Т. Н. ДЕНИСОВА

ПЛАНЫ УРОКОВ ПО ГЕОМЕТРИИ В 7 КЛАССЕ

ИЗ ОПЫТА РАБОТЫ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА.

Осуществление в нашей стране всеобщего обязательного семилет-
о образования и подготовка условий для полного осуществления
ледующей пятилетке всеобщего среднего образования вызвало бы-
ый рост числа семилетних и средних школ.

В силу этого значительно увеличилось число учителей, не обла-
ющих достаточным педагогическим опытом и поэтому нуждающихся
онкретной методической помощи.

„Планы уроков по геометрии в 7 классе", составленные учитель-
цей 342-й школы г. Москвы Т. Н. Денисовой на основе многолетнего
агогического опыта, будут полезны начинающему учителю матема-
и, как возможный образец проведения занятий. Опираясь на
планы, учитель сможет с большей уверенностью перейти к само-
ятельной творческой работе.

Само собой разумеется, что рекомендуемые в настоящем методи-
ком пособии дозировка материала, содержание уроков, тексты кон-
льных работ являются лишь примерными. Каждый учитель
зависимости от конкретных условий своего класса может делать от-
пления от предлагаемого плана занятий. Помещённые в конце
четверти (уроки 69—75) планы уроков по измерительным работам
местности излагают вопросы, прохождение которых является жела-
ьным, но не обязательным в 7 классе.

Все замечания и пожелания по данному пособию просьба напра-
ть по адресу: Москва, Чистые пруды, 6, Учпедгиз, редакция ма-
атики.

ВВЕДЕНИЕ.

Программа средней школы так определяет цель преподавания геометрии: „Преподавание геометрии имеет целью систематическое изучение свойств фигур на плоскости и в пространстве и применение этих свойств к решению задач вычислительного и конструктивного характера, развитие у учащихся логического мышления, пространственного воображения и умения применять полученные знания к выполнению практических работ: измерения на местности, определение поверхностей и объёмов различных сооружений, простейшие измерения, применяемые в топографии, и т. д.".

И далее, говоря о методах преподавания, программа рекомендует: „Прохождение курса геометрии должно естественным образом согласоваться с возрастными особенностями учащихся, с развитием их геометрических представлений, способностью воображать пространственные фигуры и делать логические умозаключения. В этой связи методы преподавания геометрии в семилетней школе (VI и VII классы) должны в большей степени опираться на интуицию учащихся: следует широко применять наглядность в процессе изучения материала, возможно чаще делать чертежи изучаемых геометрических образов, а также обращаться к моделированию фигур".

Каждый учитель, исходя из цели преподавания геометрии, определяемой программой, при изложении учебного материала должен учитывать следующие моменты: 1) обеспечение должного научного уровня излагаемого материала; 2) обеспечение приобретения учащимися умений и навыков для приложения их к практике; 3) содействие выработке у учащихся диалектико-материалистического мировоззрения.

Основное требование — требование учёта возрастных особенностей учащихся обязывает учителя усилить наглядность преподавания геометрии, дать максимальную конкретность изучаемым геометрическим фактам. „Геометрия вокруг себя" — этот принцип играет роль не только в младших классах, но и в VII классе. Существенное значение для прочного усвоения геометрии имеет изготовление силами учащихся моделей изучаемых геометрических фигур и использование их во время урока.

Изучение систематического курса геометрии не должно отрываться от практической деятельности: в одних случаях жизненные процессы должны, там, где это естественно, являться исходным моментом суждения, которое затем теоретически обосновывается, а в других — доказанные теоремы иллюстрируются на примерах из окружающей действительности.

С другой стороны, наряду с наглядностью надо усилить логический момент при преподавании геометрии.

Наглядность, использование моделей, идея движения, решение задач на построение, приложение теории к решению практических задач, систематизация пройденного, проведённые при активности и инициативе со стороны учащихся, способствуют прочному усвоению курса геометрии.

Доказательство теорем. Особенно важно для преподавателя геометрии научить учащихся умело доказывать теоремы. Известно, что некоторые учащиеся формально заучивают формулировки теорем и их доказательства, не понимая их сущности.

Формальное заучивание у учащихся легко обнаруживается при постановке дополнительных вопросов; оно также проявляется, если ученику предложить доказать теорему, изменив расположение чертежа.

Если учитель сообщает формулировку теоремы, доказывает её сам и затем заставляет повторить учащегося доказательство, то теорема будет усвоена учащимися формально. Учащимся непонятно, почему делается то или другое построение; они не понимают, как пришли к этому доказательству; внимание их направлено на запоминание хода доказательства. Поэтому надо привлекать учащихся к творческому участию в отыскании логических связей, на которых построено доказательство теоремы. Другими словами, надо доказывать теоремы, прибегая к анализу.

Прежде всего учащиеся должны твёрдо представлять, что доказать теорему — это значит путём логических умозаключений, опираясь на аксиомы, определения и доказанные ранее теоремы, получить из условия теоремы её заключение.

Надо научить учащихся различать в формулировке теоремы, „что дано“ и „что требуется доказать“.

Понимание теоремы усложняется тем, что в учебнике Киселёва многие теоремы не излагаются по схеме „Если существует A, то существует и B“, а даются в форме, которая затрудняет некоторых учеников увидеть условие и заключение.

Поэтому в своей практике учителя стараются при изучении теоремы формулировать её так, чтобы учащимся было ясно, где в формулировке „условие“ и где „заключение“. Например, теорему „В прямоугольнике диагонали равны“ можно учащимся дать и в такой формулировке: „Если параллелограм — прямоугольник, то диагонали в нём равны“.

Обязательно надо научить учащихся различать понятие о „необходимом признаке“ какого-либо события и „достаточном признаке“.

Мы называем необходимым признаком существования какого-нибудь события такое условие, без наличия которого это событие не может произойти. Однако событие необязательно произойдёт и при наличии необходимого признака.

Так, например, углы не могут быть вертикальными, если они не равны между собой. Таким образом, равенство двух углов является необходимым признаком того, чтобы данные углы были вертикальными.

Однако очевидно, что не всякие два равных угла непременно будут вертикальными.

Таким образом, на этом примере мы видим, что наличие необходимого признака не всегда достаточно для того, чтобы тот или иной факт имел место.

Кроме необходимых признаков, имеются, как известно, ещё и достаточные признаки существования того или иного факта.

Достаточными признаками называются такие, при наличии которых событие обязательно произойдёт. Однако может случиться, что событие произойдёт и без выполнения достаточного признака, т. е. достаточный признак содержит в себе больше условий, чем это требуется для того, чтобы данное событие произошло.

Примером достаточного признака может служить условие теоремы: „Если четырёхугольник — квадрат, то его диагонали равны“, условие даёт достаточный признак существования заключения, но требует больше, чем это нужно для справедливости заключения. Действительно, если отбросить равенство всех сторон рассматриваемого четырёхугольника, а сохранить только равенство всех его углов, т. е. рассматривать не только квадрат, но и прямоугольник, то заключение теоремы останется справедливым.

Теорема „Если четырёхугольник — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны“ даёт опять в условии достаточный признак существования заключения с бо́льшим содержанием, чем этого требует заключение теоремы.

Действительно, если мы отбросим требование, чтобы все стороны четырёхугольника были равны, а ограничимся только требованием, чтобы четырёхугольник имел две пары равных смежных сторон, т. е. представлял собой дельтоид, то заключение теоремы будет справедливо.

Полезно приводить в качестве упражнений такие предложения, в которых условие не даёт достаточных признаков существования заключения.

Например: 1) „Если диагонали четырёхугольника равны, то четырёхугольник будет прямоугольником“.

2) „Если диагонали четырёхугольника перпендикулярны, то четырёхугольник будет ромбом". И т. д.

Обе указанные нами теоремы неверны, так как в условии каждой из них содержится менее достаточных признаков, чем это требуется для существования заключения.

В обоих случаях надо в условиях добавить, что диагонали их в точке пересечения делятся пополам.

В целях более прочного закрепления рассмотренных понятий полезно при повторении материала рассмотреть упражнения:

В следующих предложениях заменить многоточие фразами: „необходимо и достаточно", „необходимо, но недостаточно", „достаточно, но не необходимо".

1) Для того, чтобы четырёхугольник был прямоугольником . . . , чтобы его диагонали были равны.

2) Для того, чтобы четырёхугольник был ромбом . . . , чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны и в точке пересечения делились пополам.

3) Для того, чтобы в четырёхугольнике диагонали были равны . . . , чтобы он был квадратом.

Такого рода логические упражнения учитель может сам составить по проработанным темам.

Указанные соображения об особенностях работы по изучению теорем способствуют более прочному усвоению изучаемого материала.

Задачи на доказательство. Изучение курса геометрии должно с самых первых уроков сопровождаться достаточным количеством хорошо подобранных задач, которые помогали бы учащимся глубже усваивать геометрические понятия, развивали их пространственные представления и помогали осваивать логику доказательств теорем. Задачи, которые встречаются в геометрии, принято разбивать на три типа — задачи на вычисление, задачи на доказательство и задачи на построение.

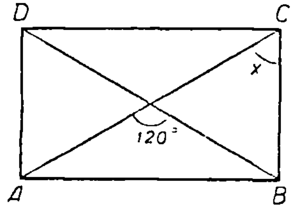
На мой взгляд к этим трём типам задач следует отнести ещё один вид задач, которые по своим особенностям нельзя причислить ни к одному из трёх перечисленных типов. Мы говорим о так называемых *собственно практических задачах* — задачах на измерение расстояний, составление смет на побелку помещений, на вычисление объёмов, задачи на измерения на местности и др. В свете решений о политехническом обучении эти задачи должны играть важную роль в практике учителя математики. В этой книге описываются возможные работы по измерению на местности.

Не останавливаясь на особенностях задач на построение и задач на вычисление, так как решение этих задач в работе каждого учителя заняло прочное место, остановимся кратко на задачах на доказательство.

Задачи на доказательство, с одной стороны, помогают ученикам овладеть методом доказательства теорем, а с другой — способствуют более глубокому усвоению курса геометрии.

Опыт многих учителей, в том числе и пишущего эти строки, показывает, что решение задач на доказательство повышает как развитие учащихся, так и сознательность усвоения содержания курса. Поэтому в данной книге большое место уделяется решению задач на доказательство.

В повышении вычислительной культуры учащихся большую роль играет систематическое проведение устных упражнений по геометрии. При наличии сборника по устным упражнениям (В. А. Игнатьев и др., Сборник устных упражнений по математике для средней школы, Учпедгиз, 1952) учитель может с большой пользой отводить 5—7 минут этому виду работы. Этот вид работы отображён и в планах уроков.

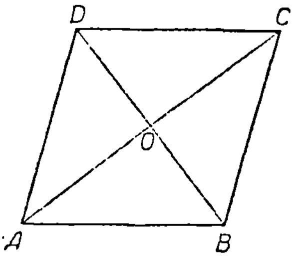


Черт. 1.

Следует уделять внимание и решению задач по готовым чертежам. Например, изобразив чертёж 1, написать:

$ABCD$ — прямоугольник.

Найти x.



Черт. 2.

Возможны и такие упражнения, например:

Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle AOD = 90°$ и $AO = OC$, $BO = OD$. Что это за фигура? (Черт. 2).

Найдите величину каждого угла этой фигуры, если $\angle OAB = 37°$. Сколько на чертеже изображено треугольников? И т. д.

Одним из основных условий прочного усвоения учебного материала является систематическая целеустремлённая работа учащихся над домашними заданиями. Учитель должен постоянно напоминать ученику о том, что решая задачи, он должен:

1. Условие задачи хорошо осмыслить и выделить данные и вопрос задачи.

2. В задачах, которые ему даются, решение всегда осуществимо, а потому надо обязательно добиваться решения.

3. При решении не торопиться, торопливость — причина ошибок. Лучше лишний раз проверить, верны ли сделанные рассуждения и вычисления, чем после искать свои ошибки.

4. Если задача трудная, то не огорчаться и не опускать рук, а стараться обязательно найти решение.

5. Постоянно контролировать свои рассуждения и вычисления.

6. Проверять решение. Сначала прикинуть, может ли полученный ответ приблизительно соответствовать условию задачи.

7. Спокойствие — необходимое условие работы.

Измерительные работы на местности. Измерение на местности является не только видом практической работы учащихся, но и представляет действенное средство борьбы с формализмом знаний учащихся. Учащиеся, неплохо усвоившие теоретические положения о нахождении поверхностей и объёмов тел, часто затрудняются в решении простейших жизненных задач, например в определении объёма комнаты, здания, или поверхности стен и потолка. Учащиеся затрудняются в выборе единиц измерения и способов измерения.

Основная причина заключается в том, что учителя, начиная с учителей начальной школы, мало обращают внимание на проведение измерений на местности.

В объяснительной записке к программе по математике так говорится о проведении работ по измерению на местности: „Необходимо также показывать практические приложения геометрии, повышая этим интерес учащихся к предмету и их уверенность в его ценности. Сюда относятся прежде всего измерения всякого рода, в частности измерения на местности, вычисление площадей и объёмов и т. п.“. К сожалению, программа не указывает, где взять время для проведения этих практических работ.

В свете решений XIX съезда партии о введении политехнического обучения в советской школе измерительные работы на местности являются одной из форм осуществления связи теории с практикой.

В этой книге сообщается опыт проведения с учащимися седьмых классов двух полевых работ:

1-я работа — съёмка плана участка буссолью путём обхода;

2-я работа — а) определение недоступного расстояния и б) определение высоты здания.

При проведении этих работ подразумевается, что учащиеся уже имеют навыки в выполнении простейших измерительных работ и в V, и VI классах проделали следующие практические работы:

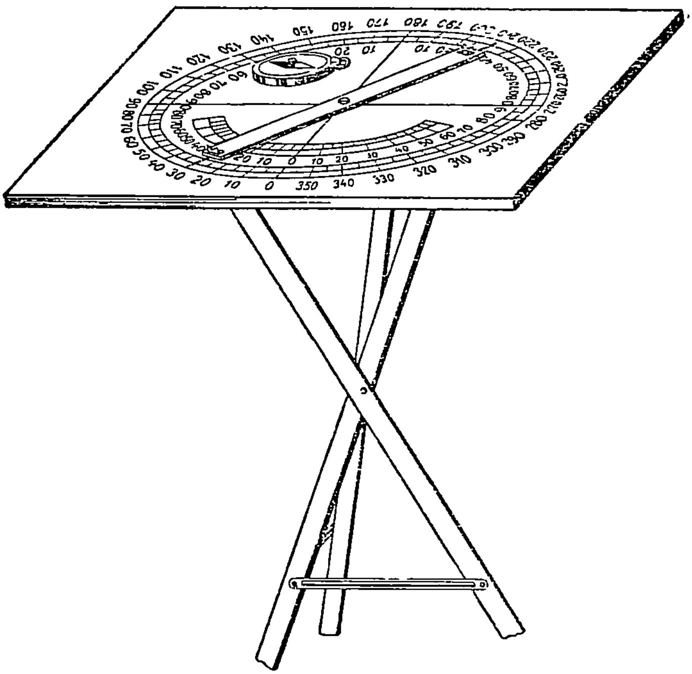
1. Провешивание прямой линии.
2. Определение длины своего шага.
3. Измерение отрезков на местности: а) с помощью рулетки или шнура; б) с помощью полевого циркуля; в) шагами, с последующим переводом в метры.
4. Эккер. Проведение перпендикуляра к данной прямой. Построение ара и гектара как в виде квадрата, так и в виде прямоугольника.

5. Астролябия. Измерение и построение углов с помощью астролябии.

6. Съёмка плана с помощью астролябии.

Ниже излагается опыт проведения работ в школе, находящейся в крупном городе, когда выезд за город сопряжён с большим расходом времени. Обе работы в этих условиях проводятся на школьном дворе.

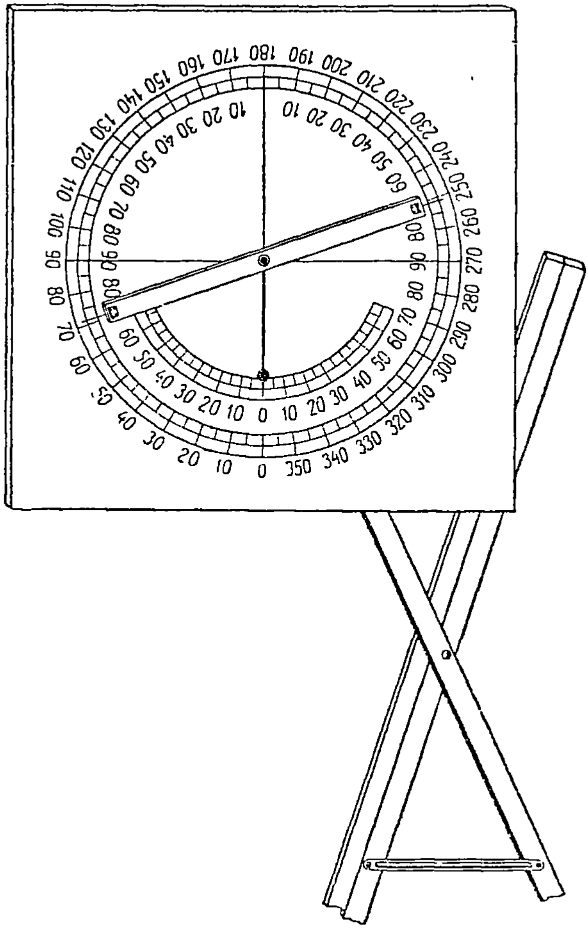
Где же найти время, необходимое для проведения этих работ? Опыт учителей подтверждает, что это время всегда можно взять из часов, отводимых на геометрию.



Черт. 3 а.

Всего для проведения практических работ по геометрии в VII классе требуется 8 часов. Эти часы наиболее целесообразно взять в 4-й четверти. По месту в расписании дня практические часы должны быть или первыми двумя уроками, или последними (5—6-й), с тем чтобы учащихся можно было бы пригласить за час до начала занятий или задержать их после занятий на один час. Опыт показывает, что измерительные работы лучше начинать по расписанию дня, а не во внешкольное время, этим обеспечивается дисциплина занятий и охват всех учащихся работой. При такой постановке учащиеся проникаются сознанием необходимости выполнения этих работ.

Перед учителем, желающим провести с классом измерение на местности, встаёт вопрос, а где же взять инструменты для производства измерений? Сотни учителей, систематически проводящих измерения на местности, вместе с учениками изготавливают необходимый инвентарь.



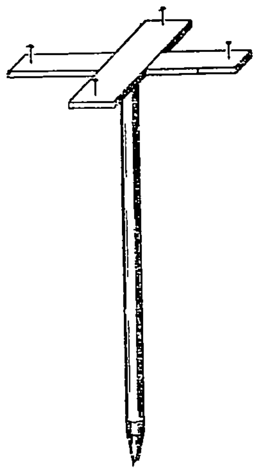
Черт. 36.

Для выполнения двух практических работ на местности требуются следующие предметы и инструменты: 1) вехи, 2) рулетки или мерные ленты, 3) эккеры, 4) буссоль, 5) астролябия, 6) эклиметры.

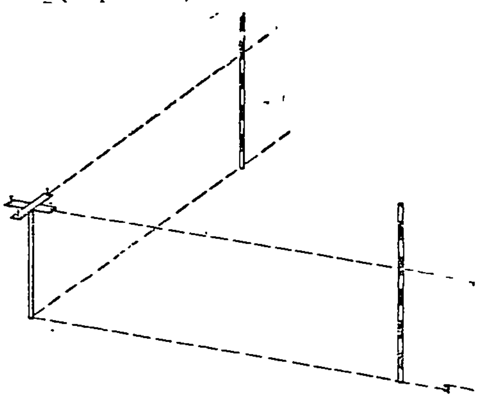
В 1952 г. Главучтехпром Министерства просвещения РСФСР изготовил универсальный школьный угломер Д. М. Смычникова, который одновременно заменяет все школьные угломерные приборы: эккер, эклиметр, астролябию, буссоль и нивелир. Конструкция его несложна, и при наличии хотя бы одного экземпляра школа может создавать потребное количество экземпляров этого инструмента.

Приводим краткое описание универсального школьного угломера.

Прибор состоит из трёх основных частей: *штатива*, *планшета*, с изображёнными на нём лимбом и алидадой, и *компаса*. Когда прибор используется для измерения горизонтальных углов, т. е. в качестве астролябии или буссоли, или эккера, то штатив устанавливается как т р е н о ж н и к, на который кладётся планшет и компас (черт. 3 а).



Черт. 4 а.



Черт. 4 б.

Если прибор используют для измерения вертикальных углов, т. е. в качестве эклиметра, то штатив устанавливается как „д в у н о ж н и к", на который укрепляется планшет, поставленный перпендикулярно к плоскости земли (черт. 3 б).

Если школа не имеет возможности приобрести прибор Д. М. Смычникова, то тогда все измерительные работы могут быть произведены с помощью вышеуказанных школьных приборов, которые учителя вместе с учащимися могут изготовить.

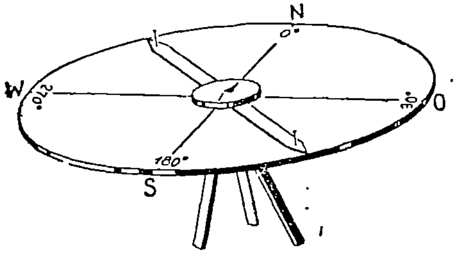
Дадим краткое описание этих приборов.

1. Э к к е р. Эккер служит для построения перпендикуляров к данной прямой (или иначе — для построения прямых углов.) Он представляет собой две равные пересекающиеся под прямым углом линейки (дощечки). На концах дощечек — булавки.

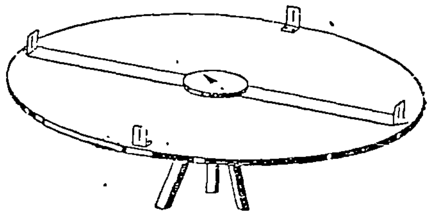
Эккер устанавливается горизонтально на штативе (ровный, заострённый кол) (черт. 4а).

Схема пользования эккером указана на чертеже 4б.

2. Буссоль. Буссоль — это круг, разделённый на градусы и снабжённый алидадой (линейкой), которая укреплена в центре круга и может вращаться. На оси круга укрепляется непо-



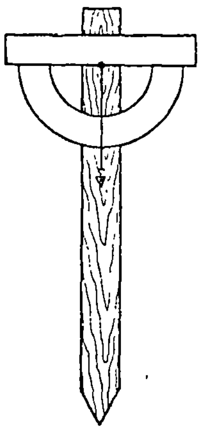
Черт. 5.



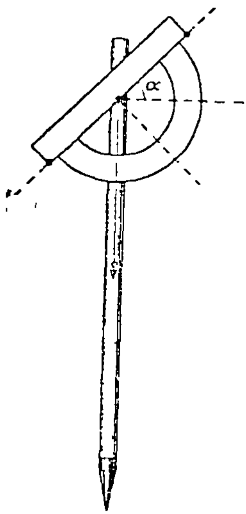
Черт. 6.

движно компас так, чтобы направление севера совпадало с нулевой точкой круга (черт. 5).

Буссоль устанавливается на штативе. Служит для измерения азимутов и румбов. Так как буссоль имеет компас, то она не должна содержать железных частей. Надо брать, если это нужно, медные крепления.



Черт. 7 а.



Черт. 7 б.

3. Астролябия. Астролябия (черт. 6) состоит из лимба, алидады и двух пар диоптров. Лимб — круг с градусными делениями. Два диоптра, прикреплённые к лимбу, называются неподвижными. Алидада — линейка, укреплённая в центре и вращающаяся вокруг него. Она имеет на конце пару диоптров, называемых подвижными. Астролябия снабжается компасом. Применяется для измерения горизонтальных углов.

4. Эклиметр. Эклиметр служит для измерения углов в вертикальной плоскости. В качестве простейшего эклиметра может быть использован обыкновенный транспортир, если прикрепить к нему ниточку с грузом, как показано на чертеже 7 а.

Удобно сделать его так, как показано на чертеже 7 б.

Необходимый инвентарь для измерительных работ:

1. Рулетка. Если школа не может обеспечить все звенья класса рулетками, то они могут быть заменены мерными шнурами или лентами.

2. Мерный шнур — толстый шпагат длиной 10—20 *м*, с узлами для отсчёта через каждый метр. Желательно каждый пятый узел выделить перевязкой другого цвета.

3. Вехи — гладкие колья длиной 1,5—2 *м*, с заострённым концом (лучше с железным наконечником). Вехи окрашивают в два цвета: красный и белый, чередующиеся через 10 *см*.

Организация класса для выполнения работы. Весь состав класса разбивается на звенья по 3—5 человек в звене. Назначается звеньевой. Каждое звено обеспечивается необходимыми инструментами и инвентарём. При выполнении работы на местности необходимо следить за тем, чтобы в пределах звена не было бы такого разделения труда, когда с инструментом работает постоянно один и тот же ученик, а другой ведёт журнал наблюдений и т. д. Необходимо, чтобы каждый ученик не только понимал постановку задачи и способы её решения, но и лично принял бы участие во всех этапах её выполнения, т. е. он должен измерять углы, вести журнал, стоять с вехами, измерять рулеткой или шнуром, набрасывать план и т. д. Например, производя измерение высоты здания, каждый из участников звена должен измерить угол наклона с помощью эклиметра, измерить расстояние до стены и построить на земле треугольник по катету и острому углу. Такая организация работы внутри звена обеспечивает выработку навыков у всех участников звена и служит контролем за правильностью проведённых измерений. Если несколько учеников отсутствовало при проведении занятия в поле, то необходимо с ними во внеклассное время провести эту работу или включить их в работу параллельного класса.

Так как всякую полевую работу надо соответствующим образом оформить, а журнал наблюдений в звене один, то обработка результатов проводится звеном в классной обстановке. Надо непременно требовать, чтобы каждый участник сдал учителю обработанный материал звена.

Организация работы. Выполнение каждой измерительной работы включает три этапа:

1) Ознакомление с работой и необходимыми инструментами в классной обстановке.

2) Полевая работа.

3) Обработка материала полевой работы.

Прежде чем выйти с учащимися в поле (или на школьный двор) для выполнения намеченной работы, надо в классной обстановке подготовить учащихся к выполнению работы на местности, а именно:

а) разобрать задачу так, чтобы каждый учащийся знал её назначение и обоснование (математическое содержание);

б) ознакомить с необходимыми инструментами и применением их в работе;

в) ознакомить учащихся с выполнением работы (последовательностью, организацией внутри звена и т. д.), а если возможно, то проделать работу или её основные элементы в классе;

г) подготовить необходимую документацию (журнал наблюдений, схематические чертежи и т. д.) для выполнения работы на местности.

Приводимые в книге разработки двух работ на местности, как было сказано выше, возможны при условии, что учащиеся в V—VI классах уже выполняли некоторые работы на местности.

Если учащиеся этих классов ранее не производили работ на местности, то рекомендуем учителю ограничиться проведением предварительных простейших работ (см. урок 76) и работы № 2 (уроки 72—75).

Математический пионерский сбор. В послевоенные годы в некоторых московских школах стала практиковаться следующая форма внеклассной работы по математике — математические пионерские сборы.

Пионерская организация охватывает почти всех учащихся пятых — седьмых классов, а потому математические пионерские сборы при хорошей их организации могут принести большую пользу в сознательном усвоении математических понятий. Различные математические кружки и олимпиады охватывают ограниченный состав учащихся, а поэтому новой форме — математическим пионерским сборам — учитель должен уделить значительное место при проведении внеклассной работы.

На математических пионерских сборах, проводимых учителями Бауманского района Москвы, рассматриваются различные вопросы: вопросы истории математики и освещение роли русских учёных (Магницкий, Лобачевский и др.), практические задачи по математике, решение занимательных задач и задач, требующих особой сообразительности, чтение различных художественных произведений, посвящённых математическим вопросам, например рассказ А. П. Чехова „Репетитор“, рассказ Л. Н. Толстого „Много ли человеку земли нужно“ и т. д.

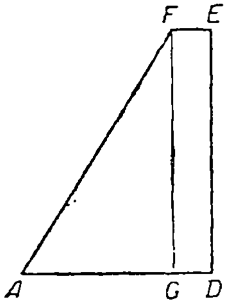
Приведём пример организации и проведения одного математического пионерского сбора, специально посвящённого геометрическому материалу VII класса.

В VII классе мною и пионерской вожатой был подготовлен пионерский сбор, который состоял из двух частей: 1) чтение рассказа Л. Н. Толстого „Много ли человеку земли нужно“ и беседа по поводу прочитанного; 2) „Геометрия вокруг нас“.

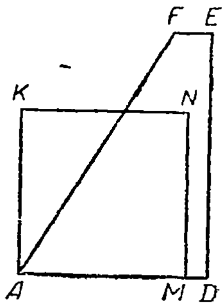
При подготовке к сбору была использована статья М. Ф. Шиповой „Из опыта педагогической практики студентов" („Математика в школе", 1952, № 3), а также книга Я. И. Перельмана „Занимательная геометрия".

К сбору отряд готовился в течение 10 дней, в непосредственной подготовке сбора участвовало 8 пионеров.

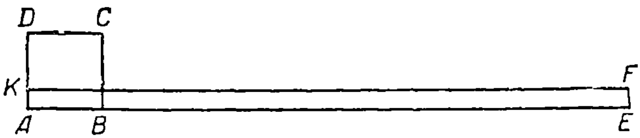
Материал между ними был распределён таким образом: одна пионерка провела беседу о положении крестьян до и после Великой Октябрьской социалистической революции; вторая прочла отрывок из рассказа „Много ли человеку земли нужно"; третья, используя данные рассказа, выполняла на доске необходимые чертежи; четвёртая поясняла, как найти площадь полученной трапеции и выразить её в гектарах; как определить длину пути, пройденного Пахомом (черт. 8 а); пятая ученица заранее подготовила чертёж (8 б), при помощи которого пояснила, по какому контуру лучше было бежать Пахому, что из всех четырёхугольников с одинаковой площадью квадрат имеет наименьший периметр; шестая пионерка, подготовив заранее чертёж и соответствующую таблицу, сообщила, что те вычисления, которые мы выполнили, могут нам пригодиться и разъяснила, как на практике пользоваться полученными результатами (черт. 9).



Черт. 8 а.



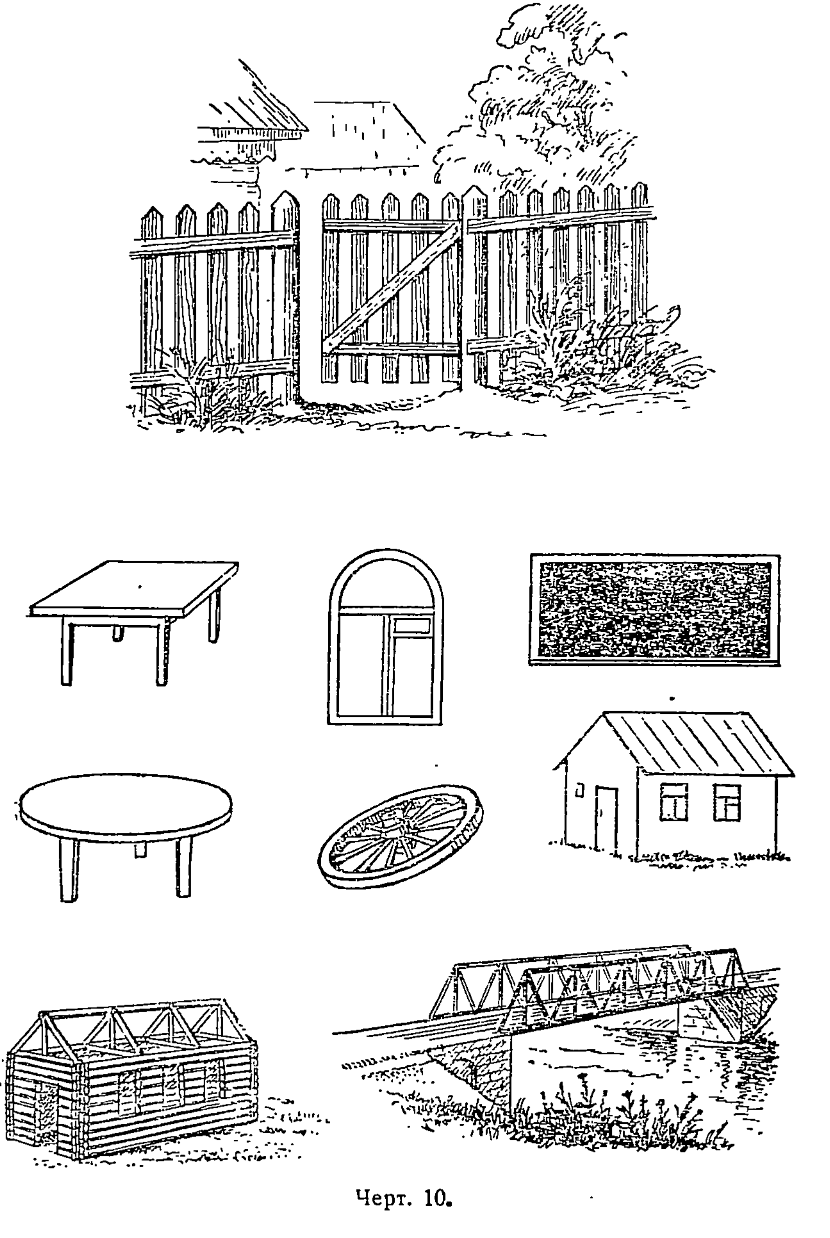
Черт. 8 б.



Черт. 9.

Для проведения второй части сбора двум пионеркам было поручено продумать, где в окружающей нас обстановке мы встречаем изученные нами геометрические фигуры, и подготовить соответствующие рисунки (некоторые из них приводим ниже, черт. 10).

Сбор продолжался 1 час 15 минут, и мне кажется, он принёс пользу не только тем, кто готовил материал, но и всем участникам сбора.



Черт. 10.

Ниже приводится список литературы, которую можно рекомендовать учителям математики седьмых классов и которая частично использовалась мною при составлении данной книги.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Н. А. Глаголев, Геометрия, ч. I, Учпедгиз, 1950.
2. Ж. Адамар, Геометрия, ч. I, Учпедгиз, 1951.
3. В. А. Игнатьев, С. А. Пономарёв, Е. Н. Обуховская, Сборник задач и упражнений для устных занятий по математике, Учпедгиз, 1952.
4. К. С. Барыбин, Сборник задач по геометрии на доказательство, Учпедгиз, 1952.
5. „Методика преподавания математики", под редакцией С. Е. Ляпина, Учпедгиз, 1952.
6. И. И. Александров, Сборник геометрических задач на построение, Учпедгиз, 1950.
7. Я. И. Перельман, Занимательная геометрия ГТТИ, 1950.

Статьи, опубликованные в журнале „Математика в школе".

А. Статьи, отражающие некоторые вопросы политехнического обучения:

1. С. А. Пономарёв, О коммунистическом воспитании на уроках математики, 1951, № 3.
2. С. М. Чуканцов, О воспитании у учащихся чувства советского патриотизма и советской национальной гордости, 1948, № 6.
3. Л. Г. Круповецкий, Об идейно-политическом воспитании учащихся на уроках математики, 1950, № 3.
4. „Политехническое обучение в советской школе", 1953, № 2.
5. С. А. Пономарёв, К вопросу о политехническом обучении в преподавании математики, 1953, № 3.
6. В. М. Брадис, Формализм в школьном курсе математики и борьба с ним, 1946, № 3.
7. С М. Чуканцов, Мой опыт борьбы с формализмом на уроках математики, 1948, № 4.
8. В. А. Голубев, Устный счёт в средней школе, 1946, № 3.
9. Е. Н. Филоматинская, Устные упражнения по математике как метод работы, 1946, № 4.
10. М. Г. Васильев, Простейшие вычисления с приближёнными величинами в курсе семилетней школы, 1951, № 5.
11. В. П. Анисимов, О проведении практических работ по математике на местности, 1951, № 4.

Б. Статьи, по вопросам содержания и методики преподавания геометрии в VII классе:

1. Г. А. Владимирский, О методах использования чертежа в преподавании геометрии, 1946, № 4.
2. Н. А. Арсеньев, Задачи на доказательство в неполной средней школе, 1948, № 5.
3. Г. А. Птахин, Изучение геометрических мест в VI и VII классах, 1950, № 5.
4. М. Н. Голайдо, Математический кружок в семилетней школе. 1951, № 4.
5. Г. А. Птахин, Метод геометрических мест в VII классе, 1952, № 4.
6. Ф. Ф. Притуло, Элементы логики в школьном курсе математики, 1953, № 1.
7. М. И. Кузьминский, Элементы логики в преподавании геометрии, 1953, № 1.
8. К. П. Сикорский, Об организации урока по математике, 1953, № 1.
9. Н. А. Мауко, О математической подготовке выпускников семилетних школ, 1953 ...

ПЛАН
РАБОТЫ ПО ГЕОМЕТРИИ В VII КЛАССЕ (на год).

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСОВ.

1-я четверть: 9 недель по 2 часа — 18 часов (уроки 1—18).
2-я четверть: $7^1/_2$ недель по 2 часа — 15 часов (уроки 19—33).
3-я четверть: 10 недель по 3 часа — 30 часов (уроки 34—63).
4-я четверть: 6 недель по 3 часа — 17 часов (уроки 64—80).

Четверть	Раздел программы	Число часов	Срок выполнения
	1. Четырёхугольники (26; 13[1]).		
I	Вводная беседа и повторение материала по курсу VI класса, связанного с темой „Четырёхугольники“	1	
	Общая схема подразделения всех четырёхугольников. Повторение некоторых разделов из темы „Параллельные прямые“, связанных с темой „Четырёхугольники“	1	
	Параллелограм, свойство его сторон и углов	2	
	Свойство диагоналей параллелограма	1	
	Признаки параллелограмов	3	
	Центр симметрии параллелограма	1	
	Контрольная работа № 1	1	
	Построение параллелограма	3	
	Прямоугольник и его свойства	2	
	Контрольная работа № 2	1	
	Решение задач на построение прямоугольника	1	
	Ромб и его свойства	1	
		18	

[1] Первое число в скобках означает установленное программой колич ство часов работы в классе, второе — число часов домашней работы (на ве раздел)

Четверть	Раздел программы	Число часов	Срок выполнения
II	Решение задач на доказательство и на построение ромба	1	
	Квадрат и его свойства	1	
	Теорема о делении отрезка на равные части	1	
	Средняя линия треугольника и её свойства	1	
	Трапеция. Свойство средней линии трапеции	2	
	Контрольная работа № 3	1	
	Обзорный урок по теме „Четырёхугольники“	1	
	2. Окружность (32; 16).		
	Построение окружностей, проходящих через одну, две и три данные точки на плоскости	1	
	Теорема о диаметре, перпендикулярном к хорде, и обратная теорема	1	
	Теорема о дугах, заключённых между параллельными хордами	1	
	Решение задач на построение	1	
	Теорема о равных дугах, стягивающихся равными хордами, и о расстоянии хорд от центра	1	
	Теорема о неравных дугах, стягивающихся неравными хордами, неодинаково удалёнными от центра	1	
	Теорема: „Диаметр есть наибольшая из хорд“	1	
		15	
III	Взаимное расположение прямой и окружности. Признак касательной	1	
	Свойство касательной	1	
	Теорема о касательной, параллельной хорде: Проведение касательной к данной окружности параллельно данной прямой	1	
	Решение задач на доказательство, связанных с подтемой „Касательная“	1	

Продолжение

Четверть	Раздел программы	Число часов	Срок выполнения
III	Контрольная работа № 4	1	
	Решение задач на построение методом геометрических мест	1	
	Теорема об общей точке двух окружностей, расположенной вне линии центров	1	
	Теорема об общей точке двух окружностей, лежащей на линии центров, и решение задач методом геометрических мест	1	
	Теорема об общей точке двух касающихся окружностей и её следствие	1	
	Различные случаи взаимного расположения двух окружностей	1	
	Решение задач, связанных с подтемой „Окружность“	1	
	Взаимное расположение двух пересекающихся прямых и окружности. Вписанный угол и его измерение	2	
	Решение задач на построение, основанных на следствии: „Всякий вписанный угол, опирающийся на диаметр, есть прямой“	1	
	Проведение касательной через данную точку к данной окружности	1	
	Решение задач, связанных с подтемой „Вписанные углы“	1	
	Контрольная работа № 5	1	
	Решение задач на построение методом геометрических мест	1	
	Измерение угла, вершина которого лежит внутри или вне круга	2	
	Измерение угла, составленного касательной и хордой	1	
	Проведение общих касательных к двум окружностям	2	
	Контрольная работа № 6	1	
	Построение на данном отрезке сегмента, вмещающего данный угол	1	
	Решение задач, основанных на построении сегмента на данном отрезке, вмещающего данный угол	1	

Четверть	Раздел программы	Число часов	Срок выполнения
	3. Вписанные и описанные треугольники и четырёхугольники (16; 8).		
III	Теоремы: „Около всякого треугольника можно описать окружность и притом только одну“; „Во всякий треугольник можно вписать окружность и притом только одну“	1	
	Решение задач, связанных с подтемой „Вписанные и описанные треугольники“	1	
	Доказательство прямой и обратной теоремы о свойстве углов вписанного выпуклого четырёхугольника	1	
	Решение задач, связанных с подтемой „Вписанные и описанные четырёхугольники“, и решение задач на построение методом геометрических мест	1	
		30	
IV	Свойство сторон описанного четырёхугольника	1	
	Решение задач на вписанные и описанные четырёхугольники	1	
	Контрольная работа № 7	1	
	Теорема о пересечении высот треугольника	1	
	Теорема о пересечении медиан треугольника	1	
	Измерительная работа. Съёмка плана участка буссолью путём обхода	4	
	Измерительная работа. Определение недоступного расстояния. Определение высоты здания	3	
	Заключительная беседа	1	

1-я ЧЕТВЕРТЬ — 18 часов.

1-й урок. Тема: **Вводная беседа и повторение материала по курсу VI класса, связанного с темой „Четырёхугольники“.**

1. Вводная беседа.

В течение первых 10—15 минут проводится беседа с учащимися о разделах геометрии, подлежащих изучению в VII классе (четырёхугольники, окружность, вписанные и описанные треугольники и четырёхугольники), о ведении тетрадей (две тетради — для выполнения домашних заданий и работы в классе и для контрольных работ), о работе по учебнику и по задачнику.

Указать ученикам, что *изучить материал по учебнику — это значит понять всё то, о чём написано в указанном параграфе, знать наизусть данные в нём определения и формулировки теорем, уметь изложить доказательство теорем и, наконец, уметь применить эти знания к решению задач.*

В беседе остановиться на систематичности работы по математике; привести примеры, показывающие пагубность воззрения некоторых учеников: „К концу четверти возьмусь и исправлюсь“.

Конечно, если состав класса значительно пополнился учениками, или класс новый для учителя, то надо остановиться (5—7 минут) на знакомстве с учащимися.

В заключение беседы сказать о требованиях к изучающим математику.

2. Повторение материала по курсу VI класса, связанного с темой „Четырёхугольники“.

Учащимся следует напомнить, что в VI классе они изучали две большие темы: „Треугольники“ и „Параллельные прямые“, сказать, что в VII классе они будут изучать четырёхугольники и окружность. Для прохождения нового материала необходимо повторить некоторые разделы из курса VI класса, для этого всему классу ставится ряд вопросов и проводятся упражнения на доске.

Какая линия называется ломаной? Начертите ломаную линию. Что называется стороной ломаной, углом, её вершинами? Покажите на чертеже. Начертите невыпуклую ломаную линию.

Какая ломаная линия называется замкнутой? Начертите ее. Какая фигура называется многоугольником? Начертите многоугольник и дайте определение сторон, углов, вершин, диагоналей и периметра многоугольника.

Как определить сумму внутренних и внешних углов многоугольника? Какой многоугольник называется выпуклым? вогнутым?

Изобразите их на чертеже и поясните, к какому виду относится каждый из них.

Какое число сторон может иметь многоугольник? Каково наименьшее число сторон многоугольника? Дайте определение треугольника. Как подразделяют треугольники: а) по сравнительной длине их сторон? б) по величине их углов?

Что называется четырёхугольником? Начертите четырёхугольник выпуклый, невыпуклый.

Здесь же можно указать, что в дальнейшем мы будем рассматривать четырёхугольники, причём только выпуклые.

Так как качество усвоения нового материала в значительной мере зависит от успеха повторения пройденного, связанного с прохождением новой темы, то следует обратить на это внимание учащихся и указать, что повторять старый материал нужно серьёзно и тщательно.

3. Задание на дом.

Из учебника § 33, 34, 35, 41, 42.

Задание на дом необходимо записывать на доске, давая при этом соответствующие пояснения.

Хотя в VI классе учащимся не раз разъяснялось, как учить дома теорему, рекомендуется им ещё раз об этом напомнить, чтобы при повторении признаков равенства треугольников они могли учесть сказанное. Указать, что при повторении или изучении теоремы нужно прочесть формулировку теоремы, вдуматься в смысл прочитанного, выяснить, что дано в теореме и что требуется доказать. Пока ученик не поймёт этой части, нельзя переходить к доказательству.

Затем ученик должен внимательно прочитать доказательство теоремы, пользуясь при этом чертежом, данным в учебнике.

Проделав это, следует выполнить чертёж самому, повторить, как читается теорема, проверив правильность формулировки по учебнику, записать, что дано и что требуется доказать.

После этого ученик переходит к доказательству теоремы (доказывает устно); если при доказательстве появляются затруднения, то можно воспользоваться учебником.

И, наконец, ученик проводит доказательство, пользуясь своим чертежом, совершенно самостоятельно.

Следует сказать, что теорема считается усвоенной, если ученик формулировку теоремы знает наизусть и может доказать её без затруднений, не смотря в учебник.

Иногда учащиеся при выполнении домашнего задания вначале приступают к решению задач, а затем переходят к изучению теоретического материала, стараясь при этом дословно запомнить прочитанное, не поняв содержания. Такая система работы не даёт глубоких знаний; кроме того, ученик на выполнение домашнего задания тратит много времени. Следует научить учеников правильно выполнять домашнее задание, правильно работать с книгой. Пояснить, что прежде всего нужно выучить заданное по учебнику. Поняв содержание прочитанного и повторив без учебника, выучив наизусть имеющиеся в задании определения и формулировку теоремы, можно приступать к решению задач. Вначале нужно прочесть условие задачи полностью, затем ещё раз по частям, делая при этом чертёж на черновике; так как охватить все данные задачи сразу не всегда возможно, то иногда чертёж, в процессе его выполнения, приходится уточнять (исправлять). Написав кратко условие задачи (что дано и что требуется доказать), нужно повторить его, не пользуясь задачником, указывая данные элементы на чертеже.

Только поняв и запомнив условие, можно приступать к решению.

Устанавливая зависимость между данными элементами и искомыми, используя теоретический материал, ученик переходит к решению задачи.

Учитывая особенности этого задания, рекомендуем ещё раз напомнить учащимся следующее: при повторении § 33, 34 и 35 они вначале должны прочитать внимательно весь параграф, продумать, о чём говорится в нём, а затем учить определения наизусть так, чтобы на каждый поставленный вопрос ученик мог ответить, не раскрывая учебника; ответ сопровождать чертежом, для этого можно завести специальную тетрадь. Например, ученик спрашивает себя: „Что называется многоугольником?" — Отвечает на поставленный вопрос и чертит многоугольник. „Что называется сторонами многоугольника?" — Отвечает на вопрос и показывает стороны многоугольника.

2-й урок. Тема: Общая схема подразделения всех четырёхугольников. Повторение некоторых разделов из темы „Параллельные прямые", связанных с темой „Четырёхугольники".

1. Проверка домашнего задания.

При подготовке к уроку следует планировать опрос. Нужно продумать: 1) сколько человек можно спросить на данном уроке; 2) какие дать дополнительные вопросы; учесть, что иногда можно дать учащемуся те вопросы, которые необходимо вспомнить для изучения нового материала; 3) проверять ли задание полностью; какую часть не проверять; 4) что проверить с места и какую часть — у доски. А также предложить несложные задачи, которые решаются устно и выясняют понимание данного раздела.

Проверку домашнего задания рекомендуем провести следующим образом: двух учеников вызвать к доске для доказательства 1-го и 2-го признаков равенства треугольников.

Во время подготовки вызванных для ответа учеников следует со всем классом повторить определения, связанные с § 33—35, а также выяснить, почему 3-й признак равенства треугольников доказывается приложением.

После ответа одного ученика, вызвать к доске другого ученика для доказательства третьего признака.

Выяснить, где мы используем знание этих теорем (при решении задач и при доказательстве каких других теорем), подчеркнув, что и при изучении четырёхугольников нам нужно будет вспомнить эти теоремы.

Не рекомендуется на одном уроке вызывать только сильных или только слабых учеников, так как нужно, чтобы учащиеся могли сравнить хорошие ответы с менее удачными и видеть недостатки в ответах.

При опросе учащиеся должны внимательно следить за ответом своего товарища, а после ответа ученика необходимо спросить: „Кто дополнит? Что было пропущено? Как лучше доказать? Правильно ли записано условие?“ И т. п. За хорошие, а также и плохие ответы с места можно ученику поставить оценку. Это приучает ученика к активной работе в классе.

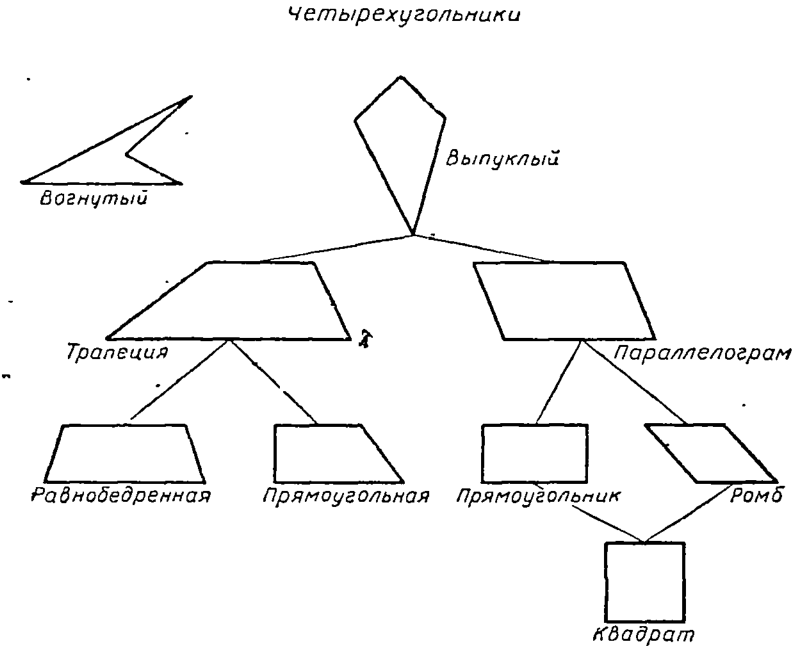
Оценивая ответ ученика, рекомендуется обосновать оценку, пояснить, что было хорошего в ответе, что сказано недостаточно ясно, что ученику нужно повторить и т. д. Это необходимо делать регулярно, так как иногда ученик не может понять, за что ему поставили оценку, не знает, какие же у него недочёты, появляется чувство неудовлетворённости.

Если ученик при ответе допускал некоторые неточности, давал нечёткие определения, в некоторых местах затруднялся при доказательстве теоремы, то необходимо выяснить, как он готовил домашнее задание и ещё раз обратить внимание учащихся на то, как следует дома учить уроки.

2. Изложение нового материала. *Общая схема подразделения всех четырёхугольников.*

В материалах к проведению секций августовских учительских совещаний в 1952 г. рекомендуется изучение четырёхугольников начать с общей схемы подразделения всех четырёхугольников, не давая при этом строгих определений фигур, а ограничиваясь лишь описанием некоторых признаков этих фигур и их названием. Эта схема (черт. 11) раскрывает перед учащимися план их работы, появляется целеустремлённость. Но нельзя ограничиться таким изучением схемы; следует после прохождения всей темы вернуться и рассмотреть схему более углублённо, используя знания учащихся.

Следует учащихся заставить начертить эту схему в тетрадях и сказать, что на последующих уроках мы будем под-



Черт. 11.

робно изучать параллелограм, а затем остальные виды четырёхугольников.

3. Упражнения по теме „Параллельные прямые". *(Повторение.)*

Прежде чем перейти к изучению параллелограма, необходимо повторить ряд определений и теорем (признаки равенства треугольников, теорему о двух перпендикулярах к одной прямой, признаки параллельности двух прямых, теорему об углах, образующихся при пересечении двух прямых третьей). Ввиду большого объёма этого материала, повторение следует проводить и на уроке, а не переносить целиком в домашнюю работу.

Желательно в классе проделать следующие упражнения по теме „Параллельные прямые".

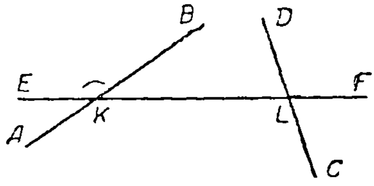
Вспомнить, какие прямые называются параллельными. Предложить учащимся привести примеры параллельных и скрещивающихся прямых из окружающей нас обстановки. При этом необходимо вызвать одного ученика к доске и предложить ему начертить параллельные, затем пересекающиеся прямые. Вспомнить названия углов, получающихся при пересечении: а) двух прямых (смежные и вертикальные), их свойства, б) двух прямых третьей.

Здесь следует обратить внимание на названия углов; например, пояснить ещё раз, почему углы называются внутренними и накрест лежащими. Затем проводится ряд упражнений на определение углов, образующихся при пересечении двух прямых третьей, например:

1) Дано: $AB \nparallel CD$,

$\angle EKB = 145°$.

Определить остальные углы.



Черт. 12.

При этом следует вспомнить структуру расположения чертежа (черт. 12), записи условия задачи и её решения.

Решение:

$\angle AKL = \angle EKB = 145°$ — как вертикальные;

$\angle EKA = 180° - \angle EKB$, так как $\angle EKA$ и $\angle EKB$ — смежные;

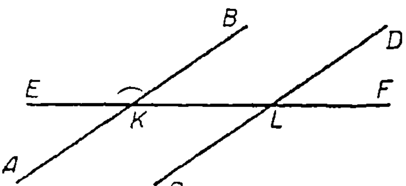
$\angle EKA = 180° - 145° = 35°$;

$\angle BKL = \angle EKA = 35°$ — как вертикальные.

Остальные углы определить нельзя.

Ответ. $\angle AKL = 145°$;

$\angle EKA = \angle BKL = 35°$.



Черт. 13.

2) Дано: $AB \parallel CD$,

$\angle EKB = 145°$.

Определить остальные углы.

Решение (черт. 13):

$\angle AKL = \angle EKB = 145°$ — как вертикальные;

$\angle EKA = 180° - \angle EKB$, так как $\angle EKA$ и $\angle EKB$ — смежные;

$\angle EKA = 180° - 145° = 35°$;

$\angle BKL = \angle EKA = 35°$ — как вертикальные;

$\angle KLD = \angle EKB = 145°$ — как соответственные при $AB \parallel CD$ и секущей EF;

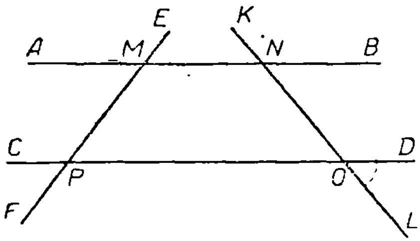
$\angle DLF = \angle BKL = 35°$ — как соответственные при $AB \parallel CD$ и секущей EF;

$\angle FLC = \angle KLD = 145°$ — как вертикальные;

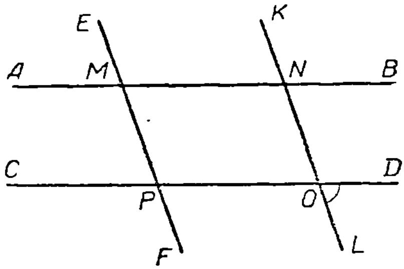
$\angle KLC = \angle DLF = 35°$ — как вертикальные.

Запись решения ученики могут провести самостоятельно, но затем следует проверить эту запись у доски и сделать соответствующие указания.

После решения этих задач нужно выяснить, почему в первой задаче мы не могли определить величину углов при точке L, а во второй задаче смогли определить все углы.



Черт. 14.



Черт. 15.

(Хорошо бы обе задачи уместить на доске вместе с их решениями.)

Остальные задачи можно решить устно.

3) Дано: $AB \parallel CD$,
$EF \nparallel KL$,
$\angle LOD = 50°$.

Определить углы четырёхугольника (черт. 14).

4) Дано: $AB \parallel CD$,
$EF \parallel KL$,
$\angle LOD = 50°$.

Определить углы четырёхугольника (черт. 15).

4. Задание на дом.

Из учебника § 70—73.

Из задачника § 4, № 1, 2.

Давая задание, необходимо опять познакомить учащихся с содержанием задания, указать, как нужно провести запись решения задач.

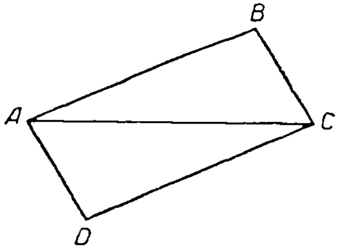
Чтобы подготовить учащихся к доказательству теоремы о свойстве сторон и углов параллелограма, можно дать на дом ещё следующую задачу.

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$,

$AB \parallel CD$,
$AD \parallel BC$.

Требуется доказать:

$\triangle ABC = \triangle ADC$ (черт.16).



Черт. 16.

3-й урок. Тема: Параллелограм, свойство его сторон и углов.

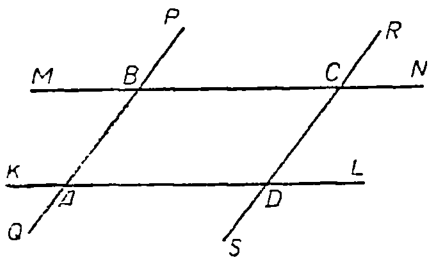
1. Проверка домашнего задания.

Проверку домашнего задания можно провести следующим образом: вызвать к доске ученика для доказательства одного из признаков параллельности двух прямых. Во время его подготовки следует, пройдя по классу, просмотреть выполнение решения 1-й и 2-й задач из § 4, сделать отдельным ученикам замечание по оформлению записи решения. Вызвать ученика, давшего плохое оформление записи, а затем — ученика, хорошо оформившего решение задачи.

Проверив решение этих задач, вызвать к доске ещё одного ученика для доказательства теоремы о двух перпендикулярах к одной прямой и для решения домашней задачи на доказательство.

2. Изложение нового материала.

Изучение параллелограма следует начать с рассмотрения чертежа, пояснить, что параллелограм можно получить, если две параллельные прямые пересечь двумя другими прямыми, параллельными между собой (черт. 17).



Черт. 17.

Указать учащимся, что если дан параллелограм, то условие можно записать так:

$ABCD$ — параллелограм, или $ABCD$ — четырёхугольник,

$AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$.

Далее остановиться на следующих вопросах:

„Что мы знаем о сторонах параллелограма? Нужно ли доказывать, что в параллелограме $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$? Что ещё можно сказать о противоположных сторонах параллелограма? ($AB = CD$, $BC = AD$)

Нужно ли это свойство доказывать?"

Обратить внимание учащихся на противоположные углы. „Нужно ли доказывать, что они равны?"

После этого необходимо спросить у учащихся, что же дано и что требуется доказать, записать на доске и предложить учащимся также записать в тетрадях. При доказательстве следует использовать цветной мел (черт. 18).

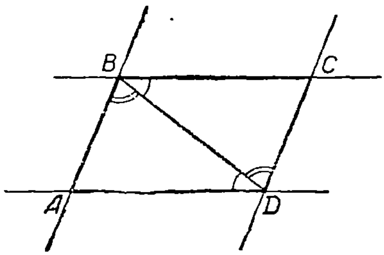
Дано: $ABCD$ — четырёхугольник,

$AB \parallel CD$,
$BC \parallel AD$.

Требуется доказать: 1) $AB = CD$, $BC = AD$;

2) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$;

3) $\angle A + \angle B = 2d$, $\angle B + \angle C = 2d$, $\angle C + \angle D = 2d$, $\angle D + \angle A = 2d$...



Черт. 18.

Следует обратить внимание учащихся на то, что при доказательстве равенства каких-либо отрезков часто рассматривают треугольники, сторонами которых являются эти отрезки, и доказывают, что эти треугольники равны.

„Как нам получить треугольники?"

Проведём диагональ BD или AC. Вместе с классом, задавая наводящие вопросы, проводим доказательство теоремы.

3. Закрепление пройденного.

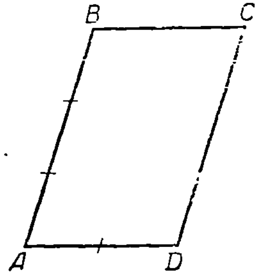
Для закрепления пройденного материала можно решить устно несложные задачи, например:

1) Один из углов параллелограма равен 52°. Определить остальные углы.

2) Можно ли доказать, что противоположные углы в параллелограме равны, не рассматривая треугольники?

3) Один из углов параллелограма меньше другого на 20°. Определить каждый угол.

4) Периметр параллелограма равен 24 *см*. Одна из сторон меньше другой на 2 *см*. Определить каждую сторону.



Черт. 19.

5) Как найти расстояние между равными сторонами параллелограма?

6) Доказать, что расстояние между большими сторонами параллелограма не больше меньшей его стороны.

7) Доказать, что угол между высотами параллелограма равен его острому углу.

8) Доказать, что биссектрисы противолежащих углов параллелограма параллельны.

Задачу 3 из § 5 можно предложить учащимся решить самостоятельно, затем решение проверить у доски.

Проверку сделать устно и начертить правильный чертёж (черт. 19).

4. Задание на дом.

Из учебника § 87, 88 (до следствия); § 75, 76 (повторить).
Из задачника § 5, № 1, 2, 4.

4-й урок. Тема: **Следствие из теоремы о свойстве сторон и углов параллелограма.**

1. Проверка домашнего задания.

Задачи № 1, 2 и 4 из § 5 можно проверить устно. Учащиеся объясняют решение, обосновывая его.

Если задача имеет несколько способов решения, то следует их выявлять, спросив у учащихся, кто решил другим способом?

Выяснить, какой из них является наиболее рациональным. Обратить внимание учащихся на то, что важно не только решить задачу, но и найти более лёгкий (короткий) способ решения.

Оценить ответ ученика, давшего лучшее решение. Это приведёт к тому, что при решении задач ученик будет искать различные способы решения и сам научится выяснять, который из них является лучшим.

Аксиому параллельных линий, следствия и теорему о свойстве сторон и углов параллелограма следует проверить у доски. Здесь необходимо вспомнить, что называется аксиомой, теоремой, следствием, предложить учащимся привести примеры на каждое определение.

2. Изложение нового материала.

Прежде чем перейти к изложению нового материала, следует вспомнить, как определяется расстояние между двумя точками, от точки до прямой (разобрав различные взаимные расположения прямой на доске) (черт. 20), между параллельными прямыми.

Затем доказать, что параллельные прямые везде одинаково удалены одна от другой.

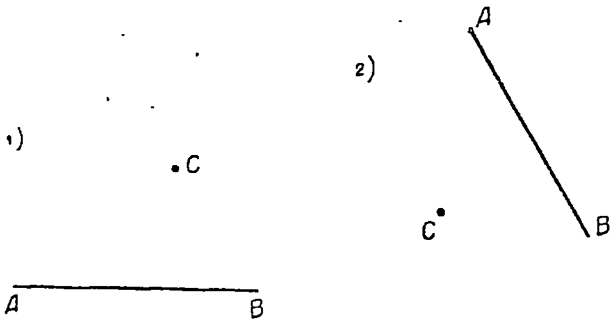
3. Решение задач.

На этом уроке желательно решить задачи на параллелограм.

Например (черт. 21):

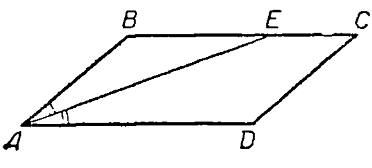
1) Дано: $ABCD$ — параллелограм,

$\angle BAE = \angle EAD$,
$\angle BEA = 20^\circ$,
$CD = 14$ *см.*

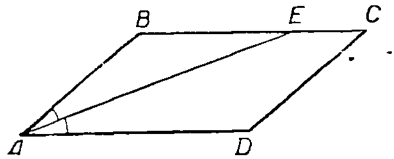


Черт. 20.

а) Найти на чертеже углы, равные 20°.
б) Определить углы параллелограма.
в) Какие отрезки можно определить?
2) Решить задачу № 5 из § 5 (черт. 22).



Черт. 21.



Черт. 22.

Один из учеников решает у доски, разъясняя решение и коротко записывая его примерно так:

$$\left.\begin{array}{l}\angle BAE = \angle EAD \text{ — по условию,}\\ \angle BEA = \angle EAD \text{ — как накрест}\\ \text{лежащие при } BC \parallel AD \text{ и секущей } AE,\end{array}\right\} \quad \angle BAE = \angle BEA,$$

$$AB = BE = 9 \text{ см},$$
$$AD = BC = 15 \text{ см},$$
$$EC = BC - BE = 6 \text{ см}.$$

3) Чему равны углы параллелограма, если: а) один из углов вдвое больше другого; б) углы относятся между собой как $7:5$;

в) диагональ параллелограма перпендикулярна к одной из его сторон, а с другой составляет угол в 60°?

4. Задание на дом.

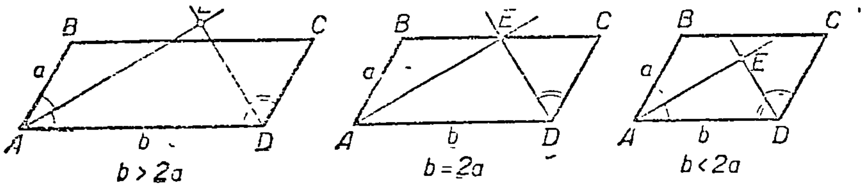
Из учебника § 50, 74 (повторить); 88 (выучить).

Из задачника § 5, № 7.

5-й урок. Тема: Свойство диагоналей параллелограма.

1. Проверка домашнего задания.

При проверке домашнего задания материал для опроса можно распределить так: один из учеников доказывает теорему



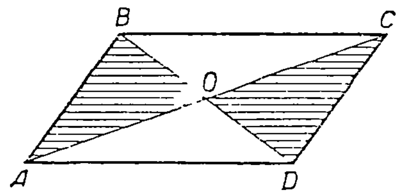
Черт. 23.

о соотношении между сторонами треугольника, второй рассказывает, как через данную точку провести прямую, параллельную данной, и следствие из теоремы о свойстве сторон и углов параллелограма, третий — разъясняет решение задачи № 7 из § 5.

При ответе последнего ученика нужно выяснить, когда биссектрисы углов параллелограма, прилежащих к одной стороне, пересекаются вне параллелограма, на стороне его и внутри параллелограма. При этом сделать чертежи (черт. 23).

2. Изложение нового материала.

Часто при доказательстве теорем учащиеся точно копируют чертёж, данный в учебнике, и если учитель предложит ученику доказать эту же теорему, обозначив некоторые точки другими буквами, изменив соотношение между линейными элементами фигуры, повернув чертёж и т. д., то ученик не может провести доказательство. Нужно, чтобы ученик понял сущность доказательства, умел выделить главное



Черт. 24.

и не тратил времени на запоминание некоторых обозначений, учитывая вышесказанное при доказательстве теорем в классе, а иногда и при опросе, рекомендуем пользоваться чертежами, отличными от чертежей, данных в учебнике.

Поэтому при доказательстве теоремы о свойстве диагоналей параллелограма в классе лучше рассмотреть треугольники *ABO* и *COD* (черт. 24).

3. Закрепление пройденного.

После доказательства теоремы можно устно решить следующие задачи:

1) Одна из сторон параллелограма равна 14 *см*. Могут ли его диагонали выражаться числами:

а) 20 *см* и 22 *см*; б) 12 *см* и 16 *см*; в) 10 *см* и 16 *см*?

2) Может ли диагональ параллелограма равняться его стороне?

Пояснить на примере.

„В параллелограме проведены обе его диагонали. Сколько получилось треугольников? Какие из них равны между собой и почему?“

4. Задание на дом.

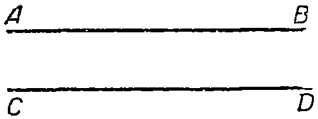
Из учебника § 90 (1), § 77 повторить.

Из задачника § 5, № 8 (устно), 11.

6-й урок. Тема: Первый признак параллелограмов.

1. Проверка домашнего задания.

Проверку домашнего задания рекомендуем провести путём опроса учащихся у доски. Следует задать следующие вопросы:



Черт. 25

Даны две прямые *AB* и *CD* (черт. 25).

Определить, параллельны ли они? Как это сделать?

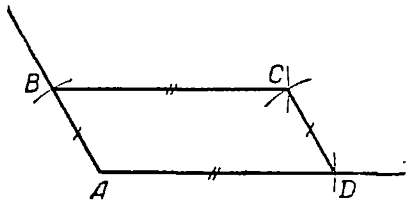
Какую теорему мы использовали? Как читается обратная теорема? Какая теорема называется обратной данной? Как составить обратную теорему?

2. Изложение нового материала.

При изучении параллелограма иногда учащиеся путают свойства параллелограма с его признаками. Поэтому необходимо ещё раз выделить условие и заключение теорем о свойстве сторон, углов и диагоналей параллелограма. Затем выяснить, как можно узнать, что данный четырёхугольник — параллелограм (используя признаки параллельности двух прямых.

Иногда полезно не формулировать теорему самому учителю, а подвести учащихся к формулировке теоремы так, чтобы они сами могли сформулировать её. Например: „Мы знаем, если четырёхугольник — параллелограм, то его противоположные стороны равны“. Выяснив, где условие и заключение в теореме, предложить учащимся составить теорему, обратную данной. „Что дано теперь и что требуется доказать? Как можно назвать эту теорему?“ (Теорема, обратная теореме о свойстве сторон параллелограма, или признак параллелограма.)

Чтобы учащиеся хорошо понимали, что дано в теореме, при доказательстве некоторых теорем рекомендуем вначале по данным элементам построить нужную фигуру, а затем переходить к доказательству. Это можно использовать при доказательстве признаков параллелограмов.



Черт. 26.

Построив четырёхугольник, у которого противоположные стороны равны (черт. 26), доказываем первый признак параллелограмов.

Повторив, какой четырёхугольник называется выпуклым, выяснить, что обратная теорема верна, если дан выпуклый четырёхугольник.

3. Закрепление пройденного.

Закрепление материала, пройденного на данном уроке, можно провести, поставив перед учащимися следующие вопросы:

„Какая теорема называется противоположной данной? Составьте теорему, противоположную доказанной“. (Если в выпуклом четырёхугольнике противоположные стороны не равны или две противоположные стороны равны, а две другие не равны, то этот четырёхугольник не есть параллелограм.) Противоположную теорему можно предложить учащимся доказать дома, указав метод доказательства. Показать учащимся „параллельные линейки“, выяснить, на чём основано устройство этого инструмента и как им пользоваться. (Инструмент должен быть заранее изготовлен учащимися.)

4. Задание на дом.

Из учебника § 78 (повторить), 89 (1).

Доказать теорему, противоположную первому признаку параллелограмов.

Из задачника § 5, № 12.

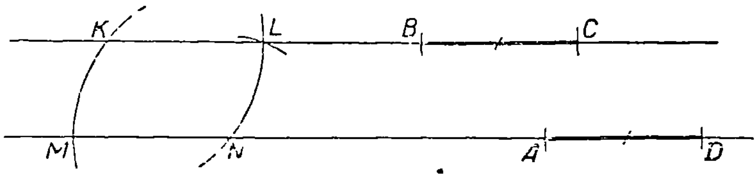
7-й урок. Тема: Второй признак параллелограмов.

1. Проверка домашнего задания.

Проверку домашнего задания следует провести путём опроса у доски.

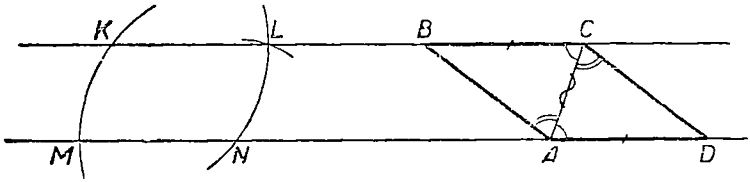
2. Изложение нового материала.

Чтобы учащиеся хорошо понимали, что дано в теореме, необходимо построить две прямые, параллельные между собой, и на них отложить равные отрезки (черт. 27). На доске это может сделать один из учеников.



Черт. 27.

Учащимся ясно, что они построили такой четырёхугольник, у которого $BC \parallel AD$ и $BC = AD$ (черт. 28).



Черт. 28.

(Отрезки и углы выделяем цветным мелком в процессе доказательства.)

3. Закрепление пройденного.

Показать учащимся чертёж, изготовленный одним из них на плотной белой бумаге, на котором начерчен четырёхугольник (параллелограм), и при помощи второго признака предложить, используя циркуль и транспортир, выяснить, будет ли этот четырёхугольник параллелограмом.

4. Задание на дом.

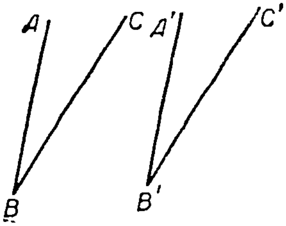
Из учебника § 89 (2), 79 (повторить), 61—63 (повторить) (построение выполнить в тетрадях).

8-й урок. Тема: Третий признак параллелограмов (по диагоналям).

1. Проверка домашнего задания.

При опросе теоремы об углах с соответственно параллельными сторонами предложить провести доказательство на чертеже, отличном от чертежа, данного в учебнике, например дать чертёж 29.

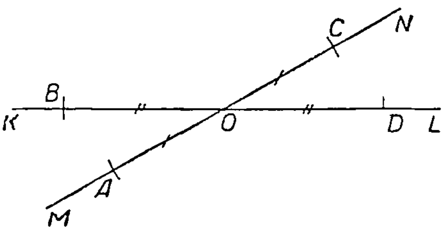
Одному из учеников предложить построить треугольник по трём сторонам; построить угол, равный данному, что облегчит решение задач на построение параллелограма. К решению задач на построение параллелограма нужно учащихся подготовить, повторив из учебника основные задачи на построение и решая задачи на построение треугольников.



Черт. 29.

2. Изложение нового материала.

Так же, как и при доказательстве двух первых признаков параллелограма, необходимо, чтобы учащиеся отчётливо представляли, что им дано в теореме и что требуется доказать. Для этого следует построить четырёхугольник, у которого диагонали, пересекаясь, делятся пополам. Ученик должен начертить две пересекающиеся прямые, затем от точки пересечения отложить отрезки на этих прямых:



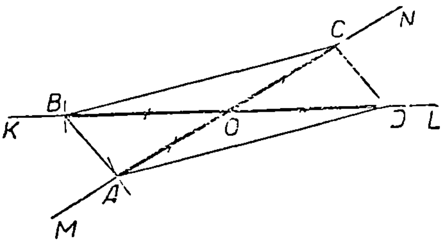
Черт. 30.

$$AO = OC \text{ и } BO = OD.$$

Точки A, B, C и D соединить последовательно отрезками (черт. 30).

Получив четырёхугольник, у которого $AO = OC$ и $BO = OD$ (черт. 31), доказываем теорему.

После доказательства необходимо выяснить, как можно назвать эту теорему (теорема, обратная теореме о свойстве диагоналей параллелограма, или третий признак параллелограмов).



Черт. 31.

3. Закрепление пройденного.

Составить теорему, противоположную доказанной. Рекомендуем к этому уроку приготовить на бумаге чертежи двух четырёхугольников; у одного из них диагонали, пересекаясь, делятся пополам, у другого — нет и предложить учащимся определить при помощи третьего признака, являются ли данные четырёхугольники параллелограмами. Вспомнить, как ещё можно выяснить это (использовать первый и второй признаки).

4. На этом уроке можно решить задачу на построение треугольника, например построить треугольник по двум сторонам и углу, заключённому между ними (один из учеников решает у доски).

Доказательство и исследование можно не записывать (провести устно).

5. Задание на дом.

Из учебника § 90 (2); § 84—86 — повторительный материал; § 64, 65 — чертежи выполнить в тетрадях.

9-й урок. Тема: Центр симметрии параллелограма.

1. Проверка домашнего задания.

При проверке домашнего задания одному ученику предложить доказать третий признак параллелограмов, второму — теорему: „Если для двух точек (A и B) какой-либо прямой построить симметричные им точки (A_1 и B_1) относительно некоторой точки O, то прямая, соединяющая точки A_1 и B_1, будет параллельна данной прямой AB и отрезки AB и A_1B_1 равны".

При опросе повторить, какие точки называются симметричными относительно некоторой точки и как построить точку, симметричную данной относительно некоторой точки.

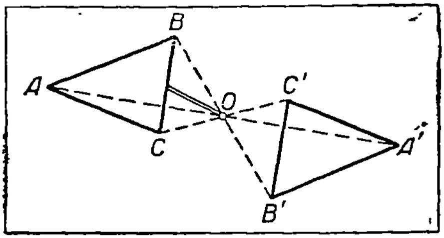
2. Изложение нового материала.

Вспомнив, какие фигуры имеют центр симметрии (если каждой точке данной фигуры соответствует симметричная ей точка той же самой фигуры); рассмотреть окружность, выяснить, что центром симметрии окружности является её центр. Привести примеры фигур, обладающих и не обладающих центром симметрии. Предложить учащимся привести примеры таких фигур, встречающихся в природе, в окружающей обстановке.

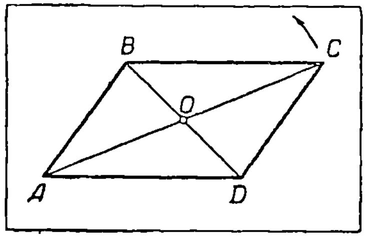
Приготовить рисунки фигур, обладающих центром симметрии, и использовать их на уроке.

Выяснить, как легче всего совместить фигуру с фигурой, симметричной данной относительно некоторого центра, при этом показать учащимся наглядное пособие (черт. 32) (треугольник ABC вырезан и прикреплён к центру O при помощи планки так, что его можно вращать вокруг точки O). „На сколько градусов нужно повернуть треугольник ABC вокруг центра, чтобы он совместился с треугольником $A'B'C'$? Каков минимальный угол поворота?"

Проделав эти упражнения, следует перейти к параллелограму. Доказав, что центром симметрии параллелограма является точка пересечения его диагоналей, выяснить, на сколько градусов нужно повернуть параллелограм вокруг центра симметрии, чтобы новое положение параллелограма совпадало с первоначальным. Каков минимальный угол поворота? При рассмотрении этого вопроса также необходимо использовать наглядное пособие: лист плотной бумаги, на которой изображён параллелограм, к этому параллелограму сверху прикреп-



Черт. 32.

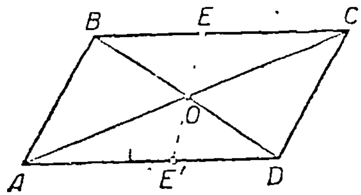


Черт. 33.

лён равный ему другой параллелограм так, что их центры симметрии совпадают, причём второй параллелограм может вращаться вокруг центра симметрии (черт. 33).

3. Закрепление пройденного.

При закреплении пройденного следует предложить учащимся доказать, что точка пересечения диагоналей параллелограма является его центром симметрии, используя только определение фигуры, обладающей центром симметрии. Для доказательства на стороне параллелограма (черт. 34) возьмём произвольную точку E, проведём прямую через точки E и O и докажем, что точка E', лежащая также на стороне параллелограма, является симметричной точке E относительно O. Эти точки лежат по разные стороны от точки O, на одной прямой с точкой O (по построению), следовательно, остаётся доказать, что $EO = OE'$, это доказывается легко.



Черт. 34.

4. Задание на дом (к уроку 11).

Из учебника § 91; § 66—67 — повторить (построение выполнить в тетрадях).

Из задачника § 3, № 3 (1); § 5, № 13.

Предупредить учащихся, что на следующем уроке они будут писать контрольную работу. В контрольной работе будет одна задача на вычисление и одна задача на доказательство. Дать совет, как писать контрольную работу. Указать, что для успеха контрольной работы желательно повторить всё о параллелограме и просмотреть все решённые ранее задачи из § 5.

10-й урок. Контрольная работа.

1-й вариант.

1) Стороны параллелограма равны 7 *см* и 5 *см*; биссектрисы двух углов параллелограма, прилежащих к большей стороне, делят противолежащую сторону на три части. Найти каждую из них.

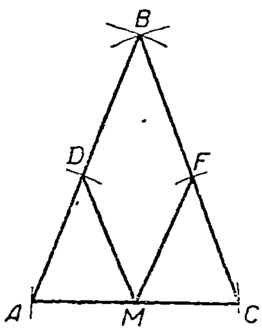
2)

Дано: M — середина AC,
$AB = BC$ и $AD = CF$.

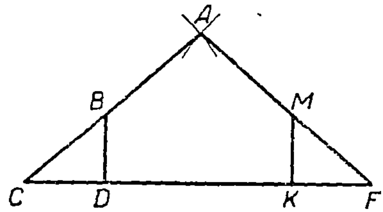
Доказать: $MD = MF$ (черт. 35).

2-й вариант.

1) В параллелограме $ABCD$ через точку пересечения диагоналей проведена прямая EF, которая отсекает на сторонах



Черт. 35.



Черт. 36.

BC и AD отрезки $BE = AF = 7$ *дм*. Определить стороны BC и AD.

2)

Дано: $AC = AF$, $BD \perp CF$,
$MK \perp CF$, $CD = KF$.

Доказать: $BD = MK$ (черт. 36).

3-й вариант.

1) Через точку пересечения диагоналей параллелограма проведена прямая. Отрезок её между параллельными сторонами параллелограма равен 18 *см*. Определить, на какие части делится этот отрезок точкой пересечения диагоналей.

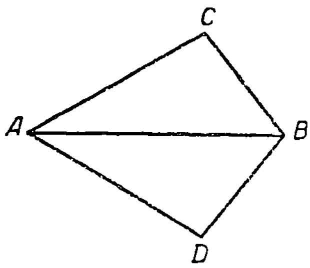
2)

Дано: $AC = AD$ и $CB = DB$.

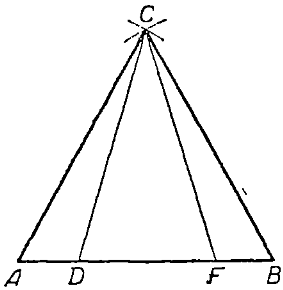
Доказать: AB — биссектриса углов CAD и CBD (черт. 37).

4-й вариант.

1) В параллелограме $ABCD$ высота, которая проведена из вершины B, делит основание AD пополам. Определить пери-



Черт. 37.



Черт. 38.

метр параллелограма, если известно, что сторона AD равна 12 *дм*, а периметр треугольника ABD равен 30 *дм*.

2) Дано: $\angle A = \angle B$,
$AD = BF$.

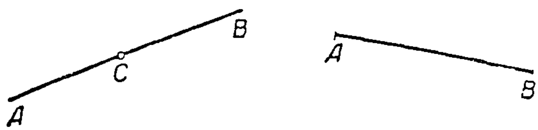
Доказать: 1) $\angle ACD = \angle FCB$;
2) $CD = CF$ (черт. 38).

Вторая задача в каждом варианте дана по курсу VI класса.

11-й урок. Тема: Построение параллелограма.

1. Проверка домашнего задания.

Проверку домашнего задания, как и в большинстве случаев, можно провести путём опроса учащихся у доски. При



Черт. 39.

проверке основных задач на построение прямую и отрезок следует брать не горизонтальными, а наклонными (см., например, черт. 39).

На проверку домашнего задания затратить не более 12—15 минут. Можно проверить часть задания, так как в данном уроке большую часть займёт объяснение нового материала.

2. Изложение нового материала.

Теперь, когда повторены основные задачи на построение, разобраны некоторые задачи на построение треугольников, а также пройден соответствующий теоретический материал, можно перейти к построению параллелограма.

При хорошей подготовке учащихся рекомендуем решение задач на построение четырёхугольников начать с построения четырёхугольника произвольной формы.

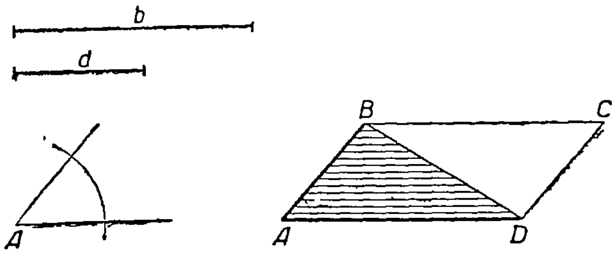
Решить одну-две задачи, например следующие:

1) Построить четырёхугольник по четырём сторонам и диагонали.

2) Построить четырёхугольник по четырём сторонам и одному из углов.

Выяснить, сколько необходимо иметь данных для построения.

Приступая к задачам на построение параллелограма, следует подробно разобрать первую задачу с полной записью анализа, построения, доказательства и исследования. От того, как учащиеся усвоят все эти этапы решения и поймут их зна-



Черт. 40.

чение при решении первой задачи, в значительной мере зависит успех решения более сложных задач на построение.

На данном уроке можно решить следующую задачу с подробной записью всех этапов решения.

„Построить параллелограм по двум сторонам и углу между ними". Следует написать на доске условие; запись решения оформить примерно так, как показано на чертеже 40.

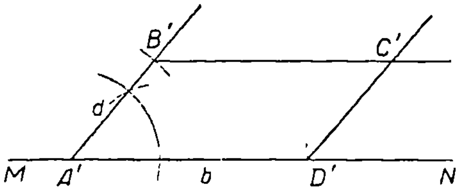
Дано:

1) Анализ.

Чтобы построить параллелограмм по двум сторонам и углу между ними, нужно построить треугольник по двум сторонам и углу между ними, где сторонами треугольника будут являться данные стороны параллелограма, а углом треугольника — данный угол параллелограма. Затем треугольник дополнить до параллелограма, проведя через вершины B и D прямые, параллельные противоположным сторонам треугольника.

2) Построение.

На произвольной прямой MN (черт. 41) возьмём произвольную точку A' и при точке A' построим угол, равный данному углу A, так, чтобы одна из его сторон лежала на прямой MN. Затем на сторонах угла от его вершины отложим отрезки, равные данным отрезкам b и d. Обозначив концы



Черт. 41.

через B' и D', соединим их отрезком прямой. Проведя через точки B' и D' прямые, параллельные противоположным сторонам треугольника, получим четырёхугольник $A'B'C'D'$.

3) Доказательство.

а) Четырёхугольник $A'B'C'D'$ — параллелограм, так как

$$\left.\begin{array}{l} A'D' \parallel B'C' \\ A'B' \parallel D'C' \end{array}\right\} \text{по построению.}$$

б) Параллелограм $A'B'C'D'$ — искомый, так как

$$\left.\begin{array}{l} A'B' = d \\ A'D' = b \\ \angle A' = \angle A \end{array}\right\} \text{по построению.}$$

4) Исследование.

Задача имеет решение, если $\angle A < 180°$, и только одно. Следует указать учащимся, что анализ является существенной частью решения задачи на построение. Здесь мы анализируем, составляем план построения, учитывая данные элементы и что требуется построить, вспомнив при этом некоторые свойства искомой фигуры. Чтобы облегчить проведение анализа, мы от руки чертим в данном случае параллелограм, выделяем данные в нём элементы. Чаще всего построение параллелограма сводится к построению треугольника по тем или иным элементам в зависимости от того, по каким элементам нужно построить параллелограм.

При описании построения можно иногда опускать разъяснение построения треугольника, а записать так: „Построив треугольник $A'B'D'$ по двум сторонам и углу между ними, через точки B' и D' проводим прямые, параллельные противоположным сторонам треугольника, до их взаимного пересечения. Получим четырёхугольник $A'B'C'D'$".

Следует разобрать различные способы построения параллелограма по данным условиям, указать на преимущество одного из них над остальными. Желательно иногда составить условие так, чтобы задача не имела решения.

Не всегда рекомендуется записывать все этапы решения задачи, а некоторые из них проводить устно; например, при задании на дом можно указать: „Решая задачу на построение, опишите только анализ или только построение". Также следует пояснить, что различные способы решения приводят к построению одного и того же параллелограма, вернее, равных между собой фигур, и считается, что задача имеет одно решение. Задача имеет два решения и более, если можно по данным элементам построить несколько различных фигур. Конечно, со всеми этими замечаниями учащиеся знакомятся постепенно.

3. Задание на дом.

Прежде всего подробно разобрать задачу, решённую в классе.

Из задачника § 5, № 14 (описать подробно все этапы решения); № 15(1) — провести построение, ничего не описывая.

12-й урок. Тема: Построение параллелограма.

1. Анализ контрольной работы.

После проверки контрольных работ необходимо до выдачи их учащимся на следующем уроке или через урок разъяснить типичные ошибки, встретившиеся в работе, а также разъяснить грубые ошибки, которые были допущены отдельными учениками. Обратить внимание учащихся на оригинальные способы решения. Назвать фамилии учащихся, давших лучшие работы. Лестно отозваться об учащихся, у которых есть некоторые улучшения в работе, особенно при этом следует обращать внимание на тех, у кого были пробелы в знаниях. Это придаёт уверенность ученику в свои силы и у него появляется большее желание работать.

При раздаче работ нужно сделать замечания относительно оформления записи решения. Ученика, выполнившего работу небрежно, заставить переписать её дома.

Показать всем учащимся работы с лучшим оформлением, пройдя при этом по классу. За оформлением записи необходимо следить систематически, для этого при опросе ученика просматривать его тетрадь, делая некоторые указания.

Рекомендуем раз в месяц брать тетради для просмотра, оформления записи и чертежей.

Запись учителя на доске и в тетрадях учащихся должна быть образцом для учеников.

2. Проверка домашнего задания.

При проверке решения задачи 15 (1) из § 5 следует вызвать слабого ученика, проверив этим, как класс усвоил материал, данный на предыдущем уроке.

Во время подготовки учащегося у доски следует, пройдя по классу, просмотреть правильность выполнения записи решения задачи 14, сделать отдельные замечания и вызвать к доске ученика, давшего лучшее оформление решения задачи, показав остальным учащимся его запись в тетради.

С учащимися, давшими плохо оформленное решение, можно побеседовать после уроков или, взяв на дом их тетради, тщательно проверить их и указать в письменной форме на допущенные ошибки и недочёты.

3. Решение задач на построение параллелограма.

В классе рекомендуем решить следующие задачи на построение:

1) Построить параллелограм по двум неравным сторонам и одной из диагоналей.

2) Построить параллелограм по двум диагоналям и одной из сторон, записав при этом только доказательство и исследование.

4. Задание на дом.

Из задачника § 5, № 15 (2, 3) — записать анализ и построение, № 16.

13-й урок. Тема: Построение параллелограма.

1. Проверка домашнего задания.

При проверке домашнего задания можно вызвать одного ученика для объяснения решения задачи 16. Во время его подготовки у доски предложить некоторым учащимся прочесть свою запись решения задачи 15 (2), а затем и 15 (3). Спросить при этом у остальных: „Кто дополнит? Кто записал по-другому?“ И т. п. За ответы с места можно некоторым учащимся поставить оценки, и если выяснилось, что все учащиеся легко справились с домашней работой, можно не проверять решение этих задач у доски или вызвать двух учащихся для выполнения только построения.

2. Решение задач на построение.

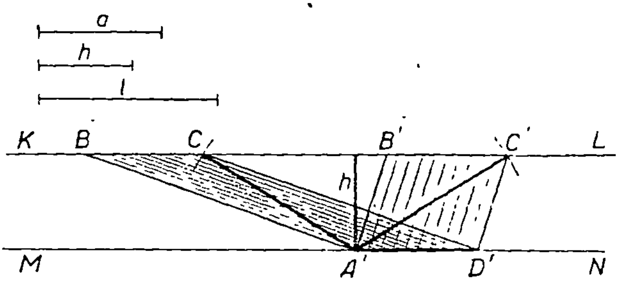
На данном уроке можно решить следующие задачи на построение:

1) Построить параллелограм по двум диагоналям и углу между ними.

2) Построить параллелограм по основанию, высоте и диагонали.

Прежде чем приступить к решению второй задачи, нужно провести с учащимися упражнение на проведение высот в параллелограме путём опроса их у доски, вспомнив вначале, как проводятся высоты в треугольнике.

При решении этой задачи нужно особое внимание уделить исследованию, так как задача может иметь два решения, одно или не иметь решения, — это зависит от сравнительной длины высоты и диагонали.



Черт. 42.

Разберём подробнее все случаи:

Д а н о:

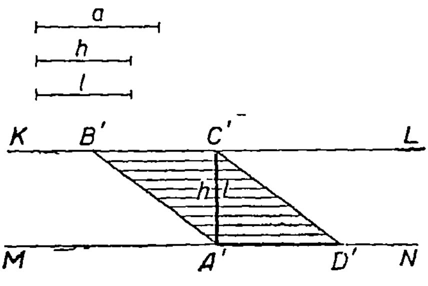
a — основание,

h — высота,

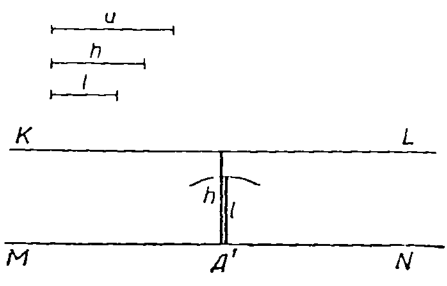
l — диагональ.

П о с т р о е н и е:

1) Если высота меньше диагонали, то задача имеет два решения (черт. 42).



Черт. 43.



Черт. 44.

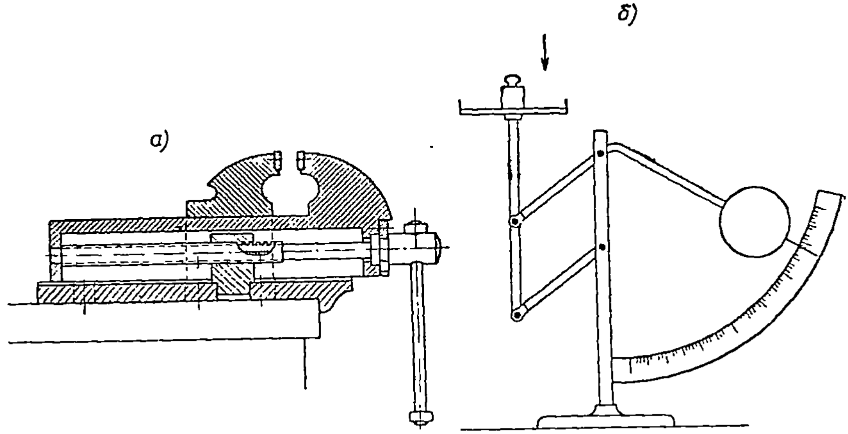
2) Если высота равна диагонали, то задача имеет только одно решение (черт. 43).

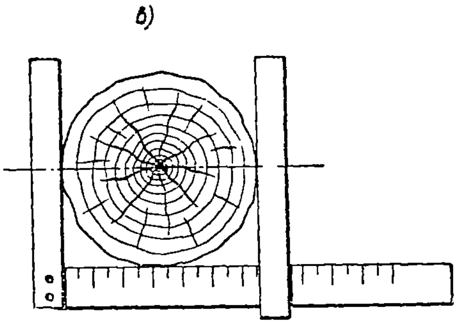
Если отрезок h больше l, то задача решения не имеет (черт. 44).

3. Задание на дом.

Практическое приложение теории параллелограма.

Начертив схемы (чертежи) устройства параллельных тисков, весов для писем и мерной вилки для измерения диаметра дре-





Черт. 45.

весных стволов, потребовать от учащихся обоснования устройства этих инструментов. Конечно, будет лучше, если учащиеся с помощью учителя сами предварительно сделают эти чертежи на плакатах.

Приводим чертежи этих инструментов (черт. 45):

1) Продумать, сколько и какие элементы надо иметь, чтобы построить параллелограм.

2) Доказать, что биссектрисы внутренних углов параллелограма при пересечении образуют параллелограм.

Из учебника повторить § 56 и 57.

14-й урок. Тема: Прямоугольник и его свойства.

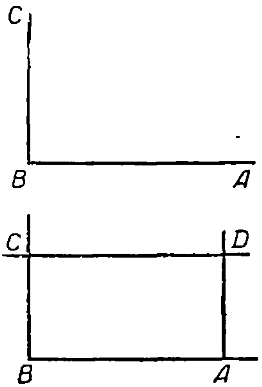
1. Проверка домашнего задания.

Вызвав двух учеников к доске, предложить одному из них доказать теоремы § 57, а второму разобрать на доске доказательство теоремы, заданной для самостоятельной работы.

Обратить внимание учащихся на то, что при доказательстве теорем § 57 применяются два способа — наложения и приложения.

2. Изложение нового материала.

На уроке необходимо иметь две модели параллелограма: 1) параллелограм, не имеющий прямых углов, и 2) прямоугольник. Если нет модели, то нужно сделать на доске соответствующие чертежи.



Черт. 46.

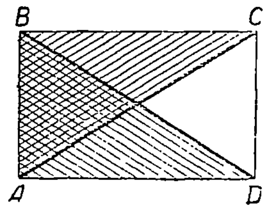
Выяснить, что есть общего у этих фигур (это четырёхугольники, у которых противоположные стороны параллельны).

„Какими свойствами обладают стороны, углы и диагонали параллелограма? Чем отличаются эти параллелограмы друг от друга?"

Дать определение прямоугольника. Указать, что определение „Параллелограм, у которого один угол прямой, называется прямоугольником" есть более точное, нежели приведённое в учебнике, потому что определение не должно содержать избыточных данных.

(Вопросы ставятся всему классу.)

Затем предложить учащимся начертить прямой угол (черт. 46) и стороны его пересечь прямыми, параллельными другой стороне. Спросить у учащихся, почему каждый из остальных углов — прямой. Сказав, что прямоугольник обладает своими особыми свойствами, доказать, что в прямоугольнике диагонали равны, рассмотрев, например, треугольники ABD и ABC (черт. 47). Спросить, какие ещё треугольники можно рассмотреть для доказательства теоремы и как узнать, какую пару треугольников нужно выбирать (необходимо брать такие треугольники, в одном из которых стороной является диагональ AC, а в другом стороной является диагональ BD) и почему (так как требуется доказать, что $AC = BD$).



Черт. 47.

3. Закрепление пройденного.

Решить в классе задачи из § 5 № 20, 22 и 23 (один из учеников решает у доски). Составить теорему, обратную доказанной (признаки прямоугольника).

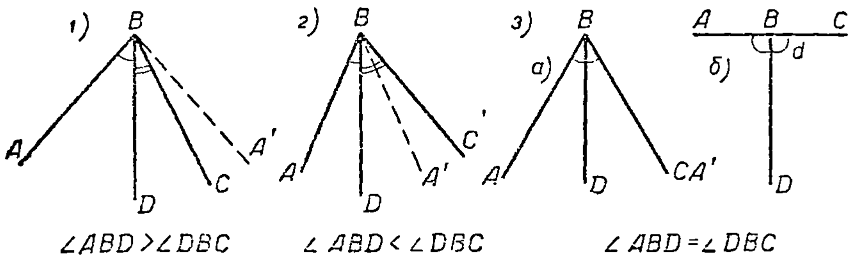
4. Задание на дом.

Из учебника § 92; § 37—повторить.

Из задачника § 3, № 25 (1); § 5, № 24.

Примечание. При хорошей подготовке учащихся, после того как повторен § 37, можно доказать, что прямые, проходящие через середины противоположных сторон прямоугольника, являются его осями симметрии, а затем доказать, что эти прямые пересекаются в точке пересечения диагоналей. Можно это доказательство привести и при повторении пройденного. Для этого, предварительно, проделать следующее упражнение.

Вспомнить, какие точки называются симметричными относительно оси; построить точку, симметричную данной отно-



Черт. 48.

сительно некоторой прямой; построить отрезок, симметричный данному относительно некоторой оси: построить треугольник, симметричный данному относительно некоторой оси.

Вспомнить, какие фигуры называются симметричными относительно оси; выяснить, каким образом легче всего совместить симметричные фигуры; привести примеры фигур, обладающих осевой симметрией.

Далее проделать следующие упражнения.

Даны два прилежащих угла. Какое положение займёт сторона одного из них, если его повернуть на 180° относительно их общей стороны?

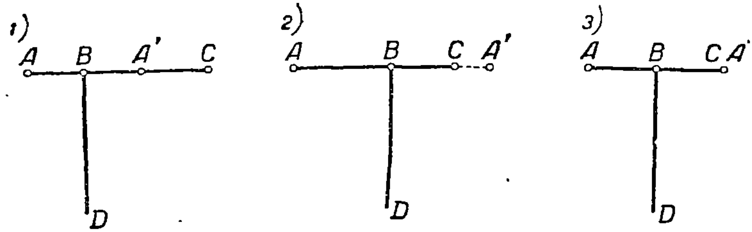
Разобрать три случая (черт. 48);

$$\angle ABD > \angle DBC; \quad \angle ABD < \angle DBC; \quad \angle ABD = \angle DBC.$$

Остановиться на случае 3б и проделать следующее упражнение (черт. 49):

Какое положение займёт точка A после поворота на 180° отрезка AB вокруг прямой BD, перпендикулярной к AB, если $AB < BC$? $AB > BC$? $AB = BC$?

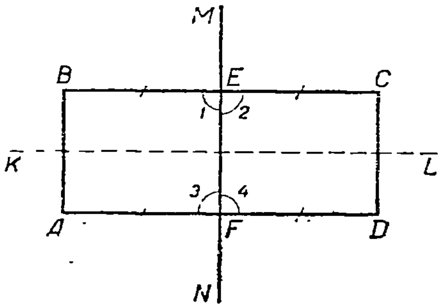
Проделав это, можно доказать, что прямые, проходящие через середины противоположных сторон прямоугольника, являются его осями симметрии (черт. 50).



Черт. 49.

Дано: $ABCD$ — прямоугольник,
MN — прямая,
$BE = EC$,
$AF = FD$.

Требуется доказать MN — ось симметрии прямоугольника.



Черт. 50.

Доказательство.

Рассмотрим четырёхугольник $ABEF$; в нём:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ BE \parallel AF, \text{ так как } BC \parallel AD; \\ 2)\ BE = AF, \text{ так как } BC = AD, \text{ и} \\ \qquad\qquad BE = \frac{1}{2} BC, \\ \qquad\qquad AF = \frac{1}{2} AD; \end{array}\right\} ABEF \text{ — параллелограм;}$$

$$\begin{array}{l} ABEF \text{ — параллелограм} \\ \text{и } \angle A = d; \end{array} \left\{ \begin{array}{l} ABEF \text{ — прямоугольник:} \\ \quad\downarrow \\ \angle 1 = \angle 2 = d, \\ \angle 3 = \angle 4 = d. \end{array}\right.$$

Повернув прямоугольник $ABEF$ вокруг MN на 180°, получим:

сторона BE пойдёт по EC, так как $\angle 1 = \angle 2$;
сторона AF пойдёт по FD, так как $\angle 3 = \angle 4$;
точка B упадёт в точку C, так как $BE = EC$;
точка A упадёт в точку D, так как $AF = FD$;
AB совпадёт с CD, так как через две точки можно провести только одну прямую.

Четырёхугольник $ABEF$ совместился с четырёхугольником $FECD$, следовательно, MN — ось симметрии прямоугольника.

Таким же образом доказывается, что прямая KL, проходящая через середины двух других сторон прямоугольника, является его осью симметрии.

Можно провести доказательство по-другому, проведя $MN \perp BC$ через середину BC.

При доказательстве следует использовать наглядное пособие — прямоугольник, у которого четырёхугольник $ABEF$ можно повернуть на 180° вокруг EF.

15-й урок. Тема: Решение задач на вычисление из раздела „Прямоугольник".

1. Проверка домашнего задания.

Вызвав двух учеников к доске, предложить им пояснить решение задач из задания на дом, а с остальным составом класса провести путём вопросов проверку знаний по заданному материалу.

2. Решение задач на вычисление из раздела „Прямоугольник" (§ 5, № 27).

Прежде чем приступить к решению задач, следует с учащимися повторить те свойства фигур, которые будут использоваться при решении.

Так, приступая к решению задачи № 27 из § 5, повторить с классом следующие вопросы или включить их как дополнительные при проверке выполнения домашнего задания (при ответе учащихся у доски):

„Какова величина углов равностороннего треугольника? Определить величину острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника. Что нужно знать, чтобы найти периметр прямоугольника?" (Каждую из неравных сторон или их сумму.)

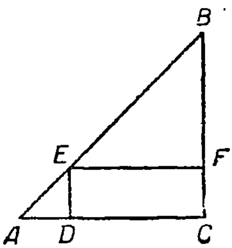
Проделав это, следует прочесть учащимся условие задачи полностью, а затем повторить условие задачи, разбив его на части. При вторичном чтении ученик, вызванный к доске, выполняет чертёж, пишет, что дано и что требуется определить.

Рассмотрим задачу (черт. 51).

Дано: $\triangle ABC$,
$\angle C = d$,
$AC = BC = 6$ *см*,
$DEFC$ — прямоугольник.

Определить P_{DEFC}.

Если учащийся затрудняется в решении задачи, то ему следует задать несколько вопросов: „Можно ли определить каждую из сторон прямоугольника? Можно ли найти сумму двух неравных сторон? Например, $EF + FC$. Сумма каких отрезков известна? ($BF + FC$).



Черт. 51.

Теперь учащийся должен сделать вывод, что можно найти $EF + FC$, если $EF = BF$, и решение задачи сводится к тому, чтобы доказать, что $EF = BF$.

Решение последовательно сопровождается записью.

Вторую задачу можно предложить учащимся решить самостоятельно (§ 5 № 26). Пройдя по классу, выяснить, справляются ли учащиеся с задачей.

Учащимся, быстро справившимся с решением, можно поставить оценки. Когда бо́льшая часть учащихся закончит решение, следует вызвать одного ученика к доске для ответа. Выслушав его решение, выяснить, кто решал по-другому.

Разобрать в классе следующие упражнения:

1) Диагональ прямоугольника составляет со стороной угол в 35°. Чему равен острый угол, образованный пересечением диагоналей?

2 На какой угол надо повернуть прямоугольник вокруг центра симметрии, чтобы он снова занял прежнее положение?

3) Доказать, что треугольники, полученные при пересечении диагоналей прямоугольника, будут равнобедренными.

3. Задание на дом (к уроку 17).

Из задачника § 3, № 25 (2, 3); § 5, № 28.

В домашнее задание включена задача на построение прямоугольного треугольника, что подготовит учащихся к решению задач на построение прямоугольника. Предупредить учащихся, что на следующем уроке будет дана контрольная работа по пройденному материалу (прямоугольник и параллелограм). Посоветовать, как готовиться к контрольной работе.

16-й урок. Контрольная работа.

1-й вариант.

1) В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник, имеющий с треугольником общий угол. Найти каждый из катетов треугольника, если периметр прямоугольника равен 25 *см*.

2) В параллелограме угол между высотами, проведёнными из вершины тупого угла, равен 70°. Найти углы параллелограма.

2-й вариант.

1) В прямоугольнике проведена биссектриса одного из углов его. Зная, что эта биссектриса делит сторону прямоугольника, пересекаемую ею, на отрезки длиной в 3 *см* и 5 *см*, найти периметр прямоугольника.

2) Высота параллелограма, проведённая из вершины тупого угла, делит этот угол в отношении 3 : 5. Определить углы параллелограма.

3-й вариант.

1) Перпендикуляр, опущенный из вершины прямоугольника на его диагональ, делит её в отношении 1 : 3. Определить длину диагонали, если известно, что меньшая сторона прямоугольника равна 16 *см*.

2) В параллелограме угол между высотами, проведёнными из вершины острого угла, равен 135°. Определить углы параллелограма.

4-й вариант.

1) В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие — на катетах. Определить гипотенузу, если известно, что стороны прямоугольника относятся, как 3 : 2, а периметр его равен 20 *дм*.

2) Высота, проведённая из вершины тупого угла параллелограма, делит противолежащую сторону пополам и образует с другой стороной угол в 30°. Определить углы параллелограма.

17-й урок. Тема: Решение задач на построение прямоугольника.

1. Анализ контрольной работы.

Анализ контрольной работы проводится с учётом всех моментов, отмеченных при анализе первой контрольной работы (урок 12).

2. **Проверка домашнего задания.**

Выполнение домашней работы, учитывая цель урока (решение задач), провожу путём обхода класса и опроса учеников при решении задач.

3. **Решение задачи на построение прямоугольника.**

В классе решить задачи:

1) Построить прямоугольник по основанию и диагонали.

Примечание. Учащиеся легко справятся с решением, так как дома они строили прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе.

Здесь нужно обратить внимание учащихся на то, что при решении задач на построение прямоугольника один элемент — прямой угол — всегда дан.

2) Построить прямоугольник по диагонали d и острому углу α между диагоналями.

3) Сколько основных элементов прямоугольника надо знать (кроме прямого угла), чтобы построить прямоугольник?

4) Стороны прямоугольника равны 8 *см* и 15 *см*. На какие части делит биссектриса угла бо́льшую сторону прямоугольника?

Методика решения задач на этом уроке такова:

Вызвав двух учеников к доске, дать одному одну из указанных четырёх задач, а второму — доказать одну из ранее пройденных теорем. Вместе с классом решить первую задачу, а затем, предложив ученику, решавшему задачу, доказать теорему, приступить к заслушиванию ответа второго ученика. Если второй ученик покажет твёрдое знание теоремы, то предложить ему решить устно задачу на прямоугольник и параллелограм. Затем вызвать третьего ученика, которому дать для решения вторую задачу, и т. д.

4. **Задание на дом.**

Из учебника § 38, 39, 40 — повторить.

Из задачника § 5, № 30 (2, 3).

18-й урок. Тема: Ромб и его свойства.

1. **Проверка домашнего задания.**

При проверке домашнего задания подробно остановиться на доказательстве того, что биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является его осью симметрии, тогда учащиеся смогут самостоятельно доказать, что диагонали ромба есть его оси симметрии.

При проверке домашнего задания можно практиковать и такую форму: вызвать 3—4 учеников для решения задач на отдельном листе бумаги, посадив их за передние парты. Чтобы включить учащихся в работу класса, задание даётся только на время проверки домашнего задания (оценка за работу сообщается на следующем уроке).

2. Изложение нового материала.

При изложении нового материала прежде всего следует вспомнить, какие четырёхугольники мы изучили, предложить учащимся дать определение параллелограма и прямоугольника.

Затем, начертив параллелограм, у которого все стороны равны, сказать, что такой параллелограм называется ромбом. Можно при этом использовать наглядные пособия (показать учащимся приготовленные из картона параллелограм, прямоугольник и ромб).

Выяснить, какие свойства ромба не нужно доказывать и почему. Сказав, что ромб обладает ещё особыми свойствами, можно перейти к доказательству теоремы о свойстве диагоналей ромба. Предложить при этом учащимся самим доказать эту теорему (вызвать желающего к доске). После доказательства спросить, кто может доказать по-другому (рассмотреть равнобедренный треугольник), выяснить, какое доказательство лучше.

3. Закрепление пройденного.

После выяснения свойств ромба в классе решить задачи из § 5, № 36, 38, 39. Вызванный к доске ученик выполняет чертёж, пишет, что дано и что требуется определить, а решение можно провести устно.

4. Задание на дом.

Из учебника § 93 (1 и 2) — второй раздел; оси симметрии ромба учащиеся разбирают дома самостоятельно. Это приучает их работать с книгой. Также для самостоятельного разбора можно давать несложный материал в целях экономии времени.

Из задачника § 5. № 37 (1), 40.

2-я ЧЕТВЕРТЬ — 14 часов.

19-й урок. Тема: Решение задач на доказательство и на построение ромба.

1. Сообщение учащимся плана прохождения материала по геометрии на 2-ю четверть.

Вначале урока уделяется 3—5 минут на сообщение программы по математике на 2-ю четверть, о контрольных работах, о работе кружка и т. д., т. е. вопросы, определяющие работу во 2-й четверти.

2. Проверка домашнего задания.

Проверив у доски решение задачи на доказательство [№ 37 (1)], выяснить, что это и есть признак ромба. Затем вызвать второго ученика и предложить ему доказать, что диагонали ромба являются его осями симметрии.

3. Решение задачи на доказательство и на построение из раздела „Ромб".

Вызвать одного ученика и предложить решить задачу 37 (2).

Примечание. При решении задачи на доказательство мы имеем дело с доказательством теоремы, не включённой в обязательный курс. Решение задач на доказательство имеет большое значение в развитии логической мысли учащихся; вывод, сделанный самостоятельно, помогает усвоению доказательства теорем. Решение задач на доказательство повышает развитие учащихся и сознательность в усвоении курса. Решение задач на доказательство надо начинать ещё в VI классе при прохождении первой темы геометрии.

Задачи на доказательство можно предлагать в различной форме:

1) дать учащемуся готовый чертёж, на котором отмечено, что дано, и записано, что требуется доказать;

2) по условию задачи предложить учащимся самим изготовить чертёж. Для экономии времени следует на уроке при решении задач пользоваться заранее заготовленными плакатами — чертежами.

Прежде чем перейти к решению задачи [№ 37 (2)], нужно вспомнить с учащимися свойства ромба, обратить внимание на особые свойства, составить обратные теоремы и доказать затем, что всякий параллелограм, у которого диагональ делит угол при вершине пополам, есть ромб [№ 37 (2)]. Для этого выяснить, что дано и что требуется доказать; сделав чертёж на доске, предложить учащимся провести доказательство самостоятельно, дав на это минут 10, затем вызвать одного из учащихся к доске для проверки решения задачи.

1. В ромбе проведена диагональ. Как доказать, не проводя других построений, что диагональ ромба — биссектриса угла?

2. Можно ли утверждать, что если в четырёхугольнике диагонали равны, то он — прямоугольник?

3. Желая проверить, имеет ли отрезанный кусок материи форму квадрата, портниха убеждается, что при сгибании куска материала по каждой из диагоналей края обеих частей совпадают. Достаточна ли такая проверка?

Если останется ещё время, то можно решить следующие задачи на построение ромба: 1) по стороне и диагонали [§ 5, № 42 (1)] и 2) по данным диагоналям.

4. Задание на дом.

Из учебника § 94 — разобрать самостоятельно (квадрат и его свойства).

Из задачника § 5, № 41, 42 (2).

20 й урок. Тема: Решение задач из подтемы „Квадрат".

1. Проверка домашнего задания.

Домашнюю работу проверить путём опроса учащихся у доски и с места.

2. Решение задач из подтемы „Квадрат".

На данном уроке можно решить задачи 44 и 45 из § 5.

Для решения задачи 44 вызвать ученика к доске; решение сопровождать записью.

Задачу 45 можно предложить учащимся решить самостоятельно (раньше была решена подобная задача — № 27).

Рассмотреть следующие вопросы:

1) В чём сходство и в чём различие между:

а) квадратом и параллелограмом?

б) квадратом и прямоугольником?

в) квадратом и ромбом?

2) Какие углы образует диагональ квадрата с его сторонами?

3) Как построить квадрат, если дана его сторона?

4) Как вписать в прямоугольный треугольник квадрат, две из сторон которого лежали бы на катетах?

3. Задание на дом.

Построить равнобедренный прямоугольный треугольник по его гипотенузе.

Из задачника § 5, № 46, 47. Задача на построение является подготовительной для построения квадрата по его диагонали.

21-й урок. Тема: Доказательство теоремы о делении отрезка на равные части. Следствие.

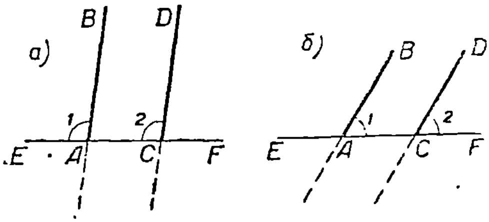
1. Проверка домашнего задания.

При проверке домашнего задания рассмотреть различные способы построения прямоугольного равнобедренного треугольника по гипотенузе.

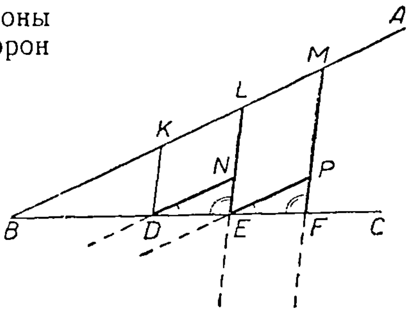
2. Изложение нового материала.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, на которой основано деление отрезка на равные части, необходимо, как всегда, повторить те теоремы и свойства геометрических фигур, на которых основано доказательство теоремы, изучаемой на данном уроке.

Вспомнить: 1) признаки равенства треугольников; 2) если даны два равных треугольника и известны их углы, как определить, какие стороны равны между собой; 3) свойство сторон



Черт. 52.



Черт. 53.

параллелограма; 4) рассмотреть некоторые элементы чертежа, получаемого при доказательстве (черт. 52).

Найти соответственные углы и показать их (обратить внимание на $\angle 1$ и $\angle 2$). В чём состоит их свойство?

Затем привести доказательство теоремы, оставив чертёж 52 на доске для сравнения с чертежом теоремы.

Дано: $\angle ABC$,
$DE = EF$,
$KD \parallel LE \parallel MF$.

Требуется доказать: $KL = LM$ (черт. 53).

При доказательстве теоремы, проведя дополнительное построение, можно учащимся раскрыть план доказательства при помощи вопросов следующим образом:

„Что нам дано? ($DE = EF$.)

Что требуется доказать? ($KL = LM$.)

Какому отрезку равен отрезок KL? ($KL = DN$.)

Какому отрезку равен отрезок LM? ($LM = EP$.)

Если мы докажем, что $DN = EP$, то и отрезок KL будет равен отрезку LM.

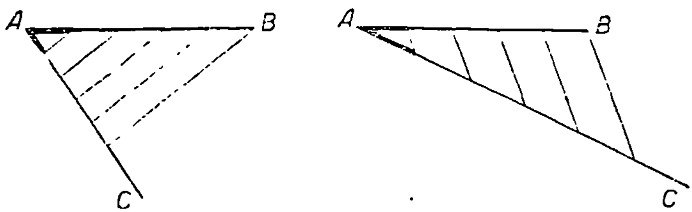
Как доказать, что $DN = EP$? (Нужно доказать, что треугольник DNE равен треугольнику EPF.) Докажем, что треугольник DNE равен треугольнику EPF".

Раскрыв план доказательства, проводим доказательство теоремы, привлекая к этому учащихся. Необходимо отметить, что на одной стороне угла откладываются равные между собой отрезки, после проведения параллельных прямых на другой стороне угла отложатся также равные между собой отрезки, но в общем случае первые отрезки будут не равны вторым.

3. **Закрепление пройденного.**

После доказательства теоремы следует вызвать учащегося к доске для доказательства следствия: „Прямая, проведённая через середину стороны треугольника параллельно другой его стороне, делит третью сторону пополам".

При этом не рекомендуем читать сразу формулировку следствия, а предложить ученику начертить треугольник произ-



Черт. 54.

вольной формы, затем разделить одну из его сторон пополам и т. д. Когда чертёж будет сделан, сказать, что требуется доказать, и предложить ученику записать условие, заключение и дать формулировку следствия.

Далее выяснить, на сколько равных частей мы умеем делить отрезок, и решить задачу: „Отрезок прямой разделить на данное число равных частей".

Выяснить, что длина каждой части зависит только от длины данного отрезка и от того числа частей, на которое требуется разделить этот отрезок, и не зависит от длины равных отрезков, откладываемых на вспомогательной прямой, и угла наклона этой прямой к данному отрезку.

Для этого два равных отрезка разделить на одинаковое число равных частей (черт. 54) ($AB = 35$ *см*, $n = 5$, каждая часть равна 7 *см*, независимо от величины угла BAC и от длины откладываемого отрезка).

4. Задание на дом.

Из учебника § 95, 96, 100.

Из задачника § 5, № 43 — разобрать различные способы построения.

22-й урок. Тема: Средняя линия треугольника и её свойства.

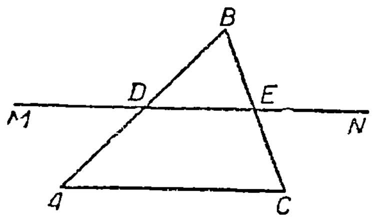
1. Проверка домашнего задания.

Проверку домашнего задания провести одним из указанных выше способов.

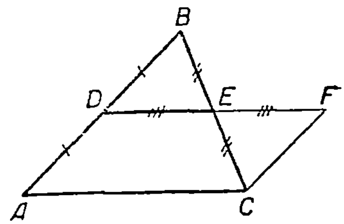
2. Изложение нового материала.

При доказательстве теоремы о средней линии треугольника необходимо учесть следующее:

1) Формулировка теоремы, данная в учебнике, трудно усваивается учащимися (прямая, проведённая через середины двух сторон треугольника, т. е. средняя линия треугольника, параллельна третьей его стороне; отрезок этой прямой, лежащий внутри треугольника, равен половине третьей стороны); можно дать формулировку в следующем виде: средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника, противолежащей ей, и равна половине этой стороны, учитывая при этом определение средней линии, данное в § 96.



Черт. 55.



Черт. 56.

2) В доказательстве, данном в учебнике Киселёва, говорится: „Для доказательства вообразим, что через середину D стороны AB мы провели прямую, параллельную стороне AC". Лучше не воображать эту прямую, а провести её (прямая MN, черт. 55).

3) Иногда первая часть доказательства вызывает затруднение у учащихся, тогда можно доказательство изложить иначе, не давая доказательства, изложенного в учебнике, или проведя его при повторении пройденного материала. Приведём доказательство теоремы (черт. 56):

$$\text{Дано: } \triangle ABC,\quad AD = DB,\quad BE = EC.$$

$$\text{Требуется доказать: } DE \parallel AC,\quad DE = \frac{1}{2}AC.$$

Доказательство.

Продолжим DE за точку E так, чтобы $EF = DE$, и точку F соединим с C отрезком FC.

$\triangle DBE = \triangle CEF$, так как $BE = EC$ — по условию,
$DE = EF$ — по построению,
$\angle DEB = \angle CEF$ — как вертикальные.

Следовательно,

$\angle BDE = \angle EFC$ и $DB = CF$.

$$AB \parallel CF. \qquad (1)$$

Но $AD = DB$ — по условию $\}$ $AD = CF$ (2)

Из (1) и (2) следует:

$ADFC$ — параллелограм,

$DE \parallel AC$, $AC = DF = DE + EF$, но $DE = EF$ — по построению,

значит: $AC = 2DE$ и $DE = \frac{1}{2}AC$.

Итак: $DE \parallel AC$ и $DE = \frac{1}{2}AC$, что и требовалось доказать.

3 Закрепление пройденного.

Для закрепления рассмотренной теоремы решить устно из § 5 задачи 53, 54, 55, 56.

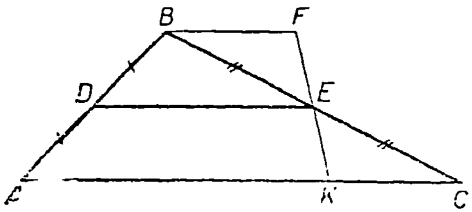
При решении задачи 55 выяснить, что решение основано на свойстве суммы: если каждое слагаемое уменьшить или увеличить в одинаковое число раз, то и сумма уменьшится или увеличится во столько же раз.

Рассмотреть задачу: „Определить вид четырёхугольника, который получится от последовательного соединения середин сторон любого четырёхугольника".

4. Задание на дом.

Из учебника § 97.

Из задачника § 5, № 42 (4), 57. К задаче 57 есть указание в разделе „Ответы".



Черт. 57.

Вместо задачи 42 (4) можно дать задачу на доказательство, которая поможет учащимся разобраться в структуре чертежа к теореме о свойстве средней линии трапеции, сделав чертёж в классе и записав условие (черт. 57).

Дано: $\triangle ABC$,
$AD = DB$,
$BE = EC$,
$AB \nparallel FK$.

Требуется доказать: $FE = EK$.

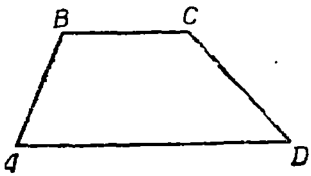
23-й урок. Тема: Трапеция. Свойство средней линии трапеции.

1. Проверка домашнего задания.

Проверку домашнего задания провести одним из указанных выше способов.

2. Изложение нового материала.

Чтобы научить учащихся работать с книгой, следует практиковать на уроке самостоятельную работу учащихся над отдельными вопросами. Например, доказательство теоремы о свойстве средней линии трапеции можно предложить учащимся разобрать на уроке самостоятельно, повторив предварительно, как учить теорему, и проведя соответствующую подготовительную работу в классе. Можно включить её в домашнее задание. Подготовительной работой в этом случае является решение учащимися домашней задачи на доказательство.



Черт. 58.

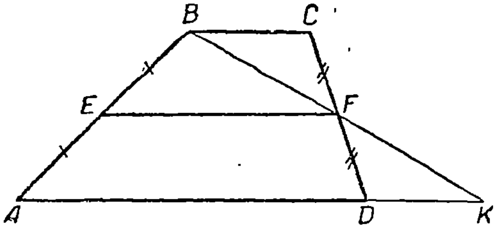
Проверив домашнее задание, выяснить, какие четырёхугольники мы изучили (параллелограм, прямоугольник, ромб, квадрат). Обратить внимание на то, что все эти четырёхугольники есть параллелограмы. Затем перейти к определению трапеции, сделав чертёж на доске (черт. 58). Выяснить, будет ли это параллелограм. „Что можно сказать об углах трапеции?“

$$(\angle A + \angle B = 2d, \quad \angle C + \angle D = 2d).$$

Дать определение равнобочной, прямоугольной трапеции, средней линии трапеции, построив соответствующие чертежи. Сформулировать теорему о свойстве средней линии трапеции и предложить учащимся разобрать доказательство по учебнику.

Когда учащиеся уяснят доказательство, надо предложить одному из них повторить прочитанное у доски.

Составить с учащимися следующий план доказательства теоремы (записывать его не нужно), рассуждая при этом так (черт. 59): в теореме необходимо применить оба свойства средней линии треугольника; для этого нужно доказать, что EF — средняя линия треугольника ABK или $BF = FK$; так как BF и FK являются сторонами треугольников BCF и DFK, то



Черт. 59.

нужно доказать, что треугольник BCF равен треугольнику DFK.

Отсюда план доказательства:

1) доказать, что треугольник BCF равен треугольнику DFK;

2) доказать, что EF — средняя линия треугольника ABK;

3) найти применение свойств средней линии треугольника.

3. Закрепление пройденного.

Решить из § 5 задачу № 66.

Решить задачи (устно).

1) При каком условии одна из диагоналей трапеции будет биссектрисой?

2) Высота равнобедренной трапеции вдвое меньше её боковой стороны. Чему равны углы трапеции?

3) В какой трапеции имеется ось симметрии и притом только одна?

4) В какой точке средняя линия трапеции пересечёт высоту? Почему средняя линия трапеции не может пройти через точку пересечения диагоналей трапеции?

4. Задание на дом.

Из учебника § 98, 99.

Из задачника § 5, № 61, 70.

24-й урок. Тема: Решение задач из раздела „Трапеция".

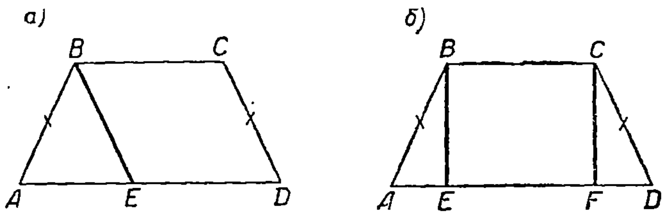
1. Проверка домашнего задания.

Проверку выполнения домашнего задания можно провести, предложив учащимся с места рассказать о решении задачи (узловые вопросы решения).

2. Решение задач из раздела „Трапеция".

На данном уроке можно решить одну задачу на доказательство и одну — на построение, рассмотрев различные способы решения.

1) Доказать, что в равнобедренной трапеции углы при основаниях равны (§ 5 № 72).

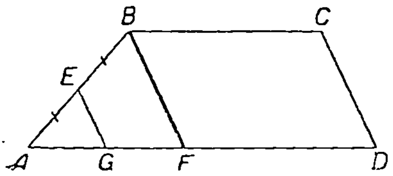


Черт. 60.

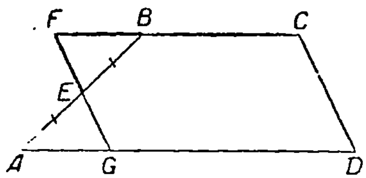
Доказательство проводится при помощи одного из следующих дополнительных построений (черт. 60):

а) Проводим $BE \parallel CD$ (черт. 60а); б) проводим $BE \perp AD$ и $CF \perp AD$ (черт. 60б).

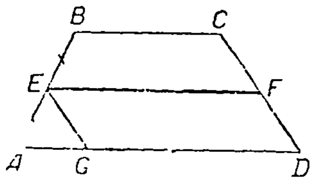
2) Решить из § 5 задачу № 69 (черт. 61).



Черт. 61а.



Черт. 61б.



Черт. 61в.

Рассмотреть различные способы решения, сделав дополнительное построение.

Провести $BF \parallel CD$.

Продолжить BC и EG до их взаимного пересечения.

Провести среднюю линию трапеции.

3. Задание на дом.

Из учебника § 87—100 (так как на следующем уроке — контрольная работа по теме „Четырёхугольники").

Предупредить учащихся, что на следующем уроке будет контрольная работа. Сказать, что контрольная работа будет состоять из задачи на вычисление и задачи на доказательство по разделу „Четырёхугольники".

Порекомендовать просмотреть из задачника Рыбкина 10—15 задач из ранее решённых (указать, какие).

25-й урок. Контрольная работа по теме „Четырёхугольники".

Задание на дом.

Из задачника § 5, № 63, 68, 77.

1-й вариант.

1) Дан ромб со стороной, равной 8,4 *дм*. Отрезки диагоналей ромба от вершины до точки их пересечения разделены пополам, точки деления соединены прямыми.

Определить вид полученного четырёхугольника и его периметр (дать пояснения к решению).

2) Доказать, что всякий параллелограм, у которого диагонали равны, есть прямоугольник.

2-й вариант.

1) Дана равнобочная трапеция $ABCD$ с бо́льшим основанием AB. Боковые стороны BC и AD продолжены до пересечения в точке M, причём $CM = BC$ и $DM = AD$, $\angle BMA = 60°$.

Определить периметр трапеции, если её боковая сторона равна 4 *см*.

2) Доказать, что всякий параллелограм, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, есть ромб.

3-й вариант.

1) В треугольнике ABC угол B прямой, а угол C равен 30°. Отрезок MN соединяет середины катета BC и гипотенузы AC. Определить вид полученного четырёхугольника $ABMN$ и его меньшую диагональ BN, если $AC = 12$ *дм*.

2) Доказать, что всякий параллелограм, у которого диагональ делит угол пополам, есть ромб.

4-й вариант.

1) Дан параллелограм, стороны которого 6,5 *дм* и 4 *дм*. Отрезки диагоналей параллелограма от вершины до точки пересечения их разделены пополам, и точки деления соединены последовательно прямыми. Определить вид полученного четырёхугольника и его периметр.

2) В четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны AB и CD равны и образуют равные углы с диагональю AC. Доказать, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограм.

26-й урок. Тема: Обзорный урок по теме „Четырёхугольники" и решение задач на построение.

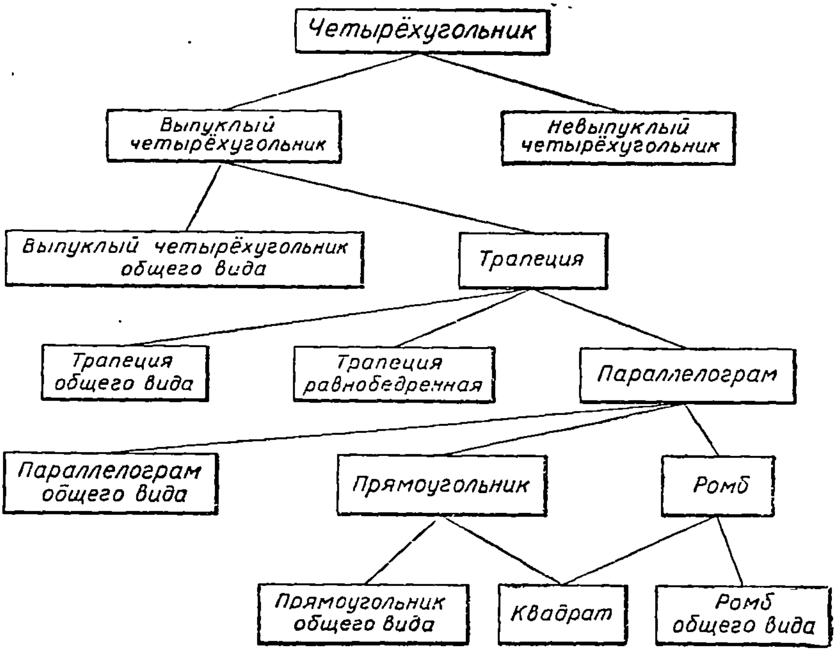
1. Проверка домашнего задания.

Для проверки выполнения домашнего задания вызвать трёх учеников к доске и предложить каждому из них решить одну из заданных задач (§ 5, № 63, 68 и 77).

Во время их подготовки у доски с классом повторить определения рассмотренных ранее четырёхугольников, а также вспомнить, какими свойствами они обладают.

2. Проверив выполнение домашней работы, воспроизвести на доске общую схему (черт. 11), подразделение всех четырёхугольников, данную учащимся ранее, вызвав для этого одного из учеников к доске.

Ученик при вычерчивании схемы должен ещё раз дать точное определение каждой фигуры, пояснить, какими свойствами она обладает, какие из указанных свойств не требуют доказа-



Черт. 62.

тельства, и перечислить те свойства, которые необходимо доказывать.

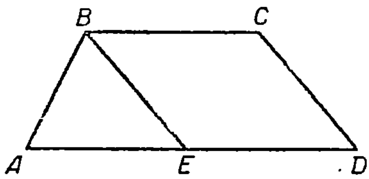
Если учитель располагает временем, то полезно познакомить и с такой таблицей четырёхугольников, не настаивая на её запоминании (черт. 62).

Конечно, учитель должен пояснить принцип классификации четырёхугольников, положенный в основу этой схемы.

3. На данном уроке следует решить задачу на построение. Построить трапецию по четырём сторонам.

При построении трапеции по четырём сторонам учащиеся знакомятся с методом параллельного перенесения. Параллельным перенесением называется такое преобразование фигуры, при котором каждая её точка смещается на одинаковое расстояние в одном и том же направлении, параллельном данному. При параллельном переносе фигура не меняет размера и формы.

Учащимся вначале кажется, что построение они могут выполнить легко, так как умеют строить треугольник по трём сторонам, но, приступив к построению, не могут его осуществить. Тогда (черт. 63), перенеся параллельно боковую сторону трапеции, получим треугольник ABE, который легко построить по трём сторонам, так как двумя сторонами этого треугольника являются боковые стороны трапеции, а третья сторона равна разности оснований.



Черт. 63.

Построив треугольник ABE, строим параллелограм $EBCD$, что выполнить легко.

Проведя доказательство, выяснить, всегда ли задача имеет решение; это зависит от возможности построения треугольника по трём сторонам.

4. Задание на дом.

Из учебника § 9, 10 — для повторения.

Из задачника § 5, № 84, 86 (2), и закончить классную задачу.

27-й урок. Тема: **Построение окружностей, проходящих через одну, две и три данные точки на плоскости.**

1. Проверка домашней работы.

Вызвав двух учеников, предлагаем одному воспроизвести из задачника решение задачи 84, § 5, а другому — провести доказательство следующей теоремы.

Доказать, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равняется полуразности параллельных сторон.

Пока ученики готовят на доске свои ответы, обходом по рядам просматривается выполнение домашней работы (в тетрадях).

Опросив учеников, вызванных к доске, перейти к проведению устных упражнений по повторению понятий: окружность, круг, элементы окружности. Подчеркнуть различие между понятиями *окружность* и *круг.*

Повторяя определения основных линий (радиуса, хорды и диаметра) в окружности, надо сделать следующие выводы:

1) Величина длины окружности определяется величиной её радиуса.

2) Диаметр делит окружность на две равные части.

3) Окружность имеет центр симметрии.

4) Окружность имеет бесчисленное множество осей симметрии.

5) Радиусы одной окружности равны.

После сделанных выводов учащимся предлагаются следующие вопросы:

1) Каким свойством обладают точки окружности?

2) Это свойство точек окружности присуще только одной окружности или им обладают точки любых окружностей?

3) Нельзя ли дать новое определение окружности, выраженное этим свойством?

Подводя итог высказываниям учащихся, надо дать следующее определение окружности: окружностью называется геометрическое место точек плоскости, расположенных на данном расстоянии от данной точки этой плоскости.

Это определение должно быть записано в тетради учеников.

Данное определение окружности закрепляется путём повторения его 2—3 учениками.

2. Изложение нового материала.

До сих пор мы рассматривали окружности на плоскости, определяемые положением центра и величиной радиуса. Но можно рассматривать окружности, положение которых на плоскости определяется другими условиями, например: чтобы эти окружности проходили через одну данную точку, через две данные точки и через три данные точки.

Учитывая, что в учебнике слишком бегло и поверхностно поясняются вопросы о проведении окружностей через одну и две данные точки, излагаю эти вопросы более подробно.

1) Пусть на плоскости дана точка A. Требуется провести окружность так, чтобы она проходила через точку A.

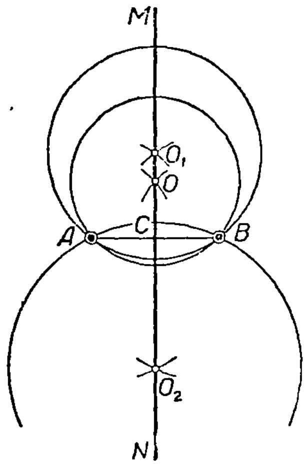
Возьмём на плоскости другую точку O, отличную от A, и примем её за центр. Приняв за радиус окружности отрезок OA, мы проводим окружность, которая будет проходить через заданную точку A. Далее берём другую точку O_1, отличную от точки A и O, радиусом AO_1 проводим другую окружность и убеждаемся, что и эта окружность проходит через точку A.

Далее учащиеся сами скажут, что, кроме двух проведённых окружностей, проходящих через данную точку, можно провести ещё множество других, каждая из которых также проходит через точку A.

Формулируем заключение: через одну данную точку можно провести сколько угодно окружностей.

2) Рассмотрим вопрос о построении окружности, проходящей через две данные точки A и B. Найдём на плоскости точку (центр окружности), равноудалённую от точек A и B (черт. 64).

Мы знаем, что точка, равноудалённая от двух данных точек A и B, лежит на перпендикуляре MN, проведённом через середину отрезка AB. Всякую точку перпендикуляра MN мы можем принять за центр искомой окружности. Следовательно, через две данные точки можно провести сколько угодно окружностей.



Черт. 64.

Далее рассматриваем вопрос о построении окружности, проходящей через три данные точки, лежащие на одной прямой, и устанавливаем, что центр такой окружности должен лежать на пересечении параллельных линий. Следовательно через три точки, лежащие на одной прямой, нельзя провести окружности.

Последним новым вопросом урока является вопрос о пересечении трёх перпендикуляров, проведённых через середины сторон треугольника.

Показать на чертеже, что центр окружности, описанной около треугольника, может лежать внутри, или вне треугольника, или на его стороне.

3. Задание на дом.

Из учебника § 9, 10, 103, 104.

Из задачника § 6, № 2, 3.

В задаче 3 разобрать случаи:

1) данные точки лежат на данной прямой; 2) данные точки лежат на прямой, перпендикулярной к данной прямой, и 3) данные точки произвольно расположены относительно данной прямой.

28-урок. Тема урока: Теорема о диаметре, перпендикулярном к хорде, и обратная теорема.

1. Анализ контрольной работы.

Анализ контрольной работы проводится аналогично проведению анализов предыдущих работ (см. урок 12).

2. Проверка домашней работы.

Устно проверяем из задачника задачу 2, § 6. К доске вызываются два ученика. Один воспроизводит решение задачи 3 с дополнительными условиями, а другой доказывает теорему о построении окружности по трём данным точкам, не лежащим на одной прямой.

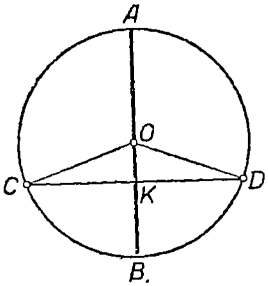
После проверки домашней работы приступаем к повторению теоретического материала, необходимого для лучшего усвоения нового материала.

необходимо повторить определения окружности, круга и элементов окружности. Более подробно остановиться на вопросах сравнения двух дуг.

Учащиеся должны понять, что для равенства дуг необходимым условием является равенство радиусов окружностей.

3. Изложение нового материала.

Сделав на доске чертёж и записав, что дано и что требуется доказать, следует предложить учащимся по записи на доске дать формулировку теоремы. После уточнения формулировки теоремы доказать теорему. Желательно, кроме способа доказательства, приведённого в учебнике, указать на другие способы, например путём установления равенства центральных углов COB и DOB или используя симметрию точек окружности относительно диаметра.



Черт. 65.

Доказательство обратных теорем можно предложить сделать самим учащимся, указав один из методов доказательства (черт. 65), например, для первой теоремы: рассмотреть треугольники COK и DOK, сделать соответствующее заключение относительно углов COB и DOB и после этого перейти к рассмотрению дуг CB и BD; для второй теоремы: из равенства дуг CB и BD сделать соответствующее заключение относительно углов COB и DOB, после этого рассмотреть треугольники COK и DOK и сделать нужное заключение.

В заключение урока решаем из задачника задачу 4, § 6.

4. Задание на дом.

Из учебника § 105, 106.

Из задачника § 6, № 10, 11 и 12.

29-й урок. Тема: Теорема о дугах, заключённых между параллельными хордами, и о расстояниях от точки до окружности.

1. Проверка домашней работы.

Вызвать к доске двух учеников и предложить одному доказать обратную теорему (из домашнего задания), а второму воспроизвести решение из задачника задачи 10 или 11 § 6, (в зависимости от того, какая задача была не решена некоторыми учениками).

Пока вызванные ученики у доски готовят ответы, надо просмотреть выполнение домашней работы у остальных учащихся, начав проверку задания у слабо успевающих учеников.

Остановиться на понятии *расстояние от точки до окружности*, указав, что имеются два расстояния: наименьшее и наибольшее. Эти понятия пояснить на чертеже.

Устно разобрать с учащимися решение следующих задач:

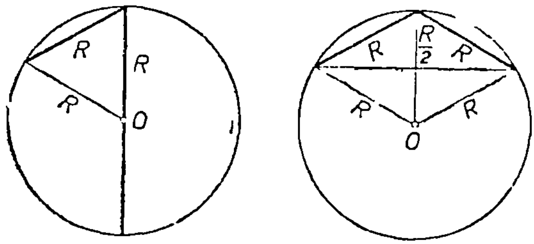
1) Радиус окружности 17 *см*. Точка A удалена от центра на 14 *см*. Определить наименьшее и наибольшее расстояния этой точки от окружности.

2) Наибольшее расстояние точки A от окружности равно 28 *дм*, наименьшее равно 10 *дм*. Найти радиус окружности.

Кроме решения этих задач, повторить условие равенства двух дуг.

2. Изложение нового материала.

Изложение нового материала с методической стороны желательно провести так же, как и на предыдущем уроке, т. е. сделав на доске чертёж и записав, что дано и что требуется



Черт. 66.

доказать; путём постановки соответствующих вопросов добиться от учащихся не только уяснения формулировки теоремы, но и знания её доказательства.

В классе решить задачи 8 и 9. Решение задач провести так: сделав чертёж задачи (условие) на доске, предложить всему классу найти решение. Из первых 4—5 учеников, решивших предложенную задачу, вызвать одного, который пояснит решение задачи. Если кто-либо из учеников решил задачу другим способом, то надо ознакомить класс и с вновь предложенным решением. Наиболее простые решения этих задач видны на прилагаемых чертежах (черт. 66).

3. Задание на дом.

Из учебника § 107.

Из задачника § 6, № 5 и 6.

30-й урок. Тема: Решение задач на построение.

1. Проверка домашней работы.

Решение из задачника задач № 5 и 6, § 6 воспроизводится двумя учениками.

После воспроизведения решения задач на доске учащимся предлагаются дополнительные вопросы, например следующие:

1) Сформулировать теорему о дугах, заключённых между параллельными хордами окружности.

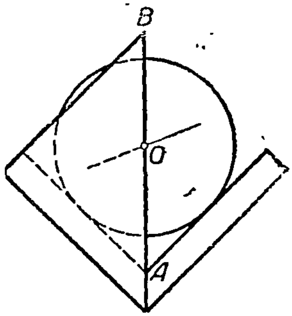
2) Какие вы знаете способы доказательства этой теоремы?

3) В каком положении может находиться точка к окружности?

4) Как мы определяем расстояние от точки до окружности?

2. Изложение нового материала.

Учащимся предлагается открыть учебник и из § 108 записать в тетрадь условие первой задачи и разобрать её решение с обоснованием. Более подробно остановиться на случае, когда центр не дан.



Черт. 67.

Далее учащимся предлагается записать условие задачи 2 из § 108.

После нахождения центра окружности учащимся предлагается решить задачу (самостоятельно), в которой требуется найти центр данной дуги.

После решения задач на построение учащимся необходимо указать на их практическую применимость в производстве.

Показать модель центроискателя и его чертёж (черт. 67). Предложить двум-трём ученикам сделать к следующему уроку такие модели из проволоки. Учащимся, участвующим в технических кружках, рекомендовать произвести эти построения на отдельных деталях машин, имеющих круглую или овальную форму.

3. Задание на дом.

Из учебника § 108 и повторить § 46 и 47.

Задача 1. Из данной точки A описать окружность, которая разделила бы пополам данную окружность O.

Задача 2. В четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы, делящие углы A и D пополам, пересекаются в точке E, а прямые, делящие углы B и C пополам, — в точке F. Доказать, что

$$\angle AED + \angle BFC = 2d.$$

31-й урок. Тема: Теорема о равных дугах, стягивающихся равными хордами, и расстоянии хорд от центра.

1. Проверка домашней работы.

Вызвав к доске двух учеников, предложить одному из них доказать теорему § 46, а другому воспроизвести решение задачи 2 § 108. Решение первой задачи § 108 с классом проверить в виде устного упражнения.

Ученику, доказывающему теорему, предложить решить из задачника задачу 17 (1) § 6, а второму предложить вопросы по ранее пройденному материалу.

2. Изложение нового материала.

Формулирую первую часть теоремы (§ 109), сделав предварительно на доске чертёж и записав условие теоремы.

После доказательства первой части теоремы учащимся предлагается ответить на следующие вопросы:

1) В окружности взяли две дуги, каждая из которых содержит 37°. Что можно сказать про хорды, стягивающие эти дуги?

2) В окружности проведены две равные хорды, одна из которых отстоит от центра на 3 *см*. На каком расстоянии от центра отстоит другая хорда?

3) В окружности на расстоянии 5 *см* от центра проведены хорды AB и CD. Чему равна хорда AB, если CD равна 10 *см*?

4) Чему равна величина центральных углов, опирающихся на хорды AB и CD?

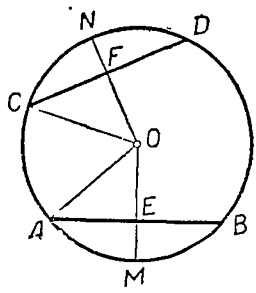
После разбора предложенных вопросов учащиеся в классе решают задачу (самостоятельно) 18 из § 6.

3. Задание на дом.

Из учебника § 109 (1), 110 (1, 2), 47 и 53.

Из задачника § 6, № 14, 15.

П р и м е ч а н и е. Предлагая учащимся для самостоятельного разбора доказательства теорем § 110 (1, 2), учителю необходимо сделать указание на метод прямого доказательства.



Черт. 68.

1) Обратная теорема.

Д а н о: $AB = CD$.

Требуется доказать: $OE = OF$,

$\smile AB = \smile CD$

(черт. 68).

Проводим OE и OF соответственно перпендикулярно хордам AB и CD. Точки A и C соединим с центром O.

Далее учащимся предлагается установить равенство треугольников AOE и COF. Из равенства этих треугольников сделать заключение: а) о равенстве перпендикуляров OE и OF, б) о равенстве углов AOM и CON.

Из равенства центральных углов AOM и CON сделать заключение о равенстве дуг AM и CN, а потом и о равенстве дуг AB и CD.

2) Обратная теорема (черт. 68).

Дано: $OE = OF$,
$OE \perp AB$ и $OF \perp CD$.

Требуется доказать: $AB = CD$,
$\smile AB = \smile CD$.

Из рассмотрения треугольников AOE и COF заключить, что AE равняется CF, и далее показать, что AB равняется CD. Из рассмотрения центральных углов AOE и COF установить равенство дуг AM и CN и далее установить, что дуга AB равна дуге CD.

32-й урок. Тема: Теорема о неравных дугах, стягивающихся неравными хордами, неодинаково удалёнными от центра.

1. Проверка домашней работы.

Проверку можно произвести следующим образом:

Вызвать двух учеников, посадить их за отдельные столы. Одному предложить доказать первую часть теоремы § 109 и решить из задачника задачу 17 (2) § 6, а другому доказать теорему § 53 и решить из задачника задачу 18 (1) § 6.

Далее двух учеников вызвать к доске для доказательства обратных теорем § 47 и 110 (1, 2) (по одной теореме из каждого параграфа).

Решение задач проверяю путём просмотра тетрадей в классе, а часть тетрадей отбираю для домашней проверки.

Как только учащиеся, отвечающие у доски, изложат свои задания, к доске выходят ученики, которые готовили задания на местах. Проверив их работы, приступаем к изложению нового материала.

2. Изложение нового материала.

Изложение начинаем с формулировки теоремы и закрепления её путём повторения. На доске выполняем чертёж, отвечающий условию теоремы. Записываем условие теоремы.

Остальные построения проводим по мере необходимости, вытекающей из доказательства теоремы.

После доказательства теоремы учащимся предлагается ответить на следующие вопросы, из ответов на которые устанавливается возможность выяснить правильность понимания изложенного материала.

1) В окружности взяли дуги AB и CD. Дуга AB содержит 28°, а дуга CD 35°. Что можно сказать про хорды AB и CD?

2) В окружности проведены хорды $AB = 15$ *см* и $CD = 20$ *см*. Какая из этих хорд ближе отстоит от центра?

3) В окружности проведены хорды AB и CD. Хорда AB

отстоит от центра на 10 *см*, а CD на 5 *см*. Что можно сказать про длины этих хорд?

Обратные теоремы § 110 (3, 4) предлагается учащимся доказать самостоятельно, но учителю необходимо сделать указание на пути прямого доказательства.

3. Задание на дом.

Из учебника § 87, 88 (повторение) и новый материал § 109 (2), 110 (3, 4).

Из задачника § 6, № 17 (2), 18 (2).

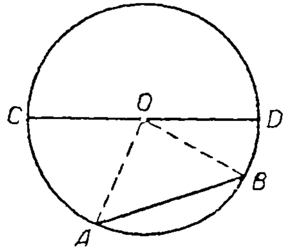
33-й урок. Тема: Теорема „Диаметр есть наибольшая из хорд". Решение задач на доказательство.

1. Проверка домашней работы.

Выполнение учащимися домашнего задания проверяем одним из указанных выше способов, но желательно опрос отнести к закреплению пройденного.

2. Изложение нового материала.

Излагаемая теорема будет легко воспринята учащимися, если учитель, как в подавляющем большинстве своего изложения теорем, докажет и эту теорему аналитическим методом. Приведём примерные вопросы, которые учитель ставит перед учащимися, намечая путь доказательства.



Черт. 69.

Дано: $CD = 2R$,
O — центр,
AB — хорда.

Доказать: $CD > AB$ (черт. 69).

Вопросы.

1) Что нам требуется доказать? Доказать, что $CD > AB$ или $2R > AB$.

2) Какая зависимость между хордой и радиусом окружности? Из треугольника AOB следует $AO + OB > AB$, или $2R > AB$.

Разобрав с помощью приведённых вопросов доказательство теоремы, можно поручить одному из учеников связно его повторить.

3. Закрепление пройденного материала.

1) Записать на доске следующую задачу:

Дано $AB \parallel CD$,
$AB \perp MN$,
MN — диаметр,
$AK = KC$ и $BL = LD$.

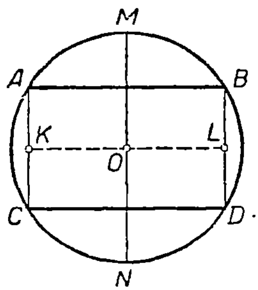
Доказать: $KL \perp MN$ (черт. 70).

Предложить ученикам сформулировать теорему, а затем дать 3—5 минут для обдумывания доказательства.

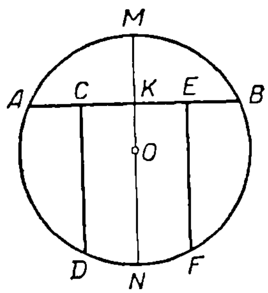
2) Задача.

Дано: $AK = KB$, $AC = CK$,
$BE = KE$,
$CD \perp AB$ и
$EF \perp AB$.

Доказать: $CD = EF$ (черт. 71).



Черт. 70.



Черт. 71.

Если ученики будут испытывать затруднение, то можно указать метод доказательства — путём перегибания чертежа по диаметру MN.

Далее следует рассмотреть две задачи, обычно представляющие для учеников интерес в смысле показа применения проходимого материала к практике.

1) В каком месте незастроенного треугольного двора нужно поместить фонарь, чтобы все три угла двора были освещены одинаково?

2) Считается, что громоотвод защищает от молнии все предметы, расположенные от его основания не далее его двойной высоты. Где на треугольном участке выгоднее всего поставить громоотвод, чтобы его высоту можно было сделать наименьшей?

Учитывая, что данный урок по геометрии является последним во 2-й четверти, домашнего задания не давать.

3-я ЧЕТВЕРТЬ (30 часов).

Начиная со второго урока 3-й четверти и во все последующие уроки второго полугодия с классом должно быть организовано систематическое повторение материала, пройденного в VI классе и в первом полугодии VII класса.

Во время опроса в классе надо детально проверять материал, данный для выполнения, требовать от учащихся прочного и осознанного усвоения теорем, определений и т. п.

Повторение пройденного материала должно выражаться не только в опросе и разборе определений и теорем, но и в решении задач по содержанию повторяемой теории. Большую роль при повторении пройденного материала играют устные упражнения. Решение устных упражнений — необходимый элемент каждого урока, конечно, исключая урока по проведению контрольных письменных работ. Повторение пройденного материала надо сочетать с опросом и закреплением проходимого нового материала. Примерные формы проведения такого сочетания проводятся на уроке 35 и последующих уроках.

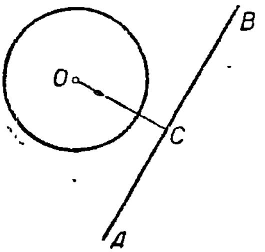
34-й урок. Тема: Взаимное расположение прямой и окружности. Признак касательной.

1. Прежде чем приступить к изложению нового материала, надо провести 5—7-минутную беседу об итогах первого полугодия и о задачах второго полугодия. Говоря об итогах первого полугодия, вначале следует остановиться на работе неуспевавших во 2-й четверти и вообще на неровно работавших учениках в первом полугодии; в заключение беседы найти слова одобрения, так чтобы у каждого неуспевающего ученика осталось убеждение, что во втором полугодии он может наверстать потерянное за первое полугодие. Далее непременно нужно отметить учеников, прилежно работавших в течение всего первого полугодия.

Затем сообщить программу прохождения материала в 3-й четверти и указать, что наряду с новым материалом систематически придётся повторять ранее пройденный материал; рассказать, как надо повторять пройденный материал.

2. **Изложение нового материала.**

Прежде чем перейти к вопросу о взаимном расположении прямой и окружности, надо рассмотреть различные случаи взаимного расположения двух прямых: а) прямые общих точек не имеют; б) прямые имеют одну общую точку; в) прямые имеют бесчисленное множество общих точек (сливаются).



Черт. 72.

Затем перейти к рассмотрению взаимного расположения прямой и окружности.

Предложить учащимся начертить прямую, которая удалена от центра окружности O больше, чем на радиус (черт. 72), вызвав при этом одного из них к доске; затем предложить доказать, что остальные точки прямой удалены от центра окружности дальше, чем точка C.

Сделать вывод: если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность общих точек не имеют.

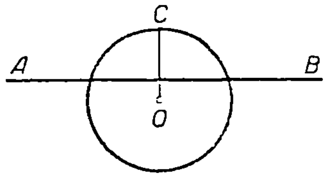
Вызвав второго ученика к доске, предложить ему начертить прямую, которая удалена от центра окружности на расстояние, равное радиусу (учащиеся выполняют чертёж в тетрадях).

Выяснить, что прямая с окружностью в этом случае имеет только одну общую точку.

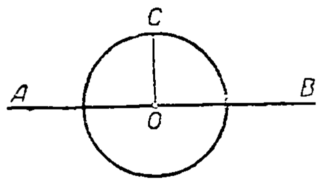
Далее рассмотреть, каково взаимное расположение прямой и окружности, если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса. Обратив внимание учащихся на второй случай, сказать, что существует признак, по которому можно узнать, касается ли прямая окружности (признак касательной), и перейти к доказательству теорем о касательной.

3. **Закрепление пройденного.**

Следует обратить внимание учащихся на формулировку теоремы, выяснив значение слов: „в конце его, лежащем на



Черт. 73.



Черт. 74.

окружности“, так как иногда учащиеся затрудняются дать правильную формулировку теоремы. Для этого предложить начертить прямую, перпендикулярную к радиусу, которая не является касательной (черт. 73); начертить прямую, перпендикулярную к радиусу в конце его, но не являющуюся касательной (прямая перпендикулярна к радиусу в конце его, не лежащем на окружности, черт. 74).

Выяснить, что является геометрическим местом середин равных хорд, проведённых в данной окружности, и определить взаимное расположение этих хорд с окружностью, являющейся геометрическим местом середин данных хорд. На данном уроке решить задачу 18 из § 6.

4. Задание на дом.

Из учебника новый материал § 112, 113(1); для повторения § 22, 23, 26.

Из задачника § 6, § 16.

35-й урок. Тема: Свойство касательной (обратная теорема).

1. Проверка домашнего задания.

Вызвав двух учеников к доске, предложить одному из них пояснить решение домашней задачи, а от другого потребовать доказательство теоремы о касательной. Во время подготовки учащихся у доски повторить с остальными учениками различные случаи взаимного расположения прямой и окружности, задавая при этом вопросы всему классу, а затем предлагая одному из учеников ответить на вопрос и пояснить на чертеже (у доски). После ответа первого ученика предложить ему вопросы по повторению, например рассказать о смежных углах и их свойстве, далее для устного решения дать задачу на определение смежных углов.

Второму ученику после доказательства теоремы предложить рассказать о вертикальных углах и их свойстве, затем заставить решить задачу, при решении которой необходимо использовать свойство вертикальных углов.

При повторении материала § 22, 23 и 26 можно рекомендовать проделать устно следующие упражнения:

1) Определить углы, образуемые часовой и минутной стрелками, если часы показывают 3 часа, 2 часа, 5 часов, 12 часов.

2) Найти угол, который меньше своего смежного на 40°, на 90°.

3) Чему равен угол, образованный биссектрисами двух смежных углов? (90°.)

4) Могут ли оба смежных угла быть острыми? тупыми? прямыми?

5) Один из вертикальных углов равен 45°. Найти остальные углы.

2. Изложение нового материала.

Предложить учащимся ещё раз сформулировать признак касательной, выяснить, что дано, что требуется доказать, и составить теорему, обратную данной. Затем перейти к доказательству.

3. Закрепление пройденного.

После доказательства теоремы предложить учащимся самостоятельно решить задачу 21 (1) из § 6 и доказать, что касательные, проведённые из одной и той же точки к одной и той же окружности, между собой равны, пояснив при этом, что называется длиной касательной. Проверить правильность рассуждений у доски. Если останется время, то, вызвав учащегося к доске, решить задачу 21 (2). При закреплении пройденного учащимся необходимо задать несколько вопросов по повторению пройденного.

4. Задание на дом.

Из учебника новый материал § 113 (2). Для повторения § 38, 39.

Из задачника § 6, № 22, 25.

36-й урок. Тема: Теорема о касательной, параллельной хорде. Проведение касательной к данной окружности параллельно данной прямой.

1. Проверка домашнего задания.

При проверке выполнения домашнего задания двух учеников вызвать к доске: одного — для доказательства теоремы о касательной, другого — для доказательства свойств равнобедренного треугольника.

Для проверки правильности решения задач вызвать ещё двух учащихся, предложить им сесть на первую парту (свободную) и заставить на листе бумаги выполнить решение домашних задач, дав каждому по одной задаче.

Правильность решения ими задач проверить и, убедившись, что они понимают её решение, другими словами, они самостоятельно решили задачу, задать каждому из них ещё несколько вопросов по пройденному материалу.

Таким образом, можно проверить выполнение домашней работы, если задача решена большинством учащихся, если же решение задачи вызвало затруднение и часть учеников не справилась с решением, то задачу следует проверить у доски.

При повторении свойств равнобедренного треугольника проделать следующие упражнения (устно):

1) Одна сторона равнобедренного треугольника равна 20 *см*, другая равна $\frac{2}{5}$ третьей. Чему равен периметр треугольника? (48 *см*).

2) Периметр равнобедренного треугольника равен 3 *дм*. Найти длину каждой стороны, если: а) одна из них равна 4 *см*; б) одна из них равна 8 *см*.

а) Равные стороны по 1,3 *дм*;

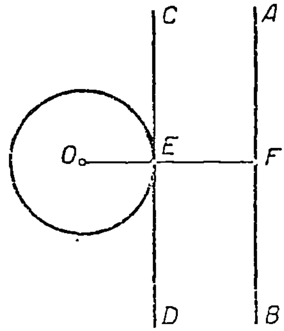
б) два решения: равные стороны по 8 *см* и равные стороны по 1,1 *дм*.

3\` Периметр равнобедренного треугольника 22 *дм*; разность неравных сторон 4 *дм*. Найти основание.

2. Изложение нового материала.

Для доказательства теоремы о касательной, параллельной хорде, вызвать учащегося к доске и предложить ему провести доказательство, сообщив дополнительное построение; можно сделать и так: предложить учащимся разобрать на уроке доказательство теоремы самостоятельно, а затем, путём опроса у доски, проверить, усвоена ли теорема.

Задачу о проведении касательной к данной окружности параллельно данной прямой необходимо решить подробно, проведя анализ, построение, доказательство и исследование (в учебнике дано только построение), для этого одного из учащихся вызвать к доске.



Черт. 75.

Анализ. Проведя радиус в точку касания, имеем: $OE \perp CD$ (черт. 75).

Продолжив OE за точку E, получим $OF \perp AB$.

Теперь ясен ход построения, проводим его. Проведя доказательство, выясняем, что задача имеет два решения.

3. Решение задач на доказательство.

На данном уроке можно решить следующие задачи на доказательство:

1) В круге проведены две хорды CC' и DD' перпендикулярно к диаметру AB.

Доказать, что прямая MM', соединяющая середины хорд CD и $C'D'$, перпендикулярна к AB.

2) Если через центр окружности и данную точку вне её проведём секущую, то часть её, заключённая между данной точкой и ближайшей точкой пересечения, есть наименьшее расстояние, а часть заключённая между данной точкой и другой точкой пересечения, есть наибольшее расстояние этой точки от окружности. Доказать (из учебника). Здесь следует ввести понятие *расстояние точки от окружности*.

4. Задание на дом.

Из учебника новый материал § 114, 115; для повторения § 42(1).

Из задачника § 6, № 23, 24.

37-й урок. Тема: Решение задач на доказательство, связанных с подтемой „Касательная".

1. Проверка домашнего задания.

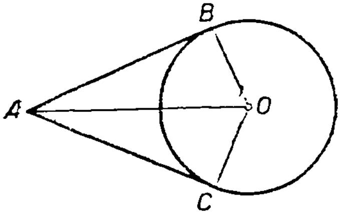
2. Решение задач на доказательство.

На данном уроке решить следующие задачи на доказательство (или некоторые из них):

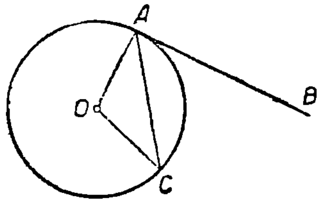
1) Доказать, что если две касательные к окружности пересекаются под углом в 60°, то расстояние от точки их пересечения до центра круга равно диаметру круга.

2) К окружности проведены две параллельные касательные. Доказать, что точки касания их и центр лежат на одной прямой.

3) В угол A вписана окружность O, которая точками касания делится на две дуги. К меньшей дуге проведена касательная, пересекающая стороны угла в точках B и C; к большей дуге проведена касательная, пересекающая стороны в точках D и E.



Черт. 76.



Черт. 77.

Доказать, что: а) периметр треугольника ABC не зависит от положения касательной BC; б) разность между полупериметром треугольника ADE и стороной DE постоянна.

4) Треугольник ABC — равносторонний. D, E и F — середины сторон BC, CA и AB. Доказать, что прямая DF касается окружности, проходящей через точки C, D и E.

Решая задачи на доказательство, вначале предложить учащимся некоторые задачи решить самостоятельно, а затем у доски проверить правильность решения. Остальные задачи решить, вызвав одного из учеников к доске, и если учащийся затрудняется в решении задачи, предложить ему ответить на ряд вопросов, которые раскрыли бы план доказательства.

Например, решая первую задачу, спросить, в чём состоит свойство касательной; как определить угол OAC; какая существует зависимость между катетом OC и гипотенузой AO (черт. 76).

3. Задание на дом.

Из учебника для повторения § 42 (2, 3).

Решить задачи на доказательство.

1) Доказать, что если AD — перпендикуляр, опущенный из конца диаметра AC на касательную, проведённую через точку B на окружности, то $\angle DAB = \angle BAC$.

2) $\dfrac{\text{Дано: } AB \text{ — касательная, } AC \text{ — хорда.}}{\text{Доказать: } \angle AOC = 2\angle CAB \text{ (черт. 77).}}$

38-й урок. Контрольная работа.

1-й вариант.

1) В круге даны две взаимно перпендикулярные хорды; каждая из них делится другой на два отрезка в 12 *см* и 17 *дм*. Найти расстояние каждой хорды от центра.

2) AB и AC — касательные к одной окружности; угол BAC равен 60°. Определить радиус круга, если расстояние от точки до центра равно 52 *см*.

2-й вариант.

1) Хорда пересекает диаметр под углом в 30° и делит его на два отрезка в 10 *см* и 40 *см*. Найти расстояние хорды от центра.

2) Дан сектор, равный четверти круга. Определить радиус этого сектора, если длина касательной, проведённой в середине его дуги до пересечения с продолжениями крайних радиусов сектора, равна 2 *м*.

3-й вариант.

1) В данном круге проведены две равные параллельные между собой хорды, расстояние между которыми равно радиусу данного круга. Найти острый угол между пересекающимися прямыми, соединяющими концы хорд.

2) В прямой угол вписан круг. Определить длину хорды, соединяющей точки касания, если расстояние этой хорды от центра равно 3,6 *см*.

4-й вариант.

1) Из одной точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды, которые удалены от центра на 10 *см* и 14 *см*. Определить их длины.

2) Концы диаметра удалены от касательной на 25 *см* и 15 *см*. Определить длину диаметра.

39-й урок. Тема: Решение задач на построение методом геометрических мест.

1. Проверка домашнего задания.

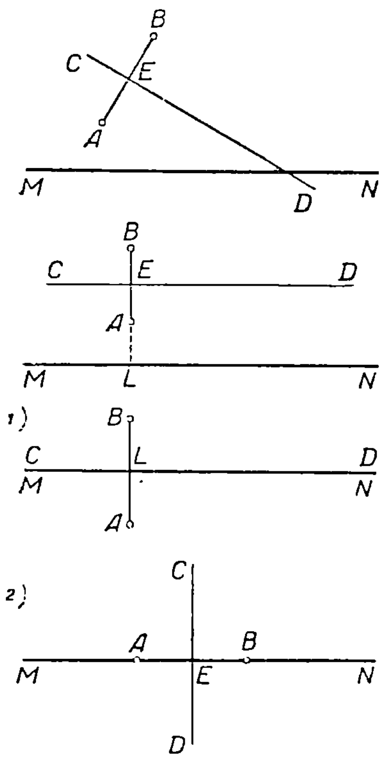
2. Решение задач на построение методом геометрических мест.

Понятие о геометрическом месте точек — одно из важнейших понятий геометрии. Здесь учащиеся знакомятся с понятием *множество, совокупность*, которые играют большую роль в современной математике.

Решение задач на построение методом геометрических мест имеет большое значение для развития логической мысли и пространственного воображения учащихся.

Понятие геометрического места точек встречается учащимся в VI классе; в VII классе решение задач методом геометрических мест включено в тему „Окружность“. Необходимо, чтобы учащиеся ясно представляли, в чём состоит сущность этого метода. Сущность раскрывается в процессе решения первых задач на построение методом геометрических мест.

При решении даже несложных задач на построение приходится использовать большое число различных геометрических мест, поэтому необходимо основательно разобрать некоторые из них, так чтобы учащиеся усвоили эти геометрические места в качестве основных. Затем перейти к рассмотрению новых геометрических мест, что облегчит учащимся решение задач на построение. Следует рассмотреть следующие задачи:



Черт. 78, 79, 80.

1) Геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от данной точки.

2) Геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой.

3) Геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек.

4) Геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных: а) пересекающихся прямых, б) параллельных прямых.

5) Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

На данном уроке предлагаем решить следующие задачи:

1) Указать на карте, в каком месте железной дороги надо устроить станцию, чтобы она была одинаково удалена от двух селений.

Рассмотреть два случая: а) два селения расположены по одну сторону от железной дороги; б) два селения расположены по обе стороны железной дороги.

Наиболее сложной частью решения задачи обычно является исследование, но проведение его необходимо, так как исследование повышает математическое развитие учащихся.

При решении данной задачи могут представиться четыре случая:

Задача имеет одно решение, если отрезок AB не перпендикулярен MN (черт. 78).

Задача решения не имеет, если $AB \perp MN$ и $BL \neq AL$ (черт. 79).

Задача имеет бесчисленное множество решений, если $AB \perp MN$ и $BL = AL$ (черт. 80_1).

Если A и B находятся на MN, а селения лежат при железной дороге, то решение одно — середина отрезка AB (черт. 80_2).

Рассмотрев подробно решение этой задачи, предложить учащимся самостоятельно разобрать следующую задачу на построение:

2) Описать окружность, которая проходила бы через две данные точки и центр которой находился бы на данной прямой.

Далее решить ещё одну задачу; исследование можно предложить провести дома.

Задача. Построить равнобедренный треугольник, у которого основанием служит данный отрезок AB, а вершина C находится на данном расстоянии от данной точки.

3. Задание на дом.

Из учебника новый материал § 133; для повторения § 43, 44.
Из задачника § 6, № 33, 34.

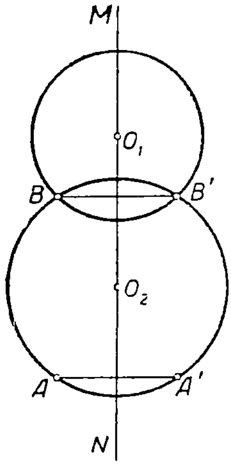
40-й урок. Тема: Теорема об общей точке двух окружностей, расположенной вне линии центров.

1. Проверка домашнего задания.

2. Изложение нового материала.

Повторив с учащимися различные случаи взаимного расположения двух прямых, а также прямой и окружности, перейти к рассмотрению взаимного расположения двух окружностей. При этом предложить учащимся начертить (на доске): а) две окружности, которые общих точек не имеют; б) две окружности, имеющие одну общую точку, и в) две окружности, которые имеют две общие точки. Далее выяснить, что две различные окружности трёх и более общих точек иметь не могут, а также дать определение касающихся окружностей, пересекающихся окружностей и линии центров. Проделав это, перейти к следующему упражнению: заставить учащихся начертить окружность, вспомнить, что является осью симметрии окружности, сколько осей симметрии имеет окружность.

Затем начертить вторую окружность, пересекающую первую, выяснить будет ли обладать осевой симметрией фигура, состоящая из двух окружностей, и что является осью симметрии этой фигуры. Найти несколько симметричных точек. При этом пояснить, что точки пересечения окружностей симметричны между собой (черт. 81).



Черт. 81.

Далее перейти к доказательству теоремы об общей точке двух окружностей, расположенной вне линии центров. Следствие предложить доказать одному из учащихся.

3. Закрепление пройденного.

После доказательства теоремы и следствий решить следующие задачи:

1) Даны две пересекающиеся окружности. Точки их пересечения соединены с точкой, лежащей на линии центров. Доказать, что полученный треугольник, одной из сторон которого является общая хорда, равнобедренный.

2) Дана окружность, в которой проведена хорда AB; описать другую окружность так, чтобы отрезок AB являлся хордой этой окружности. Сколько решений имеет задача?

4. Задание на дом.

Из учебника новый материал § 117, 118; для повторения § 46. Из задачника § 6, № 35.

41-й урок. Тема: Теорема об общей точке двух окружностей, лежащей на линии центров, и решение задачи методом геометрических мест.

1. Проверка домашнего задания.

2. Изложение нового материала.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы надо проделать следующие упражнения, для выполнения которых вызвать одного из учеников к доске:

Начертить окружность, провести её диаметр. Начертить другую окружность, диаметром которой служит диаметр первой окружности. Выясняем: если окружности имеют общий диаметр, то они сливаются (черт. 82).

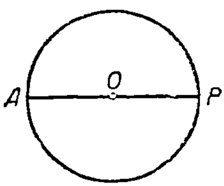
Затем перейти к доказательству теоремы, выяснить, как можно назвать эту теорему (теорема об общей точке двух окружностей, лежащей на линии центров, или признак касания двух окружностей), пояснить учащимся, какое касание называется внешним и какое — внутренним.

3. Решение задачи на построение методом геометрических мест.

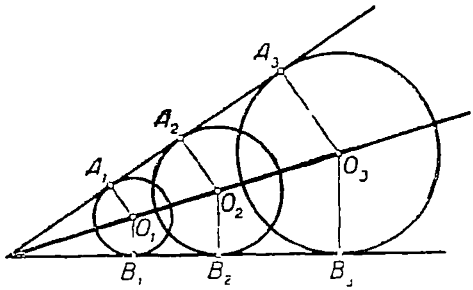
Описать окружность, которая касалась бы сторон данного угла, причём одной из них — в данной точке.

(Из задачника § 6, № 36).

Прежде чем перейти к решению задачи, необходимо выяснить, что является геометрическим местом центров окружностей, касающихся сторон данного угла. При этом следует вспомнить, что центр окружности находится на одинаковом



Черт. 82.



Черт. 83.

расстоянии от всех точек окружности, следовательно, на одинаковом расстоянии и от точек касания, которые лежат на сторонах угла, а если точка находится на одинаковом расстоянии от сторон угла (радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен к касательной, а расстояние от точки до прямой измеряется по перпендикуляру), то она лежит на биссектрисе этого угла, отсюда вывод: геометрическим местом центров окружностей, касающихся сторон данного угла, является биссектриса этого угла (черт. 83).

Затем вспомнить, что является геометрическим местом центров окружностей, касающихся прямой в данной на ней точке.

Проделав это, сообщить учащимся условие задачи и, вызвав одного из них к доске, предложить ему провести решение или же предложить всем решить задачу самостоятельно, с последовательной проверкой решения у доски.

4. Задание на дом.

Из учебника — новый материал § 119; для повторения § 47. Из задачника § 6, № 38.

42-й урок. Тема: Теорема об общей точке двух касающихся окружностей и её следствие.

1. Проверка домашнего задания.

При проверке решения задачи 38 выявить различные способы решения и обратить внимание на число решений.

2. Изложение нового материала.

Предложив учащимся ещё раз сформулировать теорему об общей точке двух окружностей, лежащей на линии центров, и обратную ей теорему, перейти к её доказательству.

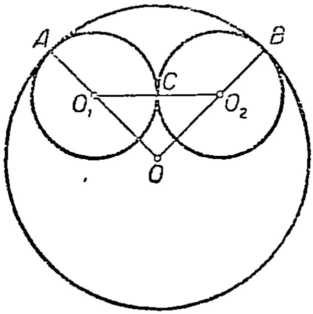
Далее предложить доказать следствие одному из учеников, вызвав его к доске.

3. Закрепление пройденного.

После доказательства теоремы решить из § 6 задачи 50, 53 (1).

Решение задачи 50 (черт. 84).

C — точка касания внутренних окружностей — находится на прямой O_1O_2. A и B — точки касания внутренних окружностей с внешней — находятся на прямых OO_1 и OO_2. По условию периметр треугольника OO_1O_2 равен 18 *см*, т. е. $P = OO_1 + O_1O_2 + OO_2 = 18$ *см*, но $O_1O_2 = CO_1 + CO_2$, а так как $CO_1 = AO_1$



Черт. 84.

и $CO_2 = BO_2$, то $P = OO_1 + AO_1 + BO_2 + OO_2 = (OO_1 + AO_1) + (BO_2 + OO_2)$; $P = R + R = 2R$; $R = \frac{P}{2} = 9$ (*см*).

4. Задание на дом.

Из учебника новый материал § 120, 121; для повторения § 50. Из задачника § 6, № 53 (2).

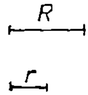
Дав задание на дом, провести анализ решения задачи 53 (2), выяснив при этом, какие геометрические места необходимо использовать при решении, а также сказать, чтобы учащиеся обратили особое внимание на исследование.

43-й урок. Тема: Различные случаи взаимного расположения двух окружностей.

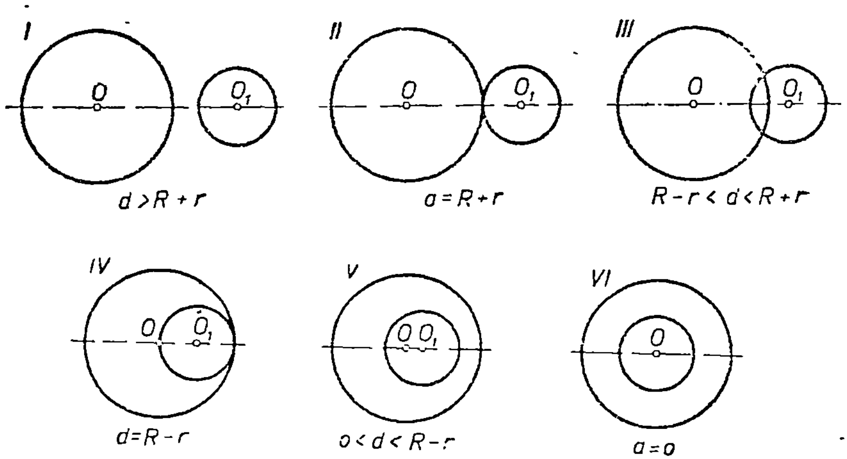
1. Проверка домашнего задания.

2. Изложение нового материала.

При рассмотрении различных случаев взаимного расположения двух окружностей прежде всего необходимо обратить внимание учащихся на то, что положение каждой окружности определяется положением её центра и величиной радиуса. Положение центров двух окружностей определяет некоторый отрезок. Следовательно, положение двух окружностей будет определяться тремя отрезками (величиной радиуса каждой из окружностей и длиной отрезка, соединяющего центры окружностей). При рассмотрении различных случаев взаимного расположения двух окружностей, не изменяя их радиусов, будем изменять расстояние между центрами окружностей. Вначале предложить учащимся начертить две окружности данными радиусами (черт. 85), так, чтобы окружности общих точек не имели (черт. 86, *I*). Вызвать к доске одного из учеников для выполнения чертежа и, обозначив расстояние между центрами через d,



Черт. 85



Черт. 86.

предложить учащимся выяснить, какая зависимость существует между длинами радиусов и длиной отрезка d.

Далее, приближая окружность O к окружности O_1, рассмотреть второй случай: окружности имеют одну общую точку (черт. 86, *II*) и выяснить, какая зависимость существует между R, r и d. Таким образом рассмотреть все возможные случаи взаимного расположения двух окружностей. В результате проделанной работы получаем таблицу, обобщающую полученные результаты.

3. Закрепление пройденного.

Заставить учащихся составить обратные предложения и доказать их справедливость способом предположения, например: 1) если расстояние между центрами двух окружностей больше суммы их радиусов, то окружности общих точек не имеют;

2) если расстояние между центрами двух окружностей равно сумме их радиусов, то окружности касаются извне, и т. д. Решить задачу 41 из § 6.

4. Задание на дом.

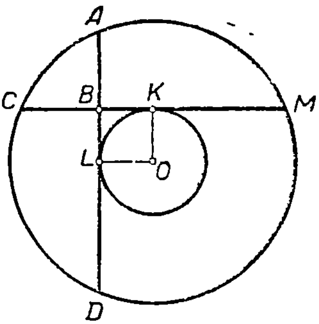
Из учебника новый материал § 122; для повторения § 52 (1). Из задачника § 6, № 42, 43.

44-й урок. Тема: Решение задач, связанных с подтемой „Окружность“

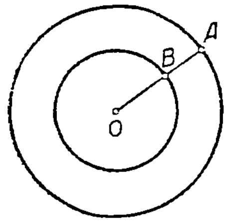
1. Проверка решения задач.

2. Решение задач.

Предложить учащимся, по рядам, решить из задачника Рыбкина следующие задачи § 6: первому ряду № 45, второму ряду № 46 и третьему № 47. После того как в каждом ряду 3—4 ученика решат задачу с записью, вызвать из каждого



Черт. 87.



Черт. 88.

ряда одного ученика и предложить им решить соответствующие задачи с записью на доске. Как только ученики подготовят решение с записью на доске, то разобрать с классом решение этих задач и сделать соответствующие записи в тетрадях учеников.

Приводим возможные записи решений на доске, а следовательно, и в тетрадях:

№ 45.

Дано: $AD \perp CM$,
$CB = AB = 3$ *см*.
$BD = BM = 7$ *см*,
$OK = OL = r$.

Найти r (черт. 87).

Решение. Соединим точки касания K и L с центром окружности. Так как $OK \perp CM$ и $OL \perp AD$, $CK = \frac{CM}{2} = \frac{7+3}{2} =$

$= 5$ (*см*) (на основании теоремы о том, что перпендикуляр, опущенный из центра на хорду, делит её пополам), но $BK = CK - CB = 5 - 3 = 2$ (*см*). Следовательно: $BK = OL$, как противоположные стороны прямоугольника. Ответ. 2 *см*.

№ 46.

Дано: $OA : OB = 7 : 4$,
$AB = 12$ *см*.

Найти OA и OB (черт. 88).

Решение. Примем $OA = 7x$. Тогда $OB = 4x$. Имеем: $7x - 4x = 12$; $3x = 12$; $x = 4$ (*см*).

Откуда: $OA = 7x = 7 \cdot 4 = 28$ (*см*) и $OB = 4x = 4 \cdot 4 = 16$ (*см*). Ответ. 28 *см* и 16 *см*.

№ 47. Дано: AB — секущая.

Доказать: $AD = CB$ (черт. 89).

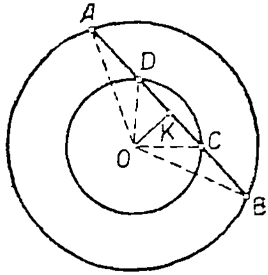
Доказательство: Проведём $OK \perp AB$. Тогда точка K есть середина отрезков AB и DC. Следовательно:

$$AK = KB \qquad (1)$$

и

$$DK = KC. \qquad (2)$$

Вычтя из (1) равенство (2), получим: $AK - DK = KB - KC$. Но $AK - DK = AD$ и $KB - CK = CB$. Следовательно: $AD = CB$.



Черт. 89.

Далее надо разобрать задачи на построение окружностей и дуг методом геометрических мест. Решить из § 6 задачи 53 и 54.

3. Задание на дом.

Из учебника (для повторения) § 52(2), 53; § 17, 18 и 19.

Из задачника § 6, № 44, 48, 51.

45-й урок. Тема: Взаимное расположение двух пересекающихся прямых и окружности. Вписанный угол и его измерение.

1. Проверка домашнего задания.

После проверки выполнения домашнего задания следует учащимся дать дополнительные вопросы, связанные с подтемой „Измерение углов“. Например:

1) Что называется углом?

2) Какой угол называется центральным? Начертить центральный угол.

3) В одном круге даны два равных центральных угла; что можно сказать о соответствующих им дугах?

4) Что называется дуговым градусом?

5) Дайте определение углового градуса?

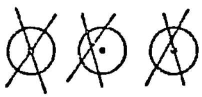
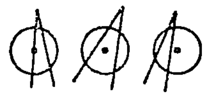
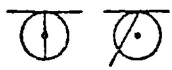
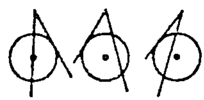
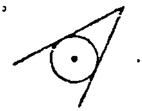
6) Что значит „угол измеряется соответствующей ему дугой“?

Начертите тупой угол и измерьте его.

Можно предложить решить задачи из § 7, например № 1, 2, 3.

2. Изложение нового материала.

Прежде чем перейти к определению вписанного угла, необходимо рассмотреть различные случаи взаимного расположения двух пересекающихся прямых и окружности. При этом учащиеся получают все возможные углы в круге, и тогда перед

Вершина	Внутри круга	На окружности	Вне круга
Две секущие			
Секущая и касательная			
Две касательные			

Черт. 90.

ними возникает вопрос об измерении этих углов. Систематизировать виды углов можно следующим образом:

1) Вершина угла (точка пересечения двух прямых) расположена: а) внутри круга, б) на окружности, в) вне круга.

2) Прямые, образующие угол, по отношению к окружности могут быть: а) секущими, б) касательными.

Если рассмотреть при этом и частные случаи расположения секущих относительно центра, то получается следующая таблица (черт. 90).

Изучение углов, связанных с окружностью, следует начать с рассмотрения угла, вершина которого лежит на окружности, а сторонами являются секущие. Затем дать определение вписанного угла и перейти к доказательству теоремы об его измерении. Доказав первую часть теоремы (центр лежит на стороне вписанного угла), можно предложить учащимся рассмотреть два остальных случая, вызвав при этом одного из учеников к доске.

3. Закрепление пройденного.

После доказательства теоремы заставить учащихся самостоятельно решить из § 7 задачи 9 и 10, правильность решения проверить у доски.

4. Задание на дом.

Из учебника новый материал § 123, 124, 125; для повторения § 54.

Из задачника § 7, № 11, 12.

46-й урок. Тема: Решение задач, связанных с подтемой „Вписанные углы“.

1. Проверка домашнего задания.

При проверке выполнения домашнего задания для доказательства теорем и следствия надо вызвать трёх учеников к доске. Во время их подготовки с классом проверить правильность решения домашних задач. После доказательства теорем у доски следует вызванным учащимся задать несколько дополнительных вопросов, например:

1) Центральный угол равен 84°30′. Как велик угол, имеющий вершину на окружности и опирающийся на ту же дугу?

2) Вписанный угол опирается на дугу, равную $\frac{4}{15}$ окружности. Чему равен этот угол?

3) Из одной и той же точки окружности проведены две хорды. Одна из них стягивает дугу в 48°40′, другая в 97°20′. Определить угол, образуемый этими хордами, и т. п.

2. Решение задач.

На данном уроке решить из § 7 задачи 16, 17, 20.

Задачи 16 и 20 решить, вызвав одного из учеников к доске.

Задачу 17 предложить учащимся решить самостоятельно.

Вызвать ещё одного ученика к доске для проверки решения задачи 17.

При опросе учащихся дать дополнительные вопросы на определение различных геометрических мест, например:

1) Назвать геометрическое место точек, расположенных по данную сторону на данном расстоянии от данной прямой.

2) Назвать геометрическое место точек, находящихся на равном расстоянии от двух данных параллельных прямых.

3) Назвать геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных пересекающихся прямых.

4) Назвать геометрическое место точек, находящихся на равном расстоянии от данной точки.

5) Что является геометрическим местом вершин равнобедренных треугольников, имеющих общее основание?

6) Назвать геометрическое место центров кругов, касающихся двух пересекающихся прямых, и пр.

3. Задание на дом.

Из учебника для повторения § 56, 57.
Из задачника § 7, № 18, 19, 21.

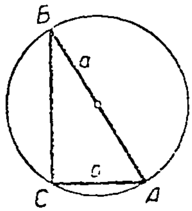
47-й урок. Тема: Решение задач на построение, основанных на следствии: „Всякий вписанный угол, опирающийся на диаметр, есть прямой“.

1. Проверка домашнего задания.

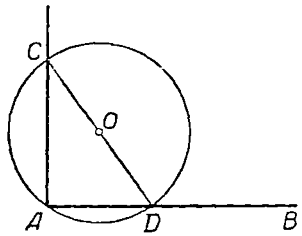
2. Решение задач на построение.

Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе a и катету b.

Вначале предложить учащимся самостоятельно решить задачу, затем, проверив правильность решения у доски, познакомить класс с новым способом построения (черт. 91). При этом следует провести анализ: вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой. $\angle C$ — прямой; если его сделать вписанным, то он будет опираться на диаметр; но угол C опирается на гипотенузу, следовательно, гипотенуза будет служить диаметром окружности и вершина C будет лежать на окружности. Затем вызвать к доске одного из учеников для выполнения построения, доказательства, а также исследования.



Черт. 91.



Черт. 92.

Далее перейти к следующей задаче (черт. 92):

Из конца A данного луча AB, не продолжая его, восстановить к нему перпендикуляр.

При решении задачи провести следующий анализ: так как угол CAB должен быть прямым, то если его вписать в окружность, он будет опираться на диаметр и концы диаметра будут лежать на сторонах угла, а вершина A — на окружности.

Следовательно, нужно провести окружность так, чтобы точка A лежала на окружности и луч AB пересекал её. Проделав это, выполнить построение, а также провести доказательство. Затем на данном уроке решить из § 7 задачу 26, рассмотрев различные способы решения.

1-й способ (черт. 93).

Соединим отрезком вершину B с точкой пересечения дуги с основанием AC. $\angle BDC$ — прямой, как вписанный, опирающийся на диаметр. Следовательно, BD — высота, а также и биссектриса угла B, тогда $\angle ABD = \angle DBC = 20^\circ$ и $\smile ED = \smile DC = 40^\circ$, а $\smile BE = 180^\circ - (\smile ED + \smile DC) = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$. $\underline{\smile BE = 100^\circ;\ \smile ED = \smile DC = 40^\circ.}$

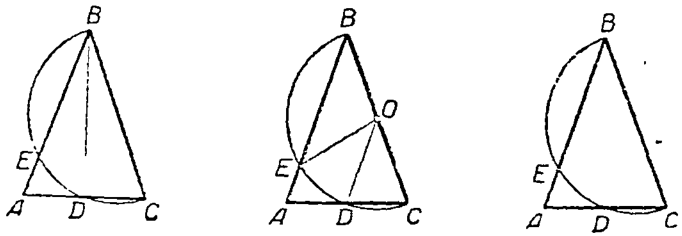
2-й способ (черт. 94).

$\smile EDC = 80^\circ$, так как $\angle B = 40^\circ$,

$\angle B = \angle BEO$, так как в $\triangle EBO$ $BO = OE$,

тогда $\angle BOE = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$, следовательно, $\smile BE = 100^\circ$.

$\angle C = \angle A = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$; но $\angle C = \angle ODC$, так как в $\triangle DOC$ $DO = OC$.



Черт. 93. Черт. 94. Черт. 95.

Тогда $\angle DOC = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$, следовательно, $\smile DC = 40^\circ$, $\smile ED = \smile EDC - \smile DC = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ$.

$\underline{\smile BE = 100^\circ,\ \smile ED = \smile DC = 40^\circ.}$

3-й способ (черт. 95).

$\angle C = \angle A$, так как $AB = BC$ и

$$\angle C = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ,$$

тогда $\smile BED = 140^\circ$,

$\smile EDC = 80^\circ$, так как $\angle B = 40^\circ$,

$\smile ED = \smile BED + \smile EDC - \smile BEDC = 140^\circ + 80^\circ - 180^\circ = 40^\circ$,

$\smile BE = \smile BED - \smile ED = 140^\circ - 40^\circ = 100^\circ$,

$\smile DC = \smile EDC - \smile ED = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ$,

$\smile BE = 100^\circ$, $\smile ED = \smile DC = 40^\circ$.

3. Задание на дом.

Из учебника новый материал § 126, 127; для повторения 158.

48-й урок. Тема: Проведение касательной через данную точку к данной окружности.

1. Проверка домашнего задания.

При проверке выполнения домашнего задания включить в дополнительные вопросы материал для повторения темы, пройденной в первом полугодии, например:

1) Разность двух углов параллелограма равна 42°20′. Определить его углы.

2) Один из углов параллелограма прямой. Определить остальные углы.

3) В четырёхугольнике каждый из его углов в два раза больше последующего. Определить углы.

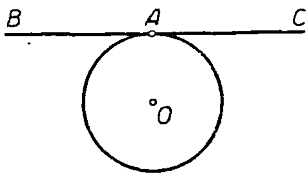
4) Определить углы параллелограма, у которого один из его внешних углов составляет $\frac{4}{5}$ смежного с ним внутреннего.

5) Один из углов параллелограма составляет 25% другого. Найти углы параллелограма.

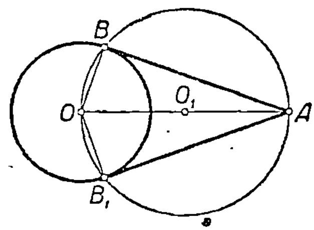
Вопросы из пройденного ранее материала включить в опрос при решении задач в классе.

2. Решение задач на построение.

Через данную точку провести к данной окружности касательную. а) Данная точка A лежит на самой окружности



Черт. 96.



Черт. 97.

(черт. 96). При решении задачи следует провести анализ: так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен к касательной, то проведём радиус в точку касания A, а затем через точку A проведём прямую, перпендикулярную к радиусу OA.

б) Данная точка A лежит вне окружности (черт. 97).

Анализ. Чтобы через данную точку A провести касательную к данной окружности, нужно найти точку касания (B). Соединим точки A и B с центром; $\angle OBA$ должен быть прямым, так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен к касательной. Если $\angle OBA$ сделать вписанным в окружность, то он будет опираться на её диаметр, но $\angle OBA$ опирается на отрезок OA, следовательно, OA нужно принять за диаметр. Проведя окружность с центром в точке O_1, имеем:

точка касания B лежит на пересечении данной окружности с вспомогательной. Далее следует одного из учеников вызвать к доске для выполнения построения доказательства и исследования. Если останется время, то на данном уроке предложить учащимся самостоятельно решить задачу 23 из § 7, а затем проверить решение у доски.

3. Задание на дом.

Из учебника новый материал § 128; для повторения § 63, 64. Из задачника § 7, № 22.

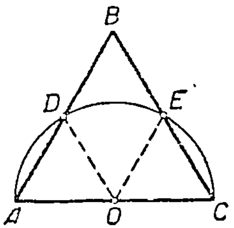
49-й урок. Тема: Решение задач, связанных с подтемой „Вписанные углы".

1. Проверка домашнего задания.

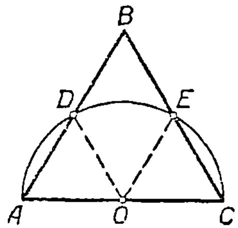
2. Решение задач.

На данном уроке решить из § 7 задачи 27 и 29.

При решении задачи 27 вызвать одного из учеников к доске.



Черт. 98.



Черт. 99.

После его ответа выяснить, кто решил другим способом.

Приводим некоторые способы решения этой задачи.

1-й способ (черт. 98).

$AB = BC = AC$, следовательно, $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$. В $\triangle ADO$ $\angle DAO = \angle ADO = 60°$; так как $AO = DO$, значит и $\angle AOD = 60°$, тогда $\smile AD = 60°$; так же доказываем, что $\smile EC = 60°$. $\smile DE = 180° - (\smile AD + \smile EC) = 180° - 120° = 60°$. В $\triangle ADO$ $\angle ADO = \angle DOA = \angle DAO$, следовательно, $AD = DO = AO$, но $AO = \frac{1}{2}AC$, значит и $AD = \frac{1}{2}AB$; также и $EC = \frac{1}{2}BC$.

2-й способ (черт. 99).

$AB = BC = AC$, следовательно, $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$; если $\angle A = 60°$, то $\smile DEC = 120°$ и если $\angle C = 60°$, то $\smile ADE = 120°$. $\smile DE = \smile ADE + \smile DEC - 180° = 120° + 120° - 180° = 60°$; $\angle EOC = 60°$, так как $\smile EC = 60°$, следовательно,

$EO \parallel AB$; кроме того, $AO = OC$, значит EO — средняя линия $\triangle ABC$, тогда $EC = \frac{1}{2}BC$; так же можно доказать, что $AD = \frac{1}{2}AB$.

Прежде чем приступить к решению задачи 29, необходимо выяснить, что является геометрическим местом вершин треугольников, имеющих общее основание и данную высоту. Далее определить, что является геометрическим местом вершин прямого угла треугольников, имеющих данную гипотенузу. Затем перейти к решению задачи. При решении задачи особое внимание обратить на исследование.

3. Задание на дом.

Из учебника для повторения § 65, 66, 67.

Из задачника § 7, № 24, 25, 30.

50-й урок. Контрольная работа.

1-й вариант.

1) AB и AC — равные хорды; MAN — касательная; дуга BC, на которой не лежит точка A, содержит 215°36′. Определить углы MAB и NAC.

2) Из концов диаметра проведены две параллельные хорды. Доказать, что эти хорды равны и их две другие конечные точки лежат на одной прямой с центром круга.

2-й вариант.

1) C — точка на продолжении диаметра AB; CD — касательная; угол $ADC = 116°24′$. Сколько градусов и минут содержит дуга BD?

2) Доказать, что если опустить перпендикуляры из концов диаметра на хорду или её продолжение, то основания этих перпендикуляров равно отстоят от соответствующих концов хорды.

3-й вариант.

1) AB — диаметр окружности; BC — касательная. Секущая AC делится окружностью (в точке D) пополам. Определить угол DAB.

2) Доказать, что перпендикуляры к хорде, восстановленные в ее концах, пересекают произвольный диаметр в точках, которые равноудалены от центра.

4-й вариант.

1) M — середина высоты BD в равнобедренном треугольнике ABC; точка M служит центром дуги, описанной радиусом MD между сторонами BA и BC. Определить градусную величину этой дуги, если известно, что угол $BAC = 54°40′$.

2) Шесть точек A, B, C, A', B', C' расположены последовательно на окружности так, что хорды AB и $A'B'$ параллельны, а хорды BC и $B'C'$ равны. Доказать, что хорда AC параллельна хорде $A'C'$.

51-й урок. Тема: Анализ контрольной работы. Решение задач на построение методом геометрических мест.

1. Анализ контрольной работы.

2. Проверка домашнего задания.

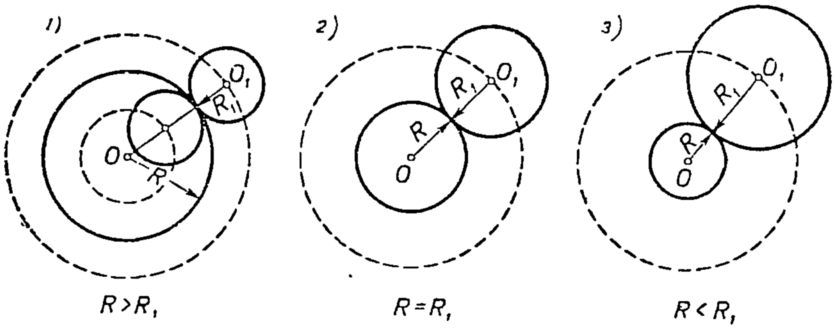
3. Решение задач на построение методом геометрических мест.

На данном уроке решить из § 6 задачу 54.

При решении задачи 54 (1) следует обратить внимание учащихся на следующие случаи (черт. 100):

1) $R > R_1$. 2) $R = R_1$. 3) $R < R_1$.

1) Если $R > R_1$, то геометрическим местом центров окружностей, описанных данным радиусом и касающихся данной окружности, являются две окружности, концентрические дан-



Черт. 100.

ной, причём радиус одной из них равен сумме данных радиусов, а радиус другой — разности данных радиусов.

2) и 3) Если $R \leqslant R_1$, то геометрическим местом центров окружностей, описанных данным радиусом и касающихся данной окружности, является окружность, концентрическая данной, причём радиус её равен сумме данных радиусов.

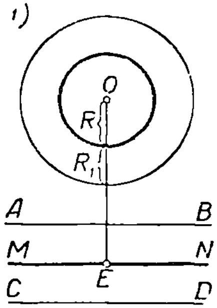
Затем выяснить, что является геометрическим местом центров окружностей, описанных данным радиусом и касающихся данной прямой.

Проделав это, перейти к решению задачи 54 (2).

Рассмотрим случай, когда $R \leqslant R_1$.

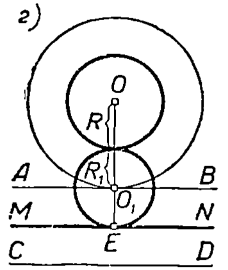
Анализ. Если $R \leqslant R_1$, то геометрическим местом центров окружностей, описанных данным радиусом и касающихся данной окружности, является окружность, концентрическая данной, причём радиус её равен сумме данных радиусов; а геометрическим местом центров окружностей данного радиуса, касающихся данной прямой, являются две прямые, параллельные данной, находящиеся от неё на расстоянии, равном радиусу. Следовательно, центр окружности данного радиуса, которая касается данного круга и данной прямой, должен лежать на пересечении указанных выше геометрических мест.

Проведя анализ, перейти к построению и доказательству. Особое внимание следует обратить на исследование, разобрав следующие случаи (черт. 101—105):



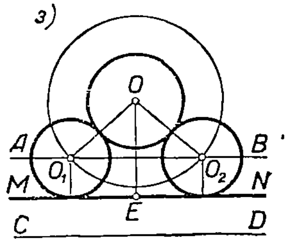
Черт. 101.

Если $OE > R + 2R_1$, то задача решения не имеет (OE — расстояние центра данной окружности от данной прямой).



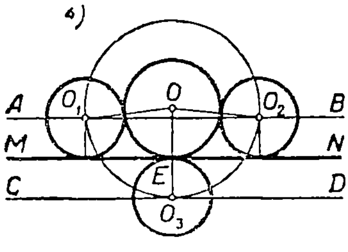
Черт. 102.

Если $OE = R + 2R_1$, то задача имеет одно решение.



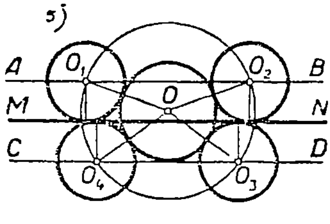
Черт. 103.

Если $OE < R + 2R_1$ и данная прямая с данной окружностью общих точек не имеют, то задача имеет два решения.



Черт. 104.

Если $OE = R$ (данная прямая касается данной окружности), то задача имеет три решения.



Черт. 105.

Если данная прямая пересекает данную окружность, то задача имеет четыре решения

Если $R > R_1$, то задача может иметь до восьми решений, так как две окружности с двумя прямыми могут иметь до восьми общих точек.

4. **Задание на дом.**

Из учебника для повторения § 70, 71, 72, 73.

Из задачника § 7, № 31, 32.

52-й урок. Тема: Измерение угла, вершина которого лежит внутри или вне круга.

1. Проверка домашнего задания.

При проверке выполнения домашнего задания следует во время опроса учащихся включать вопросы по материалу, пройденному в первом полугодии, а также из курса VI класса, например:

1) Один из четырёх углов, образовавшихся от взаимного пересечения двух прямых, составляет $\frac{7}{20}$ всей их суммы. Найти величину каждого.

2) Каким должен быть каждый из смежных углов, чтобы их разность была равна прямому углу?

3) Две стороны треугольника выражаются числами 8 и 5. Между какими числами заключается третья сторона?

4) Отношение внешних углов треугольника равно $1 : 1^1/_2 : 1{,}25$. Определить внутренние углы треугольника.

5) Внешний угол при вершине равнобедренного треугольника равен 65°. Какая сторона в треугольнике наибольшая?

Из темы „Четырёхугольники":

1) Доказать, что в ромбе две высоты, опущенные из вершины одного и того же тупого угла, равны между собой.

2) Диагонали ромба 36 *дм* и 10 *дм*. Середины смежных сторон его соединены прямыми. Найти периметр полученного четырёхугольника.

3) Периметр трапеции равен 25 *м*, а сумма её непараллельных сторон равна 10 *м*. Определить длину средней линии трапеции.

4) В равнобедренной трапеции один из углов в 4 раза больше другого. Найти каждый из углов равнобедренной трапеции.

5) Диагональ прямоугольника вдвое больше одной из его сторон. Определить углы между диагоналями.

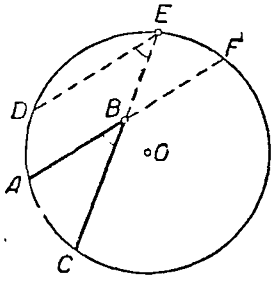
2. Изложение нового материала.

Сделав чертёж и сформулировав теорему, перейти к доказательству. При этом необходимо выяснить, как провести вспомогательную хорду, чтобы получить вписанные углы, опирающиеся на определённые дуги. Доказав теоремы об измерении угла с вершиной внутри или вне круга, предложить учащимся провести доказательство другим способом (черт. 106): через точку E проведём хорду $DE \parallel AB$, получим: вписанный $\angle DEC = \angle ABC$, $\angle DEC$ измеряется $\frac{1}{2} \smile DAC$, $\frac{1}{2} \smile DAC = \frac{\smile DA + \smile AC}{2}$, но $\smile DA = \smile EF$, так как дуги, заключённые между параллельными хордами, равны, значит $\angle DEC$ измеряется $\frac{\smile AC + \smile EF}{2}$, следовательно, и $\angle ABC$ измеряется $\frac{\smile AC + \smile EF}{2}$, что и требовалось доказать.

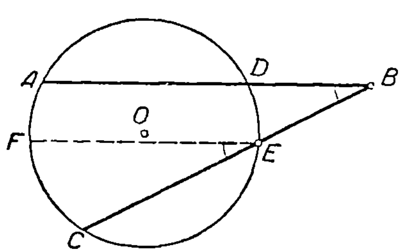
При доказательстве теоремы об измерении угла с вершиной вне круга проводим $EF \parallel BA$ (черт. 107), чтобы получить вписанный угол, равный углу ABC. $\angle FEC$ измеряется $\frac{1}{2} \smile FC$, $\smile FC = \smile AC - \smile AF$, но $\smile AF = \smile DE$, так как дуги, заключённые между параллельными хордами, равны.

Следовательно, $\frac{1}{2} \smile FC = \frac{\smile AC - \smile DE}{2}$, т. е. $\angle ABC$ измеряется $\frac{\smile AC - \smile DE}{2}$, что и требовалось доказать.

На этом же уроке дать определение описанного угла и доказать теорему об его измерении.



Черт. 106.



Черт. 107.

3. Закрепление пройденного.

После доказательства теорем перейти к решению из § 7 задач 39, 40, 44.

Одну из них предложить учащимся решить самостоятельно, а остальные — у доски.

4. Задание на дом.

Из учебника новый материал § 130; для повторения § 74.

Из задачника § 7, № 41, 49.

53-й урок. Тема: Решение задач, связанных с подтемой „Измерение угла, вершина которого лежит внутри или вне круга“.

1. Проверка домашнего задания.

При проверке выполнения домашнего задания трёх учеников вызвать к доске: двум предложить доказать теорему из нового материала, третьему — задачу на построение (из материала для повторения). Двух учеников посадить за первую парту для решения домашних задач. Во время подготовки вызванных учащихся следует с классом повторить формулировки пройденных теорем, а также решить несколько задач устно. Затем проверить доказательство теорем и решение домашних задач у вызванных учащихся. Дать дополнительные вопросы на определение геометрических мест, например:

1) Что является геометрическим местом вершин C треугольников, имеющих общее основание AB, у которых боковая сторона AC равна данному отрезку?

2) Что является геометрическим местом вершин C треугольников с общим основанием AB, у которых медиана, проведённая к основанию, равна данному отрезку?

3) Назвать геометрическое место вершин треугольников с общим основанием, у которых высота, опущенная на это основание, равна данному отрезку.

4) Определить геометрическое место вершин прямоугольных треугольников с общей гипотенузой.

5) Назвать геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности в данной точке, и т. п.

2. Решение задач.

На данном уроке решить из § 7 задачи 45, 50, 52. При решении задачи 50 одного из учеников вызвать к доске, а задачи 45 и 52 предложить учащимся решить самостоятельно.

3. Задание на дом.

Из учебника для повторения § 75, 76.
Из задачника § 7, № 33, 42, 43.

54-й урок. Тема: Измерение угла, составленного касательной и хордой.

1. Проверка домашнего задания.

Во время подготовки учащихся у доски, с классом решить устно задачи 47 и 48 из § 7, при этом вызвать одного из учеников к доске и предложить ему выполнить чертёж.

2. Изложение нового материала.

Теорему об измерении угла, составленного касательной и хордой, предложить учащимся разобрать самостоятельно по учебнику.

Через 5—7 минут предложить одному из учеников доказать теорему у доски, а также заставить его решить задачу на определение угла, составленного касательной и хордой, например следующую: хорда AB делит окружность в отношении 13 : 5. Какие углы образует эта хорда с касательными, проведёнными в точке A и в точке B? Можно ли решить эту задачу, не применяя теорему об измерении угла, образованного касательной и хордой? Как? Какой способ решения лучше? Почему?

3. Закрепление пройденного.

На данном уроке решить следующие задачи на доказательство:

1) Точка D лежит на радиусе OA; хорда $BDC \perp OA$. Через точку C проведена касательная до пересечения с продолжением OA в точке E. Доказать, что прямая CA — биссектриса угла BCE.

При решении этой задачи необходимо применить теорему об измерении угла, составленного касательной и хордой.

Далее можно решить следующие задачи (или одну из них предложить учащимся решить дома):

2) Через точку K окружности O проведены хорда KA и касательная BC. Прямая, проведённая через центр O перпендикулярно к радиусу OA, пересекает AK в точке M и BC в точке N. Доказать, что $NK = NM$.

3) Доказать, что если через точку пересечения окружности с биссектрисой вписанного угла провести хорду, параллельную одной стороне угла, то она будет равна хорде, служащей другой стороной вписанного угла (К. С. Барыбин, Сборник геометрических задач на доказательство).

4. Задание на дом.

Из учебника новый материал § 131; для повторения § 77. Из задачника § 7, № 34, 51, 53.

55-й урок. Тема: Проведение внешних общих касательных к двум окружностям.

1. Проверка домашнего задания.

При проверке выполнения домашнего задания включить в опрос материал по повторению из темы „Четырёхугольники", например:

1) Определить углы равнобедренной трапеции, если в ней разность противоположных углов равна $\frac{8}{15}d$.

2) Высота параллелограма, опущенная из вершины тупого угла, образует с боковой стороной угол в 54°. Чему равны углы параллелограма?

3) В квадрате расстояние точки пересечения диагоналей до одной из сторон равно 1 *м*. Определить периметр квадрата.

4) Углы ромба, образуемые стороной ромба с его диагоналями, относятся, как $5:4$. Определить углы ромба.

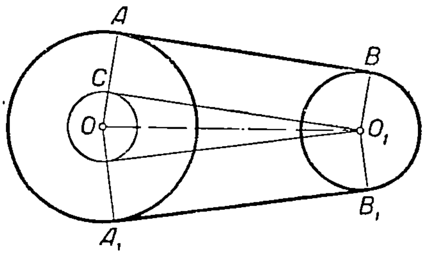
5) В центре прямоугольного участка стоит дерево. Расстояние от этого дерева до большей стороны участка равно 2 *м*, а до меньшей 3 *м*. Определить периметр участка.

2. Изложение нового материала.

При решении задачи на построение: „К двум окружностям O и O_1 (черт. 108) провести общие внешние касательные", необходимо подробно провести все четыре этапа: анализ, построение, доказательство и исследование.

Пояснив содержание задачи, перейти к анализу. Затем предложить одному из учеников провести построение, другому — доказательство и исследование, выяснив при этом, какие задачи на построение необходимо повторить для проведения общей касательной к двум окружностям.

Проведя построение, описанное в учебнике Киселёва, учащиеся обычно затрудняются доказать, что построенная таким образом прямая является касательной к каждой из данных окружностей. Доказательство проводится легко, если построение провести несколько иначе (черт. 108): описываем окружность с центром в точке O радиусом, равным разности данных радиусов; из O_1 проводим к этой окружности касательную O_1C; через точку касания C проводим радиус OC и продолжаем



Черт. 108.

его до встречи с данной окружностью в точке A. Затем из центра O_1 проводим радиус O_1B, параллельный радиусу OA, и через точки A и B проводим прямую.

Доказательство.

Так как $OC = R - R_1$, то $R = OC + R_1$, но $R = OC + CA$, следовательно, $CA = R_1$, тогда четырёхугольник $CABO_1$ — параллелограм по второму признаку параллелограмов.

Угол OCO_1 — прямой, так как O_1C — касательная к вспомогательной окружности, значит угол ACO_1 — прямой, следовательно, параллелограм $CABO_1$ — прямоугольник, а если угол CAB — прямой, то AB касается окружности O, и если угол ABO_1 — прямой, то AB касается окружности O_1, что и требовалось доказать.

3. Закрепление пройденного.

Выяснить, как провести общие внешние касательные к двум окружностям, если их радиусы будут равны.

4. Задание на дом.

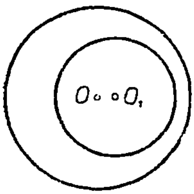
Из учебника новый материал § 129 (1); для повторения § 79.

Из задачника § 6, 7, № 29.

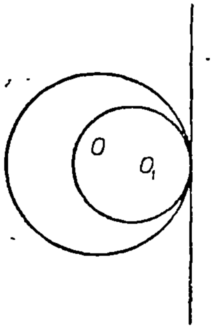
56-й урок. Тема: Проведение внутренних общих касательных к двум окружностям.

1. Проверка домашнего задания.

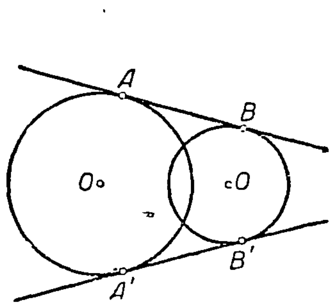
При проверке выполнения домашнего задания вызвать к доске двух учеников, одному из них предложить провести общие внешние касательные к двум окружностям, второму —



Черт. 109.

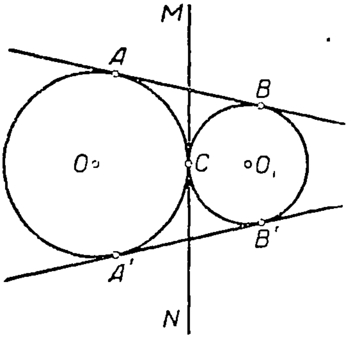


Черт. 110.

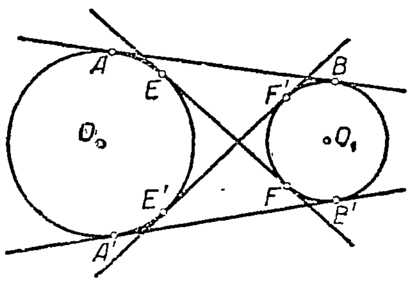


Черт. 111.

доказать теорему об углах с соответственно параллельными сторонами. Во время подготовки учащихся у доски следует



Черт. 112.



Черт. 113.

с классом повторить формулировки пройденных теорем, а также несколько задач решить устно.

2. Изложение нового материала.

При проведении внутренних общих касательных к двум окружностям чертёж, на котором указано, как провести внешние общие касательные — оставить на доске и при проведении анализа сравнить его с анализом предыдущей задачи, выяснив, в чём разница и что общего в рассуждениях. Проведя анализ, одного из учеников вызвать к доске и предложить ему выполнить построение, другого ученика заставить провести доказательство и исследование (черт. 109—113). (Построение провести таким же образом, как и в предыдущей задаче.)

3. Решение задачи.

На данном уроке решить из § 7 задачу 27, заставив учащихся решение провести самостоятельно.

4. Задание на дом.

Из учебника новый материал § 129 (2); для повторения § 80.

Из задачника § 6, № 28.

57-й урок. Контрольная работа.

1-й вариант.

1) В треугольнике ABC угол C прямой. Из центра C радиусом AC описана $\smile ADE$, пересекающая гипотенузу в точке D, а катет CB — в точке E. Определить дуги AD и DE, если $\angle B = 40°$.

2) В круге проведены хорды $AM > MB > MC$ так, что MB делит угол AMC пополам. K — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на MA, L — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на продолжение MC. Доказать, что $AK = CL$.

2-й вариант.

1) Внутри данной окружности помещается другая окружность. ABC и ADE — хорды большой окружности, касающиеся в точках B и D меньшей окружности; BMD — меньшая из дуг между точками касания; CNE — дуга между концами хорд. Определить дугу BMD, если дуга CNE содержит 110°.

2) На окружности взяты четыре точки. Доказать, что прямые, соединяющие середины противолежащих дуг, взаимно перпендикулярны.

3-й вариант.

1) В четырёхугольнике $ABCD$ углы B и D прямые; диагональ AC образует со стороной AB угол в 24°, а со стороной AD угол в 30°. Определить острый угол между диагоналями AC и BD.

2) Через середину D гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведена прямая перпендикулярно к AB, и на этой прямой отложен отрезок $DE = \frac{1}{2} AB$, причём отрезок DE и вершина C расположены по разные стороны от гипотенузы. Доказать, что CE — биссектриса прямого угла треугольника ABC.

4-й вариант.

1) Внутри данной окружности находится другая окружность, CAE и DBF — две хорды большей окружности (не пересекающиеся), касающиеся меньшей окружности в точках A и B; AMB — меньшая из дуг между точками касания, CND и EPF — дуги между концами хорд. Сколько градусов содержит дуга EPF, если дуга AMB содержит $146°$ и дуга CND равна $22°$?

2) Окружность пересекает две концентрические окружности: одну — в точках A и B, другую — в точках C и D. Доказать, что хорда AB параллельна хорде CD.

58-й урок. Тема: Анализ контрольной работы. Построение на данном отрезке сегмента, вмещающего данный угол.

1. Анализ контрольной работы.

2. Проверка домашнего задания.

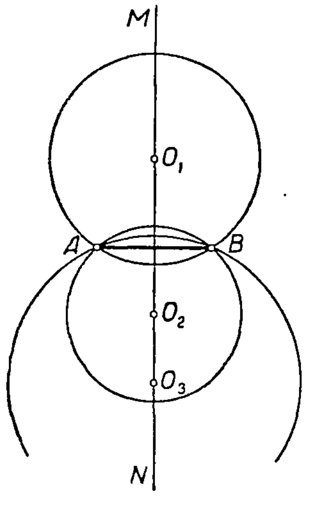
3. Изложение нового материала.

Прежде чем перейти к построению на данном отрезке сегмента, вмещающего данный угол, выяснить, что значит „на данном отрезке построить сегмент“, „сегмент, вмещающий данный угол“.

Затем решить следующие две задачи:

1) На данном отрезке построить сегмент (черт. 114).

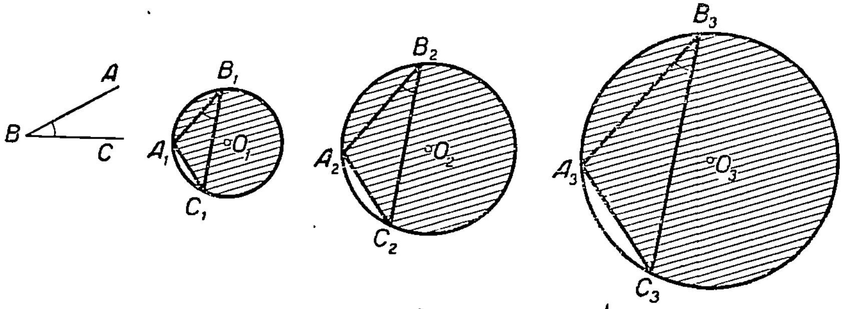
2) Построить сегмент, вмещающий данный угол (черт. 115).



Черт. 114.

При решении первой задачи показать, что задача имеет бесчисленное множество решений и что центр дуги сегмента, построенного на данном отрезке, расположен на перпендикуляре, проведённом к данному отрезку через его середину.

Затем перейти к решению второй задачи и выполнить следующее построение: провести окружность произвольного радиуса, взяв на ней точку B_1 и, проведя из этой точки хорду B_1A_1 в произвольном направлении, построить угол, равный данному, так чтобы его вершина лежала в точке B_1 и одной из сторон являлась хорда B_1A_1. Обозначив точку пересечения окружности с другой стороной угла C_1, получим искомый сегмент $A_1B_1C_1$ (на чертеже покрыт штрихами). Затем выяснить, сколько решений имеет эта задача. Далее пояснить, что нам нужно на данном отрезке построить такой сегмент, который вмещает в себе данный угол, т. е. из всех построенных сегментов при решении первой задачи выбрать тот, который вмещает в себя данный угол, т. е. из всех построенных сегментов при решении второй задачи выбрать тот, который вмещает в себя данный угол, или из всех построенных сегментов при решении второй задачи выбрать тот, у которого отрезок A_1C_1, A_2C_2 и т. д. равен данному отрезку. Выяснить, как это сделать.



Черт. 115.

Проделав это упражнение, перейти к решению задачи: „На данном отрезке AB построить сегмент, вмещающий данный угол α“, проведя при этом анализ, построение, доказательство и исследование.

4. Закрепление пройденного.

Вызвав одного из учеников к доске, предложить ему провести анализ решения задачи 59 из § 7 (построить треугольник по основанию, углу при вершине и высоте).

Анализ решения сводится к следующему: чтобы построить треугольник по основанию и углу при вершине, нужно на данном отрезке (на основании треугольника) построить сегмент, вмещающий данный угол (угол при вершине треугольника). Третья вершина искомого треугольника будет лежать на дуге построенного сегмента.

Чтобы построить треугольник по основанию и высоте, нужно найти геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии (равном высоте) от данного основания. Таким геометрическим местом точек являются две параллельные прямые, находящиеся на данном расстоянии от данного основания. Следовательно, третья вершина треугольника будет лежать на этом геометрическом месте.

Итак, третья вершина искомого треугольника будет лежать на пересечении вышеуказанных геометрических мест.

Построение заставить учащихся провести дома.

5. Задание на дом.

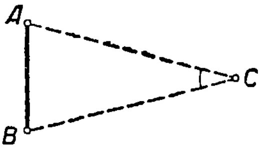
Из учебника новый материал § 132, для повторения § 81.
Из задачника § 7, № 59.

59-й урок. Тема: **Решение задач, основанных на построении на данном отрезке сегмента, вмещающего данный угол.**

1. Проверка домашнего задания.

2. Решение задач.

Проверив домашнее задание, вызвать одного из учеников к доске и выяснить, что является геометрическим местом точек, из которых данный отрезок виден под данным углом. При этом вначале предложить ученику начертить отрезок (черт. 116), взять вне его точку и показать, под каким углом виден данный отрезок из этой точки. Затем перейти к определению места расположения точек, из которых данный отрезок виден под данным углом (или где расположены вершины треугольников, имеющих данное основание и данный угол при вершине). Обратить внимание на то, что геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, состоит из **дуг двух сегментов**, из которых каждый вмещает в себя данный угол и один расположен по одну сторону данного отрезка, а другой — по другую сторону.



Черт. 116.

Далее перейти к построению треугольника по основанию, углу при вершине и медиане, проведённой к основанию. Для решения задачи вызвать одного из учеников к доске, которому предложить провести анализ и построение. Затем вызвать другого ученика и его заставить провести доказательство и исследование.

3. Задание на дом.

Из учебника — повторить § 82.
Из задачника § 7, № 62.

60-й урок. Тема: **Вписанные и описанные треугольники и четырёхугольники.**

Определение многоугольника, вписанного в окружность и описанного около окружности; определение окружности, описанной около многоугольника и вписанной в него.

Теорема: „Около всякого треугольника можно описать окружность и притом только одну“; „Во всякий треугольник можно вписать окружность и притом только одну“.

1. Проверка домашнего задания.

При проверке домашнего задания особое внимание уделить тому, как учащиеся повторили теорему о возможности проведения окружности через три точки, не лежащие на одной прямой, а также как уяснили следствие: „Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведённые через их середины, пересекаются в одной точке" (§ 104).

2. Изложение нового материала.

Начертив многоугольник, все вершины которого лежат на окружности, а также многоугольник, все стороны которого касаются окружности, и предложив это сделать в тетрадях учащимся, дать определение многоугольника, вписанного в окружность и описанного около окружности, а также определение окружности, описанной около многоугольника и вписанной в него. Затем предложить учащимся доказать, что около всякого треугольника можно описать окружность и притом только одну.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы о возможности вписать окружность во всякий треугольник, следует повторить, что является геометрическим местом точек равноудалённых от сторон угла, и как разделить данный угол пополам.

Далее перейти к доказательству теоремы: „Во всякий треугольник можно вписать окружность и притом только одну".

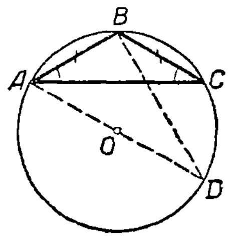
Следствие „Биссектрисы трёх углов треугольника пересекаются в одной точке" предложить учащимся доказать самостоятельно.

3. Закрепление пройденного.

После доказательства теорем рассмотреть различные случаи расположения центра окружности, описанной около треугольника в зависимости от вида треугольника (остроугольный, прямоугольный, тупоугольный).

Затем решить из § 7 задачи 63 и 64.

При решении задачи 64 необходимо рассмотреть различные способы решения, предложив учащимся некоторые из них разобрать дома.



Черт. 117.

Некоторые способы решения задачи 64:

1) Проведём диаметр AD и хорду BD (черт. 117). В $\triangle ABC$ $\angle BAC = \angle BCA = 30°$; $\angle ADB = \angle BCA = 30°$, так как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны. В $\triangle ABD$ $\angle ABD = d$, как вписанный, опирающийся на диаметр.

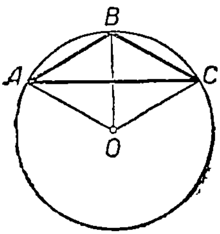
Тогда $AB = \frac{AD}{2}$ — катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы. И $AD = 2AB = 4$ *см.*

2) Вершины треугольника соединим с центром (черт. 118).

$$\triangle ABO = \triangle OBC \text{ — по трём сторонам,}$$
$$\downarrow$$
$$\angle ABO = \angle OBC = 60°; \qquad (1)$$
$$\angle BAO = \angle ABO, \text{ так как } AO = OB,$$
$$\downarrow$$
$$\angle BAO = 60°. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует: $\angle AOB = 60°$, тогда в $\triangle AOB$ $AB = BO = OA = 2$ *см*, а диаметр равен 4 *см*.

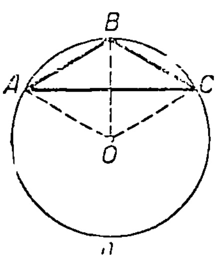
3) Вершины треугольника соединим с центром (черт. 119).



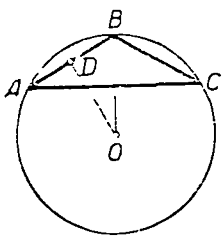
Черт. 118.

$$\smile AnC = 240°, \text{ так как } \angle ABC = 120°,$$
$$\downarrow$$
$$\smile ABC = 120°,$$
$$\downarrow$$
$$\angle AOC = 120°.$$

$$\text{В } \triangle AOC \; AO = OC \text{ и } \angle AOC = 120°,$$
$$\downarrow$$
$$\angle CAO = \angle ACO = 30°.$$
$$\text{В } \triangle ABC \; AB = BC \text{ и } \angle ABC = 120°,$$
$$\downarrow$$
$$\angle BAC = \angle BCA = 30°.$$



Черт. 119.



Черт. 120

$\triangle ABC = \triangle AOC$ по второму признаку равенства треугольников, тогда $AO = OB = 2$ *см*, а диаметр равен 4 *см*.

4) Вершины треугольника соединим с центром (черт. 119).

$$\begin{array}{l}\smile AnC = 240^\circ, \text{ так как } \angle ABC = 120^\circ, \\ \quad\downarrow \\ \left.\begin{array}{l}\smile ABC = 120^\circ, \\ \smile AB = \smile BC, \quad \text{так как } AB = BC\end{array}\right\} \begin{array}{c}\smile AB = \smile BC = 60^\circ, \\ \downarrow \\ \angle AOB = \angle BOC = 60^\circ.\end{array}\end{array}$$

$$\text{В } \left.\begin{array}{l}\triangle AOB \; AO = OB, \\ \quad \angle AOB = 60^\circ \quad (1)\end{array}\right\} \angle BAO = \angle ABO = 60^\circ. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует: $AB = BO = OA = 2$ *см*, а диаметр равен 4 *см*.

5) Восставляем перпендикуляры к AB и AC из их середины (черт. 120).

Точка пересечения перпендикуляров даст центр окружности. В результате получается прямоугольный треугольник ODB, у которого известен один катет (1 *см*); $\angle DOB = 30^\circ$, тогда $r = OB = 2$ *см*.

4. Задание на дом.

Из учебника новый материал § 136, 137 (1, 2); для повторения § 83.

Из задачника § 7, № 65, 66.

61-й урок. Тема: Решение задач, связанных с подтемой „Вписанные и описанные треугольники".

1. Проверка домашнего задания.

Проверку выполнения домашнего задания провести следующим образом: вызвать четырёх учеников, из них двух учеников к доске, двух — за первые парты. Каждому ученику предложить доказать теорему (или из повторительного материала, или из нового) и решить задачу. Теоремы доказывают на доске, а задачи решают в тетради. Кроме этих вопросов, ученикам по ходу ответов могут быть заданы и другие вопросы или задачи, например:

1) Вершины вписанного четырёхугольника делят окружность в отношении 3 : 7 : 5 : 21. Определить углы этого четырёхугольника.

2) В круг вписан треугольник. Одна сторона этого треугольника — диаметр, а две другие стягивают дуги, относящиеся между собой, как 13 : 5. Определить углы треугольника.

3) Определить радиус круга, описанного около прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 12 *дм*.

4) Определить радиус круга, описанного около прямоугольника, диагональ которого равна 24 *дм*, и т. п.

2. Решение задач, связанных с подтемой „Вписанные и описанные треугольники“.

На данном уроке решить из § 7 задачи 68, 70 и 75.

Задачу 70 предложить учащимся решить самостоятельно, дав минут 5 на обдумывание решения. Затем правильность решения проверить у доски. Задачу 68 решить, вызвав одного из учеников к доске, записать при этом коротко решение и разобрать оба случая.

Решение задачи 68.

1-й случай (черт. 121).

Соединим вершину C с центром O. $\triangle AOC$ — равнобедренный, так как $AO = OC$, следовательно, $\angle OCA = \angle OAC = 22^\circ 38'$.

Тогда

$\angle AOC = 180^\circ - (20^\circ 38' + 20^\circ 38') = 180^\circ - 41^\circ 16' = 138^\circ 44'$.

Так как $\angle AOC$ — центральный, то

$\smile AmC = 138^\circ 44'$, а $\angle ABC = 69^\circ 22'$, как вписанный.

$\angle BAC = \angle BCA$, так как $AB = BC$.

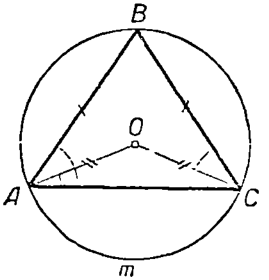
Следовательно, $\angle BAC = \frac{180^\circ - 69^\circ 22'}{2} = 55^\circ 19'$.

2-й случай (черт. 122).

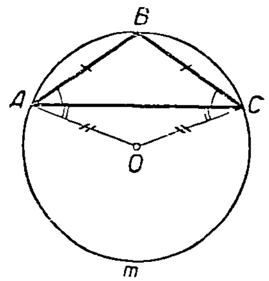
Соединим вершину C с центром. $\triangle AOC$ — равнобедренный, так как $AO = OC$, следовательно, $\angle OCA = \angle OAC = 20^\circ 38'$.

Тогда

$\angle AOC = 180^\circ - (20^\circ 38' + 20^\circ 38') = 180^\circ - 44^\circ 16' = 138^\circ 44'$.



Черт. 121.



Черт. 122.

Так как $\angle AOC$ — центральный, то $\smile ABC = 138^\circ 44'$, $\smile AmC = 360^\circ - 138^\circ 44' = 221^\circ 16'$, а $\angle ABC = \frac{221^\circ 16'}{2} = 110^\circ 38'$, как вписанный. $\angle BAC = \angle BCA$, так как $AB = BC$.

Следовательно, $\angle BAC = \frac{180^\circ - 110^\circ 38'}{2} = \frac{69^\circ 22'}{2} = 34^\circ 41'$.

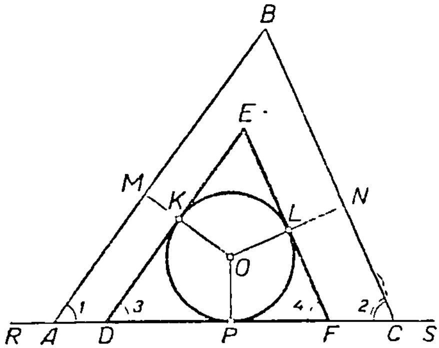
Далее решить задачу 75 на построение; если не позволяет время, то в классе провести анализ, а построение с доказательством и исследование, предложить учащимся выполнить дома.

При этом часть решения записать, а остальные рассуждения провести устно; например, заставить учащихся записать дома построение и исследование, а доказательство проделать устно.

Анализ.

Предположим, что нам нужно построить треугольник, у которого даны два угла, так, чтобы одна из сторон треугольника касалась данного круга. Как это сделать? Один из учеников рассказывает, как построить такой треугольник (черт. 123).

Выясняем далее, что боковые стороны полученного треугольника должны быть соответственно параллельны боковым сторонам искомого треугольника; так как $\angle 1 = \angle 3$, то $AB \parallel DE$ и $\angle 2 = \angle 4$, следовательно, $BC \parallel EF$.



Черт. 123.

Проведя радиусы в точки касания и продолжив их до пересечения с боковыми сторонами треугольника ABC, получим $OK \perp DE$ и $OL \perp EF$, следовательно, $OM \perp AB$ и $ON \perp BC$. Отсюда вытекает следущее **построение**: взяв на данной окружности любую точку P, проводим через неё прямую RS, касающуюся окружности. Затем при этой прямой строим углы, равные данным ($\angle 1$ и $\angle 2$); продолжив их стороны до взаимного пересечения, получим треугольник ABC. Из центра O опустим перпендикуляры к боковым сторонам треугольника ABC. Через точки пересечения этих перпендикуляров с окружностью проводим прямые, параллельные боковым сторонам треугольника ABC. Получим треугольник DEF.

Доказательство. Чтобы доказать, что треугольник DEF искомый, нужно доказать, что все стороны этого треугольника касаются данного круга и два угла треугольника равны данным углам. Сторона DF касается окружности по построению. Докажем, что стороны ED и EF также касаются данного круга.

$ED \parallel AB$ по построению, а $OK \perp AB$ по построению, следовательно, $ED \perp OK$, значит ED — касательная. Так же доказывается, что сторона EF касается данного круга; $\angle 1$ равен данному углу по построению и $\angle 2$ равен данному — по построению, но $\angle 3 = \angle 1$, как соответственные при параллельных прямых AB и DE и секущей AC, $\angle 4 = \angle 2$, как соответственные при параллельных прямых BC и EF и секущей AC. Следовательно, треугольник DEF—искомый.

Исследование. Задача имеет решение, если сумма данных углов меньше $2d$, и только одно.

3. Задание на дом.

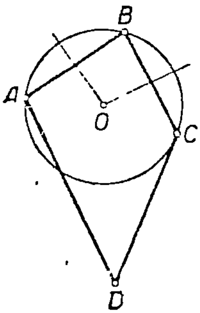
Из учебника для повторения § 87, 88.
Из задачника § 7, № 67, 71.
Закончить решение задачи 75.

62-й урок. Тема: Доказательство прямой и обратной теоремы о свойстве углов вписанного выпуклого четырёхугольника.

1. Проверка домашнего задания.

2. Изложение нового материала.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы: „В выпуклом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна двум прямым“, необходимо ещё раз повторить, какой четырёхугольник называется выпуклым, невыпуклым, начертить их, чему равна сумма внутренних углов выпуклого четырёхугольника. Повторить определение вписанного и описанного четырёхугольника, также определение вписанного угла и как он измеряется. (Повторение провести при помощи вопросов, которые ставятся всему классу.) Затем перейти к доказательству теоремы. После доказательства следует ещё раз повторить формулировки теорем о возможности описать около треугольника окружность, и вписать в треугольник окружность, вспомнить, где будут расположены центры этих окружностей.



Черт. 124.

Далее сказать учащимся, что перед ними возникают вопросы: около всякого ли четырёхугольника можно описать окружность и во всякий ли четырёхугольник можно вписать окружность?

Затем следует описать окружность около выпуклого четырёхугольника произвольной формы; задачу можно предложить ученику, вызвав его к доске. Для решения задачи надо вспомнить, через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну. Сделаем это (черт. 124). Мы получим единственную окружность, которая проходит через три вершины данного четырёхугольника. Теперь нам могут представиться два случая: 1) окружность прошла через четвёртую вершину четырёхугольника; 2) окружность не прошла через четвёртую вершину четырёхугольника.

В первом случае задача имеет решение, во втором — не имеет решения. Следовательно, около четырёхугольника не всегда можно описать окружность. Выясним, около какого четырёхугольника можно описать окружность, для этого вспомним теорему о свойстве углов вписанного четырёхугольника. Ещё раз повторим, что в ней дано и что требуется доказать: Затем предлагаем учащимся составить (сформулировать) обратную теорему. Обычно учащиеся дают такую формулировку. „Если в выпуклом четырёхугольнике сумма противоположных углов равна двум прямым, то четырёхугольник вписанный", здесь необходимо пояснить, что такой четырёхугольник не обязательно вписанный, а его можно сделать вписанным, т. е. около такого четырёхугольника можно описать окружность и притом только одну. Затем дать точную формулировку теоремы: „Если в выпуклом четырёхугольнике сумма противоположных углов равна двум прямым, то около него можно описать окружность и притом только одну", и провести доказательство, обратив внимание на способ, при помощи которого доказывается теорема.

3. Закрепление пройденного.

Доказав теорему, рассмотреть все виды изученных четырёхугольников и выделить из них те, около которых можно описать окружность. При этом предложить учащимся сделать для каждого случая пояснение.

4. Задание на дом.

Из учебника новый материал § 139 (1, 2), для повторения § 89.

Из задачника § 7, № 72, 84.

63-й урок. Тема: Решение задач, связанных с подтемой „Вписанные и описанные четырёхугольники" и решение задач на построение методом геометрических мест.

1. Проверка домашнего задания.

При проверке домашнего задания включить в вопросы задачи, решаемые устно, например предложить учащимся решить задачу 85 из § 7 или некоторые задачи из „Сборника задач и упражнений для устных занятий по математике" В. А. Игнатьева и др.

2. Решение задач.

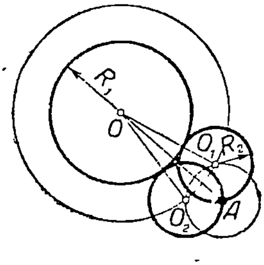
Задачу 77 предложить учащимся решить самостоятельно, проверив затем правильность решения у доски.

Далее решить следующую задачу на построение: „Данным радиусом описать окружность, которая касалась бы данного круга и проходила бы через данную точку“ (рассмотреть три случая: данная точка лежит 1) вне круга, 2) на окружности, 3) внутри круга).

Первый случай (черт. 125—127) рассмотреть в классе, остальные включить в домашнее задание.

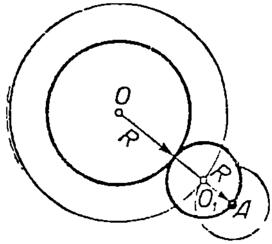
Приводим исследование решения вышеуказанной задачи. R_1 — радиус данной окружности, R_2 — радиус искомой окружности, OA — расстояние между центром данной окружности и данной точкой.

1) Данная точка лежит вне круга.



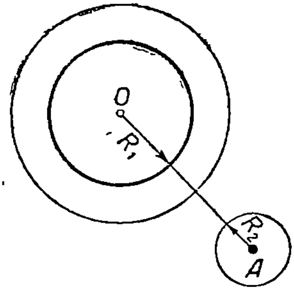
Черт. 125.

$OA < R_1 + 2R_2$.
Задача имеет два решения.



Черт. 126.

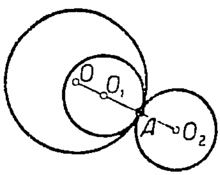
$AO = R_1 + 2R_2$.
Задача имеет одно решение.



Черт. 127.

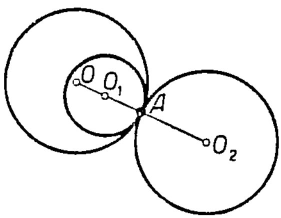
$OA > R_1 + 2R_2$.
Задача решения не имеет.

2) Данная точка лежит на окружности (черт. 128—130).



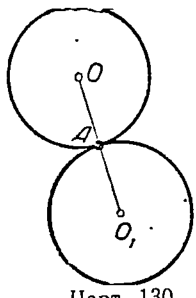
Черт. 128.

$R_1 > R_2$.
Задача имеет два решения.



Черт. 129.

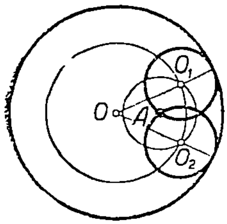
$R_1 < R_2$.
Задача имеет два решения.



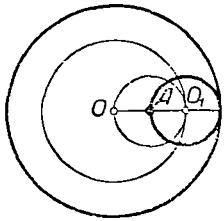
Черт. 130.

$R_1 = R_2$.
Задача имеет одно решение.

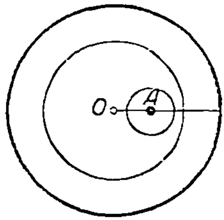
3) Данная точка лежит внутри круга (черт. 131—133).



Черт. 131.
$OA > R_1 - 2R_2$.
Задача имеет два решения.



Черт. 132.
$OA = R_1 - 2R_2$.
Задача имеет одно решение.



Черт. 133.
$OA < R_1 - 2R_2$.
Задача не имеет решения.

3. Задание на дом.

Из учебника для повторения § 90, 91.

Из задачника § 7, № 76.

Закончить решение классной задачи (разобрать два последних случая).

IV ЧЕТВЕРТЬ.

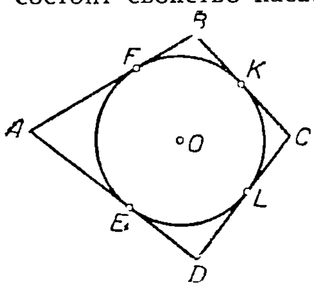
64-й урок. Тема: Свойство сторон описанного четырёхугольника.

1. Проверка домашнего задания.

Выполнение домашней работы проверить у доски. Во время подготовки вызванных учащихся с классом следует проверить устно из § 7 решение задачи 88 (2).

2. Изложение нового материала.

Прежде чем перейти к изложению нового материала, следует с учащимися повторить, что называется касательной, в чём состоит свойство касательных, проведённых из одной и той же точки к одной окружности, какой четырёхугольник называется описанным. (Вопросы ставятся всему классу.)



Черт. 134.

Затем перейти к доказательству теоремы о свойстве сторон описанного четырёхугольника (черт. 134).

При доказательстве необходимо обратить внимание учащихся на порядок записи равенств.

(Равенства отрезков нужно записывать так, чтобы при почленном сложении их в левой части равенства получилась сумма противоположных сторон четырёхугольника, то же — в правой части.

Например, $AF = AE$ и $FB = BK$, но не писать $BK = FB$, так как при почленном сложении этих двух равенств во втором случае мы не получим сторону AB.)

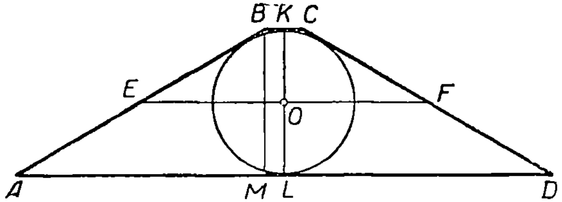
3. Закрепление пройденного.

После доказательства теоремы, повторив, что дано в ней и что требуется доказать, предложить учащимся составить обратную теорему и выяснить, в какие изученные нами четырёхугольники можно вписать окружность. Затем из § 7 решить задачи 82, 88 (1) и 83.

Задачи 82 и 88 (1) решить устно, а решение задачи 83 записать в классе или предложить учащимся решение оформить дома.

Рекомендуем при решении этой задачи рассмотреть различные способы решения.

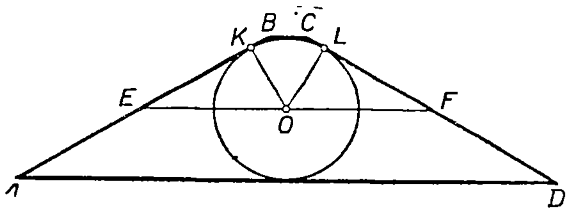
Дополнительное построение (черт. 135), провести радиус OK в точку касания окружности с меньшим основанием трапеции,



Черт. 135.

продолжить его до пересечения с основанием AD и из вершины B опустить перпендикуляр на AD.

Дополнительное построение (черт. 136), провести радиусы в точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции.



Черт. 136.

4. Задание на дом.

Из учебника новый материал § 140; для повторения § 92. Из задачника § 7, № 78, 80.

65-й урок. Тема: Решение задач на вписанные и описанные треугольники и четырёхугольники.

1. Проверка домашнего задания.
2. Решение задач.

На данном уроке рекомендуем решить одну задачу на вычисление и одну — на построение (например, из § 7 № 86 и 69).

Прежде чем перейти к решению задачи 86, необходимо повторить с учащимися, что называется сектором, заставить одного из них начертить сектор, какой угол называется центральным — показать его на чертеже; затем пояснить учащимся, какой круг называется вписанным в сектор, и предложить доказать одному из них, что центр круга, вписанного в сектор, лежит на биссектрисе угла сектора.

Проделав это, перейти к решению задачи.

Задачу 69 предложить учащимся решить самостоятельно без подробной записи решения, затем правильность решения проверить у доски, вызвав одного из учеников, решивших задачу.

3. Задание на дом к уроку 67.

Из учебника для повторения § 93, 94.

Из задачника § 7, № 74, 87.

66-й урок. Контрольная работа.

1-й вариант.

1) Определить боковую сторону равнобедренного треугольника, угол при основании которого равен 30°, а радиус описанной окружности равен 24 *см*.

2) Провести окружность, касающуюся двух данных параллельных прямых и проходящую через данную точку, находящуюся между этими прямыми.

2-й вариант.

1) Около круга, радиус которого равен 7 *см*, описан прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 30 *см*. Найти периметр треугольника.

2) Даны две параллельные прямые и секущая. Провести окружность, касающуюся всех трёх прямых.

3-й вариант.

1) O — центр круга, описанного около треугольника ABC. Определить угол OAC, если $\angle B = 110°$.

2) Данным радиусом описать окружность, проходящую через данную точку и касательную к данной прямой.

4-й вариант.

1) Около круга описана равнобедренная трапеция с углом в 30°. Определить периметр этой трапеции, если радиус вписанного круга равен 12 *см*.

2) Построить окружность, которая касалась бы сторон данного угла, причём одной из них — в данной точке.

67-й урок. Тема: **Анализ контрольной работы. Теорема о пересечении высот треугольника.**

1. Анализ контрольной работы.

2. Проверка домашнего задания.

Выполнение домашнего задания проверить у доски.

3. Изложение нового материала.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы о пересечении высот треугольника, необходимо повторить: 1) где расположен центр круга, описанного около треугольника, и почему; 2) где расположен центр круга, вписанного в треугольник, почему. Обратить внимание учащихся на то, что три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведённые через их середины, пересекаются в одной точке и три биссектрисы углов треугольника тоже пересекаются в одной точке. Затем перейти к доказательству теоремы о пересечении высот треугольника, при этом можно взять тупоугольный треугольник. Пояснить, как называется точка пересечения высот треугольника и почему (по-гречески orthos — прямой).

4. Закрепление пройденного.

Выяснить, нужно ли доказывать эту теорему для прямоугольного треугольника; в какой точке пересекаются высоты в прямоугольном треугольнике. Предложить учащимся начертить треугольник и построить его ортоцентр.

5. Задание на дом.

Из учебника новый материал § 141, 142; для повторения § 95, 96.

Из задачника § 5, № 87.

68-й урок. Тема: **Теорема о пересечении медиан треугольника.**

1. Проверка домашнего задания.

При проверке домашнего задания следует обратить внимание на теоремы, которыми пользуются при решении задачи 87, так как, доказывая теорему о пересечении медиан треугольника, необходимо будет использовать эти же теоремы (свойства средней линии треугольника и второй признак параллелограмов).

2. Изложение нового материала.

При доказательстве теоремы о пересечении медиан треугольника следует вторую часть доказательства изложить подробнее (черт. 137): „Если теперь возьмём третью медиану и медиану AE, то точно так же докажем, что третья медиана пересечёт AE в точке, отсекающей от AE отрезок, равный $\frac{1}{3}AE$ (считая от BC).

А так как **только точка O** отсекает от AE такой отрезок, то третья медиана пройдёт через O; следовательно, все три медианы пересекутся в одной точке".

Указать, что точка пересечения медиан треугольника является его центром тяжести.

3. Закрепление пройденного.

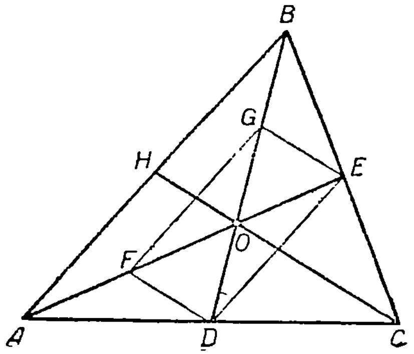
Доказав теорему, решить следующую задачу: „Построить треугольник по основанию и двум медианам, исходящим из концов основания.

Для решения задачи одного из учеников вызвать к доске.

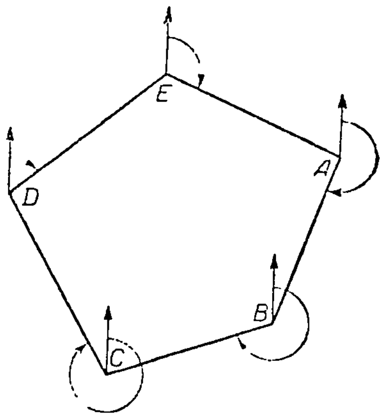
4. Задание на дом.

Из учебника новый материал § 143; для повторения § 97 и решить следующие задачи на доказательство:

1) Доказать, что шесть углов, образуемых в точке пересечения высот треугольника, попарно равны углам треугольника.



Черт. 137.



Черт. 138.

2) Доказать, что во вписанном четырёхугольнике внешний угол равен противолежащему внутреннему.

69-й урок. Тема: **Подготовка к проведению работы на местности. Съёмка плана участка буссолью путём обхода.**

1. Проверка выполнения домашней работы.

Путём вызова учеников к доске и проведением устных упражнений в течение 10—15 минут повторить заданное к уроку. Затем дать домашнее задание по повторению.

2. Домашнее задание. Из учебника повторить в § 98—100.

Из задачника § 7, № 82, 85.

3. Изложение нового материала

Вначале ознакомить учащихся с устройством буссоли, а затем дать определение азимута (с записью).

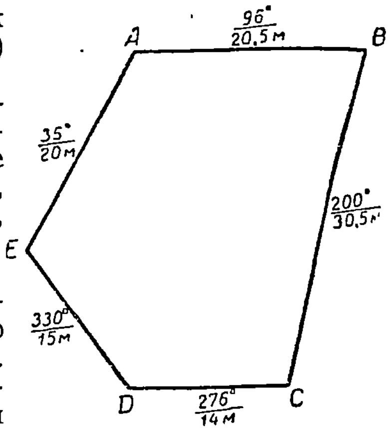
Азимутом данного направления называется угол между направлением на данную точку и магнитной стрелкой.

Азимут отсчитывается от северного конца магнитной стрелки к востоку (по ходу часовой стрелки) от 0° до 360°.

Записав определение, надо проделать один-два примера условного нахождения азимута на доске с помощью транспортира. Например, начертив такую фигуру (черт. 138), предложить найти азимуты её сторон.

Для нахождения азимутов последовательно вызвать несколько учеников — желательно звеньевых.

Ученики вычислят, что направления сторон *AB*, *BC*, *CD*, *DE* и *EA* нашего чертежа 138 имеют примерно следующие азимуты: 200°, 250°, 330°, 50°, 115°.



Черт. 139.

Можно сказать, что называется румбом, и показать запись румба. Но это, учитывая ограниченность времени, вряд ли целесообразно.

Далее надо начертить на доске примерный план участка с записью азимутов и длин сторон (черт. 139) и одновременно форму журнала и наблюдений.

Сторона	Азимуты	Длина сторон
AB	96°	20,5 м
BC	200°	30,5 „
CD	276°	14 „
DE	330°	15 „
EA	35°	20 „

Предложить учащимся подготовить дома листы (журналы) наблюдений по приведённой форме.

Рассказать об организации работы в звене во время выполнения (последовательности перехода с одного элемента работы на другой).

Начертив на доске примерный вид (план) участка, который предстоит снять, рассказать все этапы работы.

70—71-й уроки. Полевая работа: съёмка плана участка буссолью.

Оборудование на звено:

1) Буссоль.
2) Две вехи.
3) Мерный шнур или рулетка.
4) Журнал наблюдений.
5) Карандаши и резинка.

Перед выходом учеников в поле или на школьный двор учитель отмечает вершины многоугольного участка вехами. Если число звеньев будет свыше 6, то желательно на дворе или на поле наметить колышками два участка с формой одноимённых многоугольников. Эти многоугольники взять так, чтобы учитель мог легко обозревать действия каждого звена и подавать команды голосом. Длины сторон многоугольника брать в промежутке от 15 до 25 *м*. Тотчас по приходе класса на участок надо расставить звенья по вершинам и, в краткой форме напомнив этапы работы, движение звена, указав обозначения вершин (записав их в журнал), приступить к съёмке. Получение необходимых данных на первых двух вершинах ученики выполняют по команде учителя.

Примерная последовательность команд.

1) Установите буссоль в первой вершине.
2) Найдите величину азимута направления стороны AB.
3) Запишите полученное в журнал.
4) Измерьте длину стороны AB и запишите в журнал.
5) Всему звену перейти по ходу часовой стрелки в следующую вершину. Учащиеся, выполнив, согласно этим командам, необходимые вычисления и во второй вершине, самостоятельно (без команд) проводят измерения по остальным вершинам. Учитель наблюдает за работой звеньев, в необходимых случаях приходя на помощь ученикам и поддерживая дисциплину.

По выполнении всеми звеньями необходимых измерений учитель говорит учащимся, что каждый ученик должен составить журнал наблюдений и план участка. Эта работа будет выполнена в классе на следующем уроке. Поэтому каждый должен заранее дома подготовить журнал наблюдений, переписать в него полученные результаты измерений и, захватив лист бумаги, на следующем уроке начертить план участка. Так как план участка будет чертиться в определённом масштабе, то повторите по записям из 6-го класса, что называется масштабом.

72-й урок. Тема: Обработка полевой работы.

Проверить, все ли ученики принесли всё требуемое для обработки полевой работы.

Затем вспомнить, что называется численным и линейным масштабами. Проделать 2—3 упражнения на масштабы, а затем приступить к вычерчиванию плана. Учеников в классе посадить звеньями, в том составе, в каком они работали в поле.

Указать, что план участка должен быть изображён на листе тетрадочной бумаги (желательно в клетку). Учитывая небольшие размеры сторон многоугольника, взять масштаб 1:200, т. е. 1 *см* на плане соответствующий 2 *м* на местности. Посередине листа берётся линия меридиана и по данным размерам сторон и азимутов с помощью транспортира и линейки строим многоугольник участка.

Учитель, проходя между партами, следит и направляет работу учеников. В конце урока учитель собирает все работы.

Домашнее задание: Из учебника повторить § 103—111.

73-й урок. Тема: Подготовка к проведению работ на местности: 1) определение недоступного расстояния на основе равенства прямоугольных треугольников и 2) определение высоты здания (или, вообще высоты предмета).

1. Проверка выполнения домашней работы.

Вызываю к доске двух учеников, которым предлагаю пояснить решение задач, решённых ими дома, а также предлагаю каждому доказать одну из теорем, подготовленных учащимися.

2. Задание на дом.

Повторить из учебника § 112—115.

Из задачника § 5, № 65, 90 (1).

3. Опросив двух учеников класса, надо рассказать учащимся о содержании второй работы по измерению на масштабы.

Перейдём к изложению второй работы.

А. Определение недоступного расстояния.

Оборудование на звено для работы А.

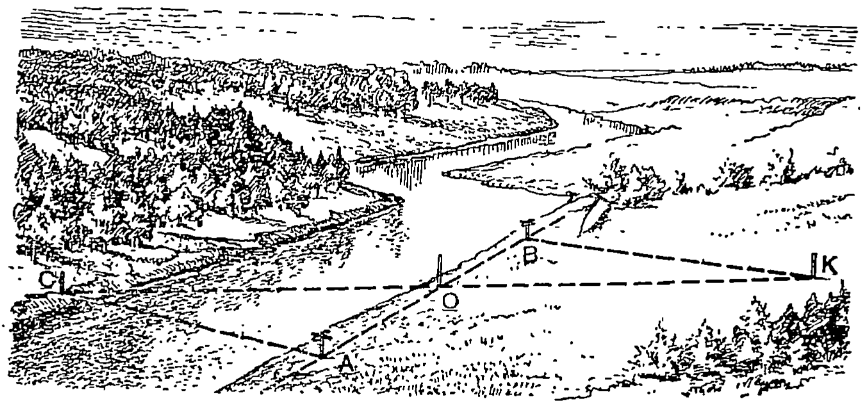
1) Эккер — 1 штука.
2) Мерный шнур или рулетка — 1 экземпляр.
3) Вехи длиной 2 *м* — 5 штук.
4) Карандаш и резинка.

Обоснование работы.

Допустим, что требуется определить ширину реки (черт. 140). Для этого на отрезке AO при точке A строим прямой угол CAO и на AB откладываем два произвольных, но равных отрезка AO и OB. В точке B строим перпендикуляр к AB и на нём находим точку, которая находится на одной прямой с O и C. Так как треугольники CAO и BOK равны (по катету и острому углу), то $AC = BK$. Отрезок BK доступен для измерения.

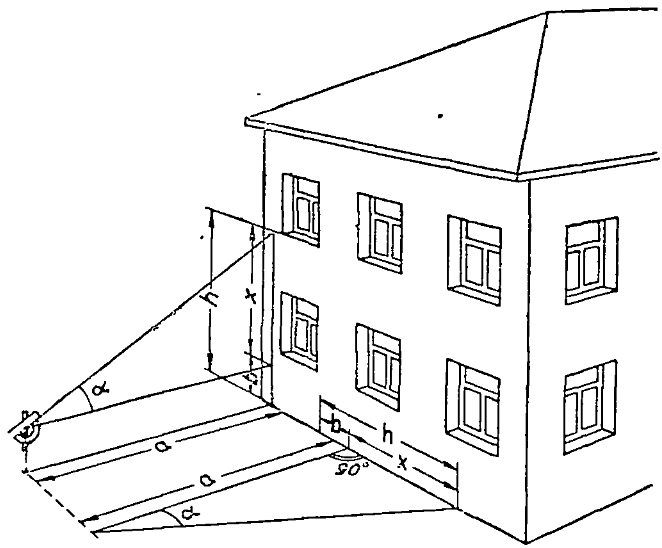
Предварительная подготовка в классе.

Учитель, показав решение задачи на доске, поясняет организацию выполнения работы. Для этого он откладывает отре-



Черт. 140.

зок на полу, например параллельно передней стене, и, поставив на концах отрезка двух учеников с вехами, говорит, что



Черт. 141.

это расстояние будет „недоступным". Далее он показывает, как провести с помощью эккера перпендикуляр к отрезку из его конца, откладывает 3 *м* (в полученной точке ставит ученика с вехой) и т. д., т. е. показывает в классе, как надо выполнить работу на местности. Учитель должен убедиться, что каждый ученик с полной ясностью представляет содержание и выполнение предложенной ему работы.

В заключение работы в классе учитель указывает, как нарисовать эскиз решения задачи.

Б. Определение высоты здания (*высоты предмета*). Оборудование на звено:

1) Эклиметр.
2) Мерный шнур или лента.
3) Астролябия.
4) Резинка и карандаш.

Предварительная работа в классе по решению этой задачи заключается в том, что учитель должен рассказать способ определения высоты предмета (черт. 141), к основанию которого возможно подойти, и показать (если учащиеся не знают), как определять углы с помощью эклиметра. Можно практически проделать в классе, поставив задачу: „Определить высоту классного помещения". Указать, как нарисовать эскиз решения задачи. Назначить, если только это будет в первый час занятий, сбор в школе за час ранее первого урока.

74 и 75-й уроки. Тема: Выполнение в полевых условиях работы № 2.

А. Определение недоступного расстояния.

Вначале все звенья выполняют работу по определению недоступного расстояния. Учитель показывает каждому звену, какое „недоступное" расстояние они должны измерить. Каждое звено ставится в таком месте двора, чтобы оно было всегда в поле зрения учителя. Затем учитель напоминает порядок работы и предупреждает, что все должны выполнять работу по его команде.

Примерный характер команд по выполнению работы:

1) Поставьте вехи на концах „недоступного" расстояния.

2) Восставьте перпендикуляры к отрезку недоступного расстояния в его конце.

3) Отложите на этом перпендикуляре 4 *м* (конечно, можно откладывать и 5—10 *м*).

Поставьте веху. Эти три вехи — вершины прямоугольного треугольника, один из катетов которого неизвестен. Постройте треугольник, равный полученному.

4) Отложите на продолжение перпендикуляра ещё 4 *м*.

5) Восставьте перпендикуляр к отрезку из полученной точки в противоположную сторону определяемого отрезка.

6) Найдите точку пересечения этого перпендикуляра с продолжением гипотенузы первого треугольника.

7) Измерьте отрезок на втором перпендикуляре. Это и есть отрезок, равный „недоступному" расстоянию.

8) Нарисуйте эскиз работы.

После окончания первой задачи учитель с классом приступает к выполнению второй задачи — определению высоты.

Б. Определение высоты на местности.

Цель — измерить высоту здания до 2-го или 3-го этажа.

Поставив звенья перед школьным зданием, предложить одним звеньям определить высоту до 2-го этажа (удобнее до подоконников), а другим до 3-го этажа (черт. 141). Поставить звенья от здания на расстоянии от 15 до 20 *м*. Затем предложить выполнять работу в следующей последовательности (желательно подавать команды).

1) Установите эклиметры.
2) Измерьте угол наклона.
3) Измерьте расстояние до стены.
4) Постройте на земле прямоугольный треугольник по катету (расстояние до стены) и острому углу (угол наклона).
5) Найдите величину второго катета. Прибавьте высоту эклиметра. Полученная сумма — искомая высота.

Проверку произвести сличением результатов между звеньями и непосредственным измерением (опустить шнур из окна). Результаты записать в журнале.

76-й урок. Тема: Обзор всего пройденного материала по геометрии в VII классе.

Обзор пройденного следует начать с повторения раздела „Четырёхугольники". Повторение этого раздела, учитывая ограниченность времени (около 15 минут) заключается в том, что, применяя вопросо-ответный метод, учитель воспроизводит в памяти учащихся основные понятия о четырёхугольниках, теоремы и их последовательность.

Эти знания закрепляются решением ряда устных упражнений из задачника В. А. Игнатьева и др. „Сборник задач и упражнений для устных занятий по математике", раздел „Геометрия", глава IV.

Аналогично повторяются разделы „Окружность" и „Вписанные и описанные треугольники и четырёхугольники".

77—80-й уроки.

Эти уроки должны быть использованы для повторения и закрепления всего пройденного материала в VII классе.

Приложение. Предварительные простейшие работы на местности.

Если учащиеся VII класса ранее не производили измерительных работ на местности, то рекомендуем учителю проделать следующие работы на местности:

1-я работа: а) провешивание прямой линии; б) определение длины своего шага; в) измерение отрезков на местности: с помощью рулетки и шнура, с помощью полевого циркуля, шагами с последующим переводом в метры; г) эккер. Проведение перпендикуляра к данной прямой.

Построение ара и гектара как в виде прямоугольника, так и в виде квадрата.

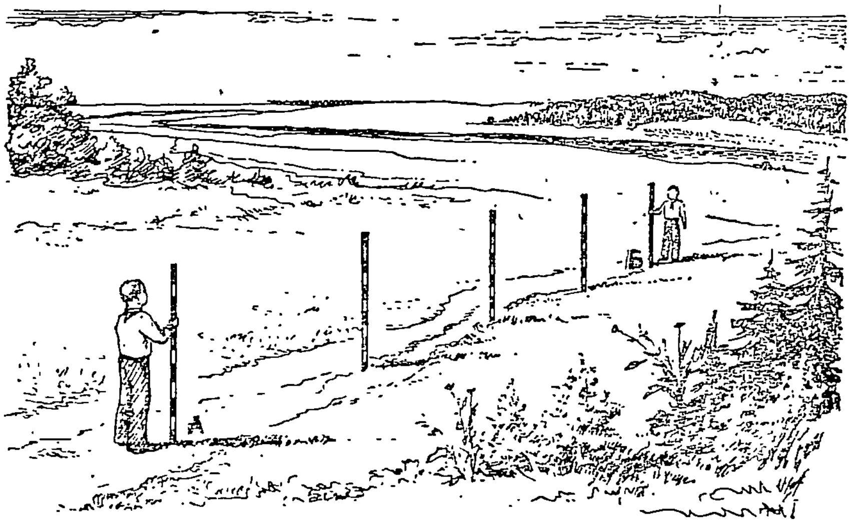
2-я работа: а) определение недоступного расстояния; б) определение высоты здания.

Не останавливаясь подробно, как это сделано для двух ранее разобранных работ, на организации и проведении первой работы, укажем только содержание этой работы.

Первая работа для приобретения простейших измерительных навыков и умений выполнима за четыре часа: два часа предварительной работы в классе и два часа на местности.

1. Провешивание прямой линии между двумя точками.

Решение. В точках A и $Б$ поставить вехи, а между ними поставить ещё несколько вех так, чтобы за первой вехой скрывались остальные (черт. 142).



Черт. 142

Выполнение. Желательно между крайними вехами взять столько вех, чтобы всё звено принимало участие.

2. Определение длины своего шага.

Решение. Для определения длины шага учащийся должен пройти 3—4 раза расстояние в 100 *м*, найти среднее арифметическое в шагах этого расстояния, а затем разделить 100 *м* на число шагов. При счёте шагов надо начинать ходьбу с правой ноги и считать шаги только левой ноги; полученное число надо удвоить.

Выполнение. Учитель предварительно отмечает вехами расстояние в 100 *м* (измеряет рулеткой или шнуром). Выполняет эту работу одновременно всё звено. В результате выполнения каждый учащийся должен составить и заполнить таблицу:

Шаги	Метры
1	—
5	—
10	—
25	—
50	—
100	—

3. Измерения отрезков на местности:

а) с помощью рулетки и шнура; б) с помощью полевого циркуля; в) шагами, с последующим переводом в метры.

Решение и выполнение. Необходимо, чтобы каждый учащийся проделал эти три работы на одном и том же отрезке местности и сравнил результаты. Письменных записей работ не требуется.

4. Эккер. а) проведение перпендикуляра к данной прямой; б) построение ара и гектара.

а) Решение. На прямой AB, обозначенной двумя вехами, ставим эккер в произвольную точку C и с помощью двух вех строим перпендикуляр CD. Вместо эккера в точке C ставим веху.

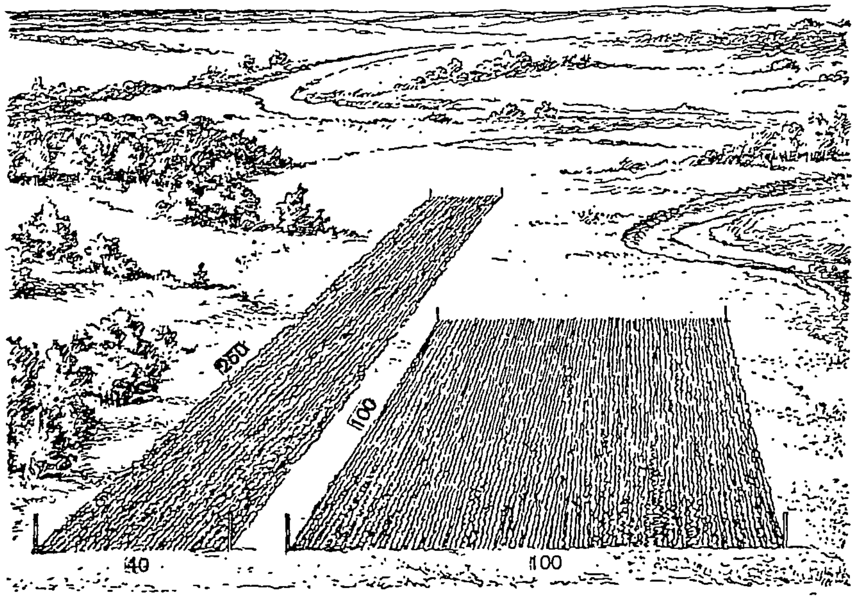
Выполнение. Выполняет всё звено — один с эккером и четверо с вехами. Необходимо, чтобы каждый участник звена построил прямой угол с эккером. Письменных записей не требовать.

б) Решение. Если эта работа производится на школьном дворе, то возможно ограничиться только построением ара как в виде прямоугольника, так и в виде квадрата. Если работы проводятся в поле, то кроме построения ара необходимо построить гектар в виде прямоугольника (черт. 143).

Выполнение. Работа производится всем звеном. В вершинах прямоугольника и квадрата построенного ара поставить вехи. Работа не требует записи. Желательно предложить учащимся практически проверить справедливость следующего положения. „Из всех прямоугольников, имеющих одну и ту же площадь, наименьший периметр имеет квадрат“.

Из изложенного материала по выполнению первой работы следует, что нет необходимости в выделении особого урока для обработки полевого материала. От учащихся требуется составить и представить только одну таблицу: „Перевод шагов в метры“.

В классной обстановке во время подготовки к выполнению работы на местности кроме ознакомления учащихся с содер-



Черт. 143.

жанием работы, её выполнением и инструментами, желательно повторить с учащимися понятие о масштабе (численном и линейном) и проделать несколько примеров на определение линейного масштаба по численному и обратно.

Что касается второй работы — определение недоступных расстояний,—то её содержание и выполнение изложено в разработках 73—75-го уроков.

ОГЛАВЛЕНИЕ.