin x = -0{,}4$ неизвестное входит в состав аргумента, однако, как можно судить по подбору примеров, Н. А. Рыбкин не включил бы его в число тригонометрических уравнений.

---

[1]) Н. А. Рыбкин, Прямолинейная тригонометрия, М.—Л., 1949.

[2]) Е. С. Березанская, Тригонометрические уравнения и методика их преподавания, М. 1935.

[3]) А. Н. Перепёлкина и С. И. Новосёлов, Геометрия и тригонометрия, М.—Л., 1947 (см. сноску на стр. 51).

Е. С. Березанская (стр. 4): «Тригонометрическим уравнением называется уравнение в том случае, когда в нём неизвестное содержится под знаком тригонометрической функции».

Это определение отличается от рыбкинского только порядком слов и, следовательно, вызывает те же вопросы.

Далее (на стр. 5) читаем: «Но неизвестным аргументом в тригонометрическом уравнении является угол (дуга), содержащийся под знаком тригонометрической функции, и при решении уравнения сначала приходится определять тригонометрическую функцию аргумента. А так как каждому значению тригонометрической функции соответствует неограниченное множество углов, то тригонометрическое уравнение имеет неограниченное множество решений в отличие от алгебраического».

Эта цитата, не вытекающая из приведённого выше определения, является дополнением, разъясняющим точку зрения автора. Значит, $\sin x + x = 1$ не есть тригонометрическое уравнение.

С. И. Новосёлов стоит на той же точке зрения, но в отличие от предыдущих авторов высказывает её с полной ясностью и определённостью.

С. И. Новосёлов (стр. 332): «Тригонометрическим уравнением называется уравнение, содержащее неизвестное только лишь под знаком тригонометрических функций. Примерами тригонометрических уравнений могут служить уравнения:

$$2\sin^2 x - \sin x + \operatorname{tg} x = 0, \quad \sin 5x - \cos 4x + 1 = 0.$$

Уравнение:

$$\sin x - x + 1 = 0,$$

содержащее неизвестное и под знаком тригонометрической функции и непосредственно, не считается тригонометрическим».[1]

Две возможные точки зрения на тригонометрические уравнения.

Возможны две точки зрения на тригонометрические уравнения.

А (широкая). Тригонометрическим уравнением называется уравнение, в котором неизвестное присутствует под знаком тригонометрических функций.

В (узкая). Тригонометрическим уравнением называется уравнение, в котором неизвестное присутствует только под знаком тригонометрических функций.

Цитированные выше авторы стоят на точке зрения В.

Спорить о том, какая точка зрения правильна, разумеется, нельзя. Но можно спорить о том, следует ли в средней школе ограничиваться уравнениями типа В.

Какие уравнения изучать в школьном курсе.

Мы возражаем против предложения ограничиться изучением только уравнений типа В. В курсе элементарной математики уравнения являются удобным поводом для закрепления знаний о функциях, с которыми нам приходится иметь дело. Поэтому наиболее естественной

[1]) Похожее на это определение находим в учебнике А. Ф. Берманта и Л. А. Люстерника «Тригонометрия», М., 1947, стр. 174.

является следующая точка зрения: типы уравнений, которые мы изучаем в школе, в каждый данный момент лимитируются лишь тем, какие функции нам к этому моменту известны, т. е. какими знаками мы можем пользоваться. Так, в курсе алгебры каждый раз, как мы знакомимся с новыми функциями, мы вводим в рассмотрение новые типы уравнений. После знакомства с радикалами ученики решают иррациональные уравнения. Познакомившись с показательной и логарифмической функциями, ученики приступают к показательным и логарифмическим уравнениям. При этом они не ограничиваются уравнениями, где неизвестное входит только непосредственно под знаком логарифма или непосредственно в показателе степени, а рассматривают всевозможные уравнения, где показательная и логарифмическая функции фигурируют в любых комбинациях с известными ранее функциями. Аналогично мы рекомендуем поступать и в тригонометрии. Знакомство с тригонометрическими функциями следует рассматривать как повод к расширению класса изучаемых уравнений. Как только ученик узнал, чтó такое синус и косинус, он может немедленно приступить к решению уравнений, в которых знаки sin и cos фигурируют в любых комбинациях с известными ранее знаками. Поэтому нет никаких оснований делать столь строгое разграничение между уравнениями типа А и В.

Разумеется, выбор уравнений, предлагаемых в школе, ограничен тем обстоятельством, что не всякое уравнение ученики сумеют решить. Однако это обстоятельство не является поводом для того, чтобы, выделять только уравнения типа В.

В самом деле, уравнение $\sin x + \cos x = \operatorname{tg} x$ относится к типу В, а уравнение $\sin x = x - 1$ к типу А. Но они оба не могут быть решены точно алгебраическими методами, проходимыми в школе, и требуют приближенного решения. С другой стороны, уравнение $\sin \lg x = 0$, относящееся к типу А, может быть *точно* решено школьными методами. Итак, граница между уравнениями, решаемыми или нерешаемыми (в каком бы смысле ни понимать это слово), пролегает не там, где граница между уравнениями типа А и В.

Итак, мы рекомендуем вводить в курс тригонометрии всевозможные уравнения, где знаки тригонометрических функций участвуют в любых комбинациях с известными ранее функциями, по мере того, как материал, проходимый по алгебре и по тригонометрии, позволяет эти уравнения решать.

Место тригонометрических уравнений в курсе тригонометрии.

Из изложенной точки зрения с необходимостью вытекает одно методическое следствие: *не следует выделять тригонометрические уравнения в особую главу курса.* Основные математические понятия не должны быть сконцентрированы в отдельных главах, а должны пронизывать весь курс математики. Так, например, с того момента, как ученик впервые узнал, чтó такое функция, это понятие должно присутствовать повседневно во всех разделах школьного курса. Точно так же с того момента, как ученик в курсе алгебры узнал, чтó такое уравнение, он должен повседневно во всех разделах математики заниматься решением уравнений. Сконцентрировать тригонометрические уравнения в одной главе нецелесообразно, потому что эти уравнения должны вводиться в рассмотрение постепенно, по мере того, как ученик получает больше сведений, которые позволяют ему решать более сложные уравнения.

Например, уравнения с участием $\sin x$ и $\cos x$ могут решаться довольно рано, уравнения с участием $\sin 2x$ и $\cos 2x$ — позднее.

Постановка вопроса о решении тригонометрических уравнений.

Решая тригонометрические уравнения, необходимо довести до сознания учеников точную постановку вопроса. Эта постановка может быть разная. В некоторых случаях требуется найти *общий ответ*, т. е. указать *все*[1]) значения неизвестного, удовлетворяющие данному уравнению. В других случаях требуется найти значения неизвестного, удовлетворяющие некоторым неравенствам, например, заключённые между 0 и 2π или между 0 и π, или наименьшее по абсолютной величине и т. д. Тот факт, что возможны разные постановки вопроса, не должен смазываться. Для ясного понимания этого положения необходимо предлагать задачи с различными постановками вопроса, т. е. каждый раз в самой задаче указывать, в каком смысле она задаётся. Для тренировки иногда можно предлагать и необычные постановки вопроса, например: найти все решения уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$, удовлетворяющие неравенству: $-10 \leqslant x \leqslant -7$. Однако в подавляющем большинстве случаев следует предлагать такие постановки, которые часто встречаются на практике, т. е. либо найти все ответы, либо найти значения в пределах от 0 до 2π. Эта постановка имеет особое значение для уравнений типа В.

Необходимо ли употребление обратных круговых функций?

Мы считаем предрассудком мнение, что тригонометрические уравнения можно изучать только после ознакомления с обратными круговыми функциями. Говорят, будто уравнение $\sin x = a$ имеет решение:

$$x = 180^\circ n + (-1)^n \arcsin a,$$

которое нельзя записать не будучи знакомым со знаком $\arcsin a$. Это, конечно, неверно, потому что знакомство с обратными круговыми функциями не даёт нам никакого нового способа для решения уравнения $\sin x = a$. Так же, как и раньше, это уравнение может быть решено лишь подбором значения x по таблицам или в некоторых случаях точно. Введение знака $\arcsin a$ является лишь признанием нашего бессилия решить уравнение $\sin x = a$. В самом деле, не всё ли равно написать ответ уравнения $\sin x = a$ в виде $x = 180^\circ n + (-1)^n \arcsin a$, или написать его в виде $x = 180^\circ n + (-1)^n x_0$ и добавить на словах, что x_0 есть *одно из значений аргумента, удовлетворяющее уравнению* $\sin x = a$. Неужели стоит откладывать тригонометрические уравнения только для того, чтобы заменить слова, выделенные курси-

---

[1]) Разумеется, действительные. Впредь мы всегда будем предполагать это без специальных оговорок.

вом, знаком $\arcsin a$? Став на эту точку зрения, мы упустим много времени и ничего не выиграем, так как такая замена не представляет ничего принципиального, а является лишь новым обозначением. В особенности важным является следующее соображение: для решения уравнений вида $\sin x = a$ при числовых значениях a обратные круговые функции вообще не нужны.

§ 2. Некоторые приёмы для решения тригонометрических уравнений.

Простейшие тригонометрические уравнения.

Переходя к обзору материала о тригонометрических уравнениях, который должен проходиться в школах, отметим прежде всего, что существует класс тригонометрических уравнений, называемых простейшими, который играет особую роль и который должен быть особо выделен. Это — уравнения вида $f(x) = a$, где $f(x)$ обозначает одну из шести тригонометрических функций. Решение уравнений типа B всегда сводится к простейшим уравнениям. Рассмотрим ближе простейшее уравнение:

$$\sin x = a. \tag{1}$$

Существуют три различные задачи, связанные с уравнением (1).

Первая задача — *в пределах первого оборота построить углы, удовлетворяющие уравнению* (1), *т. е. имеющие данный синус.* Эта задача была рассмотрена на странице 49.

Вторая задача — *в пределах первого оборота вычислить углы, удовлетворяющие уравнению* (1) *т. е. имеющие данный синус.* Эта задача решается вообще говоря, по таблицам.

Третья задача — *найти все углы, удовлетворяющие уравнению* (1), *т. е. имеющие данный синус.* Такая постановка является существенно новой. Рассмотрение этой задачи предполагает, что мы уже умеем решать предыдущие задачи, т. е. что мы умеем каким бы то ни было способом — построением или вычислением — найти хоть один угол, имеющий данный синус. Итак, более точная постановка третьей задачи следующая: *предполагая, что известен один угол, удовлетворяющий уравнению (1), найти все остальные.* Существует два приёма для решения этой задачи: геометрический и аналитический.

Геометрический приём заключается в следующем рассуждении: если a есть угол, имеющий данный синус, то угол $\pi - a$ имеет тот же самый синус, причём эти два угла различаются не на период, т. е. представляют два *существенно различные* угла, имеющие данный синус. К каждому из них можно прибавить период сколько угодно раз. Получим, как принято выражаться, две серии ответов:

$$x_1 = a + 2k\pi,$$
$$x_2 = \pi - a + 2k\pi,$$

которые хорошо известным способом могут быть объединены:

$$x = n\pi + (-1)^n a.$$

Аналитический способ: запишем, что два угла имеют один и тот же синус

$$\sin \alpha = \sin \beta.$$

Далее рассуждаем следующим образом:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 0,$$

$$2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 0.$$

Отсюда две возможности: либо

$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 0,$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = n\pi,$$

$$\alpha = \beta + 2n\pi,$$

либо

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 0,$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

$$\alpha = -\beta + \pi + 2\pi n.$$

Мы пришли к тому же результату. Аналитический способ представляется нам в данном случае более желательным, так как он не требует искусственных соображений, полностью автоматизирует рассуждения, является совершенно простым по идее и применим во всех других аналогичных случаях.

Примечание 1. Мы не считаем столь обязательным требование всегда объединять решения тригонометрических уравнений в одну формулу. Подобное объединение, с одной стороны, представляет собой полезное упражнение, но, во-первых, иногда оно оказывается чрезмерно трудным, причём эти трудности не тригонометрического, а постороннего порядка. Подобные задачи иногда приобретают характер головоломок. Во-вторых, на практике, если целью является получение отдельных ответов, безразлично, получим ли мы их из одной объединённой формулы или из нескольких отдельных формул. На практике следует предпочесть несколько простых формул одной чрезмерно усложнённой. Нам кажется, что объединение решений в одной формуле иногда превращается в самоцель, которую ученики справедливо рассматривают как каприз учителя.

Примечание 2. Читателю может показаться, что мы не рассмотрели ещё четвёртую возможную постановку задачи — найти угол, имеющий данный синус и заключённый не в пределах от 0 до 2π, а в каких-либо других пределах. Однако эта задача сводится к третьей. Следует сначала найти общий вид углов, имеющих данный синус, а затем из полученных общих формул выделить углы, удовлетворяющие поставленным неравенствам.

О постановке задачи решения простейшего уравнения $\cos x = a$ можно повторить всё сказанное выше. Для нахождения общего вида углов, имеющих данный косинус, пользуются такими же двумя приёмами.

Про уравнение $\operatorname{tg} x = a$ тоже можно повторить всё сказанное выше. Однако здесь дело обстоит несколько проще благодаря тому важному обстоятельству, что в пределах одного периода (т. е. от 0 до π) существует только один угол, имеющий данный тангенс. В этом существенное отличие тангенса от синуса и косинуса (синус и косинус в пределах своего периода, т. е. от 0 до 2π, дважды принимают каждое возможное значение). Вследствие этого не может существовать двух существенно различных углов, имеющих один и тот же тангенс. Поэтому ясно, что общий вид углов, имеющих данный тангенс, таков:

$$\beta = a + n\pi.$$

Итак, мы рассмотрели простейшие тригонометрические уравнения. Переходя дальше, заметим, что тригонометрические уравнения весьма разнообразны. Всё же попытаемся выделить некоторые основные типы и основные приёмы решения, знакомство с которыми в средней школе обязательно.

Некоторые, часто встречающиеся типы тригонометрических уравнений.

1) Замена всех тригонометрических функций, участвующих в уравнении, через одну. Для уравнений типа B этот приём всегда возможен, хотя не всегда он технически удобен.

2) Уравнения однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$. Например:

$$a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x = 0. \qquad (2)$$

Кроме тривиального приёма, эти уравнения могут быть решены ещё и так: разделим уравнение (2) на $\cos^2 x$. После этого получится уравнение, содержащее одну неизвестную функцию $\operatorname{tg} x$. Само собой разумеется, что это деление было бы недопустимо, если бы $\cos x$ был нулём. Таким образом, деля на $\cos x$, мы рискуем потерять корни, для которых $\cos x = 0$. Поэтому следует проверить, удовлетворяют ли нашему уравнению такие значения x. При $c \neq 0$ этого не будет, потому что если в уравнение (2) подставить $\cos x = 0$, то получится $\sin x = 0$, что́ не может соблюдаться одновременно.

3) Уравнения, приводимые к однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$. Такое приведение часто может быть достигнуто использованием тригонометрической единицы. Например, уравнения вида:

$$a\sin x + b\cos x = c \qquad (3)$$

могут быть решены следующим образом. Возводим это уравнение в квадрат:

$$a^2\sin^2 x + 2ab\sin x\cos x + b^2\cos^2 x = c^2$$

и умножаем правую часть на тригонометрическую единицу:

$$a^2 \sin^2 x + 2ab \sin x \cos x + b^2 \cos^2 x = c^2 \sin^2 x + c^2 \cos^2 x,$$

после чего уравнение становится однородным относительно $\cos x$ и $\sin x$.

При этом способе необходима проверка полученных ответов непосредственной подстановкой в данное уравнение. Поскольку мы в процессе решения возводим уравнение в квадрат, возможно появление лишних корней, а именно корней, соответствующих не данному уравнению, а уравнению:

$$a \sin x + b \cos x = -c.$$

Примеры. Однако, никогда не следует упускать из виду различные индивидуальные возможности, возникающие специально для данной задачи. Поэтому, знакомя учеников с типичными приёмами решения уравнений, никогда не следует говорить им, что уравнения такого-то типа всегда должны решаться таким-то приёмом.

Пример 1. Рассмотрим, например, уравнение:

$$\cos x + \sin x = 1$$

и покажем несколько возможных приёмов для его решения.

Первый приём. Выражаем $\cos x$ через $\sin x$, уединяем радикал и возводим уравнение в квадрат:

$$1 - \sin^2 x = 1 - 2 \sin x + \sin^2 x.$$

Поскольку мы возводим уравнение в квадрат, возможно появление лишних корней.

$$\sin x (\sin x - 1) = 0,$$

откуда имеем две возможности:

$$1)\ \sin x = 0, \quad x = k\pi;$$

$$2)\ \sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Эти два ответа можно объединить, представляя их так:

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot 2k,$$

$$x = \frac{\pi}{2} (2k + 1),$$

т. е. x равен $\frac{\pi}{2}$, умноженному на любое чётное или нечётное число, т. е. вообще на любое целое число. Итак:

$$x = \frac{m\pi}{2}.$$

Этот ответ подлежит проверке подстановкой в уравнение $\cos x + \sin x = 1$. Замечаем, что значения $\cos\frac{m\pi}{2}$ и $\sin\frac{m\pi}{2}$ зависят от того, к какому классу по модулю 4 принадлежит число m. Имеем:

при $m = 4n$ $\cos\frac{m\pi}{2} = 1$, $\sin\frac{m\pi}{2} = 0$; $\cos x + \sin x = 1$;

» $m = 4n + 1$ $\cos\frac{m\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{m\pi}{2} = 1$; $\cos x + \sin x = 1$;

» $m = 4n + 2$ $\cos\frac{m\pi}{2} = -1$, $\sin\frac{m\pi}{2} = 0$; $\cos x + \sin x = -1$;

» $m = 4n + 3$ $\cos\frac{m\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{m\pi}{2} = -1$; $\cos x + \sin x = -1$.

Итак, годятся лишь следующие ответы:

$$x = \frac{4n\cdot\pi}{2} = 2n\cdot\pi.$$

$$x = \frac{(4n+1)\pi}{2} = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Эти ответы можно объединить:

$$x = \left(2n + \frac{1 \pm 1}{4}\right)\pi.$$

Второй приём.

$$\sin^2 x + 2\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x = 1,$$
$$\sin 2x = 0,$$
$$2x = m\pi,$$
$$x = \frac{m\pi}{2}.$$

Далее делается проверка.

Третий приём. Заменяем в левой части сумму произведением:

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{\pi}{4} + x = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{4},$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4}\left[(-1)^k - 1\right].$$

В квадратных скобках имеем при нечётном k -2, а при чётном k нуль, т. е. получаем две серии ответов:

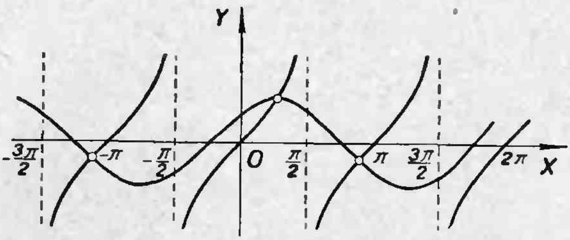
$$x = (2m+1)\pi - 2\cdot\frac{\pi}{4} = \pi\left(2m + \frac{1}{2}\right),$$
$$x = 2m\pi,$$

которые могут быть объединены ужé указанным способом. Проверка при этом способе не требуется.

Пример 2. Рассмотрим уравнение:

$$\sin x + \cos x = \operatorname{tg} x.$$

Это уравнение может быть решено лишь приближёнными методами. Знакомство с этими методами имеет громадное воспитательное значение. Во-первых, оно позволяет ученикам делать практически важную вещь; во-вторых, оно разрушает совершенно неправильный взгляд на самую постановку задачи решения уравнений. Мы не вдаёмся в эти



Черт. 22. Графическое решение уравнения $\sin x + \cos x = \operatorname{tg} x$.

соображения более подробно, так как они относятся к методике алгебры.

Мы не предлагаем знакомить учеников с методом Ньютона и даже с правилом ложного положения. Важно лишь показать ученикам возможность приближённо решить любое уравнение и дать способ, простой по идее, хотя бы он и не был практически совершенным. Простейшим является способ проб, который мы сейчас покажем.

Прежде чем приступать к приближённому вычислению корней, надо определить их число и дать каждому оценку, хотя бы очень грубую. Это легко сделать графически. Строим графики:

$$y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(45^\circ + x),$$
$$y = \operatorname{tg} x.$$

Корнями нашего уравнения являются абсциссы точек пересечения этих двух кривых. Для наших целей не нужно точное вычерчивание этих графиков, а лишь набросок от руки, требующий затраты нескольких минут. Из чертежа 22 усматриваем, что уравнение имеет бесчисленное множество корней, из которых два находятся в пределах первого оборота, а все остальные получаются из этих двух прибавлением 360°.

Пусть требуется вычислить в градусной мере корень, принадлежащий первой четверти. Составляем (пользуясь четырёхзначными натуральными таблицами) следующую таблицу:

x	$\sin x$	$\cos x$	$\sin x+\cos x$	$\operatorname{tg} x$	
0	0,0000	1,0000	1,0000	0,0000	$>$
45°	0,7071	0,7071	1,4142	1,0000	$>$
90°	1,0000	0,0000	1,0000	∞	$<$

Знаки $>$ и $<$, поставленные справа, указывают, является ли сумма $\sin x+\cos x$ больше или меньше, чем $\operatorname{tg} x$. Перемена знака с $>$ на $<$ происходит между $x=45°$ и $x=90°$. Следовательно, искомый корень лежит между 45° и 90°. В этом рассуждении и заключается вся идея способа проб. Теперь найденный промежуток можно сколько угодно сужать следующим образом:

x	$\sin x$	$\cos x$	$\sin x+\cos x$	$\operatorname{tg} x$	
45°					$>$
60°	0,8660	0,5000	1,3660	1,7321	$<$
75°					
90°					$<$

Строки, соответствующие 45° и 90°, не заполняются, так как из предыдущей таблицы уже известно, что при $x=45°$ справа стоит знак $>$, а при $x=90°$ — знак $<$. Что касается остальных двух строк, то мы сначала намеревались испытать значения $x=60°$ и $x=75°$, но так как при заполнении первой из этих строк произошла перемена знака, то заполнение следующей строки стало излишним. Корень заключен между 45° и 60°. Идём дальше:

x	$\sin x$	$\cos x$	$\sin x+\cos x$	$\operatorname{tg} x$	
45°					$>$
50°	0,7660	0,6428	1,4088	1,1918	$>$
55°	0,8192	0,5736	1,3928	1,4281	$<$
60°					$<$

$$50° < x < 55°$$

x	$\sin x$	$\cos x$	$\sin x+\cos x$	$\operatorname{tg} x$	
50°					$>$
51°					
52°	0,7880	0,6157	1,4037	1,2799	$>$
53°	0,7986	0,6018	1,4004	1,3270	$>$
54°	0,8090	0,5878	1,3968	1,3764	$>$
55°					$<$

$$54° < x < 55°$$

Заполнение этой таблицы надо начать не с 51°, а с 52° или 53°, чтобы сразу разбить интервал 50° — 55° на два почти одинаковые интервала и установить, в каком из них лежит корень. После заполнения строки, соответствующей 52°, выяснилось, что между 50° и 52° корня нет, поэтому заполнение строки, соответствующей 51°, оказалось излишним.

Продолжаем дальше:

x	$\sin x$	$\cos x$	$\sin x + \cos x$	$\operatorname{tg} x$	
54°					$>$
54°30′	0,8141	0,5807	1,3958	1,4019	$<$
55°					$<$

$$54° < x < 54°30'$$

x	$\sin x$	$\cos x$	$\sin x + \cos x$	$\operatorname{tg} x$	
54°00′					$>$
10′	0,8107	0,5854	1,3961	1,3848	$>$
20′	0,8124	0,5831	1,3955	1,3934	$>$
30′					$<$

$$54°20' < x < 54°30'$$

x	$\sin x$	$\cos x$	$\sin x + \cos x$	$\operatorname{tg} x$	
54°20′					$>$
25′	0,8133	0,5819	1,3952	1,3976	$<$
30′					$<$

$$54°20' < x < 54°25'$$

x	$\sin x$	$\cos x$	$\sin x + \cos x$	$\operatorname{tg} x$	
54°20′					$>$
21′					
22′	0,8128	0,5826	1,3954	1,3951	$>$
23′	0,8129	0,5824	1,3953	1,3959	$<$
24′					
25′					$<$

$$54°22' < x < 54°23'$$

x	$\sin x$	$\cos x$	$\sin x + \cos x$	$\operatorname{tg} x$	
54°22′00″					$>$
30″	0,8129	0,5825	1,3954	1,3955	$<$
23′00″					$<$

Последний результат является недостаточно определённым. Разница между $\sin x + \cos x$ и $\operatorname{tg} x$ составляет одну единицу последнего разряда. Но в графе $\sin x + \cos x$ последняя цифра не вполне достоверна, потому что числа этой графы получены сложением значений $\sin x$ и $\cos x$, каждое из которых может содержать ошибку до $\frac{1}{2}$ единицы последнего разряда. Следовательно, если мы хотим продолжать эти вычисления дальше, следует перейти на более точные таблицы:

x	$\sin x$	$\cos x$	$\sin x + \cos x$	$\operatorname{tg} x$	
54°22′00″					$>$
30″	0,81285	0,58248	1,39533	1,39550	$<$
23′00″					$<$

Теперь можно с уверенностью сказать, что искомый корень заключен между 54°22′ и 54°22′30″.

Так можно продолжать сколько угодно, только время от времени придётся переходить на всё более и более точные таблицы.

Этот нехитрый метод имеет громадное значение для всего математического мировоззрения учеников. Он показывает им, что уравнения вовсе не делятся на разрешимые и неразрешимые. В курсе алгебры уделяется очень почётное место возвратным уравнениям или системам квадратных уравнений, которые точно решаются каким-нибудь остроумным комбинированием. Этот тенденциозный подбор задач, доставляющий некоторое эстетическое удовлетворение учителю, внедряет в то же время ложное представление в сознание учеников, будто именно в этих искусственных приёмах заключается основная научная дорога. Метод проб разрушает это ложное представление. Он показывает, что любое уравнение можно решить — и как просто!

Системы уравнений. Не должны, разумеется, быть забыты и системы уравнений. При этом преимущество следует отдавать таким системам, где приём решения носит специфически тригонометрический характер. Например, мы не видим большой ценности в задаче:

$$\left.\begin{aligned} \sin x + 2\sin y &= 2, \\ 3\sin x - 4\sin y &= 1, \end{aligned}\right\}$$

потому что здесь основное заключается в алгебраическом решении системы двух уравнений, в которых неизвестные обозначены $\sin x$ и $\sin y$. Напротив, весьма интересна такая система:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{\pi}{3}, \\ \sin x + \sin y &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Преобразуем второе уравнение:

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1,$$

$$2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{x-y}{2}=1,$$

$$\cos\frac{x-y}{2}=1,$$

$$\frac{x-y}{2}=2k\pi,$$

$$x-y=4k\pi.$$

Теперь имеем два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=\frac{\pi}{3},\\ x-y&=4k\pi, \end{aligned}\right\}$$

откуда:

$$\left.\begin{aligned} x&=\pi\left(\frac{1}{6}+2k\right)\\ y&=\pi\left(\frac{1}{6}-2k\right) \end{aligned}\right\}$$

Вопросы равносильности. Вопросам равносильности уравнений в тригонометрии следует уделять серьёзное внимание, так как тригонометрические преобразования весьма разнообразными способами могут нарушать равносильность. Поэтому необходимо внедрять обычай — подвергать решения проверке подстановкой в данное уравнение. Очень важной является мысль, что подстановка обязательно должна производиться в данное уравнение, ещё не подвергнутое никаким преобразованиям.

Подставляя найденное решение в данное уравнение, мы можем получить три результата:

1) испытуемое решение годится;
2) испытуемое решение не годится;
3) неопределённый результат.

Поясним примерами последнюю возможность.

Пример 1.

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=1. \qquad (*)$$

Решаем так:

$$1-\cos x=\sin x,$$
$$\sin x+\cos x=1.$$

Это уравнение было решено (стр. 101 и далее):

$$x_1=\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi, \qquad (**)$$
$$x_2=2m\pi.$$

Эти формулы доставляют нам два ответа в пределах первого оборота:

$$x_1=\frac{\pi}{2},$$

$$x_2=0.$$

Первый из них благополучно выдерживает проверку, а второй — нет. При подстановке в уравнение (*) $x=0$, в левой части получается неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Следует ли считать $x=0$ решением данного уравнения?

Мы вернёмся к этому вопросу после рассмотрения ещё одного примера.

Пример 2.

$$\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x}{\sin x-\cos x}=2\sqrt{2}, \tag{†}$$

$$\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x=2\sqrt{2}\,(\sin x-\cos x). \tag{††}$$

Умножаем обе части уравнения на $\sin x\cdot\cos x$:

$$\sin^2 x-\cos^2 x=2\sqrt{2}\sin x\,\cos x\,(\sin x-\cos x),$$

$$(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x-2\sqrt{2}\sin x\cdot\cos x)=0,$$

$$(\sin x-\cos x)[\sqrt{2}\sin(45^\circ+x)-\sqrt{2}\sin 2x]=0,$$

$$\left(\sin x-\cos x\right)\cdot\sin\left(22^\circ30'-\frac{x}{2}\right)\cos\left(22^\circ30'+\frac{3x}{2}\right)=0,$$

$$\sin x-\cos x=0, \qquad x_1=45^\circ+180^\circ n$$

$$\sin\left(22^\circ30'-\frac{x}{2}\right)=0, \qquad x_2=45^\circ+360^\circ n$$

$$\cos\left(22^\circ30'+\frac{3x}{2}\right)=0, \qquad x_3=45^\circ+120^\circ n$$

Вторую серию ответов опустим, так как она поглощается первой. Первая и третья серии дают в пределах одного оборота четыре угла:

$$x_1=45^\circ,\ x_2=225^\circ,\ x_3=165^\circ,\ x_4=285^\circ.$$

Третий и четвёртый ответы выдерживают проверку. Заметим, что

$$\sin 165^\circ=\cos 285^\circ=\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos 165^\circ=\sin 285^\circ=-\cos 15^\circ=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{tg} 165^\circ=\operatorname{ctg} 285^\circ=-\operatorname{tg} 15^\circ=-2+\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 165^\circ=\operatorname{tg} 285^\circ=-\operatorname{ctg} 15^\circ=-2-\sqrt{3}.$$

При $x=45^\circ$ и $x=225^\circ$ левая часть уравнения (†) принимает вид $\frac{0}{0}$.

Возможны две точки зрения на подобные решения.

Первая. Деление на нуль незаконно, и поэтому значения x, обращающие знаменатель в нуль, недопустимы. При этой точке зрения решение $x=0$ для уравнения (*) не годится, хотя оно годится для уравнения (**). Уравнения (*) и (**) неравносильны. Точно также решения $x=45^\circ$ и $x=225^\circ$ не годятся для уравнения (†), хотя они годятся для уравнения (††).

Вторая. В случае получения неопределённости следует ее «раскрыть». Это значит, что выражению $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ при $x=0$ условно приписывается «истинное значение», равное

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

Если при таком раскрытии неопределённости уравнение удовлетворится, то рассматриваемое значение x можно считать «несобственным корнем» уравнения.

При первой точке зрения между рассмотренными двумя примерами нет разницы: $x=0$ не годится для уравнения (*) так же, как $x=45^\circ$ не годится для уравнения (†). При второй точке зрения эти случаи различны. В самом деле:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0.$$

Таким образом $x=0$ не является даже несобственным корнем уравнения (*). Что касается второго примера, то

$$\lim_{x\to 45^\circ}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to 45^\circ}\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x\,(\sin x-\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 45^\circ}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cdot\cos x}=2\sqrt{2}.$$

Значит, $x=45^\circ$ является несобственным корнем уравнения (†).

Разумеется, вторая точка зрения предпочтительнее. При ней картина оказывается богаче интересными подробностями, при первой же точке зрения эти подробности смазываются. Весьма интересно, что уравнение (†) *почти* удовлетворяется при значениях x, *близких* к 45°, а для уравнения (††) значения x, близкие к нулю, являются совершенно неподходящими. Видно также, сколь грубым приёмом является избавление от знаменателя [т. е. переход от (*) к (**) и от (†) к (††)]. При этом стирается разница между ролью значения $x=0$ для уравнения (*) и ролью значения $x=45^\circ$ для уравнения (†).

Теперь ясно, что первая точка зрения допустима лишь как вынужденная уступка. Если ученики незнакомы с раскрытием неопределённостей (как это обычно и бывает), то учитель должен стоять на первой точке зрения. Однако в тригонометрии есть много возможностей познакомить учеников с раскрытием неопределённостей. Это — повод для весьма интересных задач на применение многих тригонометрических формул, особенно на преобразование сумм в произведения. Если учитель найдёт время и возможность для раскрытия неопределённостей, то он естественно, сможет перейти на вторую точку зрения.

ГЛАВА VI.

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.

§ 1. Понятие об обратных тригонометрических функциях.

Двоякий подход к обратным тригонометрическим функциям.

Обычное изложение теории обратных тригонометрических функций в курсе тригонометрии имеет тот недостаток, что в нём отодвигается на второй план вопрос об однозначности или многозначности этих функций, который является важнейшим для математического анализа. Ученики часто рассуждают об арксинусе, не думая о том, в каком смысле он понимается в данной задаче. Вследствие этого часто доказываются различные тождества, относящиеся к обратным тригонометрическим функциям, без исследования условий, при которых эти тождества справедливы.

Желательность общего понятия об обратных функциях.

Учитель может сначала дать общее понятие об обратных функциях, а может и не делать этого, а сразу заняться вопросом об обратных тригонометрических функциях. Мы считаем первый путь предпочтительнее по следующим причинам.

1. Самая постановка вопроса выигрывает в ясности. Если вводится общее понятие об обратных функциях, то его можно иллюстрировать сколь угодно большим количеством примеров. Обратные тригонометрические функции при этом рассматриваются как частный случай.

2. Идея об обратной функции важна для общего математического развития. В ней есть многое, что даст ученику пищу для размышлений. Она встречается не только в тригонометрии, но и в алгебре (например, при изучении показательной и логарифмической функций).

3. В идее обратной функции заключается главная образовательная ценность этого раздела. Рассматривая обратные тригонометрические функции вне этой идеи, мы делаем этот раздел весьма мало полезным. Обратные тригонометрические функции будут применяться только в курсе высшей математики. До этого они не будут иметь никаких применений, в том числе никаких крепких связей с другими разделами тригонометрии.

4. Введение общего понятия об обратной функции не усложнит, а упростит этот раздел, так как при рассмотрении изолированно обратных тригонометрических функций их введение становится неясным.

Ошибочно думать, что мы сделаем какой-нибудь организм более жизнеспособным, ампутируя у него для упрощения части, без которых он, по нашему мнению, может прожить.

Определение обратной функции. Если мы имеем функцию

$$y=f(x), \tag{1}$$

обратная функция может быть найдена следующими шагами:

1) Из уравнения (1) выразим x через y:

$$x=\varphi(y). \tag{2}$$

Полученная функциональная зависимость является обратной по отношению к исходной. При этом не имеет никакого значения то обстоятельство, что у нас аргументом является y, а функцией — x. Обратными называются самые функциональные зависимости f и φ, независимо от того, к каким аргументам они применяются. Для понимания дальнейшего весьма важно уяснить это замечание. Поясним его примером.

Пусть

$$y=3x+5.$$

В таком случае

$$x=\frac{y-5}{3}.$$

В прямой функции над аргументом производятся два действия: умножение на 3 и прибавление 5. В обратной функции над аргументом производятся два действия: вычитание 5 и деление на 3. Всякая функция, содержащая эти два действия, является обратной по отношению к исходной функции. Так например, функции:

$$w=\frac{s-5}{3},$$

$$k=\frac{p-5}{3}$$

и даже

$$y=\frac{x-5}{3}$$

называются обратными по отношению к функции (1).

В дальнейшем для определённости условимся аргумент всегда обозначать через x, а функцию через y. В таком случае для получения обратной функции необходимо проделать два шага: первый уже был указан, а второй заключается в замене в полученном уравнении x через y, а y через x. Таким образом, функции

$$y=f(x)$$

мы будем считать обратной функцию

$$y=\varphi(x). \tag{3}$$

Затруднения, возникающие в связи с тем, что выражение x через y может оказаться невозможным или неоднозначным, будут рассмотрены ниже.

График обратной функции

Два свойства обратных функций оказываются весьма важными для дальнейшего.

Первое свойство является ответом на вопрос: как, зная график прямой функции, получить график обратной функции?

Пусть уравнение (1) изображается некоторой линией. Для нахождения обратной функции мы прежде всего выражаем из уравнения (1) x через y и приходим к уравнению (2). Уравнения (1) и (2) изображаются одной и той же линией, потому что выражают одну и ту же зависимость между x и y. Разница лишь в форме записи: в одном случае y выражен через x, а в другом — x через y. Второй шаг заключается в перемене ролями букв x и y. При этом кривая изменится, так как мы меняем ролями оси координат. Новый график можно получить одним из двух способов. Первый способ: поменяем местами буквы, обозначающие координатные оси. После этого та же самая кривая будет являться графиком обратной функции. Неудобство этого способа заключается в том, что чертёж занимает непривычное положение: ось Y является горизонтальной и идёт вправо, а ось X — вертикальной и идёт вверх. Для того чтобы привести этот чертёж в обычное положение, его следует перевернуть наизнанку вокруг биссектрисы первого координатного угла. После такого переворачивания оси координат займут привычное для нас положение.

Можно сразу начинать с этого переворачивания. Итак, мы приходим к правилу: если имеем график некоторой функции, то, не трогая осей координат, перевернём этот график относительно биссектрисы первого координатного угла или, другими словами, заменим его линией, симметричной с исходной относительно биссектрисы первого координатного угла. Эта симметричная линия и будет являться графиком обратной функции.

Свойство наложения обратных функций.

Второе свойство, называемое **свойством наложения (суперпозиции)** обратных функций заключается в следующем. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ суть две взаимно обратные функции, то $f[\varphi(x)]=x$.

Словесная формулировка: если над некоторой величиной проделать в последовательном порядке все действия, входящие в некоторую функцию, а затем над полученным результатом проделать в последовательном порядке действия, входящие в обратную функцию, то в результате мы вернёмся к исходной величине.

Вопрос об однозначности обратной функции.

Само собой разумеется, что, формулируя второе свойство, мы существенно предполагаем, что обратная функция является однозначной. Для первого свойства это безразлично. Поясним примером последнее замечание.

Пусть $y=x^2$; обратной функцией является $y=\pm\sqrt{x}$.

Если некоторое число возвести в квадрат, а из полученного результата извлечь квадратный корень, то мы можем и не вернуться к исходному числу, поскольку квадратный корень имеет два различные знака. Свойство второе в подобных случаях нельзя спасти, даже если мы условно будем рассматривать только одну ветвь обратной функции. В самом деле, пусть $y=x^2$. Условимся считать обратной функцией $y=+\sqrt{x}$. Эта функция — однозначная. Положим, $x=-3$. Возводя это число в квадрат, получим 9. Подвергая число 9 действию обратной функции, получим $+3$, т. е. не вернёмся к исходному числу. Последнее обстоятельство является весьма важным в теории обратных тригонометрических функций.

Легко понять, что если прямая функция в том интервале, в каком мы её изучаем, является монотонной, то обратная функция будет однозначной, и обратно. Синус не является монотонной функцией: каждое допустимое значение он принимает бесконечное множество раз. Отсюда следует, что обратная функция будет многозначной, и при том каждому значению аргумента будет соответствовать бесконечное множество значений функций.

А. Я. Хинчин полагает, что вообще не следует рассматривать многозначных функций [1]). Функция должна определяться при помощи соответствия: y есть функция от x, если каждому значению x, принадлежащему некоторому множеству чисел, соответствует определённое значение y [2]). Всякая функция при таком определении однозначна. Вместо того, что́ мы называем многозначной функцией, следует рассматривать несколько однозначных функций. Так, например, для функции $y=x^2$ можно рассматривать две обратные функции:

$$y=+\sqrt{x} \text{ и } y=-\sqrt{x}.$$

Точка зрения А. Я. Хинчина для многих целей является наиболее удобной. Однако мы не можем согласиться с ним в том, что она всегда наиболее удобная и должна употребляться как универсальная во всех без исключения случаях. Например, в теории аналитических функций часто оказывается неудобным рассматривать отдельные «ветви» многозначной функции, в отрыве одна от другой. А. Я. Хинчин, предвидя это возражение, указывает, что эти случаи лежат очень далеко за пределами элементарной математики. Но вот пример аналогичного положения, возникающего в самой элементарной математике, — понятие обратной функции. Точка зрения А. Я. Хинчина неудобна при изучении обратных функций. Если мы рассматриваем функцию $y=\sin x$ для всех x $(-\infty<x<\infty)$, то условие, что обратная функция должна заключаться между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, является дополнительным,

---

1) А. Я. Хинчин, Основные понятия математики и математические определения в средней школе, М—Л, 1940.

2) Мы приписываем эту точку зрения А. Я. Хинчину как *методическую* точку зрения. В современной науке это определение функции является единственным принятым определением, а не чьей-либо индивидуальной точкой зрения. Никакой научной полемики по этому вопросу быть не может. Можно лишь спорить о применимости этого определения в школе при первоначальном ознакомлении с функциями.

не вытекающим из понятия обратной функции. Очень жаль будет отказаться от утверждения, что прямая и обратная функции изображаются одной и той же линией, но по-разному расположенной. Лучше потом осложнить это яркое и полезное положение дополнительными соглашениями о «главных значениях» обратных функций, чем совсем скрыть его от учеников.

Заметим также, что мы используем другое понятие о функции, чем то, которого рекомендует держаться А. Я. Хинчин. Мы считаем, что функция определяется действиями, которые производятся над аргументом для получения функции. Мы знаем, что эта точка зрения ненаучна, но она удобна в качестве пропедевтической на той стадии обучения, на которой функции задаются формулами, и даже для функций, определяемых иначе (например, логарифм или синус), немедленно вводится обозначение, которое впредь рассматривается как особое действие.

Точка зрения, защищаемая А. Я. Хинчиным, последовательно проведена С. И. Новосёловым в книге «Обратные тригонометрические функции» (изд. 2-е, переработанное, М. — Л., 1947). Эта книга представляет чёткое и ясное изложение теории обратных тригонометрических функций, очищенное от всех небрежностей, обычно встречающихся в учебниках. Однако мы против того, чтобы первое знакомство с обратными тригонометрическими функциями происходило при посредстве этой книги. Автор полностью отказывается от понятия многозначной функции, вводит понятие о монотонной функции и с самого начала устанавливает (стр. 9):

«Переход к обратной функции возможен лишь в том случае, когда всякое данное значение функция принимает при одном единственном значении аргумента».

Мы убеждены, что понятие обратной функции потеряет свою осязательность и способность пустить корни в сознании ученика, если его сразу сопроводить такими усложнениями. В качестве пропедевтики лучше держаться простой идеи об обращении функции $y = \sin x$ при $-\infty < x < \infty$ и о замене кривой $y = \sin x$ на кривую, симметричную ей относительно биссектрисы $y = x$. Эта идея потом может быть дополнена соглашением относительно выбора главного значения. Всегда лучше дать простую и выпуклую идею, а потом заниматься дополнительными уточнениями, лишь бы эта идея не противоречила (ни формально, ни с точки зрения психологической возможности дальнейшего движения) тому, что́ предполагается изучать дальше. В данном случае это условие соблюдено. Понятие об $\operatorname{Arc}\sin x$ как о многозначной функции нисколько не противоречит тому, что одно из значений этой функции выделяется в качестве главного, и таким образом возникает новая функция: $\operatorname{arc}\sin x$.

Введение обратных тригонометрических функций.

Вернёмся к обратным тригонометрическим функциям. Функция, обратная синусу, называется арксинусом и обозначается:

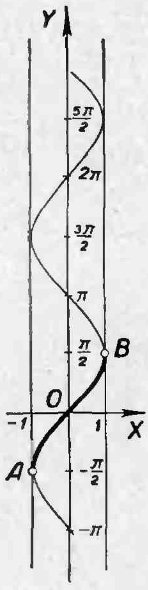
$$y = \operatorname{Arc}\sin x. \tag{4}$$

По поводу этого обозначения необходимо сделать два замечания:

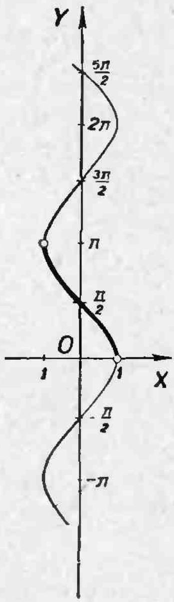
1) Для того чтобы определить функцию, обратную синусу, мы должны были бы из равенства

$$y = \sin x \qquad (5)$$

выразить x через y. Поскольку мы этого сделать не можем, мы вынуждены ввести новое обозначение. Это новое обозначение ни в какой степени нельзя рассматривать как решение вопроса, а только как стенографическую запись. Оно столь же мало решает вопрос о нахождении функции, обратной синусу, как если бы на предложение решить уравнение $x^3 = 8$ мы бы ответили: x есть такое число, куб которого равен 8. Равенство (4) по самому определению совершенно равносильно равенству (5) и не даёт ничего нового. Его словесное выражение: *y есть такой угол (или такая дуга, или такой аргумент), синус которого равен x.* Это всё равно, что сказать: $\sin y = x$.



$y = \mathrm{Arc}\sin x$.
Черт. 23.



$y = \mathrm{Arc}\cos x$.
Черт. 24.

Необходимо ясно понять громадную принципиальную разницу между случаями, когда мы, решая уравнение:

$$y = \sin x,$$

даём ответ в виде:

$$x = \mathrm{Arc}\sin y$$

или, когда мы решая уравнение:

$$y = 3x + 5,$$

даём ответ:

$$x = \frac{y-5}{3}.$$

Во втором случае мы действительно указываем действия, которые следует произвести над y, чтобы получить x. В первом же случае мы просто обозначаем эти действия, ничего не зная об их природе.

2) Под $\mathrm{Arc}\sin x$ мы понимаем не какое-нибудь одно значение, а всё бесконечное множество аргументов, синус которых равен x. В этом случае знак $\mathrm{Arc}\sin x$ пишется с большой буквы. В противоположность этому мы пишем $\arcsin x$ с малой буквы, если понимаем под этим знаком один из аргументов, имеющий данный синус.

Графики обратных тригонометрических функций.

Чтобы выяснить, как из множества значений $\operatorname{Arc}\sin x$ (или других обратных тригонометрических функций) выделяется одно, полезно рассмотреть сначала графики этих функций. После того, что было объяснено о графиках обратных функций, здесь никаких дополнительных разъяснений не требуется. Переворачивая графики всех тригонометрических функций вокруг биссектрисы первого координатного угла, получим чертежи 23—28.

Главные значения обратных тригонометрических функций.

Графики обратных тригонометрических функций позволяют весьма наглядно изложить вопрос о главных значениях этих функций. Вопрос заключается в том, чтобы определить арксинус как однозначную непрерывную функцию для всех значений x, заключённых между -1 и $+1$. График однозначной функции характеризуется тем, что всякий перпендикуляр к оси X пересекает этот график один раз[1]. Поэтому, желая определить арксинус как однозначную функцию, мы должны выделить из графика $y = \operatorname{Arc}\sin x$ максимально «широкую» дугу (т. е. такую дугу, проекция которой на ось X покрывает всю область существования функции), пересекающую всякий перпендикуляр к оси X один раз. Такой дугой является, например, дуга AB, изображённая жирной линией на чертеже 23. Эта дуга определяет однозначную функцию, которая называется г л а в н ы м з н а ч е н и е м арксинуса и обозначается так:

$$y = \arcsin x. \tag{6}$$

Как видно из чертежа 23, $\arcsin x$ характеризуется неравенствами:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Итак, главным значением арксинуса x называется *число (или угол), синус которого равен x и которое заключено между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ (или между $-90°$ и $90°$).* Например:

$$\arcsin \frac{1}{2} = 30°.$$

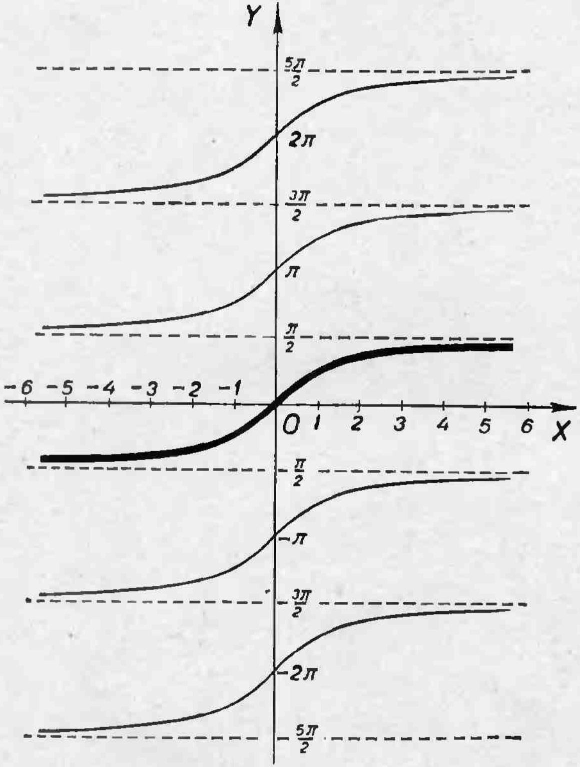
$$\arcsin(-1) = -90° \text{ (но не } 270°).$$

Очевидно,

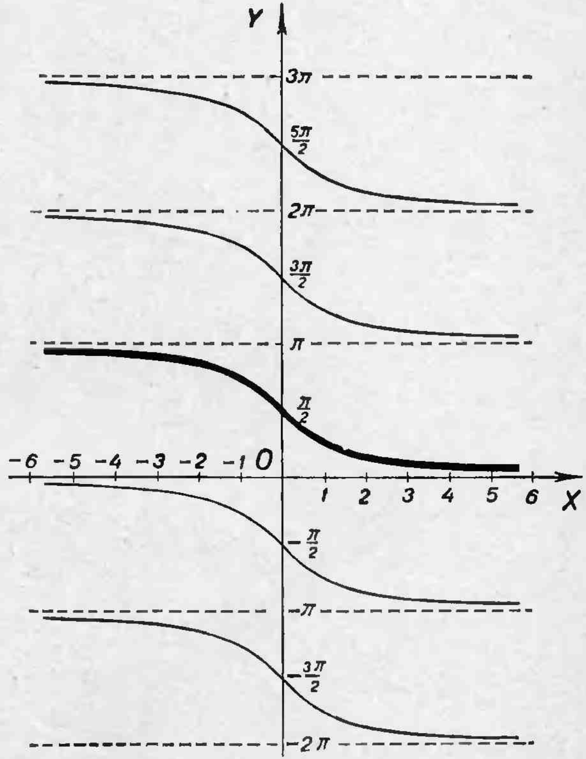
$$\operatorname{Arc}\sin x = \pi n + (-1)^n \arcsin x. \tag{8}$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для других обратных тригонометрических функций. На каждом из чертежей 23—28 изображена жирной линией дуга, соответствующая главному значению рас-

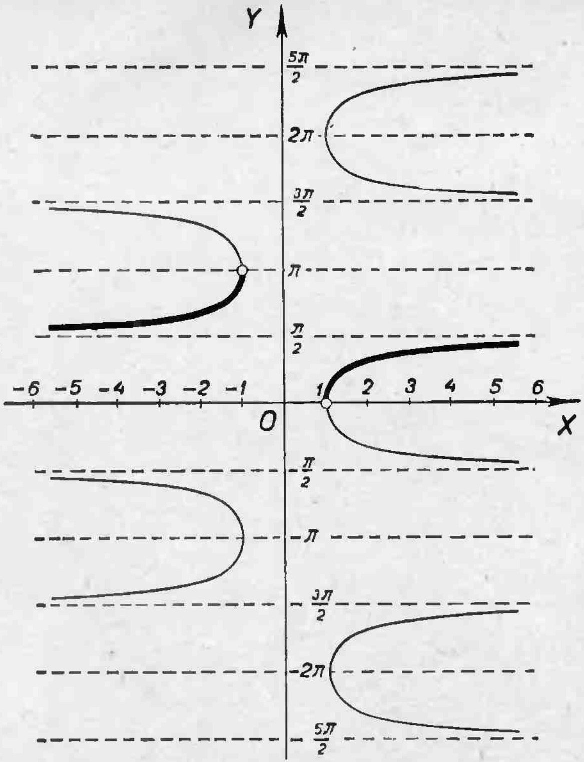
[1] Разумеется, если он восставлен из точки, принадлежащей области существования функции. В противном случае он вовсе не пересечёт кривую.



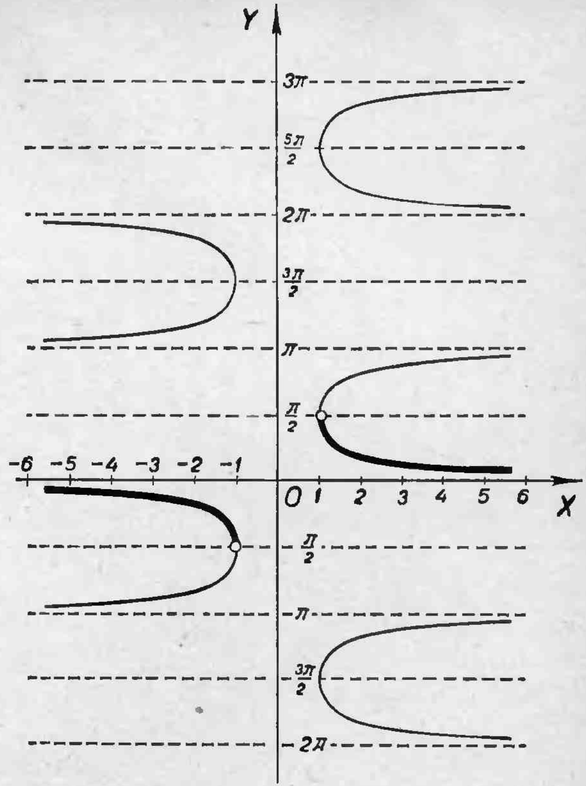
$y = \mathrm{Arc\,tg}\,x$.
Черт. 25.



$y = \mathrm{Arc\,ctg}\,x$.
Черт. 26.



$y = \operatorname{Arc} \sec x.$
Черт. 27.



$y = \operatorname{Arc} \csc x.$
Черт. 28.

сматриваемой функции. Аналитически эти главные значения характеризуются следующими неравенствами:

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqslant \operatorname{arc\,cos} x \leqslant \pi, \\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \operatorname{arc\,ctg} x < \pi, \\ 0 \leqslant \operatorname{arc\,sec} x \leqslant \pi, \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arc\,csc} x \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Выбор главных значений можно объяснить и не прибегая к графикам, хотя это будет менее наглядно. Начнём с арккосинуса x. Мы хотим определить

$$y = \operatorname{arc\,cos} x$$

как однозначную функцию. Для этого надо ограничить выбор y некоторыми четвертями. При этом, во-первых, нельзя брать две четверти, в которых косинус принимает одинаковые значения. Например, если условиться выбирать y во второй и третьей четвертях, т. е. от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, то, например, $\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{1}{2}\right)$ будет иметь два значения: $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$. Во-вторых, надо взять такие четверти, чтобы в них косинус принимал *все* возможные значения. Например, если условиться выбирать y только в первой четверти, т. е. от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{1}{2}\right)$ вообще не будет иметь смысла. Условие:

$$0 \leqslant \operatorname{arc\,cos} x \leqslant \pi$$

является пригодным, потому что в первой и второй четвертях косинус принимает все возможные значения, и притом каждое по одному разу.

Для $\operatorname{arc\,sin} x$ такое условие непригодно, потому что в первой и второй четвертях синус каждое положительное значение принимает два раза, а отрицательное — ни одного. Таким образом, условие $0 \leqslant \operatorname{arc\,sin} x \leqslant \pi$ привело бы к тому, что при $x > 0$ $\operatorname{arc\,sin} x$ был бы двузначен, а при $x < 0$ не имел бы смысла. Поэтому главное значение арксинуса ищут в минус первой (это — не то же самое, что четвёртая) и первой четвертях.

§ 2. Формальные свойства обратных тригонометрических функций.

Обычные ошибки в тождествах с участием тригонометрических функций.

Вряд ли существует какой-либо раздел математики, который во многих учебниках излагался бы столь неряшливо и со столь многочисленными фактическими ошибками, как рассматриваемый здесь вопрос. Так, например, в учебнике тригонометрии Рыбкина значительная часть тождеств из этого раздела неверна. Ошибки, о которых идёт речь, разумеется, нашли широкое распространение в школьной практике. Следует заметить, что существует литература, в которой эти ошибки избегнуты. Так, например, в сочинениях С. И. Новосёлова, цитированных на стр. 52 и 115, вся эта часть изложена корректно и безошибочно. В сочинениях А. М. Гешелина[1] вопрос об этих ошибках рассмотрен с методической стороны и предложен некоторый метод для получения верных тождеств.

Своеобразное положение заключается в том, что все ошибки в этом разделе имеют одну общую причину. Достаточно понять одно явление, чтобы никогда не делать ошибок в этой области. Эта причина ошибок заключается в небрежном отношении к символам $\arcsin x$, $\arccos x$, ... выражающим *главные значения* обратных круговых функций. Ввиду важности вопроса рассмотрим два типичных примера ошибочных рассуждений, укажем, в чём заключается ошибка и как следует её избегать в подобных случаях.

Пример 1. Выразить $\arcsin x$ через арккосинус какого-либо выражения.

Положим:

$$y = \arcsin x.$$

Напомним, что $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Имеем:

$$\sin y = x,$$

откуда

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Двойной знак перед радикалом не берётся, потому что $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Последнее равенство переписываем в виде:

$$y = \arccos \sqrt{1 - x^2}.$$

Окончательно:

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2}.$$

Этот вывод ошибочен. Возьмём, например, $x = -\frac{1}{2}$ (или вообще любое отрицательное значение). В таком случае левая часть последнего равенства примет значение

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6},$$

а правая часть

$$\arccos \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Вообще правая часть никогда не может иметь отрицательного значения, так как $\arccos x$ всегда заключён в пределах от 0 до π.

---

[1] А. М. Гешелин, Избранные вопросы тригонометрии, Л. 1937. Он же. Элементы теории обратных круговых функций, Л. 1938.

Где же ошибка? Вот она: из равенства

$$\cos y = \sqrt{1-x^2}$$

нельзя заключить, что

$$y = \arccos \sqrt{1-x^2},$$

а можно лишь заключить, что y есть *одно из значений* $\operatorname{Arc}\cos x$, т. е.

$$y = 2n\pi \pm \arccos x,$$

где n есть целое число, вполне определённое (при данном x). Мы, следовательно, избежим ошибки, если напишем:

$$\arcsin x = 2n\pi \pm \arccos x. \qquad (*)$$

Однако в этом равенстве надлежит ещё определить число n. В равенстве $(*)$ x может пробегать значения от -1 до 1, причём изменение значения n может произойти лишь в тот момент, когда либо $\arcsin x$, либо $\arccos x$ переходят из одной четверти в другую, т. е. когда x переходит через 0.

Пусть x изменяется от -1 до 0.

При этом $\sqrt{1-x^2}$ изменяется от 0 до 1.

При этом $\arcsin x$ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до 0.

При этом $\arccos \sqrt{1-x^2}$ изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0.

Итак, на границах интервала имеем:

x	$\arcsin x$	$\arccos \sqrt{1-x^2}$
-1	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
0	0	0

Можно ещё вставить какие-либо промежуточные значения (хотя необходимости в этом нет):

x	$\arcsin x$	$\arccos \sqrt{1-x^2}$
-1	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
0	0	0

Формула $(*)$ говорит, что либо разность $\arcsin x - \arccos \sqrt{1-x^2}$, либо сумма $\arcsin x + \arccos \sqrt{1-x^2}$ должна равняться $2n\pi$. Составляя суммы и разности чисел в последней таблице, найдём:

x	$\arcsin x$	$\arccos\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x -$ $- \text{ars}\cos\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x +$ $+ \arccos\sqrt{1-x^2}$
-1	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	0
0	0	0	0	0

Итак, разность не является числом вида $2n\pi$, а сумма является, причём $n=0$. Таким образом:

$$\text{при } -1 \leqslant x \leqslant 0 \quad \arcsin x = -\arccos\sqrt{1-x^2}.$$

Аналогично, при $0 \leqslant x \leqslant 1$:

x	$\arcsin x$	$\arccos\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x -$ $-\arccos\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x +$ $+\arccos\sqrt{1-x}$
0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{3}$
0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	π

т. е. $\arcsin x = \arccos x$. Окончательно:

$$\left.\begin{aligned} \arcsin x &= -\arccos\sqrt{1-x^2}, \quad \text{если} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \arcsin x &= \arccos\sqrt{1-x^2}, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Изложенный метод является общим. Поясним его ещё одним примером.

П р и м е р 2. Выразить $\operatorname{arctg} x$ через arcctg.

Имеем:

$$y = \operatorname{arctg} x,$$

$$\operatorname{tg} y = x,$$

$$\operatorname{ctg} y = \frac{1}{x},$$

откуда заключаем, что y есть одно из значений $\operatorname{Arc\,ctg}\frac{1}{x}$, т. е.

$$y = n\pi + \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$$

или

$$\operatorname{arctg} x = n\pi + \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} \qquad (**)$$

Другими словами, разность $\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}$ кратна π:

$$\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x} = n\pi.$$

Для определения n составляем схемы:

x	$\operatorname{arc\,tg} x$	$\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}$	$\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}$
$-\infty$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\pi$
-1	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\pi$
-0	0	π	$-\pi$

Мы видим, что $n = -1$. Далее:

x	$\operatorname{arc\,tg} x$	$\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}$	$\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}$
$+0$	0	0	0
$+1$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	0
$+\infty$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0

т. е. $n = 0$. Окончательно:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{arc\,ctg} x &= \operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \pi, \quad \text{если} \quad -\infty < x < 0, \\ \operatorname{arc\,ctg} x &= \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}, \qquad \text{если} \quad 0 < x < \infty. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

При $x = 0$ задача теряет смысл.

Само собою разумеется, что записи, где $x = -\infty$ или $x = +\infty$, имеют смысл условного сокращения: при отрицательном x, неограниченно возрастающем по абсолютной величине, $\operatorname{arc\,tg} x$ стремится к $-\frac{\pi}{2}$. Записи $x = -0$ и $x = +0$ обозначают, что x стремится к нулю соответственно с отрицательной или с положительной стороны $\left(\text{значения } \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x} \text{ в этих случаях различны}\right)$.

Объём раздела «Обратные тригонометрические функции».

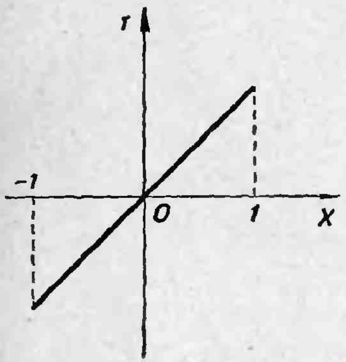
Ограничиваясь этими общими указаниями, отсылаем читателя за фактическим материалом к упомянутой на стр. 115 книге С. И. Новосёлова «Обратные тригонометрические функции». Не рекомендуя её в качестве первой книги для школьника, мы особенно рекомендуем её учителю, так как в ней дано исчерпывающее и корректное изложение вопроса.

Весьма полезным является изучение выражений типа: $\sin(\arcsin x)$ и $\arcsin(\sin x)$. Первое из этих выражений определено только для значений x от -1 до 1, и на этом отрезке оно тождественно равно x:

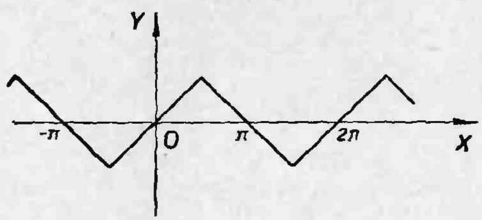
$$\sin(\arcsin x) = x \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ (черт. 29)} \qquad (12)$$

При $|x| > 1$ выражение $\sin(\arcsin x)$ лишено смысла. Второе выражение имеет смысл при любом x, но оно не равно x (см. черт. 30):

$$\arcsin(\sin x) = x + (-1)^n \pi n, \qquad (13)$$



$y = \sin(\arcsin x)$.
Черт. 29.



$y = \arcsin(\sin x)$.
Черт. 30.

где n — вполне определённое целое число, удовлетворяющее неравенствам:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x + (-1)^n \pi n \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Интересной задачей является исследование выражения:

$$\cos(n \cdot \arccos x).$$

Придавая n значения: 1, 2, 3, 4, ... найдём:

$$\begin{aligned} \cos(\arccos x) &= x, \\ \cos(2 \arccos x) &= 2x^2 - 1, \\ \cos(3 \arccos) x &= 4x^3 - 3x, \\ \cos(4 \arccos x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Более трудной задачей, впрочем доступной для сильных учеников, является доказательство того, что $\cos(n \cdot \operatorname{arc}\cos x)$ при любом x является многочленом от x[1]). Эти многочлены, называемые **полиномами Чебышёва**, играют важную роль во многих областях чистой и прикладной математики.

Впрочем, все перечисленные вопросы можно без большого ущерба и опустить. Раздел «Обратные тригонометрические функции» занимает особое положение в курсе тригонометрии: он базируется на всех других разделах, но эти другие разделы могут обходиться без него. Связи здесь односторонние, и даже при полном удалении этого раздела курс тригонометрии просто укоротится, но не разрушится. Мы отнюдь не рекомендуем удалять этот раздел, так как он играет существенную роль для курса высшей математики и содержит много развивающих идей. Мы лишь рекомендуем не раздувать его подробностями, не помогающими уяснению основной идеи. В необходимый минимум входят: понятие об обратных тригонометрических функциях и их главных значениях, графики, выражения этих функций одна через другую [т. е. соотношения типа (10) и (11)], формулы для суммы (например, для $\operatorname{arc}\sin x + \operatorname{arc}\sin y$) и соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{arc}\sin x + \operatorname{arc}\cos x &= \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{arc}\operatorname{tg} x + \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x &= \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{arc}\sec x + \operatorname{arc}\csc x &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Остальное может проходиться или не проходиться, в зависимости от наличия времени, или рассматриваться на кружковых занятиях.

---

1) См. С. И. **Новосёлов**, Обратные тригонометрические функции, стр. 120—124.

ГЛАВА VII.

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Чтó следует проходить о решении треугольников.

В этой главе речь будет идти главным образом о том, чего не следует проходить в разделе о решении треугольников. Подавляющему числу учеников никогда не придётся сталкиваться с численным решением косоугольных треугольников. Однако тот факт, что можно вычислить все элементы треугольника, если известны три его независимые элемента, чрезвычайно важен. На этом факте должно быть сосредоточено главное внимание, а вычислительная техника, ненормально разросшаяся, должна быть сокращена до разумных размеров.

Если рассматривать основные элементы треугольника, т. е. стороны и углы, то независимых соотношений между ними должно быть три. Таковыми являются:

$$A + B + C = 180^\circ, \tag{1}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \tag{2}$$

Соотношения (2), называемые «теоремой синусов», проще всего выводятся из рассмотрения круга, описанного около треугольника. Ужé ранее должно быть известно, что «хорда равна диаметру, умноженному на синус половины стягиваемой ею дуги». Это сразу даёт нам:

$$\left.\begin{aligned} a &= 2R \cdot \sin A \\ b &= 2R \cdot \sin B \\ c &= 2R \cdot \sin C \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Из соотношений (3), во-первых, вытекает теорема синусов и, во-вторых, выясняется важное дополнительное обстоятельство: каждое из отношений (2) есть диаметр описанного круга.

Итак, формулы (1) и (2) представляют полную систему независимых уравнений, связывающих основные элементы треугольника. Это значит: любое соотношение $f(a, b, c, A, B, C) = 0$, справедливое для всех треугольников, обязательно окажется следствием уравнений (1) и (2).

Если даны три независимые основные элемента треугольника, то треугольник может быть решён по формулам (1) и (2). Однако для практического удобства надо добавить к этим формулам теорему косинусов:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cdot\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Разумеется, теорема косинусов должна быть следствием формул (1) и (2). Как она выводится из этих формул — показано, например, в учебнике Н. А. Рыбкина (§ 105).

Очевидно, могут быть пять основных случаев решения треугольников, а именно (перечисляем данные элементы):

1) A, B, c;
2) A, B, a;
3) a, b, C;
4) a, b, A;
5) a, b, c.

При этом различие между случаями 1) и 2) тривиально, так как по двум углам немедленно находится третий, и тогда безразлично, какая именно сторона дана. Таким образом, существенно различных случаев может быть четыре.

Пример (учебник Рыбкина, § 112). Даны два угла и сторона:

$$a = 1235, \quad B = 37°32', \quad C = 115°18'.$$

У Рыбкина этот пример решён по четырёхзначным логарифмически-тригонометрическим таблицам, где углы даются через каждую минуту. Мы будем пользоваться равноценными натуральными таблицами, т. е. четырёхзначными таблицами, где угол даётся через каждую минуту. Имеем:

$$b = \frac{a\cdot\sin B}{\sin A} = \frac{1235\cdot\sin 37°32'}{\sin 27°10'} = \frac{1235\cdot 0{,}6092}{0{,}4566} = \frac{752{,}3620}{0{,}4566} = 1647{,}7.$$

Давая ответ с той же точностью, что и условие:

$$b = 1648.$$

Сторона c находится аналогично.

Разумеется, решение этих задач следует сочетать с развитием культурных вычислительных навыков. Вполне реально предположить, что в любой школе найдутся счёты и что, выполняя деление 752, 3620 на 0,4566, ученик может предварительно составить табличку.

$$\begin{aligned}4566\cdot 1 &= 4\,566\\ » \quad \cdot 2 &= 9\,132\\ » \quad \cdot 3 &= 13\,698\\ » \quad \cdot 4 &= 18\,264\\ » \quad \cdot 5 &= 22\,830\\ » \quad \cdot 6 &= 27\,396\\ » \quad \cdot 7 &= 31\,962\\ » \quad \cdot 8 &= 36\,528\\ » \quad \cdot 9 &= 41\,094\end{aligned}$$

В случае, когда даны три стороны, можно использовать теорему косинусов, которая в настоящее время вследствие распространённого логарифмического фанатизма изгнана из вычислительной практики в школе.

Зачем изучается решение треугольников.

Разумеется, решение треугольников по логарифмическим таблицам тоже может занять некоторое место в средней школе, но место весьма скромное. Основным должно быть решение треугольников по натуральным таблицам. Учитель не должен упускать из виду цель преподавания этого раздела, а именно:

Показать, что по трём элементам (основным), определяющим треугольник, можно вычислить остальные. Эта задача, неразрешимая методами геометрии, разрешима методами тригонометрии.

Упомянутая задача включается в курс средней школы потому, что она имеет громадное значение. Без неё получится пробел в мировоззрении, так как не будет известен следующий фундаментальный научный факт

всё, что вполне определено, может быть вычислено.

Именно поэтому, а не по каким-либо другим причинам задача решения треугольников должна войти в любой общеобразовательный минимум.

Осложнение этой задачи логарифмическими таблицами, громадной точностью (не в виде отдельных иллюстраций, а всегда) и большим числом сложных неосновных случаев представляет извращение. Оно может быть объяснено двумя причинами:

1) Установкой на подготовку опытных вычислителей, владеющих в деталях техникой решения треугольников. Это — причина неуважительная. Решение треугольников изучается ради своего философского значения, а не для геодезических применений.

2) Внутренней инерцией: всякий раздел с течением времени разрастается, потому что преподаватели склонны пополнять его интересными и трудными задачами, забывая взглянуть на окружающие разделы и предметы. Решение треугольников — весьма благодарный

раздел с точки зрения возможных разнообразных задач, т. е. он естественно предрасположен к образованию значительных опухолей.

Мы рекомендуем смело их вырезать.

Чего не следует проходить о решении треугольников.

Говоря более конкретно, мы предлагаем удалить формулы Мольвейле и формулы для тангенса половины угла треугольника. Эти формулы иногда дают некоторую экономию времени при вычислениях, но ещё бо́льшую экономию даёт пользование арифмометром и натуральными таблицами. Если ещё учесть, что большинству людей, применяющих математику, никогда не приходится иметь дело с численным решением косоугольных треугольников, то станет понятным, что эти формулы и вообще логарифмически-тригонометрические вычисления не имеют никакого общеобразовательного значения. Мы считаем недопустимым проходить эти вещи в средней школе (а тем более тратить на них много времени), потому что в элементарной математике есть несравненно более важные и идейные вопросы, оставшиеся за бортом школьного курса. Нельзя оправдать то положение, что решение треугольников проходится так подробно в то время, как комплексным числам уделяется ничтожно малое внимание, а способы вычисления тригонометрических функций не проходятся вовсе.

Вопрос о точности вычислений.

Кроме того, и в области вычислений есть очень важные и общеобразовательные вещи, которые не проходятся в школе (например, логарифмическая линейка или элементы теории приближённых вычислений). Ученики тщательно тренируются в вычислениях по логарифмическим и логарифмически-тригонометрическим таблицам и в то же время не имеют понятия о том, как судить о степени точности вычислений. Это обстоятельство делает непригодным для практики все те сведения о решении треугольников, которые входят в школьный курс.

Поясним это примером. Пусть требуется решить треугольник по данным: $a=15{,}37$, $b=21{,}42$, $c=13{,}83$. В учебнике Рыбкина, откуда заимствован этот пример, для угла A дан ответ: $A=45°42'$. При этом автор не обращает внимания на то, что указанные данные не позволяют вычислить угол A с точностью до минуты. Если даже допустить, что данные числа (которые, разумеется, надо считать приближёнными) содержат ошибку не более $\frac{1}{2}\cdot 0{,}01$, то запись $a=15{,}37$ обозначает следующее:

$$15{,}365 < a < 15{,}375.$$

Читатель может проверить, проделывая вычисления, как указано у Рыбкина, но с применением семизначных таблиц, что в случае:

$$a=15{,}375,\quad b=21{,}415,\quad c=13{,}835$$

для угла A получается значение $A=45°45'26''$, а в случае:

$$a=15{,}365,\quad b=21{,}425,\quad c=13{,}825$$

получается значение $A=45°39'16''$. Разность этих значений составляет более $6'$, поэтому ответ, приведённый у Рыбкина, дан с фиктивной точностью. Учить учеников всегда пользоваться одними и теми же таблицами и вычислять углы всегда с точностью до минут, независимо от точности условия, это значит — учить именно тому, что́ не годится для практики. Это обстоятельство делает теорию решения треугольников, проходимую в школе, окончательно неприменимой.

Некоторые учителя считают, что решение треугольников (неосновные случаи), требуя искусственных методов и изобретательности, является полезным упражнением для развития комбинационных способностей. Однако комбинационные способности можно развивать и в других (более идейных) разделах математики. Нельзя одобрить прохождение раздела только потому, что он даёт повод для решения трудных задач, наподобие шахматной игры.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ТАБЛИЦА

Аргумент x измеряется в радианах.

Употребление этой таблицы для значений x, заключённых между 0 и 4π, понятно без объяснений. Если x находится вне этих пределов, то следует привести данную функцию к аргументу, заключённому между 0 и π.

Пусть, например, надо найти $\sin 25$. Деля 25 на π, находим, что 25 заключено между 7π и 8π. Вычисляя 7π с точностью до сотых долей [1]), находим: $7\pi = 21,99$; следовательно:

$$\sin 25 = \sin(7\pi + 3,01) = -\sin 3,01 = -0,1312.$$

Этот результат содержит ошибку в третьем знаке. Чтобы вычислить $\sin 25$ точнее, следует взять 7π с точностью до тысячных $7\pi = 21,991$. Тогда получим:

$$\sin 25 = \sin(7\pi + 3,009) = -\sin 3,009.$$

Чтобы найти по таблице $\sin 3,009$, следует прибегнуть к интерполяции

$$\begin{array}{rrr} & d = & -99 \\ & 3,00 & 0,1411 \\ + & 09 & -89,1 \\ \hline & 3,009 & 0,1321,9 \end{array}$$

Получаем: $\sin 25 = 0,1322$. На самом деле $\sin 25 = 0,1324$.

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
0,00	0,0000	1,0000	0,0000	0,10	0998	9950	1003
1	0100	0000	0100	1	1098	9940	1104
2	0200	0,9998	0200	2	1197	9928	1206
3	0300	9996	0300	3	1296	9916	1307
4	0400	9992	0400	4	1395	9902	1409
5	0500	9988	0500	5	1494	9888	1511
6	0600	9982	0601	6	1593	9872	1614
7	0699	9976	0701	7	1692	9856	1717
8	0799	9968	0802	8	1790	9838	1820
9	0899	9960	0902	9	1889	9820	1923

[1]) Читатель не должен забывать, что, желая вычислить $n\pi$ с определённым числом десятичных знаков, следует брать π с бо́льшим числом десятичных знаков, так как при умножении π на n его погрешность тоже умножается на n. Например, если бы мы приняли $\pi = 3,14$, то получили бы $7\pi = 21,98$ вместо $7\pi = 21,99$.

x	sin x	cos x	tg x	x	sin x	cos x	tg x
0,20	1987	9801	2027	0,60	5646	8253	6841
1	2085	9780	2131	1	5729	8196	6989
2	2182	9759	2236	2	5810	8139	7139
3	2280	9737	2341	3	5891	8080	7291
4	2377	9713	2447	4	5972	8021	7445
5	2474	9689	2553	5	6052	7961	7602
6	2571	9664	2660	6	6131	7900	7761
7	2667	9638	2768	7	6210	7838	7923
8	2764	9611	2876	8	6288	7776	8087
9	2860	9582	2984	9	6365	7712	8253
0,30	2955	9553	3093	0,70	6442	7648	8423
1	3051	9523	3203	1	6518	7584	8595
2	3146	9492	3314	2	6594	7518	8771
3	3240	9460	3425	3	6669	7452	8949
4	3335	9428	3537	4	6743	7385	9131
5	3429	9394	3650	5	6816	7317	9316
6	3523	9359	3764	6	6889	7248	9505
7	3616	9323	3879	7	6961	7179	9697
8	3709	9287	3994	8	7033	7109	9893
9	3802	9249	4111	9	7104	7038	1,0092
0,40	0,3894	0,9211	0,4228	0,80	0,7174	0,6967	1,0296
1	3986	9171	4346	1	7243	6895	0505
2	4078	9131	4466	2	7311	6822	0717
3	4169	9090	4586	3	7379	6749	0934
4	4259	9048	4708	4	7446	6675	1156
5	4350	9004	4831	5	7513	6600	1383
6	4439	8961	4954	6	7578	6524	1616
7	4529	8916	5080	7	7643	6448	1853
8	4618	8870	5206	8	7707	6372	2097
9	4706	8823	5334	9	7771	6294	2346
0,50	4794	8776	5463	0,90	7833	6216	2602
1	4882	8727	5594	1	7895	6137	2864
2	4969	8678	5726	2	7956	6058	3133
3	5055	8628	5859	3	8016	5978	3409
4	5141	8577	5994	4	8076	5898	3692
5	5227	8525	6131	5	8134	5817	3984
6	5312	8473	6269	6	8192	5735	4284
7	5396	8419	6410	7	8249	5653	4592
8	5480	8365	6552	8	8305	5570	4910
9	5564	8309	6696	9	8360	5487	5237

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
1,00	0,8415	5403	5574	1,40	9854	1700	7979
1	8468	5319	5922	1	9871	1601	6,1654
2	8521	5234	6281	2	9887	1502	5811
3	8573	5148	6652	3	9901	1403	7,0555
4	8624	5062	7036	4	9915	1304	6018
5	8674	4976	7433	5	9927	1205	8,2381
6	8724	4889	7844	6	9939	1106	9886
7	8772	4801	8270	7	9949	1006	9,8874
8	8820	4713	8712	8	9959	0907	10,9834
9	8866	4625	9171	9	9967	0807	12,3499
1,10	8912	4536	9648	1,50	9975	0707	14,1014
1	8957	4447	2,0143	1	9982	0608	16,4281
2	9001	4357	0660	2	9987	0508	19,6695
3	9044	4267	1198	3	9992	0408	24,4984
4	9086	4176	1759	4	9995	0308	32,4611
5	9128	4085	2345	5	9998	0208	48,0785
6	9168	3993	2958	6	9999	0108	92,6205
7	9208	3902	3600	7	1,0000	0008	1255,7656
8	9246	3809	4273	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞
9	9284	3717	4979	8	1,0000	—0,0092	—108,6492
1,20	9320	0,3624	2,5722	9	0,9998	0192	—52,0670
1	9356	3530	6503	1,60	0,9996	—0,0292	—34,2325
2	9391	3436	7328	1	9992	0392	—25,4947
3	9425	3342	8198	2	9988	0492	—20,3073
4	9458	3248	9119	3	9982	0592	—16,8711
5	9490	3153	3,0096	4	9976	0691	—14,4270
6	9521	3058	1133	5	9969	0791	—12,5993
7	9551	2963	2236	6	9960	0891	—11,1806
8	9580	2867	3413	7	9951	0990	—10,0472
9	9608	2771	4672	8	9940	1090	— 9,3492
1,30	9636	2675	6021	9	9929	1189	— 8,1208
1	9662	2579	7471	1,70	9917	1288	— 7,6966
2	9687	2482	9033	1	9903	1388	1373
3	9711	2385	4,0723	2	9889	1487	— 6,6524
4	9735	2288	2556	3	9874	1585	2281
5	9757	2190	4552	4	9857	1684	— 5,8535
6	9779	2092	6734	5	9840	1782	5204
7	9799	1994	9131	6	9822	1881	2221
8	9819	1896	5,1774	7	9802	1979	— 4,9534
9	9837	1798	4707	8	9782	2077	7101
				9	9761	2175	4887

x	sin x	cos x	tg x	x	sin x	cos x	tg x
1,80	9733	2272	2863	2,20	8085	—0,5885	3738
1	9715	2369	1005	1	8026	5966	3453
2	9691	2466	—3,9294	2	7966	6046	3176
3	9666	2563	7712	3	7905	6125	2906
4	9640	2660	6245	4	7843	6204	2643
5	9613	2756	4881	5	7781	6282	2386
6	9585	2852	3608	6	7718	6359	2136
7	9556	2948	2419	7	7654	6436	1892
8	9526	3043	1304	8	7589	6512	1653
9	9495	3138	0257	9	7523	6588	1420
1,90	9463	3233	—2,9271	2,30	7457	6663	1192
1	9430	3327	8341	1	7390	6737	0969
2	9396	3421	7463	2	7322	6811	0751
3	9362	3515	6632	3	7254	6883	0538
4	9326	3609	5843	4	7185	6956	0329
5	9290	3702	5095	5	7115	7027	0125
6	9252	3795	4383	6	7044	7098	—0,9924
7	9214	3887	3705	7	6973	7168	9728
8	9174	3979	3058	8	6901	7237	9535
9	9134	4070	2441	9	6828	7306	9346
2,00	0,9093	—0,4161	—2,1850	2,40	0,6755	—0,7374	—0,9160
1	9051	4252	1285	1	6681	7441	8978
2	9008	4342	0744	2	6606	7508	8799
3	8964	4432	0224	3	6530	7573	8623
4	8919	4522	—1,9725	4	6454	7638	8450
5	8874	4611	9246	5	6378	7702	8280
6	8827	4699	8784	6	6300	7766	8113
7	8780	4787	8340	7	6222	7828	7948
8	8731	4875	7911	8	6144	7890	7787
9	8682	4962	7498	9	6065	7951	7627
2,10	8632	5048	7098	2,50	5985	8011	7470
1	8581	5135	6713	1	5904	8071	7316
2	8529	5220	6340	2	5823	8130	7163
3	8477	5305	5979	3	5742	8187	7013
4	8423	5390	5629	4	5660	8244	6865
5	8369	5474	5290	5	5577	8301	6719
6	8314	5557	4961	6	5494	8356	6574
7	8258	5640	4642	7	5410	8410	6432
8	8201	5722	4332	8	5325	8464	6292
9	8143	5804	4031	9	5240	8517	6153

x	$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{tg}\, x$
2,60	5155	8569	6016
1	5069	8620	5881
2	4983	8670	5747
3	4896	8720	5615
4	4808	8768	5484
5	4720	8816	5354
6	4632	8863	5226
7	4543	8908	5100
8	4454	8953	4974
9	4364	8998	4850
2,70	4274	9041	4727
1	4183	9083	4606
2	4092	9124	4485
3	4001	9165	4365
4	3909	9204	4247
5	3817	9243	4129
6	3724	9281	4013
7	3631	9318	3897
8	3538	9353	3782
9	3444	9388	3668
2,80	0,3350	—0,9422	—0,3555
1	3255	9455	3443
2	3161	9487	3332
3	3066	9518	3221
4	2970	9549	3111
5	2875	9578	3001
6	2779	9606	2893
7	2683	9633	2785
8	2586	9660	2677
9	2489	9685	2570
2,90	2392	9710	2464
1	2295	9733	2358
2	2198	9755	2253
3	2100	9777	2148
4	2002	9797	2044
5	1904	9817	1940
6	1806	9836	1836
7	1708	9853	1733
8	1609	9870	1630
9	1510	9885	1528

x	$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{tg}\, x$
3,00	1411	9900	1425
1	1312	9914	1324
2	1213	9926	1222
3	1114	9938	1121
4	1014	9948	1019
5	0915	9958	0918
6	0815	9967	0818
7	0715	9974	0717
8	0616	9981	0617
9	0516	9987	0516
3,10	0416	9991	0416
1	0316	9995	0316
2	0216	9998	0216
3	0116	9999	0116
4	0016	—1,0000	0016
π	0	—1	0
3,2	—0,0584	—0,9983	0,0585
3	1577	9877	1597
4	2555	9668	2643
3,5	—0,3508	—0,9365	0,3746
6	4425	8968	4935
7	5298	8481	6247
8	6119	7910	7736
9	6878	7259	9474
4,0	7568	6536	1,1578
1	8183	5748	4235
2	8716	4903	7778
3	9162	4008	2,2858
4	9516	3072	3,0963
5	9775	2108	4,6377
6	9937	1122	8,8602
7	9999	0124	80,7128
$\frac{3\pi}{2}$	—1	0	∞
8	—0,9962	0,0875	—11,3849
9	9825	1865	— 5,2675

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
5,0	9589	2837	—3,3805
1	9258	3780	—2,4494
2	8835	4685	—1,8856
3	8323	5544	5013
4	7728	6347	2175
5	7055	7087	—0,9956
6	6313	7756	8139
7	5507	8347	6597
8	4646	8855	5247
9	3739	9275	4031
6,0	2794	9602	2910
1	1822	9833	1853
2	0831	9965	0834
2π	0	1	0
3	0,0168	0,9999	0,0168
4	1165	9932	1173
5	2151	9766	2203
6	3115	9502	3279
7	4048	9144	4428
8	4941	8694	5683
9	5784	8157	7091
7,0	6570	7539	8714
1	7290	6845	1,0649
2	7937	6084	3046
3	8504	5261	6166
4	8987	4385	2,0493
5	9380	3466	7060
6	9679	2513	3,8523
7	9882	1534	6,4429
8	9985	0540	18,5068
$\frac{5\pi}{2}$	1	0	∞
7,9	0,9989	—0,0460	—21,7151
8,0	9894	1455	—6,7997
1	9699	2435	—3,9824
2	9407	3392	—2,7737
3	9022	4314	—2,0914
4	8546	5193	—1,6457
5	7985	6020	3264
6	7344	6787	0820
7	6630	7486	—0,8856
8	5849	8111	7211
9	5010	8654	5789

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
9,0	4121	9111	4523
1	3191	9477	3367
2	2229	9748	2286
3	1245	9922	1254
4	0248	9997	0248
3π	0	—1	0
5	—0,0752	—0,9972	0,0754
6	1743	9847	1770
7	2718	9624	2824
8	3665	9304	3939
9	4575	8892	5146
10,0	5440	8391	6484
1	6251	7806	8008
2	6999	7143	9799
3	7677	6408	1,1980
4	8278	5610	4757
5	8797	4755	8499
6	9228	3853	2,3947
7	9566	2913	3,2841
8	9809	1943	5,0478
9	9954	0954	10,4312
$\frac{7\pi}{2}$	—1	0	∞
11,0	—1,0000	0,0044	—225,9508
1	—0,9946	1042	—9,5414
2	9792	2030	—4,8234
3	9540	2997	—3,1828
4	9193	3935	—2,3363
5	8755	4833	—1,8114
6	8228	5683	4479
7	7620	6476	1766
8	6935	7204	—0,9627
9	6181	7861	7864
12,0	5366	8439	6359
1	4496	8932	5034
2	3582	9336	3837
3	2632	9647	2729
4	1656	9862	1679
5	0663	9978	0665
4π	0	1	0

ТАБЛИЦА ДЛЯ ПЕРЕВОДА РАДИАННОЙ МЕРЫ В ГРАДУСНУЮ.

Употребление этой таблицы понятно из следующего примера: перевести в градусную меру 3,512 *рад*:

$$\begin{array}{lr}
3 \quad \text{рад} = & 171^\circ\,53'\,14'' \\
0{,}5 & 28^\circ\,38'\,52'' \\
0{,}01 & 34'\,23'' \\
0{,}002 & 6'\,53'' \\
\hline
3{,}512 \quad \text{рад} = & 201^\circ\,13'\,22''
\end{array}$$

В полученном ответе нельзя полагаться на последнюю цифру. Каждое значение, приведённое в таблице, содержит ошибку, не превышающую $\frac{1''}{2}$. Накопление ошибок в примерах, аналогичных только что приведённому, может доходить в самом неблагоприятном случае до 2″.

Если, как это принято в школьной практике, всегда давать ответ, ограничиваясь минутами, а секунды, приведённые в таблице, рассматривать как запасные, которые после сложения отбрасываются, то эта таблица даёт полную гарантию.

Радианная мера	Градусная мера	Радианная мера	Градусная мера
1	57°17′45″	0,01	34′23″
2	114°35′30″	2	1°08′45″
3	171°53′14″	3	1°43′08″
4	229°10′59″	4	2°17′31″
5	286°28′44″	5	2°51′53″
6	343°46′29″	6	3°26′16″
7	401°04′14″	7	4°00′39″
8	458°21′58″	8	4°35′01″
9	515°39′43″	9	5°09′24″
10	572°57′28″		
0,1	5°43′46″	0,001	3′26″
2	11°27′33″	2	6′53″
3	17°11′19″	3	10′19″
4	22°55′06″	4	13′45″
5	28°38′52″	5	17′11″
6	34°22′39″	6	20′38″
7	40°06′25″	7	24′04″
8	45°50′12″	8	27′30″
9	51°33′58″	9	30′56″

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор *А. А. Борисов*
Техн. редактор *Н. Н. Махова*

Подписано к печати 13/III 1950 г. А00346. Печатных листов $8^3/_4$. Учётно-издат. листов 8,46. Цена без переплёта 3 руб. Переплёт 50 коп.

Отпечатано в тип. Н-19 с матриц Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Москва.

Цена ~~3 р. 50 к.~~

0-35