Н. М. БЕСКИН

МЕТОДИКА ГЕОМЕТРИИ

С ПРИЛОЖЕНИЕМ ГЛАВЫ
„МЕТОДИКА
ПРЕПОДАВАНИЯ НАГЛЯДНОЙ ГЕОМЕТРИИ“
А. М. АСТРЯБА

*Допущено Министерством
высшего образования СССР
в качестве учебника
для педагогических институтов*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

МОСКВА * 1947 * ЛЕНИНГРАД

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга предназначена для студентов педвузов и для тех учителей, которые хотят научиться самостоятельно — и притом научно, а не делячески — решать встречающиеся им на практике методические вопросы. Методика математики есть наука и, как всякая наука, должна содержать общие теории, исходя из которых следует разрешать конкретные вопросы. Рецептурные руководства по методике, т. е. руководства, состоящие из множества догматических частных указаний, хотя бы и правильных, столь же далеки от научной методики, как знахарство от научной медицины.

Это — не настольная книга, из которой можно черпать советы для подготовки к очередному уроку. Поэтому мы сочли возможным опустить рассмотрение некоторых разделов курса, хотя и весьма важных (методы геометрических построений, геометрия треугольника, тригонометрические уравнения и др.), но не добавляющих ничего существенного для выработки системы методических воззрений к тому, что здесь дано.

Главы VII („Четырехугольники") и VIII („Окружность") введены в качестве примеров детального разбора темы; такой разбор учитель должен производить самостоятельно (или этому должно быть посвящено методическое руководство другого характера) по отношению ко всем разделам курса. Аналогичное замечание относится к § 3 главы XIII; этот параграф является примерным и не ставит целью охватить весь курс наглядной геометрии.

Глава XIII „Методика преподавания наглядной геометрии" написана профессором А. М. Астрябом, заведующим отделом методики математики Украинского научно-исследовательского института педагогики.

Автор будет благодарен всем читателям, а особенно учителям, которые поделятся с ним своими критическими замечаниями. Эти замечания автор просит направлять по адресу: Москва, 19, Гоголевский бульвар, д. 21, кв. 4, Н. М. Бескину.

Ник. Бескин

Москва, 3 апреля 1946 г.

Редактор *С. А. Пономарёв.* Техн. редактор *В. П. Рожин.*

Подписано к печати 8/I 1947 г. А-02704. Тираж 75000 экз. Печ. л. 17,25. Учетно-изд. л. 20,18.
Тип. зн. в 1 п. л. 47000. Зак. № 898.

2-я типография „Печатный Двор" им. А. М. Горького треста „Полиграфкнига" ОГИЗа при Совете Министров СССР. Ленинград, Гатчинская, 26.

ЧАСТЬ I

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ГЕОМЕТРИИ

ВВЕДЕНИЕ

РОЛЬ ГЕОМЕТРИИ В ШКОЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ

Цели преподавания геометрии в школе

Методика геометрии является частью общей методики математики. Все те цели, ради которых преподается в школе математика, разумеется, относятся и к геометрии. Эти цели многообразны, и их рассмотрение увело бы нас в сторону от нашего предмета. Мы предполагаем, что читатель знаком с общими вопросами методики математики и размышлял над целями ее преподавания. Поэтому здесь мы остановимся только на тех специфических целях, которые преследует преподавание геометрии. Этих целей три: 1) сообщение геометрических сведений, 2) логическое развитие и 3) развитие пространственного воображения.

Сообщение геометрических сведений

Сообщение сведений, составляющих содержание данной науки, является целью преподавания всякой науки, но эта цель не является единственной. Ценность геометрических сведений, составляющих школьный курс, двоякая. Во-первых, эти сведения непосредственно необходимы для работников многих профессий. Во-вторых, они необходимы при изучении других предметов, как входящих в курс средней школы (например, физика, тригонометрия, география), так и преподаваемых в высшей школе. Эта первая цель преподавания геометрии очевидна, и на ней не будем останавливаться.

Важность логического развития

Приобретение элементарных сведений и навыков в области логики чрезвычайно важно для каждого человека. Иногда приходится встречаться с утверждением, что логически мыслить умеет всякий нормальный человек, и для этого не требуется изучать логику. Опытный учитель математики знает, что это не так. Уменье логически мыслить действительно является свойством человеческого сознания, но это свойство имеет потенциальный характер и нуждается в специальном развитии. В той мере, в какой это свойство есть у всякого необразованного человека, оно достаточно лишь для того, чтобы производить те элементарные логические операции, с которыми приходится иметь дело в повседневной жизни. При изучении же многих наук приходится иметь дело с гораздо более тонкими логическими моментами. Чтобы разбираться в этих моментах, нельзя полагаться только на те логические данные, которые имеются у всякого человека, не изучавшего специально логики. Учитель математики знает, что многие ученики не разбираются ясно в вопросе о прямых, обратных и противоположных теоремах, затрудняются построить правильную логическую классификацию, с трудом усваивают метод полной индукции и даже метод доказательства от противного. Можно привести ряд примеров из истории математики, когда некоторые вопросы, исключительно ввиду их логической тонкости, долгое время оказывались непреодолимыми даже для крупных математиков. Например, долгое время не замечали разницы между просто сходимостью и равномерной сходимостью функциональных рядов, что является прямой логической ошибкой. Обычной ошибкой является также применение какой-либо теоремы вне тех условий, в которых она была доказана. Таким образом, в сравнительно более тонких логических вопросах, которые возникают, когда мы переходим от повседневных вопросов к изучению какой-нибудь науки, особенно математики, полагаться на те логические возможности, которые и без образования имеются у всякого нормального человека, нельзя. Эти возможности нуждаются в специальном развитии, и это развитие составляет одну из важных задач средней школы.

Кроме мотивов, приведенных выше, есть еще соображения в пользу сообщения учащимся сведений по логике. Дело в том, что часто бывает необходимо не только уметь делать логические умозаключения, но теоретически разбираться в структуре логического рассуждения. Для этого надо знать общие законы логики и логические термины. Ясно, что без этого изучение математики превратится только в накопление математических фактов, в то время, как оно должно дать ученикам также некоторое представление о методологии этой науки.

Наконец, изучение логики приносит ту практическую пользу, что выявляет и классифицирует обычные логические ошибки. Такое изучение, во-первых, предостерегает учеников от логических ошибок, а во-вторых, если ученик допустит такую ошибку, то для разъяснения ее достаточно сослаться на рассмотренный в логике общий случай этой ошибки; иногда достаточно просто назвать термин, которым обозначается такая ошибка. Иначе потребовались бы длинные рассуждения и примеры, чтобы убедить ученика в том, что он ошибается.

Роль геометрии для выработки логического развития

Логика как отдельный предмет пока не входит в программу средней школы[1]. Из этого следует, что те из задач преподавания логики, которые не могут быть исключены из среднего образования, должны быть возложены на другие предметы. Учитель каждого пред-

[1]) Во время верстки этой книги было опубликовано постановление ЦК ВКП(б) о введении в течение четырех лет, начиная с 1947/48 учебного года, преподавания логики и психологии в выпускных классах средней школы (газета „Культура и жизнь“ от 30 ноября 1946 г.).

мета должен помнить, что на него частично возлагается задача логического развития учащихся, и должен использовать те возможности к этому, которые доставляет ему его предмет.

Но не все предметы доставляют к этому одинаковые возможности, поэтому задача логического развития учеников распределяется между разными предметами неравномерно.

Эта задача почти полностью возлагается на геометрию.

Во всех науках, особенно в математике, мы имеем дело с логическими рассуждениями. Во многих науках видное место занимают логические классификации (например, классификация животных и растений в зоологии и ботанике). Однако ни в одном предмете, входящем в курс средней школы, логические методы не выступают столь резко на первый план, как в геометрии. Ни в каком другом предмете весь материал не является столь решающим образом зависимым от логических рассуждений. Наконец, никакой другой предмет не доставляет стольких примеров для иллюстрации любых положений логики. Имеются некоторые положения логики, для точной иллюстрации которых невозможно привести пример из какой-либо другой области, кроме геометрии.

Итак, ни один другой школьный предмет не обладает такими возможностями для логического развития учеников, как геометрия.

Однако мы вовсе не хотим сказать, что учитель геометрии должен использовать уроки геометрии для преподавания логики. Сведения по логике в курсе геометрии проходятся не так, как они проходились бы в курсе логики. В курсе логики эти сведения давались бы в абстрактной форме. В курсе геометрии мы имеем дело с оперативным применением логических методов. В этом курсе мы видим логику в действии, — логику, усваиваемую на геометрическом материале. Разумеется, есть ряд случаев, когда в интересах усвоения геометрии учитель должен не ограничиваться иллюстрацией какого-нибудь логического метода на геометрическом материале, а разъяснить его в общей форме и даже иллюстрировать примерами из других наук.

Помня, что развитие логического мышления есть одна из задач преподавания геометрии в средней школе, учитель должен использовать все возможности, которые представятся к этому в курсе геометрии. Поэтому нельзя одобрить практику тех учителей, которые сосредоточивают все свое внимание на привитии ученикам навыков и обходят все сколько-нибудь тонкие принципиальные вопросы под тем предлогом, что они мало доступны ученикам. Если ученик только приобрел навыки в решении задач и запомнил доказательства теорем, приводимые в учебнике, то цель преподавания геометрии еще не достигнута.

Основное правило преподавания математики на всех ступенях — не снижать научного уровня, не обходить принципиальных вопросов, а, наоборот, подчеркивать их. Глубоко ошибочно думать, что, имея перед собой слабых учеников, мы облегчим им усвоение математики, обходя тонкие вопросы. Дело обстоит как раз наоборот, ибо, не добившись вполне отчетливого уяснения учениками принципиальных вопросов, мы не облегчим, а затрудним для них изучение геометрии, так как лишим их многих ассоциаций, общего подхода к разным вопросам и многих внутренних связей. Из стройной системы мы превратим геометрию в собрание отдельных предложений. Имея дело со слабыми учениками, учитель должен проходить принципиальные вопросы математики нисколько не в меньшем объеме, чем с сильными, но лишь разъяснять их более подробно. Математику можно преподавать всем — и сильным и слабым, — не превращая это преподавание в натаскивание, а сохраняя полностью все необходимые идейные моменты.

Развитие пространственного воображения

Третья цель преподавания геометрии — развитие пространственного воображения. Пространственное воображение у большинства учеников, приступающих к изучению геометрии, развито весьма слабо, но при правильно поставленном преподавании геометрии оно легко поддается сильному развитию.

При изучении планиметрии надо добиваться, чтобы ученик мог охватывать сразу весь чертеж (сначала — простой, затем — посложнее) и улавливать те соотношения между элементами чертежа, которые могут быть нужны при решении данного вопроса. Особенно полезны случаи, когда для решения вопроса приходится делать на чертеже добавочные вспомогательные построения. Чтобы догадаться, каковы должны быть эти построения, ученик должен уловить соотношения между начерченными элементами чертежа и теми элементами, которых на чертеже нет.

Весьма полезны упражнения в проведении геометрических рассуждений, не делая чертежа на доске или на бумаге, а представляя чертеж в уме. Решение задач на построение способствует развитию пространственного воображения.

Изучение стереометрии в значительно большей степени, чем изучение планиметрии, помогает развитию пространственного воображения. В планиметрии при всяком затруднении мы имеем возможность сделать точный чертеж, в стереометрии же чертеж носит лишь вспомогательный характер, и отдельные его элементы изображаются в искаженном виде. Поэтому при решении стереометрических вопросов в основном приходится полагаться на воображение, а чертеж лишь помогает этому, нося в большинстве случаев качественный характер, и напоминает нам о взаимном расположении частей. При выполнении стереометрических чертежей обычно нужно сначала ясно представить в уме изображаемые элементы, и это служит предпосылкой для выполнения чертежа.

Знакомство учителя с начертательной геометрией

Учитель, преподающий стереометрию, должен быть знаком с элементами начертательной геометрии, особенно ему необходимо знакомство с аксонометрическими проекциями и линейной перспективой. Грубые ошибки против правил начертательной геометрии — обычное дело в стереометрических чертежах учеников, а иногда и учителей. Чертежи учителя, выполняемые на доске, обязательно должны быть вполне грамотны. Это облегчает ученикам усвоение стереометрии и служит примером, как грамотно выполнять стереометрические чертежи, не зная начертательной геометрии.

Правила начертательной геометрии, которыми должен руководствоваться учитель, выполняя стереометрические чертежи, будут рассмотрены в гл. XI.

ГЛАВА I

ЭВОЛЮЦИЯ ВЗГЛЯДОВ НА ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Три периода в эволюции взглядов на основания геометрии

По мере накопления геометрических знаний изменялись взгляды на основания геометрии, т. е. на применяемые в ней методы доказательств, систематизацию материала и вообще методологию геометрии. В этой эволюции можно отметить три резко выраженных периода: догреческий, греческий и современный.

§ 1. Догреческий период

Эмпирический характер древней геометрии

Догреческий период характеризуется полным отсутствием интереса к основаниям геометрии[1]). Египтяне, вавилоняне, индусы и другие древние народы, имевшие уже за несколько тысячелетий до нашего времени некоторый запас геометрических сведений, не применяли никаких доказательств, у них не было определений и аксиом. Их геометрия являлась эмпирической наукой и представляла собрание правил и формул, большей частью для вычисления площадей и объемов. Некоторые из этих формул были неточны.

§ 2. Греческий период

„Начала" Евклида

В начале VI в. до нашей эры греки познакомились с геометрией египтян и в течение следующих нескольких столетий развили геометрию до высокой степени совершенства. Они не только открыли большое число геометрических фактов, но и выработали чрезвычайно совершенные логические методы и привели весь геометрический материал в стройную систему. Евклид Александрийский (IV—III вв. до н. э.) составил „Начала", которые являлись величайшим достижением греков в области оснований геометрии. По своему фактическому материалу „Начала" не охватывали всей геометрии того времени, например, они не включали теории конических сечений, которая уже была известна во времена Евклида. Как видно из названия, целью этого сочинения являлось лишь изложение

[1]) Мы называем этот период „догреческим" условно, не интересуясь его хронологическими границами. Некоторые современные историки полагают, что у древних египтян были элементы логических доказательств (до нас не дошедшие).

начал геометрии. Методологические совершенства „Начал“ столь велики, что в течение более двух тысяч лет эта книга во всем мире служила единственным учебником геометрии [1]).

Влияние „Начал“ на дальнейшее развитие геометрии было огромно. Учитель, преподающий геометрию, должен быть знаком с этим сочинением, играющим первостепенную роль в его науке.

Здесь мы не собираемся входить в подробное описание „Начал“. Нас интересует лишь та задача обоснования геометрии, которая поставлена в „Началах“. Тот методологический уровень, который мы имеем в „Началах“, характеризует второй период развития методологии геометрии, который мы назвали греческим; этот период имеет особое значение для преподавания в средней школе. Рассмотрим „Начала“ с этой точки зрения.

„Начала“ состоят из пятнадцати книг. Первые тринадцать принадлежат Евклиду, а последние две составлены позднее и приписываются: четырнадцатая — Гипсиклу, а пятнадцатая — Дамасцию. В начале каждой книги формулируются определения тех геометрических понятий, которые рассматриваются в этой книге. В начале первой книги, кроме того, формулируются аксиомы и постулаты, т. е. положения, принимаемые без доказательства. В чем греки полагали разницу между аксиомами и постулатами, точно не установлено; в настоящее время это разделение не принято, и все положения, принимаемые без доказательства, мы называем аксиомами.

Приводим некоторые определения из первой книги „Начал“, а также все постулаты и аксиомы.

Определения

1. Точка есть то, что́ не имеет частей.
2. Линия есть длина без ширины.
3. Границы линии суть точки.
4. Прямая линия есть та, которая одинаково расположена относительно всех своих точек.
5. Поверхность есть то, что́ имеет только длину и ширину.
6. Границы поверхности суть линии.
7. Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена относительно всех своих прямых.

Постулаты

Требуется, чтобы:

1. От каждой точки до каждой другой точки можно было провести одну прямую.
2. Ограниченную прямую можно было непрерывно продолжать по прямой линии.

---

[1]) Пользуемся случаем отметить, что использование „Начал“ в качестве учебника было нецелесообразно. К учебнику предъявляются особые педагогические требования, большинство же научных трудов не годится в качестве учебников. Этот вопрос рассмотрен подробно ниже (генетический метод в гл. III).

3. Из любого центра можно было описать окружность любым радиусом.

4. Все прямые углы были равны.

5. Если прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, которые вместе меньше двух прямых, эти прямые, будучи продолжены неограниченно, пересекались с той стороны, с которой лежат углы, которые вместе меньше двух прямых.

Аксиомы

1. Равные одному и тому же равны между собой.
2. Если к равным прибавить равные, то суммы будут равны.
3. Если от равных отнять равные, то остатки будут равны.
4. Совмещающиеся друг с другом равны.
5. Целое больше своей части.

Диалектика Зенона

Поясним смысл слов „требуется, чтобы“, относящихся ко всем постулатам.

У древних греков была распространена особая игра, называвшаяся диалектикой (это слово, таким образом, имело не тот смысл, что́ теперь). Диалектика заключалась в споре двух людей A и B. A предлагал вопросы, B мог отвечать на них „да“ или „нет“. Цель игры заключалась в том, что A должен был принудить B согласиться с некоторым положением, которое B первоначально отрицал. В начале спора A выдвигал некоторые положения, которые B должен был принять без доказательства. „Требовалось, чтобы“ B согласился с ними (postulatum по-латыни — требование). Если B не соглашался с этими положениями, спор не мог состояться; поскольку эти положения выставлялись без доказательства, B не обязан был с ними соглашаться. Если же B соглашался с выставленными постулатами, то он вынужден был согласиться и с другими положениями, выдвинутыми A, если они являлись *логическими* следствиями из постулатов. Изобретение этой игры приписывается Зенону Элеатскому (V в. до н. э.). Два логических трактата Аристотеля („Топика“ и „Софистические опровержения“) представляли руководства к этой игре.

Таким образом, постулаты Евклида представляют собою требования, которые необходимо принять без доказательства.

Первые три предложения „Начал“

Далее в „Началах“ следует ряд предложений, которые представляют собою теоремы и задачи. Приведем в качестве примера первые три предложения „Начал“.

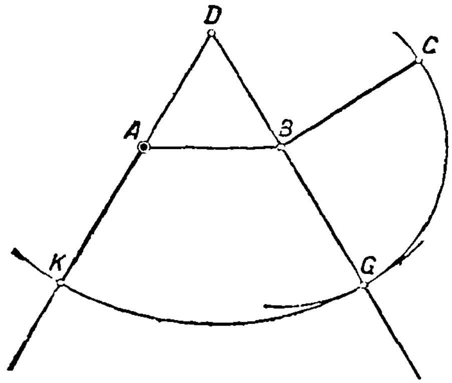
П р е д л о ж е н и е 1. На данной конечной прямой AB построить равносторонний треугольник.

Строим окружность радиуса AB, имеющую центр в A (постулат 3). Строим окружность того же радиуса с центром B (тот же постулат).

Пусть C есть точка пересечения двух построенных окружностей. Соединяем прямыми точку C с точками A и B; полученный треугольник ABC — равносторонний. В самом деле, $AB = AC$, как радиусы одной окружности (по определению окружности). Аналогично $AC = BC$. Из этих равенств вытекает, что $AB = BC$ (на основании аксиомы 1).

П р е д л о ж е н и е 2. Из данной точки A провести прямую, равную данной прямой BC (черт. 1).

От данной точки A требуется отложить данный отрезок BC. Соединяем прямой A и B (постулат 1). На отрезке AB строим равносторонний треугольник ABD (предложение 1). Продолжаем прямые DA и DB (постулат 2). Строим окружность радиуса BC с центром в B (постулат 3). Пусть G есть точка пересечения этой окружности с продолженной прямой DB. Строим окружность радиуса DG с центром D (постулат 3). Пусть K есть точка пересечения этой окружности с продолженной прямой DA. Отрезок AK — искомый. В самом деле, $AK = DK - DA = DG - DB = BG = BC$.



Черт. 1. Второе предложение Евклида.

Читателю может показаться, что предложение 2 можно вывести непосредственно из третьего постулата следующим образом: построим окружность радиуса BC с центром в A (постулат 3) и проведем любой радиус этой окружности; это и будет отрезок данной длины. Из того факта, что Евклид дает более сложное решение этой задачи, становится ясным, какое толкование он придает третьему постулату. Третий постулат требует, чтобы можно было построить круг с данным центром и данного радиуса, е с л и р а д и у с з а д а н о т р е з к о м, в ы х о д я щ и м и з д а н н о г о ц е н т р а, т. е. чтобы можно было построить круг, если дан центр и одна точка на окружности. В задаче же, которая рассматривается в предложении 2, приходится строить круг с центром в точке A, причем радиус этого круга задан при помощи отрезка BC, расположенного в стороне. Поскольку возможность такого построения не предусмотрена в постулатах, ее приходится доказывать, что́ и делается во 2-м предложении.

П р е д л о ж е н и е 3. Даны две неравные прямые AB и CD. Отнять от большей AB меньшую CD.

От точки A отложим отрезок AF, равный CD (предложение 2). Построим окружность радиуса AF с центром в A (постулат 3). Пусть E есть точка пересечения прямой AB с этой окружностью. Таким образом, от AB отнят отрезок AE, равный CD.

Задача обоснования геометрии

Из приведенных примеров уже ясно, что Евклид ставит следующую задачу: сформулировать заранее некоторые геометрические положения, принимаемые без доказательства, а затем логически вывести из них все остальные положения геометрии. „Логически вывести“ — это значит вывести, не опираясь на геометрическую интуицию, т. е. не ссылаясь на наглядность или на чертеж. Что Евклид ставит именно такую задачу, ясно из того, с какой педантичностью он доказывает разные очевидные положения, например, что от данной точки можно отложить данный отрезок.

Итак, Евклид поставил задачу — изгнать из геометрии интуицию. Точнее говоря, интуиция не совсем изгоняется из геометрии, а ее роль сводится лишь к установлению постулатов и аксиом. После того как аксиомы и постулаты установлены, роль интуиции исчерпана.

Дальше надо только строить цепи силлогизмов, в каждом из которых посылками служат аксиомы и постулаты или предложения, выведенные в предыдущих силлогизмах.

Все геометрические построения, которые производятся в „Началах", обосновываются не ссылками на употребление чертежных инструментов, а ссылками на постулаты. Первый и второй постулаты заменяют употребление линейки, а третий — циркуля. Пусть требуется соединить прямой линией две данные точки A и B. Как это сделать? Надо приложить к точкам A и B линейку и провести по ней прямую. Но Евклиду нет надобности объяснять этот способ построения, так как у него есть первый постулат. Он может ограничиться словами „проведем прямую через точки A и B", так как в первом постулате специально предусмотрено, что это можно сделать. Поэтому в „Началах" нигде нет упоминания о линейке и циркуле.

Наличие геометрической интуиции в доказательствах Евклида

Выполнил ли Евклид поставленную задачу? Мы сейчас увидим, что нет. В „Началах" на каждом шагу встречаются такие выводы, в которых Евклид, сам того не замечая, опирается на положения, не предусмотренные в постулатах и аксиомах, т. е. опирается на наглядность. Таким образом, мы считаем его доказательства не вполне строгими. Абсолютно строгим мы считаем такое доказательство, в котором нет никаких ссылок на наглядность. Однако, хотя Евклид не разрешил полностью задачи логического обоснования геометрии, он сделал громадный шаг вперед к ее решению. Его геометрия находится на неизмеримой высоте по сравнению с догреческой геометрией. *Можно сказать, что Евклид* сделал самый крупный шаг в области обоснования геометрии, но такая задача не могла быть полностью решена в ту эпоху. После Евклида было сделано в этом направлении много шагов, гораздо более мелких, но в сумме они более чем через две тысячи лет привели, наконец, к полному разрешению поставленной Евклидом задачи (мы имеем в виду книгу Д. Гильберта „Основания геометрии", вышедшую в 1899 г.).

Примеры логических нестрогостей Евклида можно найти уже в первых трех предложениях „Начал", приведенных выше. В предложении 1 говорится: „Пусть C есть точка пересечения двух построенных окружностей". Откуда видно, что эти две окружности пересекаются? Это не вытекает ни из каких постулатов и аксиом, а устанавливается на основании чертежа. Аналогично в предложении 2 говорится: „Пусть G есть точка пересечения этой окружности с продолженной прямой DB". Чтобы обосновать существование этой точки, надо либо ввести специальный постулат о том, что прямая, проходящая через центр окружности, имеет с этой окружностью общую точку (достаточно постулировать существование одной общей точки, тогда существование второй общей точки легко доказывается), либо постулировать непрерывность прямой (например, установить для прямой аксиому Дедекинда), но Евклид этого не делает.

Подобные логические пробелы, повторяем, встречаются в „Началах" на каждом шагу. Весьма существенным пробелом является использование движения при доказательстве признаков конгруентности треугольников; этот вопрос будет рассмотрен подробно в гл. V.

Несоблюдение в евклидовых определениях принципа per genus et differentiam

Рассмотрим определения Евклида.

Мы пока не будем касаться современной точки зрения на определения; она будет изложена ниже. Во времена Евклида уже был установлен принцип, что определение должно даваться per genus et differentiam, т. е. путем указания рода и видового отличия. Это значит, что, желая определить какое-нибудь понятие, мы исходим из родового, т. е. более общего понятия. В это родовое понятие мы вводим добавочный признак (видовое отличие) и таким образом приходим к определяемому понятию. Рассмотрим несколько примеров.

Простое число есть целое число, не имеющее других делителей, кроме самого себя и единицы. Родовое понятие — целое число. Видовое отличие (т. е. отличие простых чисел от других целых чисел) — не имеющее других делителей, кроме самого себя и единицы. Негр есть человек, имеющий черную кожу. Родовое понятие — человек. Видовое отличие — имеющий черную кожу.

Если определение дано по принципу per genus et differentiam, то всегда можно указать, что́ не есть определяемое понятие. Во-первых, всякий объект, не входящий в указанное родовое понятие, не входит в определяемое понятие. Во-вторых, объект, входящий в указанное родовое понятие, но не обладающий указанным видовым отличием, не входит в определяемое понятие. Например, является ли $\sqrt{2}$ простым числом? Нет, потому что $\sqrt{2}$ не есть целое число. Является ли 15 простым числом? Нет, потому что 15, хотя и целое число, но имеет делителей 3 и 5. Является ли треугольник негром? Нет, потому что треугольник — не человек. Является ли Сократ негром? Нет, потому что Сократ, хотя и человек, но он не обладает черной кожей.

Если же принцип per genus et differentiam не соблюден, то про произвольный объект нельзя решить, относится ли он к определяемому понятию, так как проверка того, обладает ли этот объект признаками, указанными в определении, не всегда имеет смысл. Например, про Солнце не имеет смысла спрашивать, имеет ли оно делителей, кроме самого себя и единицы, но в этом и нет надобности, так как Солнце не входит в родовое понятие (целое число) и тем самым не является простым числом.

Некоторые определения Евклида не удовлетворяют принципу per genus et differentiam. Например, в определении 1 отсутствует родовое понятие, частным случаем которого является точка. Вследствие этого Евклид вынужден употреблять неопределенное слово „то". Это слово призвано заместить пустоту отсутствующего родового понятия; под словом „то" можно понимать все что угодно. Вследствие этого про многие объекты нельзя судить, точки они или нет.

Например, идея справедливости — точка или нет? Вследствие отсутствия родового понятия, мы не имеем оснований отбросить идею справедливости, как не входящую в это понятие. Применять же к ней видовое отличие, т. е. выяснять, имеет ли она части, — бессмысленно, так как подразумеваются части в смысле пространственного протяжения.

Двукратное определение одного понятия

Второй логический дефект определений Евклида заключается в том, что он иногда одно и то же понятие определяет *двумя различными способами* (например, определения 1 и 3 определяют точку и определения 3 и 6 определяют линию). Если мы дважды определяем одно и то же понятие, то необходимо доказать эквивалентность этих определений; этого Евклид не делает.

Геометрическая неясность некоторых определений

Третий дефект — геометрическая неясность некоторых определений. Например, под определение 4 подходит не только прямая, но и окружность, под 7 — не только плоскость, но и поверхность кругового цилиндра (бесконечного).

Описательный характер некоторых определений

Чтобы разъяснить четвертый дефект определений Евклида, установим, для чего вообще даются определения. С современной точки зрения определение нужно для того, чтобы в дальнейшем, исходя из тех свойств понятия, которые сформулированы в определении, логически выводить другие свойства этого понятия, т. е. определения служат исходным материалом для дальнейших дедукций. Между тем у Евклида есть определения, которые в дальнейшем ни разу не использованы (например, определение точки). Такие определения даются с описательной целью: *их назначение — вызвать в нашем сознании наглядный геометрический образ*. Это назначение определений будет подробно рассмотрено в гл. III.

§ 3. Современный период

Геометрия как логическая система

Переходим к характеристике третьего периода — современного.

Предположим, что некоторый учитель приступает к преподаванию геометрии ученику, который не имеет о ней никакого представления и не соединяет никаких представлений ни с какими геометрическими терминами. При этом предположим, что учитель преподает исключительно на словах, не прибегая к чертежам. Допустим, что в сознании учителя имеется некоторый наглядный геометрический образ, например, образ плоскости, и он желает передать этот образ ученику. Для этого учитель должен подыскать определение того образа, который он себе наглядно представляет, и сообщить это определение ученику; тогда в сознании ученика возникает тот же образ. Положим, что учитель выскажет определение плоскости так: „Плоскость есть поверхность, обладающая тем свойством, что всякая находящаяся на ней фигура может быть передвинута в любое другое место на ней без разрывов и без складок". При этом учитель не заметит, что под его определение подходят, кроме плоскости, еще некоторые другие поверхности, например, сфера. Ученик на основании этого определения может воссоздать в своем сознании не тот наглядный образ, который имел в виду учитель, например, он может себе представить сферу. Итак, учитель и ученик будут думать о разных вещах, но не будут знать об этом, потому что оба образа подходят под одно и то же определение.

Обнаружится ли это недоразумение в процессе дальнейшего преподавания?

Если учитель, доказывая какие-либо дальнейшие свойства плоскости, будет действовать строго логически, то расхождение в наглядных представлениях никогда не обнаружится. В самом деле, если некоторые свойства плоскости логически вытекают из сформулированного определения, а сфера подходит под это же определение, то это свойство должно иметь место и для сферы. Поэтому учитель и ученик, по-разному наглядно понимая это свойство, оба согласятся с его словесным выражением. Если же учитель, доказывая какое-либо свойство плоскости, будет основываться не только на логическом определении, но и на своем наглядном представлении о плоскости, его рассуждения могут показаться ученику неправильными, и доказываемое свойство может не иметь места для того наглядного образа, который имеется в сознании ученика.

Итак, мы видим, что если в геометрии мы рассуждаем строго логически, то наглядные представления, которые мы соединяем с геометрическими понятиями, не играют роли. Возможно даже соединять с этими понятиями различные представления.

Аксиомы Гильберта

В нашем примере мы имеем лишь одно определение. Положим теперь, что мы имеем систему аксиом и определений. Покажем, как можно строить геометрию на основании этой системы, не прибегая ни к каким наглядным представлениям или, в качестве иллюстрации, приписывая геометрическим понятиям различные интерпретации. Положим в основу систему аксиом, установленную Гильбертом[1]) в его книге „Основания геометрии" (1899)[2]). Цитируем некоторые выдержки из первой главы этой книги.

ГЛАВА I

ПЯТЬ ГРУПП АКСИОМ

§ 1

Элементы геометрии и пять групп аксиом

Пояснение. „Мы мыслим три различные системы вещей: вещи первой системы мы называем *точками* и обозначаем их A, B, C, ...; вещи второй системы мы называем *прямыми* и обозначаем их a, b, c, ...;

---

[1]) Давид Гильберт — один из крупнейших математиков конца XIX и начала XX столетия. Родился в Кенигсберге 22 января 1862 г., умер в Геттингене 14 февраля 1943 г.

[2]) Имеется русский перевод: Давид Гильберт, „Основания геометрии", Петроград 1923. Он сделан с 5-го немецкого издания, уже устаревшего. Ниже цитируется 7-е немецкое издание (1930).

вещи третьей системы мы называем *плоскостями* и обозначаем их α, β, γ ...

... „Мы мыслим точки, прямые, плоскости находящимися в известных взаимных отношениях и обозначаем эти отношения словами „лежать", „между", „конгруентный", „параллельный" и „непрерывный". Точное и для математических целей полное описание этих отношений дается *аксиомами геометрии*.

Аксиомы геометрии мы можем распределить на пять групп; каждая отдельная из этих групп выражает известные связанные между собой основные факты нашего представления. Мы называем эти группы аксиом следующим образом:

I, 1—8 аксиомы *соединения*,
II, 1—4 аксиомы *порядка*,
III, 1—5 аксиомы *конгруентности*,
IV, аксиома *параллельности*,
V, 1—2 аксиомы *непрерывности*.

§ 2

I группа аксиом: аксиомы соединения

Аксиомы этой группы устанавливают *соединение* между введенными выше вещами — точками, прямыми и плоскостями — и выражаются следующим образом.

I, 1. *Двум точкам A, B всегда соответствует некоторая прямая a, которая инцидентна с каждой из этих двух точек.*

I, 2. *Двум точкам A, B соответствует не более одной прямой, инцидентной с каждой из этих двух точек A, B.*

Здесь, как и в дальнейшем, под двумя, тремя, ... точками (прямыми, плоскостями) всегда подразумеваются различные точки (прямые, плоскости).

Вместо „быть инцидентным" мы будем употреблять также другие выражения, например, a проходит через A и через B, a соединяет A и B или с B, A лежит на a, A есть точка прямой a, на прямой a существует точка A и т. д. Если A лежит на прямой a и, кроме того, на некоторой другой прямой b, то мы будем говорить: прямые a и b пересекаются в точке A; имеют точку A общей и т. д.

I, 3. *На прямой всегда существуют по меньшей мере две точки. Существуют по меньшей мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

I, 4. *Любым трем, не лежащим на одной прямой, точкам A, B, C всегда соответствует некоторая плоскость α, инцидентная с каждой из этих трех точек A, B, C. Для любой плоскости всегда существует инцидентная с ней точка.*

Мы употребляем также выражения: A лежит в α, A есть точка плоскости α и т. д.

I, 5. *Любым трем не лежащим на одной прямой точкам A, B, C соответствует* **не более** *одной плоскости, инцидентной с каждой из этих трех точек.*

I, 6. *Если две точки A, B прямой a лежат в плоскости α, то каждая точка прямой a лежит в плоскости α.*

В этом случае мы говорим: прямая a лежит в плоскости α и т. д.

I, 7. *Если две плоскости α и β имеют общую точку A, то они имеют еще по меньшей мере одну общую точку.*

I, 8. *Существуют по меньшей мере четыре не лежащие в одной плоскости точки...*".

„...§ 3

II группа аксиом: аксиомы порядка

Аксиомы этой группы определяют понятие „**между**" и дают возможность на основании этого понятия установить *порядок* точек на прямой, в плоскости и в пространстве.

Пояснение. Точки прямой находятся друг с другом в известных соотношениях, для описания которых нам служит преимущественно слово „между".

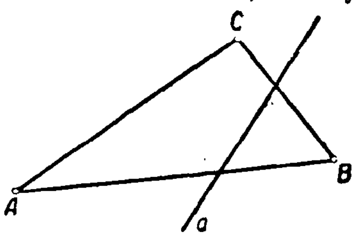
II, 1. *Если точка B лежит между точкой A и точкой C, то A, B, C суть три различные точки некоторой прямой, и B лежит также между C и A.*

II, 2. *Двум точкам A и C всегда соответствует по меньшей мере одна точка B на прямой AC, такая, что C лежит между A и B.*

II, 3. *Среди любых трех точек прямой существует не более одной, лежащей между двумя другими.*

Кроме этих линейных аксиом порядка мы пользуемся также одной плоскостной аксиомой порядка.

Пояснение. Рассмотрим на прямой *a* две точки *A* и *B*; систему обеих точек *A* и *B* мы называем *отрезком* и обозначаем его через *AB* или *BA*.



Точки, лежащие между *A* и *B*, называются точками отрезка *AB*, а также точками, лежащими *внутри* отрезка *AB*; точки *A*, *B* называют *концами* отрезка *AB*. Все остальные точки прямой *a* называются точками, лежащими *вне* отрезка.

II, 4. *Пусть A, B, C — не лежащие на одной прямой точки и a — некоторая прямая в плоскости ABC, не проходящая ни через одну из точек A, B, C; если прямая a проходит через некоторую точку отрезка AB, то она обязательно проходит также либо через некоторую точку отрезка AC, либо через некоторую точку отрезка BC...*"

„...§ 5

III группа аксиом: аксиомы конгруентности

Аксиомы этой группы определяют понятие конгруентности и тем самым также понятие движения.

Пояснение. Отрезки находятся друг с другом в известных соотношениях, для описания которых нам служат слова „*конгруентный*" или „равный".

III, 1. *Если A, B — две точки некоторой прямой a и A' — некоторая точка той же или другой прямой a', то всегда возможно на прямой a' по указанную сторону от точки A*[1]) *найти такую точку B', что отрезок AB будет конгруентен или равен отрезку A'B'; символически: AB ≡ A'B'.*

Этой аксиомой устанавливается **возможность откладывания** отрезков. Его **однозначность** будет позже доказана..."

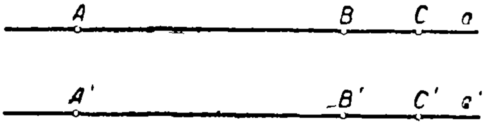
---

[1]) Гильберт предварительно вводит понятие о точках прямой, лежащих по одну сторону от данной точки этой прямой (полупрямая), а также о точках плоскости, лежащих по одну сторону от данной прямой этой плоскости (гл. II, § 4). — *Н. Б.*

„... III, 2. *Если отрезок $A'B'$ и отрезок $A''B''$ конгруэнтны отрезку AB, то отрезок $A'B'$ конгруэнтен также отрезку $A''B''$; короче: если два отрезка конгруэнтны третьему, то они конгруэнтны друг другу.*

Так как конгруэнтность или равенство первоначально вводятся в геометрию этими аксиомами, то не является само собой разумеющимся, что каждый отрезок конгруэнтен самому себе; однако это свойство вытекает из первых двух аксиом конгруэнтности, если отрезок AB отложить на какой-нибудь полупрямой, например, конгруэнтным $A'B'$, и затем к конгруэнциям $AB \equiv A'B'$, $AB \equiv A''B''$ применить аксиому III, 2...“

„...III, 3. *Пусть на некоторой прямой даны два отрезка AB и BC без общих точек и на той же или на другой прямой даны два отрезка*



$A'B'$ и $B'C'$ без общих точек; если $AB \equiv A'B'$; $BC \equiv B'C'$, то всегда $AC \equiv A'C'$...“

„...III, 4. *Пусть в плоскости α дан угол*[1] $\sphericalangle (h, k)$ *и в плоскости α дана прямая a' и определенная сторона плоскости α' от прямой a'. Пусть h' обозначает определенный луч прямой a', исходящий из точки O'. В таком случае в плоскости α' существует один и только один луч k' такой, что угол $\sphericalangle (h', k')$ конгруэнтен или равен углу $\sphericalangle (h$ и $k)$ и что притом все внутренние точки угла $\sphericalangle (h', k')$ лежат по данную сторону от a'. Символически:*

$$\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h', k').$$

Всякий угол сам себе конгруэнтен, т. е. всегда

$$\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h, k) \ldots“.$$

„...III, 5. *Если в двух треугольниках ABC и $A'B'C'$ соблюдаются конгруэнции*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C',$$

то всегда выполняется также конгруэнция $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$...“

„...IV. *Пусть a — произвольная прямая и A_1 некоторая точка вне a. В таком случае в плоскости, определяемой a и A, существует самое большее одна прямая, которая проходит через A и не пересекает a*“.

Возможность различных интерпретаций геометрической системы

В приведенной цитате из Гильберта прежде всего обращает внимание то обстоятельство, что основные геометрические образы — точки, прямые и плоскости — никак не определяются. Также не определяются слова „лежат“, „между“ и „конгруэнтные“[2], которые употребляются для описания соотношений между точками, прямыми и плоскостями. Следовательно, мы можем приписывать этим словам любое конкретное истолкование, лишь бы при этом соблю-

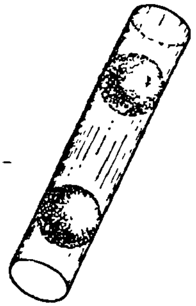
[1]) Понятие угла определено предварительно.— *Н. Б.*

[2]) Несколько иначе обстоит дело со словами „параллельно“ и „непрерывно“.

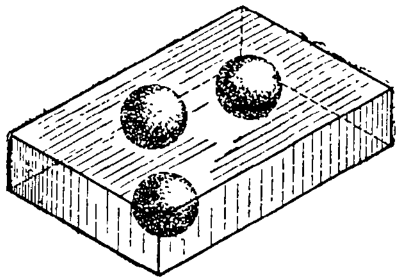
дались установленные аксиомы. Приведем два примера возможных интерпретаций евклидовой геометрии.

Пример интерпретации евклидовой геометрии

Будем называть „точкой“ шар определенного радиуса a (ввиду того, что такое представление о точке не совпадает с привычным, мы берем это слово в кавычки). Будем называть „прямой“ круговой цилиндр радиуса a (мы имеем в виду бесконечный цилиндр). Будем называть „плоскостью“ плоско-параллельную пластинку (т. е. часть пространства, заключенную между двумя параллельными пло-

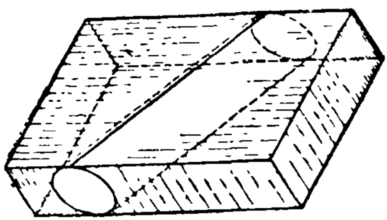


Черт. 2. „Точки“, „лежащие“ на „прямой“.

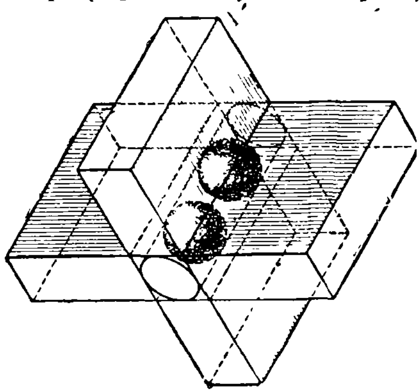


Черт. 3. „Точки“, „лежащие“ в „плоскости“.

скостями) толщиною $2a$. Будем говорить, что „точка“ „лежит“ на „прямой“, если шар вписан в цилиндр (черт. 2). Будем говорить, что „точка“ „лежит“ в „плоскости“, если шар вписан в плоско-параллельную пластинку, т. е. плоскости, ограничивающие эту пластинку, касаются шара (черт. 3). Наконец, мы будем говорить, что „прямая“ „лежит“ в „плоскости“, если цилиндр вписан в плоско-параллельную пластинку (черт. 4).



Черт. 4. „Прямая“, „лежащая“ в „плоскости“.



Черт. 5. „Пересечение“ двух „плоскостей“.

Легко видеть, что при такой интерпретации все аксиомы соединения соблюдаются. Чертежи 2, 3 и 5 иллюстрируют аксиомы I, 1, 2, 4, 5, 6. Также соблюдаются аксиомы порядка при обычном понимании слова „между“, аксиомы конгруентности — если конгруентными считать „отрезки“ и „углы“, могущие быть совмещенными, и аксиома параллельности, если считать параллельными „прямые“, „лежащие“ в одной „плоскости“ и не имеющие общей „точки“.

Другой пример интерпретации евклидовой геометрии

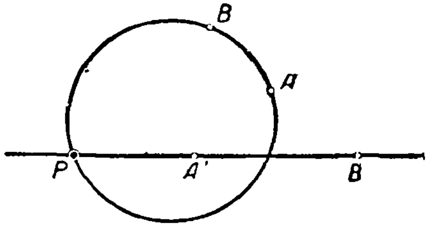
Второй пример. Из плоскости удалим одну точку P. Будем называть „точкой“ всякую точку этой плоскости кроме P. Будем называть „прямой“ всякую окружность или прямую, проходящую через P. Проверим, соблюдаются ли при этой интерпретации все аксиомы геометрии на плоскости.

Аксиомы I, 1, 2 соблюдаются, потому что три точки, не лежащие на одной прямой, определяют окружность. Если две данные точки A и B не лежат на одной прямой с выключенной точкой P, то можно построить окружность, проходящую через A, B и P; это и будет „прямая“, проходящая через точки A и B (черт. 6). Если же две данные точки A' и B' лежат на одной прямой с P, то прямая $A'B'P$ является „прямой“ в нашей интерпретации.

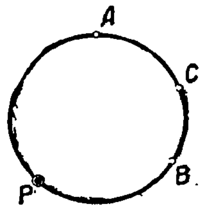
Аксиома I, 3, несомненно, соблюдается.

Остальные аксиомы соединения не относятся к геометрии на плоскости.

Переходя к аксиомам порядка, условимся, какой смысл мы будем приписывать в нашей интерпретации понятию „между“. Пусть на „прямой“ даны три точки A, B и C (черт. 7). Точки A и B делят окружность на дуги. Если точка C и выключенная точка P принадлежат разным дугам, то мы будем говорить, что „точка“ „лежит между“ A и B.



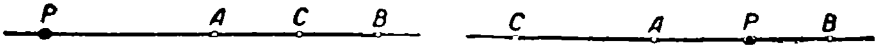
Черт. 6. „Прямые“.



Черт. 7. „Точка“ C „лежит между“ „точками“ A и B.

Поясним это несколько иначе. Две точки A и B на прямой определяют на этой прямой определенное н а п р а в л е н и е или п о р я д о к, так как пройти от точки A к точке B по прямой можно лишь одним путем. Две точки A и B на окружности (и вообще на замкнутой кривой) не определяют на ней направления, так как от точки A можно двумя путями (в двух противоположных направлениях) пройти по окружности к точке B. Если же окружность проходит через выключенную точку P, то, желая непрерывным движением пройти по окружности от точки к точке, мы не должны проходить через точку P. При этом соглашении две „точки" A и B на „прямой" вполне определяют на этой прямой определенное направление. Таким образом, благодаря устранению точки P исчезает та разница, которая существовала.

Если же „прямая" имеет вид не окружности, а прямой, проходящей через точку P, то мы будем говорить, что „точка" C „лежит между" A и B, если: либо 1) точка C лежит между A и B (в обычном смысле), а точка P — вне отрезка AB, либо 2) точка C лежит вне отрезка AB, а точка P между A и B (черт. 8).

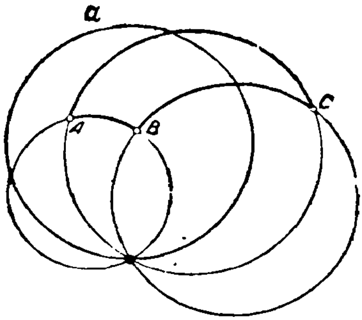


Черт. 8. „Точка" C „лежит между" „точками" A и B.

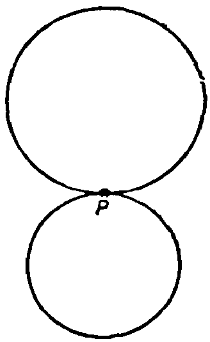
Легко убедиться, что при такой интерпретации соблюдаются все аксиомы порядка. Например, черт. 9 иллюстрирует аксиому Паша.

Проверку аксиом конгруентности мы опускаем, так как здесь пришлось бы затратить много места на соответствующее истолкование конгруентности. Кое-что об этом будет сказано в гл. V. Переходя к аксиоме параллельности, условимся называть „параллельными" „прямые", не имеющие общей „точки", это определение иллюстрируется черт. 10. Проверим аксиому IV. Пусть дана „прямая" a и точка A вне ее. Могут встретиться следующие случаи.

1) „Прямая" a изображается окружностью, проходящей через P, точка A не лежит на касательной к этой окружности в точке P



Черт. 9. Взаимное расположение „прямой" a и „треугольника" ABC, иллюстрирующее аксиому Паша.



Черт. 10. „Параллельные прямые".

(предлагаем читателю самому выполнить чертежи). В таком случае можно построить окружность, проходящую через A и касающуюся данной окружности в точке P.

2) „Прямая" a изображается окружностью, проходящей через P, точка A лежит на касательной к этой окружности в точке P. В таком случае эта касательная и будет „прямой", „параллельной" a и проходящей через „точку" A.

3) „Прямая“ a изображается прямой, проходящей через точку P. В этом случае можно построить окружность, проходящую через A и касающуюся данной прямой в точке P.

Итак, во всех случаях через „точку“ A, лежащую вне „прямой“ a, можно провести одну „прямую“, „параллельную“ a.

Мы видим, что в данной интерпретации соблюдаются все аксиомы геометрии. Если учитель будет излагать ученику геометрию Евклида, не пользуясь чертежами, а ученик будет мысленно иллюстрировать все теоремы в изложенной интерпретации, то он признает правильным все, что будет говорить учитель, хотя будет связывать это не с теми наглядными представлениями, к которым мы привыкли в школьном курсе, а с другими.

Из всего изложенного можно сделать следующие выводы.

Геометрия не связана с определенными пространственными представлениями

При строгом изложении геометрия не должна связываться ни с какими пространственными представлениями. Употребляемые в ней основные термины суть только слова, которым не приписывается никакого пространственного смысла. Эти слова определены лишь тем, что они входят в определенные аксиомы. Так, мы имеем право понимать что угодно под словами „точка“, „прямая“ и „определять“, но смысл этих слов должен быть согласован так, чтобы две „точки“ „определяли“ „прямую“. Другие термины определяются через основные (например, отрезок есть система двух точек).

Различные интерпретации геометрии как логической системы

Если геометрия может излагаться без связи с какими-нибудь определенными пространственными представлениями, то это значит также, что ее можно связывать с различными пространственными представлениями. Геометрия как логическая система имеет чисто словесный характер. В нее можно вместо слов „точка“, прямая,“ „плоскость“, „лежать“, „между“, „конгруентно“, „параллельно“ и „непрерывно“ *подставить* различные истолкования, подобно тому, как в алгебре мы подставляем вместо букв определенные числовые значения. Подобно тому, как из одного алгебраического тождества мы можем получать различные числовые равенства, так из абстрактной (т. е. не связанной с определенным истолкованием основных терминов) геометрии можно получить различные интерпретации (интерпретация — определенная система истолкования основных терминов).

Давая какую-нибудь интерпретацию, мы должны следить, чтобы в этой интерпретации соблюдались все аксиомы геометрии. Поскольку теоремы являются логическими следствиями из аксиом, если в данной интерпретации аксиомы соблюдены, то теоремы обязательно будут соблюдены, и этот факт не требует особой проверки. Таким образом, абстрактная геометрия представляет систему аксиом и их логических следствий — теорем. Имея интерпретацию, мы проверяем, соблюдаются ли в этой интерпретации аксиомы. Если да, то вся геометрия целиком имеет место в этой интерпретации.

Ненаучность взгляда на аксиомы как на очевидные истины

Распространенный взгляд на аксиомы как „истины“, не требующие доказательства ввиду своей „очевидности“, совершенно ненаучен. Он не соответствует не только современным, но даже греческим воззрениям на основания геометрии. Поскольку мы не придаем определенного конкретного истолкования основным терминам, фигурирующим в аксиомах, понятие очевидности теряет всякий смысл. Всегда можно придать основным терминам такое истолкование, что любая аксиома станет неверна. Поэтому аксиомы вовсе не являются очевидными, а представляют условные положения, косвенным образом служащие для определения основных терминов.

Согласно греческим воззрениям, мы соединяем с основными геометрическими терминами раз навсегда определенные пространственные представления. Эти представления частью даются в описательных определениях, которые не преследуют никакой логической цели, а стремятся лишь дать наглядное описание данного геометрического образа, частью считаются столь очевидными, что им не дается особого определения (например, наложение фигур). Все-таки греки не рассматривали аксиомы как истины, не требующие доказательства вследствие своей очевидности. В самом деле, у Евклида имеется много предложений, нисколько не менее очевидных, чем аксиомы (например, предложение 2), и тем не менее доказываемых. Дело в том, что при доказательстве любой геометрической теоремы мы должны опираться на другие предложения, справедливость которых уже установлена раньше. Если эти предложения тоже доказывались, то при их доказательстве мы в свою очередь опирались на предложения, доказанные еще ранее. Ясно, что этот процесс должен иметь начало. Посылки в первом силлогизме, с которого начинается геометрия, должны быть приняты без доказательства. Итак, аксиомы принимаются без доказательства не потому, что они очевидны, а потому что они суть первые предложения, для доказательства которых еще нет никакого исходного материала.

Непротиворечивость системы аксиом

Установив систему аксиом, мы должны доказать, что она обладает следующими тремя свойствами: 1) непротиворечивостью, 2) независимостью и 3) полнотой.

Какая-нибудь аксиома A не противоречит остальным, если из системы остальных аксиом нельзя вывести предложения, противоположного A. Вся система аксиом является непротиворечивой, если каждая аксиома не противоречит остальным. Чтобы доказать, что система аксиом непротиворечива, достаточно указать какую-нибудь интерпретацию, в которой все эти аксиомы соблюдаются. Если бы система аксиом содержала внутреннее противоречие, то, разумеется, не могло бы существовать таких объектов, для которых все эти аксиомы соблюдаются.

Независимость системы аксиом

Независимость системы аксиом обозначает, что ни одна из аксиом этой системы не может быть логически выведена из остальных. Этот вопрос вызывал множество недоразумений с древних времен, особенно в связи с V постулатом (гл. VI). Пусть в системе аксиом имеется некоторая аксиома A, относительно которой мы подозреваем, что она является логическим следствием остальных. В таком случае мы пытаемся ее доказать, исходя из остальных аксиом. Если нам это удастся, то она вычеркивается из списка аксиом и заносится в список теорем. Если же нам это не удастся, то возможны два предположения: либо аксиома A может быть доказана на основании остальных (т. е. является их логическим следствием), но мы не сумели найти доказательства, либо этого доказательства не существует, т. е. аксиома A не является следствием остальных. Математика древних не обладала методами, которые позволяли доказать недоказуемость какого-нибудь положения. Поэтому если какое-нибудь положение было недоказуемо, то обнаружить этого не умели и иногда в течение многих столетий продолжали бесплодные попытки найти доказательство (так было с V постулатом).

Метод доказательства независимости аксиом

В современной математике имеется метод доказательства того, что некоторое положение не может быть доказано на основании некоторых других положений. Этот метод, указанный Гильбертом, заключается в следующем. Пусть дана система аксиом, в которую входит аксиома A. Найдем такую интерпретацию, в которой все аксиомы, кроме A, соблюдаются, а аксиома A не соблюдается. Если такая интерпретация будет найдена, то тем самым будет доказано, что аксиома A не является логическим следствием остальных. В самом деле, если бы аксиома A являлась логическим следствием остальных, то для всякой системы объектов, для которых все остальные аксиомы соблюдаются, должны соблюдаться и все логические следствия из этих аксиом.

Доказательство непротиворечивости и независимости системы аксиом

Чтобы доказать непротиворечивость системы аксиом, надо построить одну интерпретацию — именно такую, в которой соблюдаются все аксиомы. Чтобы доказать независимость, надо построить столько интерпретаций, сколько есть аксиом в системе, так как для доказательства независимости каждой аксиомы от остальных надо указать интерпретацию, в которой эта аксиома не соблюдается, а остальные соблюдаются.

Полнота системы аксиом

Полнота системы аксиом долгое время понималась так: система аксиом считается полной, если на основании этой системы можно построить геометрию, т. е. доказать все теоремы, которые обычно включаются в курс геометрии. Например, если из системы аксиом исключить аксиому параллельности, то система будет неполной, так как на основе остальных аксиом нельзя решить вопрос о сумме углов треугольника. Такое понимание полноты системы является недостаточно определенным, так как неясно, какие именно теоремы должны входить в состав геометрии: геометрию можно продолжать неопределенно. За точным определением понятия „полная система аксиом" рекомендуем читателю обратиться к заметке А. Н. Колмогорова „Одно замечание по поводу оснований геометрии" („Успехи математических наук", вып. IV, М.—Л. 1938, стр. 347—348). Доказательство полноты аксиоматики евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского можно найти в книге В. И. Костина „Основания геометрии“, М.—Л. 1946, стр. 137—148 и 238—249.

Пример строго логического доказательства геометрической теоремы

Дадим пример строгого доказательства какой-нибудь теоремы. Докажем, например, второй признак конгруентности треугольников. Даны два треугольника ABC и $A'B'C'$, причем

$$\widehat{CAB} \equiv \widehat{C'A'B'}, \qquad (1)$$

$$\widehat{CBA} \equiv \widehat{C'B'A'}, \qquad (2)$$

$$AB \equiv A'B'. \qquad (3)$$

Предположим, что стороны AC и $A'C'$ не конгруентны. В таком случае на прямой AC существует единственная точка D, отличная от C, лежащая от A с той же стороны, что и C, и такая, что

$$AD \equiv A'C' \qquad (4)$$

(аксиома III, 1). Из (1), (3) и (4) применением аксиомы III, 5 получаем:

$$\widehat{DBA} \equiv \widehat{C'B'A'}; \qquad (5)$$

из (2) и (5) вытекает:

$$\widehat{DBA} \equiv \widehat{CBA}\text{[1]}). \qquad (6)$$

Углы $\widehat{DBA}$ и $\widehat{CBA}$ *различны*, так как сторона BA у них общая, а стороны BD и BC — различные. В самом деле, точки D и C лежат на прямой AC; если бы они, сверх того, лежали на *одной* прямой BD или BC, то они совпадали бы (из аксиомы I, 1 непосредственно вытекает, что две различные прямые не могут иметь более одной общей точки). При этом лучи BD и BC лежат по одну сторону от прямой AB (это тоже доказывается раньше: *Гильберт*, Основания геометрии, гл. 1, теорема 8). В таком случае конгруенция (6) противоречит аксиоме III, 4, согласно которой при точке на прямой по данную сторону плоскости от прямой можно лишь единственным образом отложить данный угол. Следовательно, наше исходное положение опровергнуто, т. е.

$$AC \equiv A'C'. \qquad (7)$$

---

[1]) Внимательный читатель заметит, что здесь мы опираемся на *транзитивность конгруентности углов*: из того, что углы $\widehat{DBA}$ и $\widehat{CBA}$ конгруентны одному и тому же углу $\widehat{C'B'A'}$, мы заключаем, что они конгруентны между собой. Это свойство для отрезков предусмотрено специальной аксиомой (III, 3), а для углов оно доказывается как теорема (*Гильберт*, Основания геометрии, гл. 1, теорема 10), которая идет раньше, чем доказываемый нами признак конгруентности треугольников; таким образом, мы здесь имеем право ссылаться на эту теорему.

Из (1), (3) и (7) на основании аксиомы III, 5 заключаем:

$$\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}. \qquad (8)$$

Аналогично конгруенции (7) доказывается и конгруенция

$$BC \equiv B'C'. \qquad (9)$$

Примечание 1. Мы не доказали, что треугольники ABC и $A'B'C'$ взаимно конгруентны, а лишь, что стороны и углы одного треугольника соответственно конгруентны сторонам и углам другого. Понятие о конгруентных фигурах вводится так: две фигуры называются конгруентными, если можно установить между их точками взаимно *однозначное* соответствие, при котором соответственные отрезки, а также соответственные углы взаимно конгруентны. Можно доказать, что у рассмотренных в настоящей теореме треугольников не только стороны и углы конгруентны, но и сами треугольники взаимно конгруентны.

Примечание 2. Евклид определяет понятие конгруентности при помощи движения. Признаки конгруентности треугольников у него доказываются наложением, т. е. один треугольник движением приводится в совмещение с другим. У Гильберта, как мы видим, движение не участвует ни в определении конгруентности, ни в доказательствах признаков конгруентности треугольников. Эта разница будет подробно разъяснена в гл. V.

§ 4. Педагогические выводы

Наглядная геометрия

Выше мы кратко охарактеризовали три основных периода в развитии взглядов на основания геометрии. Эти три периода соответствуют тем трем стадиям, которые проходит всякий ученик, если *только он заходит* достаточно далеко в изучении геометрии. Первый — догреческий — период соответствует преподаванию геометрии в младших классах (по действующим в настоящее время программам элементы геометрии в младших классах не составляют отдельного предмета, а входят в курс арифметики). На этой стадии ученики знакомятся с простейшими геометрическими фактами в самом наивном изложении, без логических доказательств. Например, вырезают из бумаги треугольник, отрывают его углы, складывают их и таким образом убеждаются, что сумма углов треугольника равна развернутому углу, т. е. двум прямым углам. Для вычисления π измеряют ниткой длину окружности кастрюли и делят ее на длину диаметра.

Преподавание элементов геометрии в младших классах весьма полезно, так как оно помогает разрядить те трудности, которые возникают в начале систематического курса геометрии. Если ученик только в VI классе впервые знакомится с геометрией, то перед ним возникают сразу две трудности: 1) он впервые узнает геометрические факты, 2) он должен усвоить непривычную методологию (определения, логические доказательства). Если же простейшие факты ему уже знакомы и геометрическое воображение у него уже несколько развито, то в начале систематического курса геометрии он может сосредоточить больше внимания на методологической стороне.

Здесь мы имеем вполне обоснованный концентризм. История геометрии показывает, что людям, обладающим весьма малым запасом геометрических сведений, не свойственно стремление к их логическому обоснованию. Если ученик VI класса впервые встречается с простейшими геометрическими фактами, то их логическое обоснование кажется ему неестественным и может быть навязано лишь принудительно. Короче говоря, догреческий этап есть необходимый этап в развитии каждого отдельного ученика. Весьма желательно расширить преподавание элементов геометрии в младших классах и выделить эти элементы в отдельный предмет. Подробности по этому вопросу читатель найдет в главе XIII „Методика преподавания наглядной геометрии", написанной проф. А. М. Астрябом.

Систематический курс геометрии

Систематический курс геометрии, начинающийся с VI класса, соответствует второму — греческому — этапу. Первые уроки геометрии в VI классе соответствуют резкому *скачку в развитии ученика, и учитель должен* понимать всю ответственность этих уроков.

Некоторые учителя и авторы учебников очень заботятся о строгости доказательств и иногда заменяют доказательство какой-нибудь теоремы другим, более сложным, но более строгим. Чтобы мы могли в каждом отдельном случае сознательно подойти к вопросу о необходимой мере строгости доказательства, заметим следующее. Греческий этап есть необходимый этап, которого ни один ученик (даже самый талантливый) не может миновать. Этот этап характеризуется определенным уровнем строгости доказательств, однако доказательства Евклида не являются абсолютно строгими с современной точки зрения. Учитель должен иметь в виду, что большинство доказательств в школьном курсе геометрии не являются абсолютно строгими, однако они чрезвычайно строги по сравнению с предыдущим этапом. Таким образом, не надо ставить перед собой цель — достичь абсолютной строгости в школьном курсе геометрии; это и недостижимо и ненужно. Раз мы все равно не достигаем абсолютной строгости, то не имеет принципиального значения, будет ли какая-нибудь теорема доказана немного менее или немного более строго. Важно лишь не спускаться ниже известного уровня строгости. Это — тот уровень, который характерен для „Начал" Евклида и к которому мы, начиная с VI класса, должны приучать учеников.

Третий — современный — этап не имеет отражения в средней школе. Это — ступень, на которую поднимутся лишь те ученики, которые изберут математику своей специальностью. Соответствующие вопросы оснований геометрии представляют хороший материал для работы математического кружка в старших классах.

ГЛАВА II

ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ

§ 1. Понятия

В предыдущей главе была обрисована роль логики в преподавании геометрии. Несомненно, что знакомство с элементами логики учителю геометрии необходимо. Настоящая глава не призвана заменить учебник логики; она излагает лишь тот минимум сведений, который является насущно необходимым в преподавании геометрии.

Образование понятий

Понятия образуются следующим образом. Рассматривается множество объектов, обладающих какими-либо важными общими признаками. Далее отбрасываются все индивидуальные признаки, т. е. те признаки, которые принадлежат отдельным, но не всем объектам из данного множества, и удерживаются о б щ и е признаки, т. е. те, которые принадлежат всем объектам данного множества. Совокупность этих признаков определяет понятие.

Например, чтобы образовать понятие собаки, надо сравнивать между собою различных собак[1]). Каждая собака обладает весьма большим числом разнообразных признаков. Например, каждая собака имеет определенный цвет. Однако никакой цвет не входит в понятие собаки, потому что не все собаки имеют один и тот же цвет. Наличие же четырех ног является признаком общим для всех собак и, следовательно, входит в понятие собаки.

Каждое понятие представляет абстракцию, т. е. отвлечение от некоторых признаков, без которых, однако, отдельный индивидуум существовать не может. Так, например, собака как понятие не имеет ни цвета, ни определенной величины, ни породы и т. д., в то время как индивидуальной собаки без этих признаков не существует.

Содержание и объем понятия

Мы видим, что каждое понятие может быть определено двояко: 1) совокупностью признаков, определяющих это понятие, 2) совокупностью всех отдельных объектов, входящих в это понятие. Совокупность всех признаков, характеризующих понятие, называется с о д е р ж а н и е м понятия. Совокупность всех отдельных объектов, входящих в понятие

---

[1]) Здесь, как и в дальнейшем, мы излагаем техническую сторону формальной логики, не вдаваясь в философские вопросы. Внимательный читатель заметит, что при группировке в одно множество объектов, из которых мы желаем образовать понятие, мы должны заранее руководствоваться некоторыми соображениями. Как, например, объяснить, что мы группируем в одно множество всех собак? Для этого надо з а р а н е е усматривать черты сходства между отдельными собаками. Без этого можно было бы объединить в одно множество совершенно разнородные объекты, например, составить множество, в которое войдут собаки, металлы и рациональные числа; такое множество не будет пригодно для образования какого-либо понятия. Вообще формальная логика не может справиться с вопросом об образовании понятий.

(т. е. обладающих всеми указанными признаками), называется **объемом** понятия. Так, в содержание понятия параллелограма входят следующие признаки: 1) плоский четырехугольник, 2) противоположные стороны параллельны, 3) противоположные стороны равны между собой, 4) диагонали в точке пересечения делятся пополам, 5) противоположные углы равны между собой, 6) сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон и бесконечное множество разных других признаков. Объем же понятия параллелограма составляется из всех отдельных параллелограмов.

Существенные признаки

Чтобы **определить** понятие, нет надобности перечислять **все** признаки, входящие в его содержание, достаточно перечислить лишь **существенные** признаки. Существенными называются признаки, каждый из которых необходим, а все вместе достаточны для характеристики данного понятия. Если $p_1, p_2, \ldots, p_n$ суть существенные признаки некоторого понятия P, то это значит: 1) если какой-нибудь отдельный объект не обладает хоть одним из этих признаков, то он не входит в понятие P; 2) если какой-нибудь отдельный объект обладает всеми признаками $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то он входит в понятие P.

Таким образом, если $p_1, p_2, \ldots, p_n$ суть существенные признаки понятия P, то все остальные признаки этого понятия являются следствиями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Поэтому в определение понятия P следует включать только существенные признаки, потому что остальные признаки независимо от нас вытекают из существенных, и перечисление их излишне.

Например, определяя параллелограм, мы говорим, что это — четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны. Исходя из этого, можно **доказать**, что этот четырехугольник плоский, что его диагонали делятся в точке пересечения пополам и т. д.

Заметим, что выбор существенных признаков из всех признаков данного понятия не является однозначным. Например, можно определить параллелограм как четырехугольник, диагонали которого пересекаются и в точке пересечения делятся пополам; из этих признаков можно вывести все остальные (гл. VII, стр. 142).

Важные признаки

Существенные с точки зрения логики признаки могут не являться важными с какой-либо другой точки зрения. Допустим, например, что на вопрос ученика, кто такой Пушкин, учитель ответит, что это — человек, родившийся 6 июня (нового стиля) 1799 г. в Москве, на Немецкой улице, в доме Скворцова. С точки зрения логики указанные признаки — существенные [1]), так как в указанный день в указанном доме родился лишь один человек; следовательно, руководствуясь этими признаками, мы не спутаем Пушкина ни с каким другим человеком. То обстоятельство, что Пушкин был поэтом, не является существенным признаком, так как признаки, данные в определении (время и место рождения), одно-

[1]) Читателя не должно смущать то обстоятельство, что здесь речь идет об определении *единичного* объекта. Может иметь место частный случай, когда объем понятия сводится к одному объекту.

значно определяют одного человека, следовательно — и все его остальные признаки. Однако подобный ответ на вопрос ученика педагогически нецелесообразен, так как не дает представления о том, что́ в Пушкине наиболее важно.

Приведенный пример показывает, что различные определения, эквивалентные с логической точки зрения, могут быть педагогически неравноценны. Когда мы определяем какое-нибудь геометрическое понятие, то не все равно, какие признаки мы изберем в качестве существенных. Этот вопрос будет подробно рассмотрен в гл. III.

Связь между содержанием и объемом понятия

Положим, что мы имеем понятие P, имеющее признаки $p_1, p_2, \ldots, p_n$. В объем этого понятия входят объекты, каждый из которых обладает всеми этими признаками. Положим, что мы увеличим содержание понятия, добавив к перечисленным признакам еще один новый (т. е. не являющийся следствием из прежних) p_{n+1}. В таком случае не все, а лишь некоторые объекты, входящие в объем понятия P, обладают признаком p_{n+1}. Мы получаем новое понятие с признаками $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$, его объем составляет часть объема понятия P.

Мы приходим, таким образом, к важному закону логики, который кратко формулируется следующим образом: если увеличить содержание понятия, то его объем уменьшится. Разумеется, если уменьшить содержание, то объем увеличится. Точнее говоря: если содержание понятия P входит как часть в содержание понятия Q, то объем понятия Q входит как часть в объем понятия P.

Иллюстрируем этот закон примерами. Возьмем понятие „человек"; в его объем входят все люди. Добавим к содержанию этого понятия новый признак: имеющий черную кожу. Тогда объем понятия сократится: теперь в него входят только все негры, т. е. часть всех людей. Этот процесс можно продолжать далее. Введем еще один признак: мужского пола; теперь в объем понятия входят только негры-мужчины. Продолжая вводить новые признаки, мы можем довести объем понятия до единичного объекта[1]).

Рассмотрим понятие „плоский четырехугольник"; в его объем входят все отдельные четырехугольники. Добавляя признак — „две противоположные стороны параллельны", мы суживаем объем: теперь в него входят только все трапеции. Добавляя еще один признак „две другие противоположные стороны параллельны", мы получим все параллелограмы. Добавляя еще признак „соседние стороны равны между собой", получим ромбы и т. д.

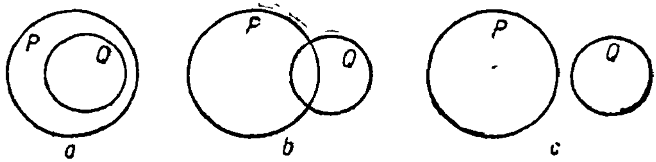
Родовые и видовые понятия

Если объем понятия Q входит как часть в объем понятия P, то понятие P называется **р о д о в ы м**, а понятие Q — **в и д о в ы м**. Эти названия имеют относительный характер, т. е. P есть понятие родовое *по отношению* к Q. Так, прямоугольник является родовым понятием по отношению к квадрату, но видовым понятием по отношению к параллелограму.

[1]) Вновь вводимые признаки не должны противоречить уже́ имеющимся. Так, добавляя к содержанию понятия „человек" признак „четвероногий", мы сведем объем понятия к нулю.

Логические круги Эйлера

Существует наглядный способ для изображения соотношений между объемами понятий. Каждое понятие изображается в виде круга; предполагается, что этот круг охватывает все объекты, входящие в объем данного понятия. Если *понятие* Q *является видовым по отношению к* P, то круги располагаются, как на черт. 11a; эта схема наглядно показывает, что объем понятия Q входит как часть в объем понятия P. На черт. 11b изображен случай, когда объемы понятий „перекрываются“, т. е. имеют общую часть, но сверх того в объеме каждого понятия имеются объекты, не входящие в общую часть. На черт. 11c изображен



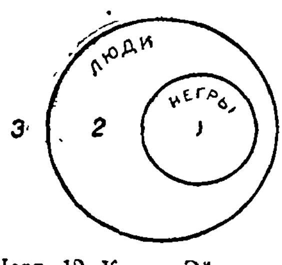
Черт. 11. Логические круги Эйлера.

случай, когда объемы понятий не имеют ни одного общего объекта. При этом размеры кругов и положение их центров не играют роли. Не играет даже роли, что мы пользуемся кругами, а не какими-либо другими фигурами; важно лишь, лежит ли одна фигура внутри другой или вне, или они имеют общую часть. Поэтому случаи касания кругов не выделяются особо: внутреннее касание относится к случаю 11a, а внешнее — к случаю 11c.

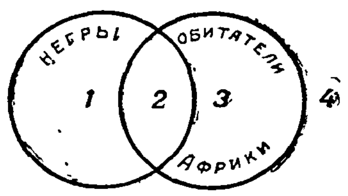
Рассматриваемые круги называются кругами Эйлера.

Пример 1. Изобразить кругами Эйлера понятия „люди“ и „негры“.

Круги, изображенные на черт. 12, разделяют плоскость на три части. Точки первой части изображают негров, точки второй части



Черт. 12. Круги Эйлера.



Черт. 13. Круги Эйлера.

(между двумя кругами) изображают людей, не являющихся неграми, точки третьей части (вне большого круга) изображают всевозможные объекты, не являющиеся людьми.

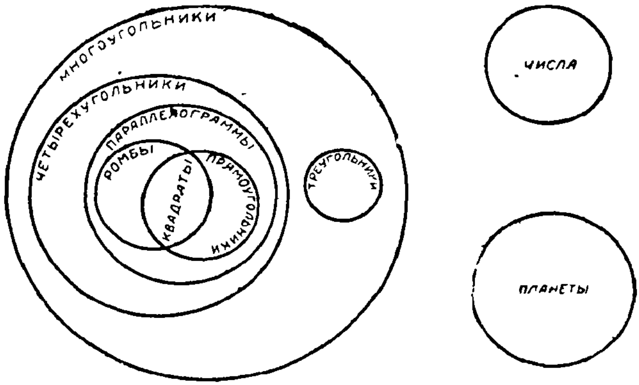
Пример 2. Изобразить кругами Эйлера понятия „негры“ и „обитатели Африки“. Круги, изображенные на черт. 13, делят плоскость на четыре части. Точки первой части изображают негров, живущих вне Африки. Точки второй части изображают негров, живущих в Африке. Точки третьей части изображают обитателей Африки негров. Точки четвертой части изображают всевозможные объекты, *не являющиеся ни неграми, ни обитателями Африки.*

Можно на одном чертеже изобразить при помощи кругов Эйлера соотношения более чем между двумя понятиями.

Пример 3. Изобразить кругами Эйлера следующие понятия: 1) ромбы, 2) планеты, 3) треугольники, 4) квадраты, 5) числа, 6) многоугольники, 7) параллелограмы, 8) прямоугольники, 9) четырехугольники (черт. 14).

Классификация

Во всех науках нам приходится иметь дело с классификацией или логическим делением. При классификации мы подразделяем на части объем данного понятия. Например, мы классифицируем треугольники на остроугольные, прямо-



Черт. 14. Круги Эйлера.

угольные и тупоугольные, или мы классифицируем животных на беспозвоночных и позвоночных. Не всякая классификация является логически правильной. В логике приводится ряд правил, которыми следует руководствоваться при классификации.

Классификация должна исчерпывать объем классифицируемого понятия

Правило первое. При классификации всякий объект, входящий в объем классифицируемого понятия, должен входить в один и только в один из классов.

Это значит, во-первых, что классы в сумме должны исчерпывать весь объем классифицируемого понятия, т. е. не должно быть таких объектов, которые не вошли бы ни в один из классов. Во-вторых, классы не должны перекрываться, т. е. не должно быть такого положения, чтобы один объект входил более чем в один класс. Например, если целые числа подразделить на два класса — положительные и отрицательные, — то такая классификация будет неправильной, потому что имеется целое число — нуль, которое не входит ни в тот, ни в другой класс. Другой пример: разобьем целые числа на три класса: 1) числа, кратные двум, 2) числа, кратные трем, 3) все остальные числа. Такая классификация неправильна, потому что число 6 (и вообще все числа, кратные шести) входит и в первый и во второй классы.

Приведенное правило является необходимым для того, чтобы классификация была правильной, но оно недостаточно. Если руководствоваться только этим правилом, то можно было бы производить классификацию путем простого перечисления, не считаясь с признаками тех объектов, которые относятся в каждый класс. Например, можно классифицировать жителей данного города (в определенный момент), указав, что Иванов, Петров и т. д. (перечислить) относятся к первому классу, а все остальные жители — ко второму. В случае, когда объем понятия и объемы отдельных классов состоят из бесконечного множества объектов, простое перечисление невозможно, но и в этом случае можно комбинировать указание признаков с перечислением. Например, можно классифицировать натуральные числа, относя к первому классу все простые числа, кроме 7 и 23, а также числа 15, 20 и 100, а ко второму классу — все остальные числа, т. е. составные числа, кроме 15, 20 и 100, а также числа 7 и 23.

В математике иногда встречаются случаи подобной классификации, в других науках, как нам кажется, этого не бывает. Там всегда требуется, чтобы отдельные объекты относились к тому или иному классу не на основании произвольного перечисления, а на основании определенных признаков. По этому поводу в логике приводится:

Основание деления

Правило второе. В основание всякой классификации должен быть положен некоторый **критерий** или **основание деления** (fundamentum divisionis). Отдельные объекты относятся к тому или иному классу на основании видовых отличий (differentia) в этом критерии.

Иллюстрируем это правило примерами. Допустим, что мы классифицируем людей, принимая за основание деления национальность. Тогда все люди разобьются на классы: русские, немцы, французы, англичане и т. д.

Разумеется, могут быть различные классификации одного и того же понятия (по разным основаниям деления). Например, можно классифицировать людей по полу (основание деления — пол) — на мужчин и женщин. Можно классифицировать их по возрасту (основание деления — возраст), относя, например, к одному классу всех людей в возрасте до 5 лет, ко второму — от 5 до 18, к третьему — от 18 до 60 и к четвертому — старше 60 лет.

Правило второе надо понимать, имея в виду ту основную ошибку, против которой оно направлено: нельзя производить классификацию на основании признаков, принадлежащих к различным основаниям деления. Например, нельзя классифицировать людей на плотников, мужчин, русских и брюнетов, так как для первого из этих признаков основанием деления служит профессия, для второго — пол, для третьего — национальность, для четвертого — цвет волос.

Можно классифицировать треугольники на разносторонние и равнобедренные, можно классифицировать их на остроугольные и тупоугольные. Нельзя смешивать эти основания деления в одной классификации и классифицировать треугольники на остроугольные, равнобедренные, разносторонние, прямоугольные и тупоугольные.

Бывают случаи, когда между классами не получается вполне определенных границ вследствие недостаточно точного разграничения тех признаков, по которым мы относим объекты в тот или иной класс. Например, если мы классифицируем людей на молодых и старых, не указывая точно, до какого возраста мы считаем человека молодым, то граница между классами окажется расплывчатой. На этом обстоятельстве основаны некоторые древние софизмы, вроде вопроса о том, сколько камней составляют кучу. Два камня не составляют кучи, а тысяча камней составляют. Спрашивается, составляют ли кучу три камня? Если нет, то четыре? Продолжая подобные вопросы, мы заставим нашего собеседника признать, что множество камней, не составляющее кучи, от прибавления одного камня превратится в кучу[1]). В этом примере мы классифицируем множества камней на кучи и не-кучи и пользуемся тем, что между этими классами нет точной границы.

В естественных науках, ввиду сложности классифицируемых понятий, встречаются случаи, когда границы между классами расплывчаты. Например, живые существа подразделяются на животных и растения. Однако volvox относят иногда к животным, иногда к растениям, так как он обладает признаками, характерными и для животных и для растений.

Подобной расплывчатости при всякой классификации следует избегать. В математике ее всегда удается избежать очень простым способом. Если после того, как сформулированы видовые признаки классов, остаются объекты, относительно которых на основании этих признаков нельзя решить, к какому классу они относятся, то специальной оговоркой они относятся к тому или иному классу. Например, подразделим натуральные числа на простые и составные, определив их так: натуральное число считается простым, если оно имеет только два делителя — единицу и самого себя; натуральное число называется составным, если оно имеет более двух делителей. При этом неясно, куда отнести единицу. Мы можем по определению условиться считать единицу либо простым числом, либо составным. Обычно принято относить единицу к составным числам, так как это упрощает некоторые формулы и формулировки некоторых теорем в теории чисел.

В курсах логики обычно приводятся еще два правила классификации. Мы приводим их, чтобы дать читателю полное представление об этом

[1]) На основании этого типичного примера софизм подобного рода называется соритом (по-гречески σωρέα — куча). К этому типу принадлежат рассуждения, доказывающие, что нелысый человек может сделаться лысым, если выдернуть у него один волос, богатый может сделаться бедным, лишившись одной копейки, и т. п.

вопросе, но предупреждаем, что эти правила, особенно третье, для математики не имеют существенного значения.

Классы, входящие в одну ступень классификации, должны быть равного значения

Правило третье. Классы, входящие в одну ступень классификации, должны быть равного значения. *Под классами равного значения* подразумеваются классы, образованные на основании признаков, представляющих равноценные видовые различия в основании деления. Какие видовые различия считать равноценными — определить затруднительно; *мы иллюстрируем это примерами.* Заметим, что классы равного значения не обязательно имеют равные объемы; это понятие относится лишь к содержанию.

Положим, что мы классифицируем по национальности. Деление людей на русских, немцев, французов, англичан и т. д. соответствует третьему правилу, так как эти классы образованы по равноценным признакам: в каждый класс относятся люди одной национальности. При этом не имеет значения тот факт, что эти классы имеют различные объемы: количество русских не равно количеству немцев и т. д. Деление людей на русских, французов, англичан, пруссаков, баварцев и т. д. противоречит третьему правилу, так как класс пруссаков или баварцев представляет часть национальности и, следовательно, логически неравноценен классу всех русских.

Это правило имеет большое значение в естественных науках, например, в зоологии. Там классам равного значения присвоены раз навсегда определенные названия: типы, подтипы, классы, подклассы, отряды, подотряды, семейства, роды и виды. В логике и математике термины „род" и „вид" имеют лишь относительное значение: прямоугольники образуют род по отношению к квадратам и вид по отношению к параллелограмам. В зоологии тигры образуют род, узконосые обезьяны — семейство, млекопитающие — класс, хордовые — тип.

Применение этого правила в математике вряд ли возможно, так как нельзя определить в общем виде, что́ считается классами равного значения. Можно, например, делить все целые числа на два класса: 1) числа, делящиеся на 3, 2) числа, не делящиеся на 3. С таким же правом можно делить целые числа на три класса: 1) числа, делящиеся на 3, т. е. числа вида $3n$, 2) числа, дающие при делении на 3 в остатке единицу, т. е. числа вида $3n+1$, 3) числа, дающие при делении на 3 в остатке два, т. е. числа вида $3n+2$. В каком из этих делений классы равноценны? Приведем еще пример: положим, что мы классифицируем людей по возрасту. Мы можем совершенно произвольно установить границы возрастных групп, например, в первый класс отнести людей в возрасте от 0 до 5 лет, во второй — от 5 до 18, в третий — старше 18; можно установить эти границы как-нибудь иначе и выделить другое число классов. Нельзя сказать, при каком именно делении мы получим равноценные классы.

Основание деления должно быть важным

Правило четвертое. Основанием деления должен быть критерий, ведущий к **важным** различиям между классами.

Например, если будем классифицировать треугольники по величине площади, относя к одному классу треугольники, имеющие площадь не больше 1 $м^2$, а к другому — треугольники с площадью более 1 $м^2$, то это деление в большинстве случаев будет бесполезным.

По поводу этого правила возникает вопрос, какие различия считать важными. Естественно считать признак важным, если из него вытекает большое число других признаков. В самом деле, выделить в особый класс объекты, обладающие признаком P, стоит лишь в том случае, если про эти объекты можно высказать большое количество предложений, т. е. если обладание свойством P влечет за собой обладание многими другими свойствами. Например, рассмотрим деление треугольников на остроугольные, прямоугольные и тупоугольные. Все треугольники, принадлежащие к классу прямоугольных, обладают не только тем общим свойством, что они имеют прямой угол. У всех этих треугольников квадрат большей стороны равен сумме квадратов двух других сторон. Центр описанного круга у этих треугольников лежит на контуре. Высота разбивает треугольник на два подобные треугольника и т. д. Напротив, классификация людей по именам, т. е. выделение в один класс всех Ива́нов, в другой — всех Петров и т. д. явно противоречит четвертому правилу. Все люди, носящие имя Иван, не обладают, кроме имени, никакими другими общими видовыми свойствами, отличающими их от других людей.

Однако нельзя дать каких-либо общих логических указаний по вопросу о важности признаков. Выделение класса по каким-либо признакам есть акт творчества в области данной конкретной науки; это выделение не производится автоматически по каким-либо общим правилам. В математике успех какой-либо теории часто зависит от выделения классов с богатым содержанием, т. е. с большим числом общих признаков.

Таким образом, при выделении класса по какому-либо одному признаку (или по группе существенных признаков) надо предвидеть, чтобы из этого признака вытекали многие другие, иначе про этот класс можно будет мало сказать.

Кроме того, необходимо заметить, что в разных вопросах классификация может производиться с разными целями. То, что́ неважно в одном вопросе, может оказаться важным в другом.

§ 2. Предложения

Предложение как приписывание признака понятию

Предложение есть утверждение, что некоторое понятие обладает известным признаком, т. е. приписывание объектам (всем или некоторым), входящим в объем этого понятия, какого-нибудь признака. Например, „все люди смертны"; здесь всем людям приписывается свойство быть смертными. „Сумма углов треугольника (подразумевается — всякого треугольника) равна 180°"; здесь всем треугольникам приписывается свойство, что сумма их углов равна 180°.

Под это определение подходят также и те случаи, когда для некоторого понятия отрицается некоторый признак, так как отрицать какой-нибудь признак — все равно, что приписывать противоположный признак.

Заметим, что не всякое предложение в грамматическом смысле является логическим предложением. Например: „Холодно ли сегодня?", „Закройте дверь" — эти фразы не являются логическими предложениями.

В математике термин „предложение" относится и к аксиомам и к теоремам, так как в определении предложения не упоминается, доказывается оно или принимается без доказательства. Предложения могут быть ложными.

Предложение как включение класса в класс

Кроме изложенной выше, существуют разные другие точки зрения на предложения. Аристотель рассматривал каждое предложение не как приписывание понятию известного признака, а как включение одного класса (или части класса) в другой. Эта точка зрения для математики является более удобной; поясним ее на примерах.

Предложение „все люди смертны" можно понимать так: имеется класс людей и имеется класс смертных существ; данное предложение

*

утверждает, что класс *людей полностью входит в класс смертных* существ. „В прямоугольном треугольнике квадрат большей стороны равен сумме квадратов двух других сторон". Здесь рассматривается, во-первых, класс прямоугольных треугольников и, во-вторых, класс таких треугольников, у которых квадрат большей стороны равен сумме квадратов двух других сторон. Данное предложение утверждает, что первый класс целиком содержится во втором[1]).

Четыре вида предложений

Предложения разделяются на общие и частные. Предложение называется общим, если всем объектам данного класса приписывается (или отрицается) какой-нибудь признак, т. е. если данный класс целиком включается в другой класс. („Все люди смертны", „Ни один человек не умеет летать".) Предложение называется частным, если некоторым *объектам данного класса приписывается (или отрицается) какой*-нибудь признак. („Некоторые люди весят более 100 килограммов", „Некоторые функции не имеют производной".)

Существует разделение предложений по другому критерию: на утвердительные и отрицательные. Предложение называется утвердительным, если всем (или некоторым) объектам данного класса приписывается некоторый признак, т. е. если данный класс целиком (или частично) включается в другой класс. („Все люди смертны", „Некоторые люди весят более 100 килограммов".) Предложение называется отрицательным, если относительно всех (или некоторых) объектов данного класса отрицается некоторый признак, т. е. если данный класс целиком (или частично) исключается из другого класса. („Ни один человек не умеет летать", „Некоторые функции не имеют производной".)

Комбинируя эти два деления, найдем, что существуют следующие четыре вида предложений: 1) общеутвердительные, 2) общеотрицательные, 3) частноутвердительные и 4) частноотрицательные.

Общеутвердительные предложения обозначаются буквой A (первая гласная латинского слова affirmo — утверждаю), частноутвердительные буквой I (вторая гласная слова affirmo), общеотрицательные — буквой E (первая гласная латинского слова nego — отрицаю), частноотрицательные — буквой O (вторая гласная слова nego).

Различие между общими и частными предложениями называется различием по количеству, а различие между положительными и отрицательными — различием по качеству. Так A и I совпа-

---

[1]) Высказывая это предложение (теорему Пифагора), мы не предрешаем вопроса о том, верно ли обратное предложение. Если высказать обратное предложение („Все треугольники, у которых квадрат бо́льшей стороны равен сумме квадратов двух других сторон, прямоугольны"), то оно сводится к тому, что второй класс целиком содержится в первом. Сопоставляя эти два предложения, мы видим, что оба класса совпадают. Это явление будет подробно рассмотрено ниже.

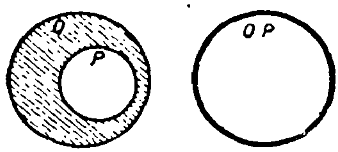
Мы не будем рассматривать здесь еще одной точки зрения на предложения, согласно которой предложение определяется тем свойством, что оно может быть истинным или ложным (D. Hilbert und W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin, 1928, стр. 3).

дают по качеству, но различны по количеству, A и E различны по качеству, но совпадают по количеству, A и O различны и по качеству и по количеству, I и O различны по качеству, но совпадают по количеству, E и O совпадают по качеству, но различны по количеству, I и E — различны по качеству и по количеству.

Предложения A в общем виде могут быть сформулированы так: „Все P суть Q“, или „Всякий объект, обладающий свойством P, обладает свойством Q“, или „Если объект обладает свойством P, то он обладает свойством Q“. Здесь мы одновременно обозначаем буквой P некоторое свойство, а также всякий объект, обладающий этим свойством.

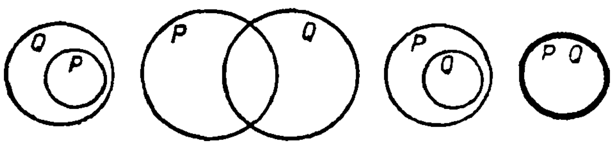
Изображение различных видов предложений кругами Эйлера

Всякое предложение типа A может быть изображено при помощи кругов Эйлера, как показано на черт. 15. Здесь могут встретиться два случая: либо круг P (т. е. круг, охватывающий все объекты, обладающие свойством P) меньше круга Q и целиком находится внутри него, либо оба круга совпадают. Во всяком случае круг P не может выходить за границы Q, так как в этом случае существовали бы некоторые объекты, обладающие свойством P, но не обладающие свойством Q. Здесь и в дальнейшем мы изображаем окружность утолщенной, если она ограничивает два совпадающие круга.



Черт. 15. Предложения A: „Все P суть Q“.

Предложения I имеют вид: „Некоторые P суть Q“ или „Некоторые объекты, обладающие свойством P, обладают свойством Q“. Здесь необходимо уточнить слово „некоторые“, так как в обыденной речи это слово имеет два смысла. В первом смысле „некоторые“ противопоставляются выражению „ни один“. В этом смысле, когда мы говорим, что „некоторые P суть Q“, то это значит, что суще-



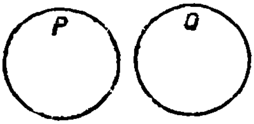
Черт. 16. Предложения I: „Некоторые P суть Q“.

ствует хоть один объект P, который в то же время является Q; в частности, „некоторые“ может обозначать и „все“. С этой точки зрения предложение „Некоторые люди смертны“ надо считать истинным. Во втором смысле „некоторые“ противопоставляются слову „все“, т. е. „некоторые“ значит „только некоторые, во всяком случае не все“; в частности, „некоторые“ может означать и „ни один“. С этой точки зрения предложение „Некоторые люди смертны“ — ложно. В математике слово „некоторые“ понимается в первом смысле.

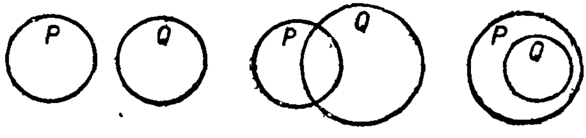
Предложения I изображаются кругами Эйлера, как показано на черт. 16. Здесь возможны четыре случая, так как предложение I обозначает *лишь*, что круг P не может целиком лежать вне круга Q.

Существенно заметить, что, имея предложение A, мы не можем (без некоторых дополнительных указаний, о которых речь ниже) судить о том, какой из двух случаев, изображенных на черт. 15, имеет место. Точно так же, имея предложение I, мы не можем судить, какой из четырех случаев, изображенных на черт. 16, имеет место. Аналогичное замечание относится и к случаю O.

Предложения E имеют вид: „Ни одно P не есть Q", или „Всякий объект, обладающий свойством P, не обладает свойством Q", или „Если объект обладает свойством P, то он не обладает свойством Q". Предложения изображаются кругами Эйлера, как показано на черт. 17.



Черт. 17. Предложения E: „Никакие P не суть Q".



Черт. 18. Предложения O: „Некоторые P не суть Q".

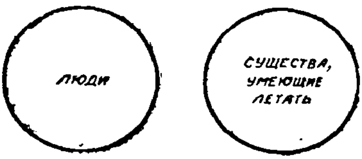
Здесь класс P целиком находится вне класса Q. Предложения O имеют вид: „Некоторые P не суть Q", или „Некоторые объекты, обладающие свойством P, не обладают свойством Q". Предложения O изображаются кругами Эйлера, как показано на черт. 18.

Сравнительная ценность общих и частных предложений

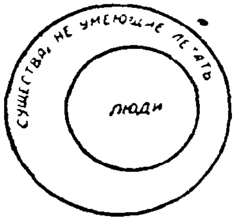
Для нужд элементарной математики достаточно ограничиться исследованием общих предложений. Предложение „Некоторые P суть Q", если не указано, какие именно P обладают свойством Q, не представляет особой ценности, так как, имея какой-нибудь один объект, мы не сможем на основании этого предложения сделать определенного вывода: обладает этот объект свойством или не обладает. Например, предложение „У некоторых параллелограмов диагонали равны между собой" мало полезно, так как, имея какой-нибудь определенный параллелограм, мы на основании этого предложения не можем сделать относительно этого параллелограма никакого вывода. Поэтому мы в математике избегаем частных предложений, а стараемся указать, какие именно объекты P обладают свойством Q. Вместо того чтобы говорить: „У н е к о т о р ы х параллелограмов диагонали равны между собой", мы говорим: „У п р я м о у г о л ь н ы х параллелограмов (т. е. у прямоугольников) диагонали равны между собой". Но такое предложение уже относится к типу не I, а A.

Однако бывают случаи, когда мы вынуждены удовольствоваться частными предложениями, потому что не знаем достаточного условия, при котором объект P обладает (или не обладает) свойством Q. В этих случаях частное предложение все-таки имеет ценность, так как оно уменьшает число возможностей, имеющих место a priori.

Рассмотрим, например, вопрос о том, всякая ли непрерывная функция имеет производную. Пока этот вопрос не был решен, представлялись две возможности: 1) всякая непрерывная функция имеет производную, 2) некоторые непрерывные функции не имеют производной. Вейерштрасс дал пример непрерывной функции, не имеющей производной. Таким образом, выяснилось, что „некоторые непрерывные функции не имеют производной", и первая возможность отпала. Выяснение этого вопроса имеет большую научную ценность, но,



Черт. 19.



Черт. 20.

Сведение общеотрицательного предложения к общеутвердительному.

разумеется, было бы еще лучше, если бы мы имели необходимое и достаточное условие, при котором непрерывная функция имеет производную. Тогда о каждой данной непрерывной функции мы могли бы сказать, имеет ли она производную. Имеющееся в нашем распоряжении частноотрицательное предложение „Некоторые непрерывные функции не имеют производной" не позволяет сделать этого.

Сведение общеотрицательных предложений к общеутвердительным

Итак, мы остановимся подробно на наших общих предложениях. При этом мы ограничимся общеутвердительными предложениями по следующей причине. Общеотрицательное предложение „Если объект обладает свойством P, то он не обладает свойством Q" представляет исключение класса P из класса Q. Но утверждать, что класс P не входит в класс Q — все равно, что утверждать, что класс P входит в класс противоположный (т. е. класс объектов, не обладающих свойством Q). Но в таком случае данное предложение можно рассматривать как общеутвердительное. Возьмем, например, предложение „Ни один человек не умеет летать". Если изобразить это предложение кругами Эйлера, как это сделано на черт. 19, то эта схема совпадает со схемой черт. 17 (стр. 38) и изображает общеотрицательное предложение. Если же изобразить это предложение кругами Эйлера, как это сделано на черт. 20, то эта схема совпадет со схемой черт. 16 (стр. 37) и изображает общеутвердительное предложение.

Обратные и противоположные предложения

В предложении „Если объект обладает свойством P, то он обладает свойством Q" мы различаем условие и следствие. Условием является „объект обладает свойством P", а следствием — „он обладает свойством Q". Слова „если" и „то" указывают место условия и следствия в предложении. Эта терминология заменяет принятое в логике различение подлежащего и сказуемого и является для математики более удобной.

Предложение, в котором условие и следствие переставлены (т. е. следствие сделано условием, а условие — следствием), называется **обратным** по отношению к данному предложению, называемому **прямым**. Предложение, в котором условие и следствие отрицаются, называется **противоположным** по отношению к данному. В общем виде эти взаимоотношения между предложениями выглядят так.

Прямое предложение: „Если объект обладает свойством P, то он обладает свойством Q“.

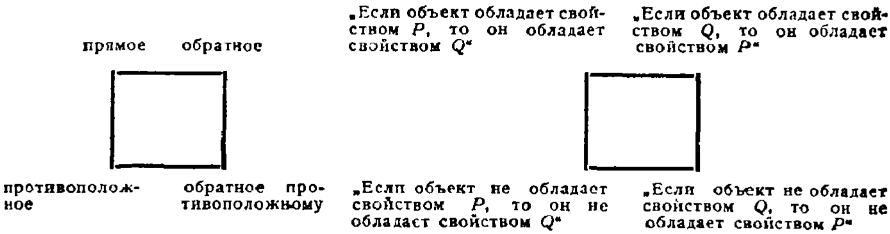
Обратное предложение: „Если объект обладает свойством Q, то он обладает свойством P“.

Противоположное предложение: „Если объект не обладает свойством P, то он не обладает свойством Q“.

К этим трем предложениям можно присоединить четвертое: **обратное противоположному** или **противоположное обратному** (составляя эти предложения, читатель убедится, что это одно и то же предложение).

Предложение обратное противоположному (или **противоположное обратному**): „Если объект не обладает свойством Q, то он не обладает свойством P“.

В дальнейшем будем располагать эти четыре предложения в виде схемы, изображая квадрат [1] и записывая данные предложения около его вершин.



Силлогистическая форма предложений

Прежде чем перейти к исследованию зависимости между истинностью этих четырех предложений, рассмотрим один методический вопрос. Дело в том, что в математике, а тем более в обыденной жизни, предложения не выражаются в той форме, которую мы привели выше. Эту форму мы будем называть силлогистической, так как она оказывается особенно удобной для целей силлогистического анализа, т. е. для анализа взаимодействия предложений, входящих в силлогизм. Поэтому учитель должен добиваться, чтобы ученики умели выразить всякое предложение в силлогистической форме.

Рассмотрим несколько примеров.

Вертикальные углы равны между собой. В силлогистической форме: „Если углы вертикальны, то они равны между собой“ или

---

[1]) *Эта схема не имеет отношения к так называемому* „квадрату противоположений“, часто употребляющемуся в логике.

„Класс пар вертикальных углов входит в класс пар углов, равных между собой".

Большая хорда ближе к центру (в одном круге или в равных кругах). В силлогистической форме „Если хорда больше (т. е. больше, чем другая хорда), то она ближе к центру (чем эта другая хорда)", или „Класс хорд бо́льших (по отношению к некоторым другим хордам) входит в класс хорд, лежащих ближе (чем эти другие хорды) к центру".

Числа, оканчивающиеся нулем, четны. В силлогистической форме: „Если число оканчивается нулем, то оно делится на два" или „Класс чисел, оканчивающихся нулем, входит в класс чисел, делящихся на два".

Математические предложения всегда легко привести к силлогистической форме. Житейские мысли выражаются в столь разнообразных формах, что по отношению к ним это иногда бывает труднее. Предложение „Поспешишь — людей насмешишь" выражает мысль, которая в силлогистической форме формулируется так: „Если человек спешит, то он смешит других людей", или „Класс людей спешащих входит в класс людей смешащих (других людей)".

Методические замечания о приведении предложений к силлогистической форме

В методической печати иногда выдвигалось предложение, чтобы все геометрические теоремы формулировались в силлогистической форме. Согласно этому предложению, не следует давать ученикам формулировку: „Вертикальные углы равны между собой", а говорить: „Если углы вертикальны, то они равны между собой". Это предложение обычно мотивируется тем, что ученики часто затрудняются найти обратную и противоположную теоремы. Если такое предложение принять, то всякий ученик будет находить обратную и противоположную теоремы без всякого затруднения.

Мы полагаем, что рассматриваемое предложение неправильно по двум причинам.

Во-первых, школа должна учить учеников тем методам, которые применяются в практике данной науки, а не тем упрощенным, которые придумываются специально для школы и которые, следовательно, не пригодятся ученику, когда ему придется применять свои знания после окончания школы. Поэтому данное предложение и надо обсудить с такой точки зрения: удобно ли оно для геометрии вообще. Если да, то его надо применять и в науке и в школьном преподавании, если же в науке оно неудобно, то не надо приучать школьников к такому порядку.

Итак, удобен ли такой порядок в науке? Представление предложений в силлогистической форме удобно только для логических целей (для построения обратных и противоположных предложений и для анализа силлогизмов). Для других целей силлогистическая форма неудобна, так как она громоздка и противоречит общепринятым формам речи. Невозможно требовать, чтобы вместо „вороны черны" мы всегда говорили „класс ворон входит в класс черных существ“ (хотя в тех случаях, когда мы занимаемся логическим анализом, предпочтительно говорить именно так). Так же и в геометрии формулировка теорем должна быть точной, но насколько возможно краткой и удобной для запоминания. Удобнее и короче сказать „Диаметр есть наибольшая из хорд“, чем „Если некоторая хорда отлична от диаметра, то она меньше диаметра“.

Во-вторых, если какая-нибудь трудность вызывается существом дела, то в школе следует не обходить ее, а научить учеников ее преодолевать. Предположим, например, что при изучении правил правописания ученики затрудняются в переносах слов с одной строки на другую. Можно устранить эту трудность, предписав ученикам вообще не переносить слов, а, если слово не помещается в одной строке, — писать его целиком в следующей строке. При такой системе все ошибки в переносах будут радикально устранены. Однако ни один учитель не станет защищать такую систему: надо добиться, чтобы ученики усвоили правила переноса.

Возвращаясь к нашему вопросу, констатируем, что перевод предложения из обычной формы в силлогистическую представляет известную трудность, но это — весьма полезная работа. Чтобы перевести предложение в силлогистическую форму, надо уметь различить в нем условие и следствие; это приучает учеников более сознательно вникать в смысл предложений. Не следует самим делать эту работу за учеников. Давая им теорему в силлогистической форме „если — то“, мы подсказываем им, где́ условие и где́ следствие. Для нахождения условия и следствия здесь не надо вдумываться в смысл предложения, а можно поступать автоматически: все, что идет после слова „если“, есть условие, а все, что идет после слова „то“, — следствие.

Поэтому мы считаем предложение давать формулировки всех теорем в силлогистической форме неправильным. Мы рекомендуем учителю при отыскании обратных и противоположных предложений придерживаться следующего порядка.

Пусть дано некоторое предложение (в обычной формулировке); требуется найти обратное (или противоположное) предложение.

П е р в ы й ш а г. Переводим данное предложение в силлогистическую форму.

В т о р о й ш а г. Строим обратное (или противоположное) предложение.

Т р е т и й ш а г. Переводим полученное предложение в обычную форму.

Возьмем, например, предложение: „Бо́льшая хорда ближе к центру“.

В силлогистической форме: „Если хорда больше, то она ближе к центру“.

Обратное предложение: „Если хорда ближе к центру, то она больше“.

Противоположное предложение: „Если хорда меньше, то она дальше от центра“.

Предложение *обратное* противоположному: „Если хорда дальше от центра, то она меньше".

Обратное предложение в обычной форме: „Хорда, которая ближе к центру, больше".

Противоположное предложение в обычной форме: „Меньшая *хорда дальше от центра*".

Предложение обратное противоположному в обычной форме: „Хорда, которая дальше от центра, меньше".

Связь между истинностью обратных и противоположных предложений

Если прямое предложение истинно, то из этого еще не следует, что обратное и противоположное предложения тоже истинны. Например, „Числа, оканчивающиеся нулем, четны". Обратное предложение неверно, потому что не только числа, оканчивающиеся нулем, четны. Если мы скажем: „Числа, оканчивающиеся нулем, кратны десяти", то можно добавить: „и только эти числа кратны десяти, т. е. числа, не оканчивающиеся нулем, не кратны десяти". Поэтому в данном случае верно и обратное предложение: „Числа, кратные десяти, оканчиваются нулем". Если читатель вдумается в эти примеры, то он поймет, что обратное и противоположное предложения одновременно либо оба истинны, либо оба ложны. Но сейчас мы это докажем в общей форме.

Пусть прямое предложение: „Если объект обладает свойством P, то он обладает свойством Q" истинно. Тогда могут представиться два случая, изображенные на черт. 15 (стр. 37). Если имеет место первый случай, то обратное предложение неверно. В самом деле, точки заштрихованной части круга Q изображают объекты, обладающие свойством Q, но не обладающие свойством P. Противоположное предложение в этом случае также неверно: точки заштрихованной части круга Q не обладают свойством P[1]), но обладают свойством Q; следовательно, нельзя сказать, что „всякий объект, не обладающий свойством P, не обладает свойством Q". Таким образом, в случае, когда между классами P и Q имеется соотношение, изображенное на левом черт. 15, т. е. класс P входит в Q и составляет его часть, — ни обратное, ни противоположное предложения не верны.

В случае, изображенном на правом черт. 15, и обратное и противоположное предложения верны. В самом деле, если круги P и Q совпадают, то: 1) круг P входит в Q (прямое предложение), 2) круг Q входит в P (обратное предложение), 3) всякая точка, не входящая в круг P, не входит в круг Q (противоположное предложение).

Итак, предложения обратное и противоположное либо оба истинны, либо оба ложны. Если мы докажем обратную теорему, то противоположная теорема не нуждается в доказательстве.

Что касается предложения обратного противоположному, то оно

---

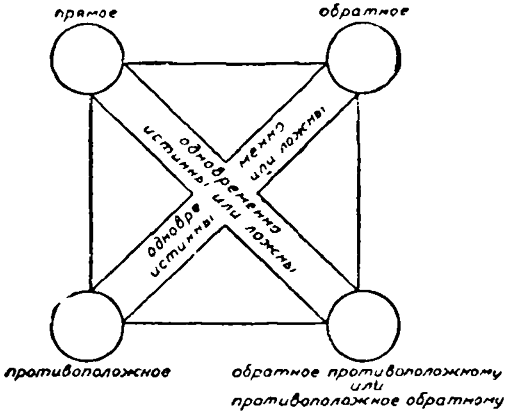
[1]) Для краткости мы говорим: „Точка обладает свойством P" вместо того, чтобы сказать: „Точка изображает объект, обладающий свойством P".

истинно или ложно одновременно с прямым предложением. В самом деле, если прямое предложение: „Если объект обладает свойством P, то он обладает свойством Q" истинно, то имеет место один из двух случаев, изображенных на черт. 15. И в том и в другом случае всякая точка, лежащая вне круга Q, лежит вне круга P, т. е. истинно предложение: „Если объект не обладает свойством Q, то он не обладает свойством P" (предложение обратное противоположному).

Таким образом, если прямая теорема доказана, то теорема обратная противоположной обязательно справедлива, и, следовательно, в доказательстве не нуждается.

Схема зависимости между истинностью прямых, обратных и противоположных предложений

Пользуясь схемой, изображенной на стр. 40, можно сказать, что предложения, расположенные в концах одной и той же диагонали, одновременно истинны или ложны.



Рассмотрим, например, следующие четыре теоремы:

1) Если внутренние накрест-лежащие углы равны между собой, то прямые параллельны (прямая).

2) Если прямые параллельны, то внутренние накрест-лежащие углы равны между собой (обратная).

3) Если внутренние накрест-лежащие углы не равны между собой, то прямые не параллельны (противоположная).

4) Если прямые не параллельны, то внутренние накрест-лежащие углы не равны между собой (обратная противоположной).

Из этих четырех теорем необходимо доказать две, например, первую и вторую или первую и третью.

Теорема Гаубера Приведенные выше рассуждения о связи между истинностью четырех теорем можно обобщить. Рассматривая теорему с условием P, мы имеем в виду две взаимно исключающие возможности: либо некоторый объект обладает свойством P, либо нет. Если рассматривать не две модификации, а больше, то можно доказать следующую теорему [1]):

Теорема Гаубера. Пусть имеется несколько теорем, условия которых суть $P_1, P_2, \ldots, P_n$, а следствия — соответственно $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$. Если условия $P_1, P_2, \ldots, P_n$ исчерпывают все возможные случаи, а каждое из следствий несовместимо с каждым из остальных, то все обратные теоремы справедливы.

Доказательство. Пусть некоторый объект M обладает свойством Q_1:

$$M \text{ обладает свойством } Q_1. \qquad (*)$$

Так как условия $P_1, P_2, \ldots, P_n$ исчерпывают все возможные случаи, то объект M должен обладать одним из свойств $P_1, P_2, \ldots, P_n$:

$$M \text{ обладает одним из свойств } P_1, P_2, \ldots, P_n. \qquad (**)$$

Но M не может обладать свойством P_2, потому что, в силу одной из прямых теорем, из P_2 вытекает Q_2, а Q_2 несовместимо с Q_1. По аналогичным причинам M не может обладать свойствами $P_3, \ldots, P_n$:

$$M \text{ не обладает ни одним из свойств } P_2, P_3, \ldots, P_n. \qquad (***)$$

Из (**) и (***) следует:

$$M \text{ обладает свойством } P_1,$$

что и требовалось доказать. Аналогично доказываются остальные обратные теоремы.

Случай, о котором идет речь в теореме Гаубера, встречается в геометрии очень часто. Рассмотрим, например, следующие три теоремы:

1) Если угол треугольника острый, то квадрат стороны, лежащей против него, меньше суммы квадратов двух других сторон.

2) Если угол треугольника прямой, то квадрат стороны, лежащей против него, равен сумме квадратов двух других сторон.

3) Если угол треугольника тупой, то квадрат стороны, лежащей против него, больше суммы квадратов двух других сторон.

Условия этих теорем исчерпывают все возможные случаи (так как угол треугольника обязательно либо острый, либо прямой, либо тупой), а всякие два следствия несовместимы (квадрат стороны не может одновременно быть и меньше и больше суммы квадратов двух других сторон). Следовательно, все обратные теоремы справедливы.

Аналогично обстоит дело с теоремами:

В одном треугольнике (или в равных треугольниках) против меньшего (равного, бóльшего) угла лежит меньшая (равная, бóльшая) сторона.

В одном круге (или в равных кругах) меньшая (равная, бóльшая) хорда лежит дальше (на том же расстоянии, ближе) от центра.

Если читатель проследит доказательства обратных теорем, даваемые обычно в этих случаях, то он убедится, что в этих доказательствах каждый раз повторяется применительно к данному конкретному случаю та же схема рассуждений, какая приведена выше в общей форме при доказательстве теоремы Гаубера. Поэтому учителю полезно знать эту общую схему.

Если $n=2$, то две теоремы, о которых говорится в теореме Гаубера:

1) из P_1 вытекает Q_1,

2) из P_2 вытекает Q_2,

---

[1]) Д. Д. Мордухай-Болтовской, Математика и логика в школе. („Математическое просвещение“, вып. 4, М.—Л. 1935.)

являются **противоположными** (если P_1 и P_2 исчерпывают все возможные случаи, то свойство P_2 есть отрицание свойства P_1). Поэтому доказанное выше положение — если справедлива противоположная теорема, то справедлива и обратная — есть частный случай теоремы Гаубера.

Необходимость и достаточность

С изложенным выше вопросом о связи между истинностью прямого, обратного, противоположного и обратного противоположному предложений тесно связан вопрос о **необходимых и достаточных условиях** или **признаках**. Мы спрашиваем, при каком условии объект обладает свойством Q. Это условие заключается в том, что объект должен обладать некоторым другим свойством P.

Обладание свойством P называется **необходимым условием** для обладания свойством Q или **необходимым признаком** наличия свойства Q, если **без наличия** свойства P объект **не может** обладать свойством Q. Другими словами, утверждать, что P есть необходимый признак для Q, значит: „Если объект не обладает свойством P, то он не обладает свойством Q" или „Если объект обладает свойством Q, то он обладает свойством P".

Обладание свойством P называется **достаточным условием** для обладания свойством Q или **достаточным признаком** наличия свойства Q, если из наличия у объекта свойства P вытекает наличие у него свойства Q. Утверждать, что P есть достаточный признак для Q, значит: „Если объект обладает свойством P, то он обладает свойством Q" или „Если объект не обладает свойством Q, то он не обладает свойством P".

Признак может быть только необходим или только достаточен или одновременно необходим и достаточен. Если он необходим и достаточен, то, значит, он содержит ровно столько требований, сколько нужно для того, чтобы обеспечить наличие свойства Q. Если признак только необходим — значит он содержит слишком мало требований: без них свойство Q не может иметь места, но их наличие не гарантирует свойства Q. Если признак только достаточен — значит он содержит слишком много требований: если они соблюдены, то свойство Q имеет место, но оно может иметь место и без них.

Если признак только необходим, то стараются увеличить число содержащихся в нем требований, чтобы он стал и достаточным. Если признак только достаточен, то стараются уменьшить число содержащихся в нем требований, чтобы он стал и необходимым. Предложения „Признак P необходим" и „Признак P достаточен" суть взаимно обратные предложения.

Рассмотрим примеры. „Для того чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограмом, необходимо, чтобы сторона AB была параллельна DC. Этот признак необходим, потому что если он не соблюден, то четырехугольник $ABCD$ не является параллелограмом, но он недостаточен, потому что при наличии его четырехугольник $ABCD$ может все-таки не быть параллелограмом. Следовательно, в этом признаке содержится слишком мало требований. Если мы добавим еще одно требование, например, $AB = DC$, то полученный признак ($AB \parallel DC$ и $AB = DC$) будет необходимым и достаточным.

Для того чтобы два треугольника имели равные площади, достаточно, чтобы у них были *соответственно равные основания и высоты*, т. е.

$$a = a', \quad h = h'. \qquad (1)$$

Этот признак равновеликости треугольников достаточен: если условия (1) соблюдены, то треугольники равновелики. Однако он не необходим, так как и без соблюдения условий (1) треугольники все-таки могут быть равновелики. Следовательно, в условиях (1) мы требуем слишком много для равновеликости треугольников; эти требования можно уменьшить. Можно заменить условия (1) одним условием

$$ah = a'h'. \qquad (2)$$

Переходя от двух условий (1) к условию (2), мы уменьшаем наши требования. Это заключается не только в том, что мы два условия заменяем одним. Из условий (1) вытекает условие (2), но не обратно. Это значит, что класс пар треугольников, удовлетворяющих условиям (1), входит как часть в класс пар треугольников, удовлетворяющих условию (2). Таким образом, заменяя условия (1) условием (2), *мы расширяем класс пар треугольников, удовлетворяющих этим условиям*. Класс пар треугольников, удовлетворяющих условиям (1), у́же, чем класс пар равновеликих треугольников. После расширения мы получаем класс пар треугольников, совпадающий с классом пар равновеликих треугольников, т. е. условие (2) является необходимым и достаточным признаком равновеликости треугольников.

Геометрическое место точек

Одним из важнейших понятий геометрии является понятие геометрического места точек. Геометрическим местом точек, обладающих некоторым свойством P, называется множество всех точек, обладающих этим свойством. Многие учителя относятся к этому понятию небрежно. Часто встречается следующая ошибка. Требуется доказать, что перпендикуляр к отрезку AB, восставленный в его середине, есть геометрическое место точек, равноудаленных от A и B. Берут какую-нибудь точку M, принадлежащую нашему перпендикуляру, доказывают, что $MA = MB$, и считают доказательство исчерпанным. В действительности утверждение, что l есть геометрическое место точек, обладающих свойством P, равносильно двум положениям:

1) каждая точка, принадлежащая l, обладает свойством P;

2) каждая точка, не принадлежащая l, не обладает свойством P.

Второе из этих положений противоположно первому, и поэтому оно может быть заменено положением, обратным первому:

2) каждая точка, обладающая свойством P, принадлежит l.

Чтобы доказать сформулированную выше теорему о перпендикуляре, надо доказать два положения:

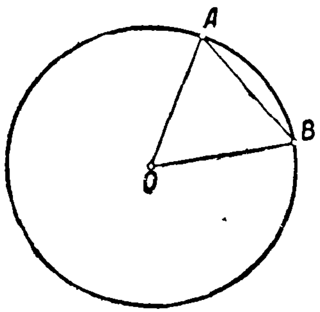
1) если точка M лежит на нашем перпендикуляре, то $MA = MB$;

2) если точка M не лежит на этом перпендикуляре, то $MA \neq MB$.

Забвение второго положения может приводить к грубым ошибкам. Например, часть перпендикуляра к отрезку AB, восставленного в его середине, не есть геометрическое место точек, равноудаленных от A и B, хотя все точки этой части равноудалены от A и B. Полуокружность не есть геометрическое место точек, равноудаленных от центра, хотя все точки полуокружности равноудалены от центра.

§ 3. Умозаключения

Силлогизмы Изучив предложения, мы переходим к силлогизмам, т. е. к изучению логической связи между предложениями, заключающейся в том, что из двух предложений (называемых **посылками**) в ы т е к а е т третье предложение (называемое заключением или следствием). Мы считаем некоторое предложение следствием двух других, если истинность первых двух необходимо влечет истинность третьего, т. е. если невозможно, оставаясь последовательным, признавать истинность посылок и в то же время отрицать истинность вывода.



Черт. 21.

Необходимо отметить, что в силлогизме (силлогизмом мы называем соединение трех предложений, обладающее указанными выше свойствами) мы не доказываем безусловной истинности следствия, а доказываем лишь, что е с л и истинны посылки, т о истинно и следствие. *Вопрос же об истинности посылок* — особый; он не относится к теории силлогизма.

В логических рассуждениях житейского или научного характера мы не формулируем встречающихся силлогизмов во всех подробностях, а многое опускаем. Даже в геометрии мы не воспроизводим подробно всех силлогизмов; в этом обычно и нет надобности, но в некоторых случаях (для целей логического анализа) бывает полезно разложить рассуждение на составляющие силлогизмы.

Пусть, например, требуется доказать, что хорда, равная радиусу, стягивает одну шестую часть окружности. Пусть AB (черт. 21) есть хорда, равная радиусу, а O — центр окружности.

1-й с и л л о г и з м

В равностороннем треугольнике все углы — по 60° (ранее доказанная теорема).

Треугольник OAB — равносторонний (по условию).

Следовательно, в треугольнике OAB все углы по 60°.

2-й с и л л о г и з м

Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается (ранее доказанная теорема).

Угол $\widehat{AOB}$ — центральный (по условию).

Следовательно, угол $\widehat{AOB}$ измеряется дугой, на которую он опирается (т. е. дугой $\overset{\smile}{AB}$).

3-й с и л л о г и з м

Угол $\widehat{AOB}$ измеряется дугой $\overset{\smile}{AB}$ (следствие 2-го силлогизма).

Угол $\widehat{AOB}$ содержит 60° (следствие 1-го силлогизма).

Следовательно, дуга $\overset{\smile}{AB}$ содержит 60°.

4-й силлогизм

Дуга в $\smile 60^\circ$ составляет одну шестую часть окружности (известно ранее).

Дуга $\overset{\smile}{AB}$ имеет 60° (*следствие 3-го силлогизма*).

Следовательно, $\overset{\smile}{AB}$ составляет одну шестую часть окружности.

Посылки силлогизма должны содержать общий термин

Мы не будем вдаваться в подробное исследование различных видов (модусов) силлогизма, потому что далеко не все виды имеют применение в геометрии. Поэтому перечислим лишь возможные виды, а затем остановимся на тех из них, *которые встречаются в геометрии*.

Прежде всего отметим одно очевидное правило: посылки силлогизма должны содержать один общий термин. Если посылки не содержат общего термина, то из них нельзя сделать никакого вывода. Например, из предложений: „Коровы суть жвачные животные" и „Диагонали прямоугольника равны между собой" нельзя сделать какого-либо вывода. Напротив, из предложений: „Коровы суть жвачные животные" и „Все жвачные животные имеют рога" (эти предложения имеют общий термин „жвачные животные") вытекает: „Коровы имеют рога".

Впрочем, наличие общего термина в посылках является необходимым, но недостаточным условием того, чтобы из этих посылок вытекал какой-нибудь вывод. Мы увидим ниже, что иногда из двух посылок, имеющих общий термин, не вытекает никакого вывода.

Фигуры силлогизма

Допустим, что первая посылка имеет термины P и Q. Вторая посылка должна иметь один новый термин X (он может служить термином подлежащего или сказуемого, т. е. стоять на первом или на втором месте) и один из терминов P и Q. *Таким образом*, вторая посылка может содержать следующие термины: X и P, X и Q, P и X, Q и X. *В зависимости от порядка терминов в посылках* различают четыре **фигуры** силлогизма, а именно:

	I фигура	II фигура	III фигура	IV фигура
1-я посылка	PQ	PQ	PQ	PQ
2-я посылка	XP	XQ	PX	QX

Следствие есть предложение, в котором новый термин, введенный во второй посылке, является термином подлежащего, а термином сказуемого является тот термин первой посылки, который не входит во вторую посылку. Другими словами, вывести следствие, значит исключить из двух посылок входящий в них общий термин, т. е. найти непосредственную связь между двумя остальными терминами.

Записывая порядок терминов в обеих посылках и в следствии, мы выразим четыре фигуры силлогизма в следующих схемах:

I фигура	II фигура	III фигура	IV фигура
PQ	PQ	PQ	PQ
XP	XQ	PX	QX
$\overline{XQ}$	$\overline{XP}$	$\overline{XQ}$	$\overline{XP}$

Модусы силлогизма Однако принимая определенный порядок терминов в посылках, мы еще можем получить различные комбинации (называемые **модусами**), если будем в качестве посылок брать (при указанном порядке терминов) различные виды предложений, т. е. A, I, E и O. Например, в первой фигуре, если за первую посылку принять A, а за вторую I, то получим следующие посылки:

Все P суть Q.
Некоторые X суть P.

Если же во второй фигуре тоже взять посылки A и I, то получим другую комбинацию:

Все P суть Q.
Некоторые X суть Q.

В каждой фигуре можно за первую посылку принять одно из предложений A, I, E и O, за вторую — то же. Таким образом, в каждой фигуре может быть шестнадцать комбинации посылок, а именно:

AA	IA	EA	OA
AI	II	EI	OI
AE	IE	EE	OE
AO	IO	EO	OO

Всего надо рассмотреть шестьдесят четыре комбинации. В некоторых случаях из данной пары посылок можно сделать вывод, а в некоторых нельзя. Возьмем, например, в первой фигуре комбинацию AA:

Все P суть Q.
Все X суть P.

Из этой пары посылок следует:

Все X суть Q.

В самом деле, круг P лежит внутри круга Q, а круг X — внутри круга P; следовательно, круг X лежит внутри круга Q. Силлогизм типа „Все P суть Q, все X суть P; следовательно, все X суть Q“ образует модус первой фигуры, который обозначается AAA (т. е. обе посылки и заключение суть предложения A).

Рассмотрим другой пример. Возьмем в первой фигуре комбинацию AE:

Все P суть Q.
Никакие X не суть P.

Из этих посылок нельзя сделать никакого вывода. В самом деле, круг P лежит внутри круга Q, а круг X — целиком вне круга Q. При этом круг X может иметь общую часть с кругом Q, а может и не иметь; следовательно, ничего определенного нельзя сказать о взаимном расположении кругов X и Q. Таким образом, в первой фигуре не существует модуса с посылками AE. Во второй же фигуре такой модус есть. В самом деле, во второй фигуре комбинация посылок AE имеет вид:

Все P суть Q. Отсюда следует вывод:
Никакие X не суть Q. Никакие X не суть P.

Итак, во второй фигуре есть модус AEE.

Мы видим, что нахождение всех модусов силлогизма может рассматриваться как комбинаторная задача: надо просмотреть все шестьдесят четыре комбинации и установить, в каких случаях из данной пары посылок можно сделать вывод. Это рассмотрение, которое мы *предоставляем читателю*, приводит к тому, что существует девятнадцать модусов силлогизма, т. е. из шестидесяти четырех комбинаций посылок в девятнадцати случаях можно сделать вывод, а в остальных нельзя. Для запоминания этих модусов существует латинское стихотворение, придуманное в XIII в.:

BARBARA, CELARENT, DARII FERIOque prioris;
CESARE, CAMESTRES, FESTINO, BAROKO secundae;
Tertia DARAPTI, DISAMIS, DATISI, FELAPTON,
BOKARDO FERISOque habet; quarta insuper addit
BRAMANTIP, CAMENES, DIMARIS, FESAPO, FRESISON.

Слова, набранные прописными буквами, теперь вошли в употребление как названия модусов. Эти слова составлены так, что в каждом из них первые три гласные обозначают посылки и заключение. Слова, набранные строчными, не имеют мнемонического значения; они относятся к нумерации фигур.

Какой вид имеет, например, модус Felapton? Во-первых, замечаем, что Felapton относится к третьей фигуре, где порядок терминов таков

$$\begin{array}{c} PQ \\ PX \\ \hline XQ \end{array}$$

Во-вторых, в Felapton первая посылка — E, вторая — A, а заключение — O. Строя эти предложения (при указанном порядке терминов), видим, что модус Felapton таков:

Никакие P не суть Q.
Все P суть X.
Следовательно, некоторые X не суть Q.

Приведение всех фигур силлогизма к первой

Некоторые согласные буквы в названиях модусов тоже имеют мнемоническое значение, но мы на этом не будем останавливаться. Первая фигура считается основной, так как модусы остальных фигур различными преобразованиями могут быть приведены к первой фигуре. Например, модус Camestres второй фигуры имеет вид:

Все P суть Q.
Никакие X не суть Q.
Следовательно, никакие X не суть P.

Переменим местами термины во второй посылке (что́ можно сделать в предложениях I и E, но нельзя в предложениях A и O) и, кроме того, переменим местами посылки; наконец, переставим термины в заключении. Тогда рассматриваемый силлогизм примет вид:

Никакие Q не суть X.
Все P суть Q.
Следовательно, никакие P не суть X,

а это есть модус Celarent первой фигуры [1] (читатель легко убедится в этом, заменив буквы P, Q и X в последнем силлогизме соответственно на X, P и Q).

Применение модусов силлогизма в геометрии

Изучение модусов силлогизма не представляет особого интереса для учителя математики, потому что, во-первых, модусы второй, третьей и четвертой фигур употребляются редко, а большей частью приводятся к первой фигуре; во-вторых, мы почти всегда имеем дело с предложениями общими, т. е. в первой фигуре рассматриваем лишь модусы Barbara и Celarent. В-третьих, модус Celarent сводится к Barbara следующим образом: предложение „Никакие P не суть Q" приводится к предложению „Все P суть не-Q" (см. черт. 19 и 20 на стр. 39).

Таким образом, силлогизм Celarent

Никакая окружность не имеет трех общих точек с прямой.
Кривая (C) имеет три общие точки с прямой.
Следовательно, кривая (C) не есть окружность [2],

можно привести к Barbara.

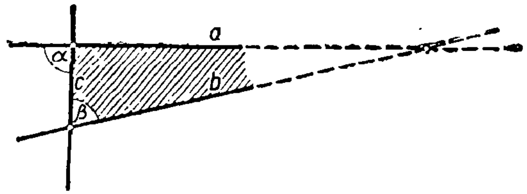
Всякая кривая, имеющая три общие точки с прямой, отлична от окружности (т. е. есть не-окружность).
Кривая (C) имеет три общие точки с прямой.
Следовательно, кривая (C) отлична от окружности.

---

[1]) Здесь уместно заметить, что первая буква в названии каждого модуса указывает, к какому модусу первой фигуры данный модус приводится. Так, Camestres приводится к Celarent, Darapti — к Darii и т. д.

[2]) Напоминаем читателю, что предложение, в котором подлежащим является единичный объект, считается общим.

Итак, нам придется иметь дело главным образом с силлогизмом Barbara. Это не значит, что в геометрии никогда не встречаются другие модусы. Встречаются даже рассуждения не по первой фигуре; хотя эти силлогизмы можно всегда привести к первой фигуре, но иногда мы оставляем их в другой форме. Силлогизм Celarent весьма удобен в доказательствах от противного. Пусть, например, требуется доказать, что если две прямые a и b пересечены третьей прямой c, причем внутренние накрест-лежащие углы равны между собой, т. е. $\alpha=\beta$, то прямые a и b не пересекаются. Обычно применяемое в этой теореме доказательство от противного сводится к следующему силлогизму.



Черт. 22.

Ни у какого треугольника внешний угол не равен внутреннему, не смежному с ним.

У фигуры, образованной прямыми a, b и c (заштрихованная фигура на черт. 22), внешний угол равен внутреннему, не смежному с ним.

Следовательно, фигура, образованная прямыми a, b и c, не есть треугольник (т. е. прямые a и b не пересекаются, что и требовалось доказать).

Это — силлогизм Celarent.

За дальнейшими подробностями относительно модусов силлогизма отсылаем читателя к специальным руководствам по логике.

Дедукция и индукция

Дедукцией называется заключение о частном случае на основании некоторого общего положения, т. е. переход от общего положения к частному. Например, если известно общее положение „Все люди смертны", то отсюда можно заключить, что Иванов смертен.

Индукция представляет переход от ряда частных случаев к охватывающему их общему положению. Например, наблюдая, что все люди умирали, не дожив до некоторого возраста (например, до 200 лет), мы приходим к общему положению — „Все люди смертны".

По поводу роли дедукции и индукции в науке философы спорят уже много столетий. Здесь невозможно даже вкратце резюмировать важнейшие соображения, высказанные на эту тему. Все-таки мы отметим то, что нам необходимо для дальнейшего.

Индукция не может приводить нас к вполне достоверным выводам. Из того, что во всех наблюдавшихся до сих пор случаях ежедневно всходило Солнце, еще не вытекает что оно взойдет и завтра [1].

---

[1]) Опытные науки обосновывают свои положения не посредством одной только чистой индукции, а проникая в причинную связь явлений. Если спросить астронома, почему он уверен, что Солнце взойдет завтра, то он не будет аргументировать лишь тем, что до сих пор Солнце ежедневно всходило; это аргументация человека, который лишь наблюдает явления, но не объясняет их. Астроном расскажет нам о законах вращения Земли вокруг оси и вокруг Солнца и отсюда выведет, что Солнце должно всходить ежедневно.

Поэтому индукция не используется в математике в качестве метода доказательства[1]). Эта кажущаяся независимость математики от индукции побуждала большинство ученых *в древности и в средние века* строить естествознание тоже дедуктивно, пренебрегая опытом. Полагали, что таким путем естествознание достигнет такого же совершенства и такой же достоверности, что и математика. Рассуждения средневековых схоластиков, относящиеся к естествознанию, поражают нас своей умозрительностью.

Зависимость дедукции от индукции

Однако давно было указано, что дедукция нуждается в исходных общих положениях, а эти общие положения основываются на индукции. Например, рассмотрим силлогизм.

Все люди смертны.

Иванов человек.

Следовательно, Иванов смертен.

Для того чтобы этот силлогизм имел не только гипотетическое значение (если верно, что все люди смертны, то Иванов смертен), нам необходимо сначала установить, что все люди смертны. Это положение устанавливается путем индукции: наблюдая, что отдельные люди смертны, мы приходим к общему положению, гласящему, что все люди смертны.

Индукция через простое перечисление

Существует особый вид индукции: индукция через простое перечисление (inductio per enumerationem simplicem). Положим, что в классе имеется некоторое количество учеников. Мы хотим установить, что все они прилежны. Устанавливаем ряд частных положений:

Иванов прилежен.

Петров прилежен и т. д.

Если мы перечислим в с е х учеников этого класса и про каждого из них установим, что он прилежен, то можем высказать общее положение:

Все ученики этого класса прилежны.

Используя это общее положение в качестве посылки, можно построить силлогизм:

Все ученики этого класса прилежны.

Иванов — ученик этого класса.

Следовательно, Иванов прилежен.

Этот вид индукции бесполезен для целей расширения нашего знания, и приведенный силлогизм не может служить нам для доказательства того факта, что Иванов прилежен. В самом деле, для того чтобы построить последний силлогизм, надо было сначала установить, что все ученики этого класса прилежны. Для этого в свою очередь надо было сначала установить про каждого ученика в отдельности, в частности про Иванова, что он прилежен. Таким образом, мы уже

---

[1]) Так называемая математическая или полная индукция в действительности есть дедуктивный вывод, в котором принцип математической индукции является одной из посылок.

раньше должны были знать, что Иванов прилежен, и последний силлогизм не дает нам ничего нового.

Для науки представляет ценность лишь такая индукция, которая позволяет нам переходить от наблюдавшихся случаев к ненаблюдавшимся. Например, наблюдая, что до сих пор все люди умирали, не дожив до некоторого определенного возраста, мы устанавливаем общее положение: „Все люди смертны“. Тем самым мы утверждаем, что ныне живущие люди тоже смертны, хотя относительно них это еще не проверено непосредственным наблюдением. Если мы построим силлогизм:

Все люди смертны.

Иванов — человек.

Следовательно, Иванов смертен,

то этот силлогизм приводит нас к новому результату. Поскольку Иванов еще жив, то когда мы устанавливали общее положение „Все люди смертны“, в числе частных положений, на которые мы опирались, не было положения „Иванов смертен“ [1]).

Роль индукции в математике

Оставляя в стороне многочисленные философские вопросы, связанные с индукцией (например, на чем основана уверенность, что явление, наблюдавшееся много раз, будет происходить и в ненаблюдавшихся случаях, в каком отношении находится индукция к причинности и т. д.), вернемся к геометрии.

Представление о том, что геометрия и вообще математика есть наука чисто дедуктивная, ошибочно. Эта ошибка, впрочем, имеет вполне понятную причину. Дело в том, что в основании геометрии лежат некоторые аксиомы. Нет никакого сомнения в том, что эти аксиомы имеют эмпирическое происхождение и выражают свойства материального мира. Правда, геометрия теперь очень далеко ушла от наивных представлений древних египтян. Наши аксиомы теперь являются далеко идущими абстракциями [2]), но все-таки первоначально они были непосредственным выражением опытных фактов.

Вот что говорит по этому поводу Энгельс: „Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть — весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира“ [3]).

---

[1]) Расширение нашего знания произошло не тогда, когда мы составили этот силлогизм, а тогда, когда мы высказали общее положение „Все люди смертны“, охватывая этим не только тех людей, которые уже умерли, но также и тех, смертность которых еще непосредственно не установлена опытом.

[2]) Всякая абстракция есть абстракция *от чего-нибудь*. Положения математики суть абстракции от свойств материального мира. Эти абстракции ушли столь далеко от непосредственных свойств материальных предметов, что мы склонны забывать об отправном пункте наших абстракций. В таком случае само слово „геометрия“ (по-гречески — землемерие) должно напоминать нам об этом.

[3]) Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, Москва, 1945, стр. 37.

Таким образом, индукция играла роль при установлении математических аксиом. После этого она в изложении математики больше не встречается, и в дальнейшем мы занимаемся только дедуктивными выводами из установленных аксиом. Математик вправе не заниматься вопросом о происхождении аксиом. Он рассматривает аксиомы как данные положения, из которых он делает логические выводы. Однако такая позиция не решает вопроса о происхождении аксиом и не снимает его. Она лишь переносит вопрос из области математики в область философии. Когда математик выводит логические следствия из аксиом, то применяемые им методы не зависят от того, откуда произошли эти аксиомы.

Выше мы сказали, что после того, как аксиомы установлены, индукция больше не встречается в изложении математики, т. е. не употребляется в качестве метода доказательства. Но это вовсе не значит, что индукция не играет роли в развитии математики. Творческий процесс в математике, т. е. ход рассуждений, который приводит математика к открытию новых положений, не совпадает с тем ходом рассуждений, которым математик доказывает ужё найденные истины. Это соображение чрезвычайно важно для учителя. Учитель должен не только доказывать ученикам готовые положения, но воспроизводить тот ход мыслей, который приводит к открытию этих положений. Этому важнейшему методическому вопросу посвящена следующая глава.

Многие математические положения обнаруживаются индуктивным путем. Часто, рассматривая чертеж, мы замечаем какие-либо соотношения, которые потом пытаемся доказать. Индуктивным путем замечены многие свойства целых чисел. Такова, например, знаменитая теорема Гольдбаха. Гольдбах в письме Эйлеру от 7 июня 1742 г. высказал предположение, что всякое целое число, начиная с 6, есть сумма не более чем трех простых чисел. Ввиду того что доказать это предположение не удалось, некоторые математики занялись его эмпирической проверкой. Пробуя разлагать различные целые числа на сумму простых, находим:

$$6=3+3;\ 7=7;\ 8=5+3;\ 9=7+2;\ldots$$

Приведенные здесь числа представлены в виде одного или двух простых слагаемых. Дальше встретятся числа, которые нельзя представить в виде двух простых слагаемых, а необходимы три слагаемые; таково, например, число 27. Оно разлагается на сумму трех простых слагаемых (и притом несколькими способами):

$$\begin{aligned}27&=2+2+23=3+5+19=3+7+17=3+11+13=\\&=5+5+17=5+11+11=7+7+13.\end{aligned}$$

Можно было бы предполагать, что дальше встретятся числа, которые нельзя разложить на сумму трех простых слагаемых, а понадобятся четыре слагаемые, далее — пять и т. д. Однако опытная проверка, подобная той, которую мы провели выше, доведенная до 9 000 000, показала, что все целые числа в этих пределах разлагаются на сумму одного или двух или трех простых. Однако подобная проверка, которая была бы вполне убедительна в естествознании, в математике не имеет доказательной силы [1]).

Замечание о математическом творчестве

Итак, дедукция не является первой стадией в процессе развития математики. Ей предшествует индукция. Но индукция тоже не является первой стадией; ей предшествует более интимный творческий процесс. Для того чтобы подвергнуть какое-либо свойство индуктивной проверке, надо его сначала з а м е т и т ь. До Гольдбаха никто не проделывал вышеописанной эмпирической проверки, потому что этого свойства просто не замечали.

Обнаружение новых свойств, выделение понятий, обладающих важными свойствами, установление связей между вопросами, на первый взгляд не связанными (т. е. такими, связь между которыми скрыта достаточно глубоко), — это и есть математическое творчество. Оно доступно в той или иной мере учащимся на всех ступенях обучения. Для него нельзя дать никаких формальных правил. Единственно возможное указание заключается в следующем. Учитель должен заставлять учеников не только заучивать доказательства, но постоянно размышлять о математике, подходя к каждому вопросу с различных точек зрения. Человек, много думающий над каким-нибудь вопросом, обладает многими ассоциациями и связями, скрытыми от других. На основании этих ассоциаций и связей он видит более глубокие основания многих фактов и может легко предсказывать соотношения, которые другим становятся ясными лишь после некоторых рассуждений или выкладок. Особенно надо поощрять решение творческих задач, т. е. задач, которые не решаются по трафарету, а требуют самостоятельных искусственных соображений. Только тренировкой можно развить математическое мышление. Тот, кто упорно размышляет над математическими вопросами, имеет шансы обнаружить что-либо новое. По этому поводу напомним мудрые слова Ньютона. На вопрос, как он приходит к своим замечательным открытиям, он ответил: „Постоянно думая о них“.

ГЛАВА III

МЕТОДИКА ИЗЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЙ, АКСИОМ И ТЕОРЕМ

§ 1. Определения

Различные стадии в оформлении математических понятий

Мы уже говорили, что на определения в школьном курсе геометрии возлагаются две задачи: логическая и описательная. Посредством определения учитель передает ученикам тот геометрический образ, который имеется у нас в сознании.

Основная методическая ошибка при сообщении определений основана на том, что определение рассматривается как исходный пункт,

[1]) В 1937 г. академик И. М. Виноградов почти полностью доказал теорему Гольдбаха. См. статью Н. Г. Чудакова „О проблеме Гольдбаха“ — („Успехи математических наук“, вып. IV, М. — Л. 1938, стр. 14—33).

с которого начинается наше знакомство с понятием. Предполагается, что ученик не имел никакого представления о данном понятии, а узнав определение, познакомился с ним. В действительности процесс ознакомления с геометрическими понятиями не начинается с определения. В этом процессе можно различить следующие стадии.

1. В сознании ученика в более или менее смутной форме имеется некоторое геометрическое понятие, которое по каким-либо соображениям полезно выделить из других (например, потому, что практика показывает, что оно часто встречается). При этом границы данного понятия иногда бывают расплывчаты: про некоторые объекты, близкие к предельным случаям, ученик затруднится решить, принадлежат ли они к данному понятию.

2. Исходя из наглядного представления, ученик пытается облечь его в логическую форму, т. е. подыскать словесное определение, при помощи которого он может передавать это представление другим лицам.

3. На основании данного определения ученик уточняет свое первоначальное представление и решает относительно случаев, бывших ранее сомнительными, относятся ли они к данному понятию.

4. Ученик использует данное определение как материал для дальнейших логических выводов и усваивает его оперативное значение.

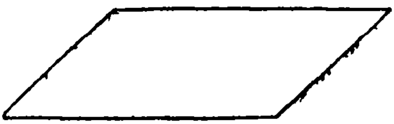
Учитель, который ознакомление учеников с некоторым понятием начинает с определения, которое он сам сообщает, пренебрегает чрезвычайно ценной фазой описанного выше процесса. Чрезвычайно важно научить ученика выражать свои мысли и особенно выражать в виде логических определений то, что ученик наглядно представляет. Учитель не должен мириться с заявлением ученика: „Понимаю, но выразить не могу". Учитель должен не сообщать ученикам готовые определения, а учить их самим давать эти определения. В вопросе об определениях надо, как и во всех вопросах преподавания математики, исходить из того общего принципа, что ученик должен активно создавать математику, а не только усваивать ее. Итак, мы выставляем следующий принцип: У ч е н и к и   д о л ж н ы   д а в а т ь   о п р е д е л е н и я   с а м и.

Методика сообщения определений

Покажем, как осуществить этот принцип.

Желая определить какой-нибудь геометрический образ, учитель должен его прежде всего п о к а з а т ь. Иногда можно опереться на то, что этот образ знаком ученикам из практической жизни; например, всякий ученик сталкивался с шаром или кубом задолго до того, как проходил их в курсе геометрии. В противном случае учитель п о к а з ы в а е т,   н е   о п р е д е л я я, о чем идет речь. Он чертит на доске параллельные прямые и говорит: „Т а к и е прямые называются параллельными; теперь попробуйте определить, что́ такое параллельные прямые?" Или: „Т а к о й четырехугольник называется параллелограмом; что́ же такое параллелограм?"

Однако здесь может возникнуть недоразумение. Видя чертеж на доске, ученики не могут знать, на какие именно видовые особенности изображенного образа следует обратить внимание. Например, учитель начертит фигуру, изображенную на черт. 23, и скажет, что такая фигура называется параллелограмом. Ученики могут подумать, что для параллелограма характерны углы по 45° и 135° или то, что он ограничен ломаной линией, и т. д. Другими словами, всякий единичный объект может входить в объем многих понятий. Вопрос об определении фигуры, изображенной на черт. 23, приобретает таким образом характер ребуса. Чтобы избегнуть этого, мы рекомендуем учителю держаться следующих двух правил.



Черт. 23.

Во-первых, каждое понятие следует вводить вместе с его противоположностью. Таким образом, учитель, делая на доске соответствующие чертежи, говорит: „Т а к и е прямые параллельны, а т а к и е не параллельны", „Т а к а я фигура есть параллелограм, а т а к а я не параллелограм" и т. д.

Во-вторых, иногда следует иллюстрировать определяемое понятие не одним, а несколькими примерами (а также и противоположное понятие). Эти примеры должны быть возможно более разнообразны в отношении тех признаков, которые не входят в содержание определяемого понятия. Например, иллюстрируя чертежом понятие параллелограма, надо изобразить параллелограмы и с острым и прямым углом (чтобы ученики не подумали, что для параллелограма характерна определенная величина углов), с неравными и с равными сторонами и т. д. Тогда, сосредоточивая внимание на этих примерах, ученики могут искать, что̀ в них общего.

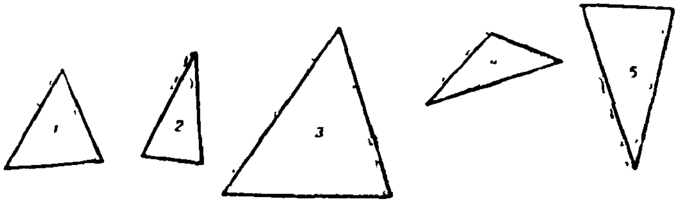
Заметим еще одно важное обстоятельство. Требуя от учеников определения какого-нибудь понятия, учитель обычно вынужден подсказать им то родовое понятие, ограничением которого получается данное понятие. Это родовое понятие можно указать по-разному, и в зависимости от этого приходится приводить разные контрпримеры. Например, говоря о параллелограме, учитель может сказать: „Такие ч е т ы р е х у г о л ь н и к и суть параллелограмы, а такие — нет". Тем самым он указывает, что параллелограм есть особый вид четырехугольника, и в качестве контрпримеров он должен привести лишь различные четырехугольники, не являющиеся параллелограмами. Если же учитель скажет „Такие ф и г у р ы суть параллелограмы, а такие — нет", то он указывает более общее родовое понятие (фигуры). В таком случае ученики сами должны установить, что параллелограм есть четырехугольник. Для этого учитель среди контрпримеров должен изобразить несколько фигур, не являющихся четырехугольниками.

Примеры

Иллюстрируем сказанное несколькими примерами из курса разных классов.

П р я м о й у г о л. Учитель чертит три угла — острый, прямой и тупой. Вообще заметим, что всякое определение связано с классификацией. Определение дается на основании признака, представляющего различие в некотором критерии (служащем основанием деления);

рассматривая другие различия в этом критерии, получим другие понятия, входящие в одну ступень классификации. **Для лучшего усвоения любого понятия следует всегда давать его вместе с другими, входящими в ту же ступень классификации.** Если мы рассматриваем лишь два возможные различные признака в основании деления, то соответствующие понятия называются **противоположными**. В этом случае надо определять



Черт. 24.

понятие вместе с противоположным. Например, не следует определять тождество прежде, чем вводятся в рассмотрение уравнения, одночлен отдельно от многочлена и т. д. В соответствии с этим принципом надо одновременно определять прямой, острый и тупой углы.

Этот принцип мотивируется тем, что классификация есть естественный для нашего ума повод для возникновения новых понятий. Выделить некоторое понятие, значит отличить его от чего-то. От чего? Это мы должны знать.

Если ученик будет всегда мыслить понятие вместе с противоположным (или с группой противоположных), то он всегда легко вспомнит те признаки, на основании которых эти понятия противопоставляются друг другу и которые, следовательно, входят в определение каждого из них.

Вернемся к прямому углу. Итак, учитель начертил три угла и сказал: „Такой угол называется острым, такой — прямым, а такой — тупым". Далее он ждет, что ученики сумеют найти определение этих понятий. Что̀ ему надлежит делать, если ни один из учеников не догадается, как их определить? Учитель должен им помочь не подсказом, а некоторым наведением. В данном случае трудность заключается в том, что надо сделать вспомогательное построение, т. е. надо догадаться сравнивать каждый угол со своим смежным. Учитель может на каждом чертеже изобразить смежный угол. После этого ученики легко могут дать правильное определение.

Подобные треугольники

На черт. 24 треугольник *1* подобен треугольнику *3*, а треугольник *2* — треугольнику *5*. Любая другая пара суть неподобные треугольники. Что̀ такое подобные треугольники? Задача будет облегчена, если мы расположим треугольник *5* так же, как треугольник *2*.

Доказательство существования определяемого объекта

Мы полагаем, что приведенные примеры достаточно поясняют нашу мысль. Рассмотрим следующие стадии процесса определения.

Рассматривая чертеж, сделанный учителем на доске, ученики, разумеется, прежде всего заметят наиболее наглядные, т. е. более бросающиеся в глаза признаки. Например, рассматривая изображение параллелограма, они прежде всего заметят параллельность или равенство противоположных сторон, а не то обстоятельство, что диагонали в точке пересечения делятся пополам. При наличии нескольких логически равноценных определений мы должны предпочесть то, в котором указываются более наглядные признаки. Однако встречаются случаи, когда наиболее наглядным признаком нельзя воспользоваться, так как он приводит к определению, логически несостоятельному.

Причина этого явления заключается в следующем. Давая какое-нибудь математическое определение, мы обязаны доказать, что определяемое понятие существует, т. е. что признаки, включенные в определение, не противоречат друг другу и установленным аксиомам. Если включать в определение произвольные комбинации признаков, то можно прийти, например, к таким определениям:

Треугольник, все углы которого прямые, называется трипрямоугольным.

Правильный многогранник, ограниченный пятью треугольниками, называется пентаедром.

Однако таких фигур не существует.

Мы рекомендуем учителю все определения без исключения сопровождать доказательством существования определяемых объектов. Обычно в тривиальных случаях, когда существование определяемых объектов более или менее очевидно, учителя склонны не подчеркивать доказательства существования. Тем самым они не воспитывают в учениках этой важной логической привычки, и когда ученики столкнутся со случаем, где существование определяемого объекта логически трудно доказуемо (хотя наглядно очевидно), они не понимают необходимости доказательства.

Пример

Иллюстрируем сказанное примером. Пусть требуется определить параллельные прямые. Прежде всего бросается в глаза тот признак, что параллельные прямые на всем протяжении равно удалены друг от друга. Поэтому, если учитель начертит на доске параллельные прямые, то большинство учеников предложит определить их как равноотстоящие прямые. В самом деле, чтобы заметить, что параллельные прямые не пересекаются, их надо мыслить продолженными бесконечно в обе стороны, а для того чтобы заметить, что они равно отстоят друг от друга, достаточно рассматривать какие-нибудь их отрезки. Кроме того, *положительный признак обычно легче заметить, чем отрицательный.*

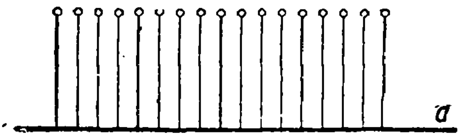
Итак, допустим, что имеется два проекта определения параллельных прямых.

1. Две прямые называются параллельными, если все точки одной находятся на одинаковых расстояниях от другой.

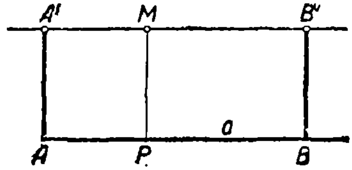
2. Две прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Первое определение нагляднее, но оно логически несостоятельно. Если мы дадим второе определение, то существование таких прямых легко доказать. Возьмем произвольную прямую c и построим две прямые a и b, образующие с c равные углы (см. черт. 22 стр. 52). Прямые a и b не могут пересечься, так как если бы они пересеклись, то получился бы треугольник, в котором внешний угол был бы равен внутреннему, не смежному с ним.

Обратимся к первому определению. Чтобы доказать существование равноотстоящих прямых, надо доказать, что геометрическое



Черт. 25. Геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой.



Черт. 26.

место точек плоскости, равноудаленных от данной прямой (и лежащих по одну сторону от нее), есть прямая, т. е. надо доказать одно из следующих двух положений.

1. Дана прямая a (черт. 25). Во всех точках этой прямой восставляем к ней перпендикуляры (лежащие в одной полуплоскости) и на этих перпендикулярах откладываем от прямой равные отрезки. Требуется доказать, что геометрическое место концов этих перпендикуляров есть прямая линия.

2. Дана прямая a (черт. 26). В двух произвольных точках A и B этой прямой восставляем к ней перпендикуляры (лежащие в одной полуплоскости) и откладываем на них равные отрезки $AA' = BB'$. Проводим прямую $A'B'$. Требуется доказать, что если взять на прямой $A'B'$ произвольную точку M и опустить из нее перпендикуляр MP на прямую a, то этот перпендикуляр будет равен AA' и BB'.

Попытки доказать эти положения будут бесполезны, так как их нельзя доказать без помощи аксиомы о параллельных [1]), а эта аксиома идет после определения параллельных. Поэтому первое определение надо отвергнуть.

---

[1]) Невозможность доказательства этих положений без помощи аксиомы о параллельных показана, например, в книге Я. В. Успенского „Введение в неевклидову геометрию Лобачевского — Болиаи", Петроград, 1922, гл. I.

Построение как доказательство существования

Мы ужé советовали учителю сопровождать все определения доказательствами существования. Заметим, что в геометрии естественным доказательством существования является построение. Итак, определив, чтó такое равносторонний треугольник, мы немедленно предлагаем ученикам задачу „Построить равносторонний треугольник", и так поступаем при каждом определении. При этом надо не ограничиваться техникой построения, а внушить ученикам ту мысль, что построение служит доказательством существования. Ход рассуждений здесь должен быть таков:

Учитель. — Чтó называется равносторонним треугольником?

Ученик. — Треугольник, все стороны которого равны между собой.

Учитель. — А существуют ли такие треугольники? (Подобный вопрос должен задаваться после каждого определения, и это должно войти у учеников в привычку.)

Ученик. — Да, потому что такой треугольник можно построить таким-то образом.

Отсутствие единой схемы для определений

Заметим, что нельзя во всех определениях держаться одной и той же схемы. Чем далее мы углубляемся в геометрию, тем больше мы встречаем некоторые высоко абстрактные понятия, которые нельзя „показать" на чертеже (например, „геометрическое место точек", „обратная теорема" и т. д.). В этих случаях иногда приходится иллюстрировать понятие словесными примерами. Наконец, бывают случаи, когда целесообразно отступить от рекомендованного нами общего принципа и предложить ученикам готовое определение. Например, если мы изобразим на доске эллипс, то даже самый проницательный ученик не сможет догадаться по его виду, что существуют такие две точки, сумма расстояний которых до произвольной точки эллипса есть постоянная величина. Поэтому, желая познакомить учеников с эллипсом или более сложной кривой, мы сразу сообщим ученикам определение этой кривой.

Возможные ошибки в определениях

Теперь перейдем к вопросу о том, как должен поступать учитель, если ученики будут предлагать неправильные определения. В определениях встречаются следующие ошибки:

1) существенные признаки указаны правильно, но не все приведены;

2) все существенные признаки указаны, но сверх того указаны лишние признаки, вытекающие из существенных;

3) все существенные признаки указаны, но сверх того указаны лишние признаки, не вытекающие из существенных, но и не противоречащие им;

4) все существенные признаки указаны правильно, но сверх того указаны лишние признаки, противоречащие им;

5) различные другие ошибки.

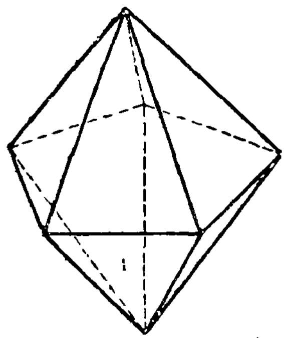
Когда ученик включил в определение слишком мало признаков, то определяемое им понятие имеет бо́льший объем, чем требуется. Учитель может привести контрпример: указать ученику объект, подходящий под его определение, но явно не долженствующий входить в объем определяемого понятия, и тогда ученик поймет, что в его определении чего-то нехватает, и постарается найти, чего именно. Поясним это на примерах.

Ученик. — Параллельными называются прямые, которые не пересекаются (упущено, что они лежат в одной плоскости).

Учитель. — В таком случае такие прямые (показывает скрещивающиеся прямые) вы считаете параллельными?

Ученик. — Правильным многогранником называется многогранник, ограниченный конгруентными правильными многоугольниками (упущено, что в каждой вершине сходится одинаковое число ребер).

Учитель. — В таком случае такой многогранник (следует описание многогранника, изображенного на черт. 27; *он составлен из двух конгруентных пятиугольных пирамид, боковые грани которых суть правильные треугольники; эти пирамиды составлены основаниями*) вы считаете правильным?'



Черт. 27.

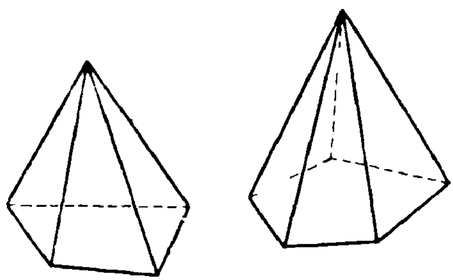
Ученик. — Да.

Учитель. — Но в правильном многограннике все вершины должны быть равноправны (можно сослаться на приведенные предварительно примеры куба, тетраедра и т. д.). Правильный многогранник можно совместить сам с собой так, что любая его вершина совместится с любой другой, а наш многогранник не таков.

Ошибки второй группы, строго говоря, не ошибки, но в определение не принято включать несущественных признаков. Выражение „горячий кипяток" не ошибочно, но его не принято употреблять. Пример подобного определения — „Параллелограм есть четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны и равны между собой". Учитель должен задать вопрос: „А существуют ли четырехугольники, у которых противоположные стороны параллельны, но не равны между собой?" Если нет, то не стоит упоминать в определении о равенстве сторон.

Впрочем, необходимо заметить, что определения подобного типа по традиции иногда употребляются в школьном курсе. Это объясняется тем, что определения, кроме логической, преследуют еще описательную цель. Поэтому для усиления наглядности мы включаем в определение признаки, логически излишние. Примеры подобных определений: „Прямоугольник есть параллелограм, все углы которого прямые" (достаточно было бы сказать, что один угол — прямой), „Перпендикуляр к плоскости есть прямая, перпендикулярная ко всем прямым, лежащим в этой плоскости" (достаточно было бы сказать — к двум непараллельным прямым, лежащим в этой плоскости). Мы не решаемся возражать против таких определений, так как, во-первых, они имеют очень прочную традицию и, во-вторых, они имеют преимущество как наглядные описания.

Ошибки третьей группы приводят к сужению объема определяемого понятия. Пример: „Пирамида есть многогранник, у которого одна грань — квадрат, а другие грани — равнобедренные треугольники" [1]). В ответ на это учитель должен указать, что многогранники, изображенные на черт. 28 (в основании — неправильный четырехугольник или пятиугольник), тоже суть пирамиды.



Черт. 28. Пирамиды.

Ошибки четвертой группы суть наиболее грубые. Пример: „Медиана треугольника есть прямая, проходящая через вершину и делящая пополам угол треугольника и противоположную сторону".

Не входя в рассмотрение других ошибок, которые могут быть чрезвычайно разнообразными, укажем лишь на одну из них. Иногда ученики дают определение, в котором одно понятие определяется через другое, которое само не определено. В этом случае учитель должен спросить, как определяется это второе понятие. Если ученик его не может определить, то ему надо разъяснить, что замена одного слова другим не есть определение. Например: „Угол есть взаимное наклонение двух прямых" [2]) — не есть определение угла, а лишь замена неизвестного слова „угол" столь же неизвестным словом „наклонение".

Бывает так, что в ответ на предложение определить второе понятие ученик определяет его через первое, впадая, таким образом, в „порочный круг" (circulus vitiosus). Пример:

Учитель. — Чтó такое прямой угол?

Ученик. — Угол, содержащий 90 градусов.

Учитель. — А чтó такое градус?

Ученик. — Одна девяностая часть прямого угла.

Такое заблуждение должно быть обстоятельно разъяснено не только применительно к данному примеру, но должна быть выяснена его логическая природа.

---

[1]) Опыт показывает, что многие ученики, знакомые с пирамидами по изображениям египетских пирамид раньше, чем они встречаются с понятием пирамиды в геометрии, склонны под словом „пирамида" понимать только правильную четырехугольную пирамиду.

[2]) Это определение принадлежит Евклиду.

Окончательное фиксирование определения Всякое определение должно быть не только правильным по существу, но сформулировано грамматически правильно и в наиболее короткой и удобной для запоминания форме. Придание ему этой формы есть последняя стадия процесса выработки определения. Пока определение еще не установлено по существу, т. е. пока ученики еще не выяснили, какие признаки следует в него включать, в процессе его выработки можно не требовать от учеников вполне отшлифованных формулировок. Когда же содержание определяемого понятия вполне выяснено, учитель задает последний вопрос: как резюмировать все, чтó было сказано, т. е. как окончательно сформулировать это определение в стилистически безупречной форме?

Временный характер некоторых определений Мы рассматривали здесь общие вопросы методики сообщения определений. Какое определение следует предпочесть для каждого отдельного геометрического понятия — эти вопросы будут рассматриваться во второй части настоящего курса. Однако здесь мы сделаем одно общее замечание, касающееся выбора одного из нескольких возможных определений.

Отсутствие диалектической точки зрения на педагогический процесс приводит некоторых учителей к двум характерным ошибкам в вопросе об определениях. Они не считаются с тем, что каждое понятие в сознании ученика развивается с течением времени, становится более зрелым по мере того, как он знакомится с его оперативным применением и узнает его связи с другими понятиями. Таким образом, они полагают, что математическое понятие, раз возникнув в сознании ученика, всегда пребудет в нем неизменным. Этот взгляд приводит к следующим двум педагогическим ошибкам. Первая заключается в том, что определение рассматривают как первую стадию ознакомления ученика с новым понятием. Эта ошибка была рассмотрена выше. Одновременно (вторая ошибка) определение рассматривают и как последнюю стадию этого процесса, в то время как формирование и дальнейшее уточнение понятия не кончается в тот момент, когда мы дали определение. Эта ошибочная точка зрения заставляет некоторых учителей искать такие определения, которые были бы годны ученикам „на всю жизнь". Между тем, определения, которые пригодны в течение некоторого времени, а затем подлежат изменению, вполне допустимы. Например, в VI классе мы определяем угол как часть плоскости, заключенную между двумя полупрямыми, выходящими из одной точки. Это определение вполне пригодно в течение двух-трех ближайших лет. В старших классах при прохождении тригонометрии такое определение угла оказывается непригодным, так как не позволяет рассматривать отрицательные углы и углы бóльшие 2π [1]), и его приходится

---

[1]) Его можно было бы сохранить, если рассматривать плоскость как многолистную поверхность, но это в средней школе нецелесообразно, так как не имеет других применений.

изменить. Вследствие этого некоторые учителя считают это определение неудовлетворительным и пытаются дать такое определение угла, которое не приходилось бы изменять в течение всего курса.

§ 2. Аксиомы

По вопросу о методике сообщения аксиом прежде всего напомним, что не следует прививать ученикам антинаучный взгляд на аксиомы как на истины, не требующие доказательств ввиду их очевидности; об этом уже говорилось (стр. 22).

Педагогическая бесполезность попыток уменьшить число аксиом

В школьном курсе геометрии мы сообщаем ученикам весьма мало аксиом, так как многие аксиомы мы незаметно используем, не формулируя их. Поскольку в школе мы не строим абсолютно строгого курса геометрии, нет оснований стремиться к уменьшению числа аксиом. Напротив, желательно, чтобы ученики имели достаточно примеров аксиом. В связи с этим приведем следующий пример. Существует аксиома (Архимеда): „Прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками". Из этой аксиомы непосредственно вытекает теорема „Сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны". В учебнике А. П. Киселева под редакцией проф. Н. А. Глаголева эта аксиома опущена. Это приводит к иллюзорному преимуществу — уменьшению числа аксиом, но зато влечет следующие неудобства.

Во-первых, значительно усложняется доказательство теоремы о том, что сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны (стр. 28, п 50).

Во-вторых, в дальнейшем удается лишь доказать, что отрезок прямой короче ломаной, имеющей те же концы, но ученики остаются в неведении относительно того, что отрезок прямой короче кривой, соединяющей его концы. Аналогично обстоит с теоремой о сравнении длин объемлющей и объемлемой ломаной (стр. 140, п 232) — для кривых аналогичные теоремы не устанавливаются [1].

§ 3. Теоремы

Путь открытий и путь доказательств

Мы уже говорили, что путь, которым математик приходит к открытию новых положений или к созданию каких-нибудь теорий, не совпадает с тем путем, которым он впоследствии излагает эти положения или теории. Учитель должен учитывать этот разрыв и знать, что изложение, безукоризненное с научной точки зрения, может быть неудовлетворительным с точки зрения педагогической.

Научные работы по математике часто излагаются следующим образом. Дается формулировка теоремы. Затем дается ее доказательство. Затем дается формулировка следующей теоремы и т. д. Так, например, построены „Начала" Евклида.

[1] Распространение этих теорем на кривые требует теории пределов.

При таком способе изложения для ученика остается неясным важнейший вопрос: почему автор включил в свой труд именно ту, а не иную теорему. Включение в курс какой-либо теоремы может объясняться *либо тем, что мы сначала ставили* некоторый вопрос, ответом на который является данная теорема, либо тем, что данная теорема необходима потому, что на ней основываются в дальнейшем доказательства других теорем. Впрочем, почти все теоремы имеют и то и другое значение.

Если излагать геометрию, давая ученикам формулировки теорем и их доказательства, то подавляющее большинство учеников будет обречено на пассивное усвоение: им остается лишь запоминать формулировки теорем и проверять правильность доказательств. У них получается чрезвычайно ограниченное поле зрения: они рассматривают в отдельности каждый кирпич, из которых построено здание геометрии, но не получают достаточного представления о том, как из этих кирпичей складывается здание в целом.

При построении геометрии мы руководствуемся некоторыми идеями, которые приводят к определенному отбору теорем, а от учеников эти идеи часто скрываем.

Представим себе человека, знающего правила ходов в шахматной игре, но не имеющего никакого опыта игры. Представим, что этот человек изучает шахматную партию, разыгранную двумя выдающимися шахматистами и записанную без всяких комментариев. Он может лишь убедиться, что каждый ход сделан в соответствии с правилами, но смысла партии он совершенно не поймет. Он не будет *понимать* планов игроков, не будет понимать, з а ч е м делается каждый отдельный ход. К сожалению, многие ученики не больше понимают в геометрии. При формальном изложении геометрии лишь немногие ученики самостоятельно проникают в то, что подразумевается между строк.

Между тем, такого положения можно избежать. Для этого следует показывать ученикам геометрию не в законченном, выкристаллизовавшемся виде, а в *развитии*. Метод, который мы рекомендуем, называется г е н е т и ч е с к и м. При этом методе каждый ученик делается активным создателем геометрии: мы ставим перед ним проблемы, при решении которых возникают отдельные теоремы и целые разделы геометрии.

Мы разъясним сущность генетического метода:

a) применительно к изложению отдельных теорем,

b) применительно к изложению разделов курса.

Генетический метод сообщения теорем

При изложении генетическим методом какой-нибудь теоремы мы не должны сразу сообщать ученикам ее формулировку. Мы ставим перед учениками проблему, при решении которой возникает эта теорема. Поясним эту мысль на примерах.

Рассмотрим теорему „Во вписанном (в круг) четырехугольнике сумма противоположных углов равна $2d$". При формальном изложении ученики не понимают роли этой теоремы. Существует множество различных фигур, рассматриваемых в геометрии. Почему мы заинтересовались именно вписанным четырехугольником? Почему в курсе геометрии не приводится аналогичных теорем о вписанном треугольнике или пятиугольнике? Может быть, геометры случайно не обнаружили таких теорем, а (тоже случайно) обнаружили теорему о вписанном четырехугольнике?

Поставим вопрос следующим образом. Через всякие три точки (не лежащие на одной прямой) можно провести одну, и только одну, окружность. Другими словами, около всякого треугольника можно описать окружность и притом единственную. Таким образом, всякий треугольник можно рассматривать как вписанный (в некоторую окружность).

Можно ли описать окружность около произвольного четырехугольника $ABCD$? Очевидно, нет, потому что через три его вершины A, B и C проходит единственная окружность. Если она пройдет через четвертую точку, то четырехугольник окажется вписанным в окружность, в противном случае около четырехугольника окружность описать нельзя.

Итак, мы видим, что вписанный четырехугольник это не любой четырехугольник, а особенный. Около одних четырехугольников можно описать окружность, а около других нельзя. Поэтому ученикам должен казаться совершенно естественным следующий вопрос: какие еще признаки отличают вписанный четырехугольник, кроме того признака, что около него можно описать окружность, т. е. при каком условии около четырехугольника можно описать окружность? Таким образом, еще не зная теоремы о вписанном четырехугольнике, мы знаем, что такая теорема должна существовать. Если бы в курсе геометрии эта теорема не проходилась, то вдумчивый ученик должен был бы чувствовать пробел и искать такую теорему.

Ясно также, что никакой теоремы о вписанном треугольнике существовать не может, так как вписанный треугольник это всякий треугольник[1]). О нем не может быть никаких теорем по той же причине, по какой в зоологии не могут изучаться особые свойства четвероногой лошади, отличающие ее от других лошадей.

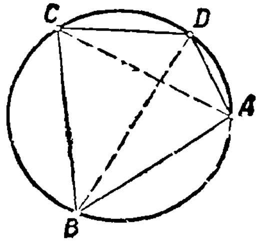
Что касается пяти-, шестиугольника и т. д., то ясно, что достаточно лишь выяснить условие, при котором можно описать окружность около четырехугольника. Если дан пятиугольник $ABCDE$, то, пользуясь этим условием, надо выяснить: 1) можно ли описать окружность около четырехугольника $ABCD$, 2) можно ли описать окружность около четырехугольника $ABCE$. Если хотя бы на один из этих вопросов последует отрицательный ответ, то описать окружность около пятиугольника $ABCDE$ нельзя, в противном случае — можно. Аналогичное замечание относится к многоугольникам с любым числом сторон.

---

[1]) Во избежание недоразумений отметим, что есть единственная в геометрии теорема о вписанном треугольнике. Это — теорема, устанавливающая тот факт, что всякий треугольник является вписанным.

После этой подготовки мы можем уже́ непосредственно приступить к поискам данной теоремы. Мы рассматриваем четырехугольник, вписанный в круг (черт. 29), и пытаемся обнаружить соотношение, характерное для всякого вписанного четырехугольника. Не для всякой теоремы это легко сделать. В самом крайнем случае учитель в этом месте должен прийти на помощь с готовой формулировкой.

В данном случае в этом нет необходимости, так как очень легко заметить, что противоположные углы четырехугольника суть вписанные углы, опирающиеся на дуги, составляющие в сумме полную окружность; следовательно, эти углы составляют в сумме $2d$.



Черт. 29. Вписанный четырехугольник.

Следующий вопрос: является ли это условие достаточным? Здесь формулировка теоремы уже́ вполне предопределена: если в некотором четырехугольнике противоположные углы составляют в сумме $2d$, то около этого четырехугольника можно описать окружность. Остается лишь выяснить, верно ли это.

Разумеется, может существовать несколько различных теорем о вписанном четырехугольнике. Мы выделяем вписанные четырехугольники в особый класс. Четырехугольники этого класса характеризуются уже́ тем, что они вписанные. Когда мы разыскиваем признак, при котором четырехугольник является вписанным, то мы тем самым спрашиваем, какими еще признаками обладают четырехугольники этого класса. Таких признаков множество. Кроме признака, приведенного выше, весьма прост еще один признак, называемый теоремой Птолемея и связанный не с величиной углов, а с величиной отрезков: во всяком вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (т. е. $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$). Это условие необходимо и достаточно для того, чтобы четырехугольник был вписанным. Таким образом, теорема Птолемея отвечает на тот же вопрос, что и приведенная выше теорема о сумме противоположных углов. Поэтому при прохождении в соответствующем месте курса теоремы Птолемея можно рекомендовать ту же постановку вопроса.

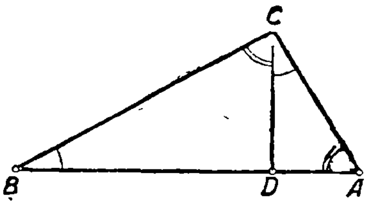
Так же в проективной геометрии ставится вопрос о теореме Паскаля. Через пять точек общего положения проходит единственная кривая второго порядка, т. е. всякий пятиугольник является вписанным в некоторую кривую второго порядка. Около же шестиугольника не всегда можно описать кривую второго порядка. Теорема Паскаля дает необходимое и достаточное условие, при котором около шестиугольника можно описать кривую второго порядка.

Рассмотрим другой пример — теорему Пифагора. Вместо того чтобы начинать с формулировки, ставим вопрос следующим образом. Два катета вполне определяют прямоугольный треугольник и, следовательно, его гипотенузу. Значит, задав катеты, мы не можем произвольно задать гипотенузу, а она должна иметь определенную, не зависящую от нас величину. Следовательно, должно быть возможно вычислить гипотенузу, если известны катеты, т. е. должна существовать формула, связывающая катеты и гипотенузу. Итак, еще не зная теоремы Пифагора, мы сознательно ищем ее.

Однако даже теперь еще нет необходимости давать формулировку теоремы Пифагора. Мы обращаемся к чертежу (черт. 30) и обычным способом ищем соотношение между катетами и гипотенузой.

Отсутствие единой схемы для сообщения теорем

Было бы ошибочным думать, что ко всем теоремам геометрии можно подойти так просто, как в вышеприведенных примерах. Геометрия не развивается так автоматически, и процесс творчества в ней не всегда так легко объясним. Выдающийся геометр открывает новую теорему потому, что он в данной области видит больше, чем обычные люди. Мы можем понять эту теорему, когда она уже сформулирована, но мы затрудняемся воспроизвести тот путь, которым автор дошел до этой теоремы. В таком случае мы должны стараться лишь облегчить, насколько можно, понимание этого пути. Генетический метод не сводится к тому, чтобы излагать все теоремы по совершенно единообразной схеме. Стараясь по возможности приходить к теоремам естественным путем, мы не всегда можем достичь этого.



Черт. 30.

Последнее замечание относится не только к сложным теоремам, но и ко многим весьма простым теоремам в самом начале геометрии. Трудность иногда объясняется тем, что некоторая теорема возникает потому, что она необходима в одном из дальнейших разделов геометрии, и до прохождения этого раздела трудно объяснить, почему мы ввели такую теорему. Возьмем, например, теорему „Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего не смежного с ним". Она нужна для использования в теории параллельных. Пытаясь выяснить, каково взаимное расположение двух прямых, образующих равные внутренние накрест-лежащие углы с третьей, мы сразу натолкнулись бы на вопрос, может ли внешний угол треугольника равняться внутреннему, не смежному с ним. Однако мы проходим эту теорему не тогда, когда в ней встречается надобность, а заранее, и поэтому затруднительно объяснить ее происхождение.

Важность „второго чтения" курса

Подобные соображения, между прочим, показывают, как важно для учеников „второе чтение". Когда ученик проходит геометрию от урока к уроку, не зная, что будет впереди и как каждая теорема будет использована, его поле зрения весьма узко. Когда он, пройдя значительную часть курса, начинает штудировать его с начала, то он с иной точки зрения смотрит на каждую теорему, зная наперед ее связи с другими вопросами. Поэтому повторение курса не есть механическое повторение: при повторении мы воспринимаем иначе, чем при первом прохождении.

Сначала сделать неясным, а затем ясным

Бывают случаи, когда возникает трудность, связанная с тем, что формулировка теоремы является слишком простой. Ученикам кажется, что мы имеем дело с тавтологией, или, во всяком случае, с чем-то настолько очевидным, что доказывать нечего. Здесь искусство учителя заключается в том, чтобы сделать неясным то, что при поверхностном подходе кажется ясным. Надо сначала посеять в учениках сомнение в том, справедлива ли данная теорема, а потом уже это сомнение разрешить. Это — один из важных основных принципов преподавания математики. Ниже будет рассмотрен подобный пример с теоремой „Все прямые углы равны между собой" (гл. IV, стр. 88).

Особенно часто подобные недоразумения происходят с обратными теоремами. В начале курса ученики склонны не замечать различия между прямой и обратной теоремами, и с этим надо вести систематическую борьбу. К сожалению, некоторые учителя, еще в младших классах, относятся к этому моменту очень небрежно. Нередки следующие диалоги:

Учитель. — В чем заключается признак делимости на 3?

Ученик. — Если сумма цифр числа делится на 3, то это число делится на 3.

Учитель. — Примените этот признак к числу 2581.

Ученик. — 2581 не делится на 3, потому что сумма его цифр не делится на 3.

Не следует считать, что подобные промахи несущественны: они логически развращают учеников и приносят в дальнейшем громадный вред, особенно при изучении геометрии.

Надо, пользуясь каждым удобным случаем, показывать ученикам на примерах, что из истинности прямого предложения не вытекает истинность обратного положения. Например:

Если целое число кончается нулем, то оно делится на 5. Отсюда не вытекает, что 35 не делится на 5.

Если известно, что магазин ежедневно от 1 часа до 3 часов дня закрыт, то отсюда не следует, что в 4 часа он открыт.

Из теоремы Пифагора, гласящей, что в прямоугольном треугольнике квадрат большей стороны равен сумме квадратов двух других сторон, не следует, что треугольник со сторонами 3, 4 и 5 — прямоугольный (хотя это верно).

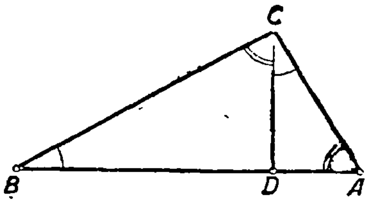
Генетический метод изложения разделов курса

До сих пор мы говорили о генетическом подходе к отдельным теоремам. Разумеется, подход к целым разделам курса тоже должен быть генетическим. Начиная новый раздел, мы должны наметить проблемы, подлежащие решению в этом разделе, а затем искать их решения. Положим, что мы приступаем к теории площадей. Основные задачи этого раздела: 1) установление понятия о площади, 2) измерение площадей всех известных нам фигур. Вполне естественнс зависящую от нас величину. Следовательно, **должно быть возможно вычислить гипотенузу, если известны катеты**, т. е. **должна существовать формула, связывающая катеты и гипотенузу**. Итак, еще не зная теоремы Пифагора, мы сознательно ищем ее.

Однако даже теперь еще нет необходимости давать формулировку теоремы Пифагора. Мы обращаемся к чертежу (черт. 30) и обычным способом ищем соотношение между катетами и гипотенузой.

Отсутствие единой схемы для сообщения теорем

Было бы ошибочным думать, что ко всем теоремам геометрии можно подойти так просто, как в вышеприведенных примерах. Геометрия не развивается так автоматически, и процесс творчества в ней не всегда так легко объясним. Выдающийся геометр открывает новую теорему потому, что он в данной области видит больше, чем обычные люди. Мы можем понять эту теорему, когда она уже сформулирована, но мы затрудняемся воспроизвести тот путь, которым автор дошел до этой теоремы. В таком случае мы должны стараться лишь облегчить, насколько можно, понимание этого пути. Генетический метод не сводится к тому, чтобы излагать все теоремы по совершенно единообразной схеме. Стараясь по возможности приходить к теоремам естественным путем, мы не всегда можем достичь этого.



Черт. 30.

Последнее замечание относится не только к сложным теоремам, но и ко многим весьма простым теоремам в самом начале геометрии. Трудность иногда объясняется тем, что некоторая теорема возникает потому, что она необходима в одном из дальнейших разделов геометрии, и до прохождения этого раздела трудно объяснить, почему мы ввели такую теорему. Возьмем, например, теорему „Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего не смежного с ним". Она нужна для использования в теории параллельных. Пытаясь выяснить, каково взаимное расположение двух прямых, образующих равные внутренние накрест-лежащие углы с третьей, мы сразу натолкнулись бы на вопрос, может ли внешний угол треугольника равняться внутреннему, не смежному с ним. Однако мы проходим эту теорему не тогда, когда в ней встречается надобность, а заранее, и поэтому затруднительно объяснить ее происхождение.

Важность „второго чтения" курса

Подобные соображения, между прочим, показывают, как важно для учеников „второе чтение". Когда ученик проходит геометрию от урока к уроку, не зная, что́ будет впереди и как каждая теорема будет использована, его поле зрения весьма узко. Когда он, пройдя значительную часть курса, начинает штудировать его с начала, то он с иной точки зрения смотрит на каждую теорему, зная наперед ее связи с другими вопросами. Поэтому повторение курса не есть механическое повторение: при повторении мы воспринимаем иначе, чем при первом прохождении.

Сначала сделать неясным, а затем ясным

Бывают случаи, когда возникает трудность, связанная с тем, что формулировка теоремы является слишком простой. Ученикам кажется, что мы имеем дело с тавтологией, или, во всяком случае, с чем-то настолько очевидным, что доказывать нечего. Здесь искусство учителя заключается в том, чтобы сделать неясным то, что при поверхностном подходе кажется ясным. Надо сначала посеять в учениках сомнение в том, справедлива ли данная теорема, а потом уже это сомнение разрешить. Это — один из важных основных принципов преподавания математики. Ниже будет рассмотрен подобный пример с теоремой „Все прямые углы равны между собой" (гл. IV, стр. 88).

Особенно часто подобные недоразумения происходят с обратными теоремами. В начале курса ученики склонны не замечать различия между прямой и обратной теоремами, и с этим надо вести систематическую борьбу. К сожалению, некоторые учителя, еще в младших классах, относятся к этому моменту очень небрежно. Нередки следующие диалоги:

Учитель. — В чем заключается признак делимости на 3?

Ученик. — Если сумма цифр числа делится на 3, то это число делится на 3.

Учитель. — Примените этот признак к числу 2581.

Ученик. — 2581 не делится на 3, потому что сумма его цифр не делится на 3.

Не следует считать, что подобные промахи несущественны: они логически развращают учеников и приносят в дальнейшем громадный вред, особенно при изучении геометрии.

Надо, пользуясь каждым удобным случаем, показывать ученикам на примерах, что из истинности прямого предложения не вытекает истинность обратного положения. Например:

Если целое число кончается нулем, то оно делится на 5. Отсюда не вытекает, что 35 не делится на 5.

Если известно, что магазин ежедневно от 1 часа до 3 часов дня закрыт, то отсюда не следует, что в 4 часа он открыт.

Из теоремы Пифагора, гласящей, что в прямоугольном треугольнике квадрат большей стороны равен сумме квадратов двух других сторон, не следует, что треугольник со сторонами 3, 4 и 5 — прямоугольный (хотя это верно).

Генетический метод изложения разделов курса

До сих пор мы говорили о генетическом подходе к отдельным теоремам. Разумеется, подход к целым разделам курса тоже должен быть генетическим. Начиная новый раздел, мы должны наметить проблемы, подлежащие решению в этом разделе, а затем искать их решения. Положим, что мы приступаем к теории площадей. Основные задачи этого раздела: 1) установление понятия о площади, 2) измерение площадей всех известных нам фигур. Вполне естественно начать с измерения площади треугольника, потому что всякий многоугольник может быть разбит на треугольники. Затем будем стараться измерить площадь круга и его частей. Попутно возникают некоторые соотношения между площадями, которых мы специально не искали (мы заранее задались лишь целью найти формулы для вычисления площадей различных фигур), например, теорема Пифагора (в геометрической формулировке), свойство гиппократовых луночек, теорема об отношении площадей подобных фигур и многое другое.

Желательно, чтобы ученики всегда ясно представляли, какой круг проблем подлежит решению в каждом разделе математики, и знали, какие из них решены и какие нет. Например, изучая метрические соотношения между элементами треугольника, мы ставим перед собой цель научиться решать треугольник, заданный тремя независимыми элементами. Однако эта задача не получает в геометрии полного решения, а решается лишь для треугольников с определенными углами (30°, 45° и т. д.), полное же решение этой задачи дается в тригонометрии.

Полезность неопределенных и переопределенных задач

Таким образом, ученик не только должен уметь решать вопросы, традиционно предлагаемые при прохождении курса геометрии, но должен знать, какие вопросы можно решить и какие нельзя, а также, какие вопросы, вообще говоря, можно решить, но он пока этого не умеет. Мы считаем методически неправильным, что в задачниках всегда фигурируют задачи вполне определенные, т. е. содержащие ровно столько данных, сколько требуется для решения. Учителя обычно даже приучают учеников к мысли, что для решения задачи необходимо использовать все данные, указанные в условии. Часто учитель говорит: „При вашем способе решения задача не может выйти, так как вы нигде не использовали такого-то условия". Между тем вопрос о том, сколько условий должно быть дано, чтобы задача была определенной, представляет большой интерес. Он представляет одну из важных возможностей для развития математического мышления учеников. Совершенно неправильно устранять учеников от решения этого вопроса и приучать их к тому, что составитель задачника обдумывает его за них: раз он включил в условие задачи определенные данные, значит, они необходимы и достаточны для решения задачи.

Мы рекомендуем два способа, чтобы научить учеников разбираться в этом вопросе.

Первый способ. Наряду с обычными задачами следует предлагать ученикам задачи неопределенные и переопределенные (никак их не выделяя). Мы ожидаем от учеников, чтобы они заметили это обстоятельство. Поясним это на примерах.

Задача. В четырехугольнике (выпуклом) $ABCD$ даны стороны $AB=5$, $BC=7$, $CD=8$, $DA=9$. Определить его площадь.

Будем считать неудовлетворительным подход ученика, который затратит много усилий, пытаясь решить эту задачу, и затем заявит, что она у него не вышла. Мы ожидаем следующего ответа: „Четырехугольник не определяется четырьмя сторонами. Различные четырехугольники, имеющие указанные стороны, имеют различные площади (следует объяснение). Задача неопределенная. Необходимо добавить еще одно данное, например, диагональ или угол".

Задача. В треугольнике ABC дано: $\widehat{A}=30°$, $b=10$, $h_c=6$. Найти a и c.

Ответ. Задача невозможна; эти данные противоречивы.

Задача. Соседние стороны параллелограма суть a и b, а его диагонали — l и m. Найти его площадь.

Ответ. В этой задаче — лишние данные (задача переопределенная), так как две стороны и одна диагональ вполне определяют параллелограм. Эта задача возможна лишь при условии $l^2+m^2=2(a^2+b^2)$; в этом случае площадь параллелограма равна

$$2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-l)}=2\sqrt{q(q-a)(q-b)(q-m)},$$

где $p=\frac{a+b+l}{2}$, $q=\frac{a+b+m}{2}$.

Составление задач учениками

Второй способ. Надо упражнять учеников в составлении задач. Неправильно полагать, что ученики должны ограничиваться решением задач, которые составлены другими. Составление задач — это особый творческий процесс, отсутствие которого не может быть компенсировано решением задач. Решая задачи, ученик почти никогда не обдумывает вопроса о том, какие данные должны быть включены в условие, чтобы задача была вполне определенной, а, между тем, это весьма важный вопрос в геометрии. Иногда (в простейших случаях) можно предлагать ученикам составлять задачи с заранее намеченным вопросом. Например:

— Составьте задачу, в которой требовалось бы вычислить объем пирамиды (таким образом ученик может принять любые возможные данные).

— Составьте задачу, в которой требовалось бы вычислить площадь сегмента.

— Составьте задачу, в которой использовались бы свойства параллельных сечений пирамиды.

Однако настоящее творчество проявляется в составлении задач, которых нельзя предусмотреть особым заказом. Для составления задач надо постоянно иметь дело с различными геометрическими соотношениями. Комбинируя их, постоянно думая о них, мы обнаруживаем новые соотношения, которые используем как темы для задач. Чтобы приучить учеников к составлению подобных задач, можно дать учителю лишь один совет: он должен постоянно, на протяжении всего курса геометрии, поощрять составление задач. Всякая задача, составленная учеником, должна критиковаться, если нужно — изменяться и предлагаться для решения всему классу.

Синтетический метод доказательства

Выше мы говорили о том, как подходить к формулировке новых теорем. Положим теперь, что теорема уже сформулирована, и возникает вопрос, как ее доказать. Часто различают два метода доказательства — аналитический и синтетический[1]).

При доказательстве всякой теоремы мы имеем условие, исходя из которого производим логические рассуждения. После некоторого рассуждения приходим к окончательному следствию. Таким образом, условие и следствие оказываются связанными некоторой логической цепью. Синтетический метод доказательства заключается в следующем. Используя условие теоремы, делаем первый шаг в нашей логической цепи; при этом мы приходим к некоторому промежуточному выводу. Используя этот вывод, делаем второй шаг и т. д. и т. д. При каждом отдельном шаге мы *исходим из того, что уже известно*, и приходим к новому, неизвестному прежде, результату, который с этого момента считается известным. После некоторого ряда шагов мы получаем в качестве вывода то положение, которое требовалось доказать.

Педагогические недостатки синтетического метода

Синтетический метод безупречен для изложения *уже придуманных доказательств*, но он не соответствует творческому ходу мыслей, который позволяет нам придумать доказательство; в этом его педагогический недостаток. Когда мы излагаем синтетическое доказательство (особенно, если оно длинное), у учеников возникает вопрос: как догадались, что надо рассуждать именно таким образом, чтобы прийти к доказательству данной теоремы? При первых логических шагах в доказательстве ученикам еще не ясно, каким образом эти шаги приведут в конце концов к нужному результату. После нескольких шагов „неожиданно" оказывается, что теорема доказана. Как будто ученики находятся в незнакомом городе, в котором они не ориентируются, и проводник должен вывести их к некоторому зданию. Он без всяких объяснений ведет их по улицам, говоря „здесь идите прямо, здесь сверните налево и т. д.". После некоторого путешествия ученики вдруг выходят к нужному зданию. Чтобы повторить еще раз это путешествие без проводника, надо призвать на помощь механическую память и точно запомнить маршрут. Было бы лучше научить учеников ориентироваться в городе. Тогда они будут знать, в каком направлении надо

---

[1]) Мы здесь противопоставляем аналитические и синтетические доказательства, как доказательства с различным ходом рассуждений. Термины „аналитический" и „синтетический" имеют в геометрии еще другой смысл: аналитическим называется рассуждение, основанное на выкладках (на анализе), а синтетическим — рассуждение, основанное на геометрических построениях (отсюда — названия „аналитическая геометрия" и „синтетическая геометрия"). Эти два смысла, в которых употребляются термины „аналитический" и „синтетический", не следует смешивать. Например, рассуждение синтетическое в том смысле, что оно опирается только на геометрические построения, а не на выкладки, может быть чисто аналитическим по своей логической структуре.

итти, чтобы прийти к определенному пункту. При этом им не надо точно запоминать большое количество определенных маршрутов, а они могут каждый раз изменять детали маршрута.

Если ученик не понимает идеи доказательства, то он может лишь пассивно воспринимать его, проверяя формальную правильность каждого шага. Далее ему придется точно выучить все доказательство, не отделяя основной идеи от несущественных подробностей. В этом доказательстве он не решится ничего изменить.

Должен ли учитель считать цель преподавания геометрии достигнутой, если его ученики выучат формулировки и доказательства всех теорем? Мы полагаем, что нет. В самом деле, спросим себя, зачем в курсе геометрии приводятся доказательства теорем. Можно было бы сообщить ученикам теоремы без доказательств, сославшись на то, что эти теоремы доказаны специалистами, и мы можем принять эти положения как готовые и пользоваться ими при решении задач.

Зачем в геометрии даются доказательства

Может быть, ученики усомнятся в справедливости теорем и пожелают проверить их сами? Вряд ли. В других школьных курсах им постоянно приходится иметь дело с готовыми фактами, установленными другими людьми. Если на уроке географии ученики изучают климат Африки, то они доверяют путешественникам, бывавшим в Африке и изучившим ее климат. Они не требуют от учителя, чтобы он повез их в Африку и предоставил им возможность лично убедиться, что там действительно такой климат, а не иной. Даже таблицу умножения, которую легко проверить, большинство людей заучивает, принимая на веру. Мы заучиваем, что $7 \cdot 9 = 63$, но редко кто проверял лично эту формулу, раскладывая девять кучек по семи предметов в каждой и пересчитывая общее число предметов. Таблица умножения в течение тысячелетий проверялась человеческой практикой, и допустить наличие в ней ошибки было бы совершенно невероятно. То же можно сказать о теоремах элементарной геометрии.

Таким образом, мы утверждаем: *доказательства теорем в курсе геометрии приводятся не для того, чтобы убедить учеников в справедливости этих теорем.*

Для чего же в таком случае приводятся доказательства?

Доказательства приводятся для того, чтобы ученики овладели методами геометрических доказательств и могли самостоятельно строить доказательства. Это необходимо потому, что в курсе геометрии невозможно предусмотреть всех мелких геометрических положений, с которыми ученику придется столкнуться при решении задач, при изучении смежных предметов или в практической деятельности.

Но эта цель не будет достигнута, если ученики будут лишь механически заучивать доказательства. Поэтому желательно по мере возможности приподнимать перед учениками завесу, за которой скрывается ход мыслей, впервые приводящий к открытию новых доказательств. Многие математики скрывают этот процесс, излагая результаты своих работ без всякого указания на то, каков был ход мыслей, приведший их к этим результатам. Именно по этой причине

„Начала" Евклида непригодны в качестве учебника. Эта книга изложена синтетическим методом, автор всюду идет от известного к известному; он заранее заготовляет результаты, которые понадобятся позднее, и читатель (при первом чтении) может лишь пассивно следовать за ним.

Аналитический метод доказательства

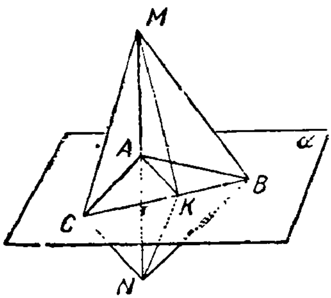
При аналитическом методе доказательства мы прежде всего пытаемся непосредственно (одним логическим шагом) доказать то, что требуется. Если это не удается, то мы устанавливаем, какого положения нам нехватает для доказательства данной теоремы, и пытаемся доказать это положение. Если его не удается доказать, то мы опять устанавливаем, чего нам нехватает для доказательства, и т. д. Так мы действуем до тех пор, пока не доходим до положений, доказываемых непосредственно на основании условия теоремы. Таким образом при аналитическом доказательстве мы отправляемся от недоказанного положения и, исследуя, что̀ нужно для его доказательства, приходим к тому, что известно. Ход рассуждений в аналитическом доказательстве имеет порядок как раз обратный ходу рассуждений в соответствующем синтетическом доказательстве.

Найдя аналитическое доказательство, мы можем повторить его в обратном порядке; это будет синтетическое доказательство.

Пример синтетического и аналитического доказательств

Рассмотрим в качестве примера теорему о двух перпендикулярах. Дано, что прямая MA перпендикулярна к двум прямым AB и AC, лежащим в плоскости α (черт. 31). Требуется доказать, что MA перпендикулярна к любой прямой AK, лежащей в плоскости α.

Синтетическое доказательство. Откладываем на прямой MA в обе стороны от плоскости α произвольные отрезки, т. е. строим $AM = AN$. Откладываем на прямых AB и AC от точки A произвольные отрезки AB и AC. Строим прямую BC и обозначаем через K точку ее пересечения с прямой AK. Соединяем каждую из точек M и N с точками B, C и K.



Черт. 31. Теорема о двух перпендикулярах.

Первый шаг. Рассмотрим треугольники MAB и NAB. Имеем $MA = NA$ (по построению), сторона AB — общая, $\widehat{MAB} = \widehat{NAB}$ (как прямые). Следовательно, $\triangle MAB \equiv \triangle NAB$. Из конгруентности этих треугольников вытекает: $MB = NB$.

Второй шаг. Рассмотрим треугольники MAC и NAC. В них $MA = NA$, сторона AC — общая, $\widehat{MAC} = \widehat{NAC}$. Следовательно, $\triangle MAC \equiv \triangle NAC$. Из конгруентности этих треугольников вытекает: $MC = NC$.

Третий шаг. Рассмотрим треугольники MBC и NBC. В них $MB = NB$ (результат первого шага), $MC = NC$ (результат второго шага), сторона BC — общая. Следовательно, $\triangle MBC \equiv \triangle NBC$. Из конгруентности этих треугольников вытекает: $\widehat{MBK} = \widehat{NBK}$.

Четвертый шаг. Рассмотрим треугольники MBK и NBK. В них $MB = NB$ (результат первого шага), сторона BK — общая, $\widehat{MBK} = \widehat{NBK}$ (результат третьего шага). Следовательно, $\triangle MBK \equiv \triangle NBK$. Из конгруентности этих треугольников вытекает: $MK = NK$.

Пятый шаг. Рассмотрим треугольники MAK и NAK. В них $MA = NA$ (по построению), сторона AK — общая, $MK = NK$ (результат четвертого шага). Следовательно, $\triangle MAK \equiv \triangle NAK$. Из конгруентности этих треугольников вытекает: $\widehat{MAK} = \widehat{NAK}$. Углы $\widehat{MAK}$ и $\widehat{NAK}$ — смежные; теперь выяснилось, что они равны между собой. Следовательно, они — прямые, что и требовалось доказать.

Аналитическое доказательство. Углы $\widehat{MAK}$ и $\widehat{NAK}$ — смежные. Чтобы доказать перпендикулярность MA и AK, необходимо доказать равенство этих углов.

Чтобы доказать равенство углов, целесообразно включить эти углы в какие-нибудь треугольники и пытаться доказать равенство этих треугольников. Строим $AM = AN$ (чтобы треугольники оказались равными). Берем на прямой AK произвольную точку K и строим треугольники MAK и NAK. Теперь наши углы $\widehat{MAK}$ и $\widehat{NAK}$ включены в эти треугольники. Нам необходимо доказать конгруентность треугольников MAK и NAK. Это в то же время и достаточно: если конгруентность треугольников MAK и NAK будет доказана, то будет доказана перпендикулярность MN и AK.

Чтобы использовать условие теоремы ($MA \perp AB$, $MA \perp AC$), проводим через точку K произвольную прямую, лежащую в плоскости α и отличную от AK; обозначим через B и C точки ее пересечения соответственно с прямыми AB и AC. Проводим прямые MB, MC, NB и NC.

Пытаясь доказать конгруентность треугольников MAK и NAK, мы видим, что в этих треугольниках $MA = NA$ и сторона AK — общая. Чтобы доказать конгруентность этих треугольников, нам нехватает положения $MK = NK$. Итак, надо доказать, что $MK = NK$. Это является достаточным: если будет доказано, что $MK = NK$, то отсюда будет вытекать конгруентность треугольников MAK и NAK.

Для этого надо обратиться к треугольникам, включающим отрезки MK и NK. Можно рассмотреть пары треугольников MBK и NBK или MCK и NCK (так как треугольники MBK и MCK, очевидно, не конгруентны). Рассмотрим, например, треугольники MBK и NBK и попытаемся доказать их конгруентность. Этого будет достаточно: из конгруентности треугольников MBK и NBK будет следовать, что $MK = NK$. В этих треугольниках известно только, что сторона BK общая. Необходимо установить еще какие-нибудь два равенства сторон или углов. Стороны MK и NK рассматривать бесполезно, так, их равенство обнаружится лишь после того, как мы докажем конгруентность треугольников MBK и NBK. Очевидно, надо доказать, что $MB = NB$. Для этого придется обратиться к треугольникам MAB и NAB и попытаться доказать их конгруентность. Это можно сделать.

Теперь в треугольниках MBK и NBK имеем: сторона BK — общая и $MB = NB$. Для того чтобы конгруентность треугольников была доказана, нам нехватает равенства углов $\widehat{MBK} = \widehat{NBK}$. Чтобы доказать равенство этих углов, надо обратиться к треугольникам, включающим эти углы, т. е. к треугольникам MBC и NBC, и попытаться доказать их конгруентность. Этого будет достаточно для доказательства равенства углов $\widehat{MBK}$ и $\widehat{NBK}$, а следовательно, и конгруентности треугольников MBK и NBK.

В треугольниках MBC и NBC сторона BC — общая и $MB = NB$. Если бы нам удалось еще доказать, что $MC = NC$, все было бы доказано. Но равенство $MC = NC$ легко доказывается из рассмотрения треугольников MAC и NAC.

Поскольку мы после каждого шага устанавливали обратимость нашего рассуждения, теорема доказана: мы уверены, что все рассуждение можно провести в обратном порядке. Если бы этого не делали (слишком тягостно после каждого мелкого шага доказывать достаточность), то подобное рассуждение не являлось бы окончательным доказательством. Оно лишь помогает нащупать цепь, связывающую условие со следствием. После того как эта цепь нащупана, надо попытаться провести все рассуждение в обратном порядке. Если это удастся беспрепятственно, то тем самым мы получим синтетическое доказательство рассматриваемой теоремы.

Отсутствие единой схемы для доказательства теорем

Аналитический и синтетический методы тесно переплетаются. В приведенном выше примере были нарочито выделены в чистом виде синтетическое и аналитическое доказательства. Обычно доказательства содержат и синтетические и аналитические элементы (особенно редко встречаются чисто аналитические доказательства). Часто бывает, что в особенно трудном пункте доказательства автор приводит соображения (не входящие в цепь выводов), показывающие, в каком направлении следует вести дальнейшие рассуждения.

Вообще мы лишь хотим рекомендовать учителю по возможности пользоваться генетическим методом при изложении теорем и аналитическим методом при их доказательстве (впрочем, аналитический метод особенно ценен для открытия доказательства, а потом полезно повторять это доказательство в синтетической форме).

Было бы неправильным упрощенчеством полагать, что творческий процесс в математике может быть уложен в определенные схемы и что, пользуясь определенной схемой рассуждений, мы можем регулярно приходить к математическим открытиям. В большинстве случаев мы не сможем объяснить ученикам, каким путем пришли к тому или иному математическому открытию. Однако по мере возможности учитель должен стремиться к тому, чтобы ученики активно участвовали в создании геометрии. Если же некоторые места покажутся ученикам искусственными, то при правильном преподавании тó, чтó с первого раза кажется искусственным, впоследствии входит в наш обиход и начинает казаться естественным.

Запись учениками доказательств

В заключение остановимся на вопросе техническом, но весьма важном: о форме записи при доказательстве теорем.

Во-первых, мы считаем необходимым при доказательстве каждой теоремы записывать условие и следствие. Четкое разделение условия и следствия не всегда ясно ученикам из словесной формулировки теоремы. С другой стороны, самостоятельное выделение условия и следствия и запись их в символической форме являются для учеников полезным, развивающим упражнением.

Во-вторых, мы считаем весьма полезной запись всего хода доказательства в символической форме. Словесных объяснений записывать не следует. Диктовка на уроках приводит к вредным последствиям, так как, записывая, ученики не вникают достаточно в содержание. Механическое записывание идет в ущерб пониманию. За уроком ученик должен внимательно слушать и стараться как можно лучше понять объяснение учителя, не отвлекаясь записью. К тому же существует учебник, и учитель не должен допускать его замены конспектами, всегда менее доброкачественными, чем учебник. Однако символическая запись (равенства, алгебраические преобразования, геометрические символические записи и т. д.) полезна. Она ясно выделяет расчленение доказательства на отдельные звенья и тем самым способствует лучшему его усвоению. Кроме того, выделение логического остова из словесного доказательства является полезным упражнением для учащихся.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КУРСА ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ГЛАВА IV

ПЕРВЫЕ УРОКИ ГЕОМЕТРИИ

Особое положение первых уроков геометрии

Первые уроки систематического курса геометрии представляют весьма большие педагогические трудности. На этих уроках ученики делают большой скачок, вступая в совершенно новую область, не похожую на то, что̀ проходилось раньше. Во-первых, ученики знакомятся с некоторыми понятиями значительно более абстрактными, чем встречавшиеся ранее (точка, линия, поверхность, прямая, плоскость и т. д.). Во-вторых, они сталкиваются с новым методом (логические доказательства теорем, логические определения новых понятий и т. д.). Впоследствии ученики к этому привыкнут, но на первых уроках им бывает трудно переварить эти столь новые вещи.

Однако, проводя первый урок геометрии, учитель должен помнить, что вводимые им абстрактные понятия являются дальнейшим развитием тех наивных пространственных представлений, с которыми ученики пришли на урок. Хотя на этом уроке происходит скачок, но нельзя допустить разрыва и представлять эти абстрактные понятия как совершенно новые, не имеющие никакой связи с прежними геометрическими представлениями.

Выше уже́ говорилось, что прохождение наглядной геометрии в младших классах или — в качестве суррогата — прохождение некоторых элементов наглядной геометрии в курсе арифметики весьма облегчает прохождение систематического курса геометрии. Если бы ученики являлись на первый урок геометрии в VI класс, не имея совершенно никаких геометрических представлений, на них свалилось бы слишком много трудностей сразу: первое знакомство с основными геометрическими образами и сразу же их точное определение, первое знакомство с основными геометрическими фактами и сразу же их логическое доказательство.

Таким образом, мы предполагаем, что ученики, приходящие на первый урок геометрии, уже́ имеют некоторые геометрические представления, например, они знают, что̀ такое прямоугольник, квадрат, круг, куб, шар, угол, параллельные и перпендикулярные прямые и многое другое (хотя не могут сформулировать определений этих понятий). Они знают, как вычисляется площадь прямоугольника или треугольника, хотя не знают *доказательства этих положений*.

Тем не менее, на первых уроках геометрии задача заключается не в том, чтобы пополнять эти знания, а в том, чтобы переучиваться, так как эти наивные представления непригодны для построения на них систематического курса геометрии.

Во-первых, ученики не обладают отчетливым представлением об образах, некоторые из измерений которых равны нулю (например, о поверхности, не имеющей никакой толщины). Во-вторых, ученики не имеют представления о бесконечной прямой или бесконечной плоскости. Между тем эти свойства с первых же шагов изучения геометрии являются существенными. В-третьих, ученики не имеют представления о методе геометрии (определения основных понятий, доказательства теорем).

На первых уроках геометрии ученики делают первый шаг от египетских представлений об основаниях геометрии к греческим. Учитель геометрии, входящий на первый урок в VI классе, должен рассматривать сидящих перед ним учеников как древних египтян[1]), а себя — как древнего грека (IV—III в. до н. э.), который должен в течение нескольких лет довести учеников в методологическом отношении до греческого уровня.

Введение основных геометрических понятий

Рассмотрим более конкретно те вопросы, о которых учителю придется говорить на первых уроках геометрии.

Прежде всего учитель должен объяснить, что́ такое геометрическое тело. Геометрическое тело определяется как ограниченная со всех сторон часть пространства[2]).

Геометрическое тело не имеет никаких свойств, кроме указанных в этом определении. Например, оно не имеет массы, цвета, запаха, химического состава и т. д. Это замечание может вызвать у учеников недоумение. Существуют ли в действительности геометрические тела? Очевидно, нет. В таком случае, какое практическое значение может иметь наука, изучающая то́, чего в действительности не существует?

Прежде всего дадим ответы на эти вопросы для учителя.

Всякое реальное тело обладает бесконечным множеством индивидуальных свойств. Наука должна отвлекаться от некоторых из них, так как в противном случае пришлось бы изучать каждую вещь в отдельности. Отвлекаясь от одних свойств и удерживая другие, мы изучаем не одну вещь, а множество вещей. При этом мы считаем тождественными те вещи, которые не различаются рассматриваемыми свойствами, хотя бы они и различались теми свой-

---

[1]) Мы имеем в виду только их методологически-геометрический уровень. В отношении запаса геометрических сведений они стоят значительно ниже древних египтян.

[2]) Разумеется, это — не логическое определение, а наглядное описание.

ствами, от которых мы отвлеклись. Утверждение, что геометрические тела не обладают иными свойствами, кроме свойства занимать часть пространства, имеет тот смысл, что геометрия не изучает других свойств тел. Так, деревянный шар и металлический шар одинаковых размеров в геометрии неразличимы.

Такое отвлечение от части свойств реальных тел не противоречит тому, что геометрия, как и всякая наука, изучает реальный мир. Однако она, как и всякая наука, изучая реальные предметы, изучает их лишь с одной стороны, т. е. рассматривает лишь часть их свойств.

Полезно заметить, что, отвлекаясь от некоторых свойств реальных тел, мы можем сохранить большее или меньшее число свойств, которые мы намерены рассматривать, т. е. мы можем получить соответственно меньшую или бо́льшую степень абстракции. Так, если геометрическое тело снабдить еще свойством иметь массу (а следовательно, и плотность), то мы получим то понятие тела, которое рассматривается в механике. Добавляя еще ряд свойств (температура, плотность, прозрачность, электропроводность и т. д.), мы получим понятие физического тела.

Обсуждение с учениками разницы между геометрическим и физическим телом весьма полезно. Оно содействует лучшему усвоению понятия геометрического тела. Это обсуждение следует провести на первом же уроке геометрии.

Понятие геометрического тела не является крайней степенью абстракции: из его свойств можно отбросить еще некоторые. Так, можно не рассматривать размеров. Тогда мы получим особую геометрию, изучающую только форму геометрических тел. Эта геометрия называется геометрией подобия. В геометрии подобия всякие два шара считаются тождественными, так как разница размеров не принимается во внимание.

Объяснение ученикам этого круга вопросов (геометрическое тело, поверхность, линия, точка) требует от учителя чувства педагогической меры. Нельзя думать, что ученики способны сразу усвоить эти понятия: они усвоят их по мере того, как будут знакомиться с их оперативным применением, т. е. увидят их в действии. Во всяком понятии есть весьма существенная сторона, не могущая быть выраженной в его определении: те методы, при помощи которых это понятие используется в науке, и его взаимодействие с другими понятиями. Все это ученик будет постепенно постигать при дальнейшем изучении геометрии. Определение является зародышем; из него в сознании ученика возникает понятие, которое в дальнейшем, по мере изучения предмета, все время продолжает развиваться.

Поэтому учитель не должен надеяться, что чрезмерно длинными, подробными объяснениями ему удастся преодолеть те затруднения, которые вызываются здесь самой сущностью процесса познания. Все равно вначале у учеников останутся неясности, которые нельзя победить никакими подробными объяснениями, так как процесс созревания этих понятий хотя бы до „греческого“ уровня требует нескольких лет и не может быть сжат до нескольких часов. Слишком подробное обсуждение этих понятий, еще не обросших никакими конкретными свойствами, может принять схоластический характер и вызвать у учеников скептическое отношение к геометрии. Надо скорее переходить к делу.

С другой стороны, надо предостеречь учителя от противоположной крайности — от попытки совсем обойти эти понятия. При такой попытке процесс развития этих понятий вовсе не начнется. Мы не должны забывать, что самые неясности и противоречия, заключенные в этих основных понятиях, служат стимулом, заставляющим учеников размышлять над ними.

Поэтому, не добиваясь на первом уроке абсолютного понимания, следует настойчиво подчеркнуть, что поверхность не имеет никакой толщины, линия — никаких измерений, кроме длины, точка — никаких измерений.

Разумеется, мы не даем определения этих понятий (определения Евклида, как мы видели в гл. I, не удовлетворяют даже греческому методологическому уровню), а даем лишь их описания и иллюстрируем эти описания примерами. Не забудем при этом указать, что типографская точка — не точка, черта, проведенная карандашом, — не линия и т. д.

Подчеркнем также, что прямая бесконечна; натянутая нить поэтому не дает полного представления о прямой (не говоря уже о том, что нить имеет три измерения). Полезно в качестве противопоставления понятию о бесконечной прямой тут же объяснить, что́ такое луч (или полупрямая) и отрезок.

Не следует вводить сразу много новых понятий

В „Началах" Евклида в начале каждой книги даются определения всех понятий, встречающихся в этой книге. В преподавании геометрии такой порядок не годится. Не следует вводить сразу много понятий „про запас". Надо определять новые понятия по мере введения их в действие. Память легко удерживает лишь такие вещи, с которыми связано много ассоциаций, запоминать же названия и определения многих понятий, с которыми мы в ближайшее время не будем иметь дела, трудно и скучно. Поэтому мы не можем согласиться с построением в этой части стабильного учебника (Киселев, Геометрия, ч. I. пп 1—40), который вводит слишком большое количество новых понятий и терминов. Мы рекомендуем учителю на первых уроках ограничиться необходимым минимумом, а остальные понятия вводить по мере возникновения надобности в них. Вот примерный план (разумеется, не единственно возможный) первых уроков геометрии.

Примерный план первых уроков геометрии

1. Предмет геометрии. Краткие исторические сведения о возникновении геометрии.
2. Геометрические тела.
3. Поверхности, линии, точки.
4. Плоскость.
5. Фигура (как противопоставление телу).

6. Разделение геометрии на планиметрию и стереометрию.

7. Прямая, луч (полупрямая), отрезок.

8. Употребление циркуля для откладывания на прямой данного отрезка.

9. Понятие об угле. Стороны и вершина угла.

10. Понятие о равенстве (конгруентности) углов. Понятия „больше" и „меньше" для углов.

11. Развернутый угол. Смежные углы.

12. Прямые, острые и тупые углы. Перпендикуляр.

13. Понятие об аксиомах и теоремах. Примеры аксиом. Теоремы о существовании и единственности перпендикуляра.

14. Вертикальные углы. Теорема о равенстве вертикальных углов.

При этом мы считаем возможным отложить различные понятия, связанные с окружностью (центр, радиус, секущая, хорда, дуга), которые в стабильном учебнике вводятся сразу. Нам с первых шагов понадобится лишь циркуль для откладывания равных отрезков на данной прямой. Понятия, связанные с окружностью, понадобятся позже (в главе о признаках конгруентности треугольников) для решения некоторых задач на построение.

Остановимся подробнее на перечисленных выше пунктах.

Плоскость и прямая

Плоскость, как и прямая, не определяется, а дается ее описание: поверхность зеркала, отполированного стола и т. д. Здесь же указывается, чем эти поверхности отличаются от плоскости (плоскость бесконечна; кроме того, поверхность зеркала или стола не идеально плоская). Как всегда, полезно привести контрпримеры, чтобы выяснить, чему противопоставляется понятие плоскости (например, кривые поверхности, в частности поверхность шара).

Фигура

Фигуру мы рекомендуем определять как часть плоскости, ограниченную со всех сторон (противопоставляя таким образом фигуру телу). Следовало бы называть это плоской фигурой, в отличие от фигур, расположенных на других поверхностях, но так как в планиметрии другие фигуры не изучаются, то видовое ограничение „плоская" было бы непонятно.

Мы считаем нецелесообразным определение стабильного учебника: „Совокупность каких бы то ни было точек, линий, поверхностей или тел, расположенных изестным образом в пространстве, называется вообще геометрической ф и г у р о й". В высших частях геометрии (аналитическая, диференциальная) часто за основной элемент принимается не точка, а какой-либо другой образ (например, прямая, плоскость, сфера и т. д.), но в школьном курсе геометрии за основной элемент всегда принимается точка, а все другие образы мыслятся составленными из точек. Кроме того, в элементарной геометрии никогда не рассматриваются точечные множества любой природы, как это имеет место в теории множеств или топологии, а рассматриваются только множества очень узкого типа. Поэтому, во-первых, определение фигуры, данное в стабильном учебнике, является чрезмерно широким и захватывающим гораздо бо́льший круг объектов, чем это нужно для элементарной геометрии. Во-вторых, для развития четкости мышления у учеников желательно закреплять в терминологии все те логические различия, о которых мы говорим. Поскольку мы фиксируем внимание учеников на различии между двумерным и трехмерным образом, полезно провести это различие в терминологии и противопоставлять фигуру телу.

Определяя фигуру как ограниченную со всех сторон часть плоскости, мы тем самым исключаем незамкнутые части плоскости. Таким образом, угол не есть фигура. Определение стабильного учебника имеет одно кажущееся преимущество: возможность дать общее определение конгруентности. При нашем определении придется отдельно определять конгруентность фигур, отдельно конгруентность углов и т. д. В гл. V мы покажем, что это — не недостаток, а преимущество, так как конгруентность углов и вообще незамкнутых частей плоскости принципиально отлична от конгруентности замкнутых фигур.

Сложение отрезков

По вопросу о сложении отрезков мы считаем излишним формулировать сочетательный и переместительный законы, так как это слишком абстрактно и в VI классе преждевременно. Наличие этих законов можно подразумевать, не формулируя их.

Определение угла

Евклид определяет угол как наклонение друг к другу двух линий на плоскости. Выше мы указали, что это определение представляет тавтологию. Понятие угла вызвало полемику, начатую уже первыми комментаторами Евклида; они спорили, например, о том, является ли угол величиной или отношением (т. е. отношением, возникающим между данными двумя прямыми). Бесполезно было бы вникать во все подробности этой полемики; важно отметить, что в ходе ее выяснились некоторые существенно различные точки зрения на угол. Немецкий методист Шоттен, классифицируя все предлагавшиеся определения угла[1]), приходит к выводу, что они (за одним или двумя исключениями) могут быть разбиты на три группы, выражающие следующие точки зрения:

1. Угол есть разность направлений двух прямых линий.
2. Угол есть мера вращения, необходимого для того, чтобы одну из сторон угла из ее положения привести в положение другой стороны, не выводя ее при этом из плоскости, содержащей обе стороны.
3. Угол есть часть плоскости, заключенная между двумя пересекающимися прямыми (или между двумя лучами, выходящими из одной точки).

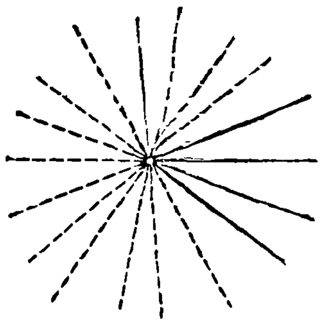
Указанные формулировки (кроме третьей) лишь намечают существенные черты различных определений угла, но сами не могут рассматриваться как определения. В первой формулировке остается неясным, что́ значит „разность направлений“. Можно считать, что

---

[1]) H. Schotten, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts, Bd. II, 1893.

направление есть первоначальное понятие, и примириться с тем, что мы его не определяем, но направление не является величиной, поэтому нельзя вычитать из одного направления другое. Во второй формулировке остается еще определить, как находится эта мера.

Определение Евклида относится к первой группе. Ко второй группе следует причислить определение итальянского геометра Веронезе, который предлагает рассматривать угол в пучке лучей (пучок лучей — это совокупность всех лучей, лежащих в одной плоскости и выходящих из одной точки). Два луча, принадлежащие пучку, разделяют этот пучок на две части (черт. 32). „Мы называем углом, — говорит Веронезе, — часть пучка лучей, ограниченную двумя лучами, подобно тому, как отрезок есть часть прямой линии, ограниченная двумя точками“.



Черт. 32. Угол как часть пучка.

Несомненно, понятие угла имеет различные стороны, и каждая из указанных точек зрения содержит часть истины. Спор об этих точках зрения не имеет значения для геометрии, однако он имеет большое значение для педагогики. Дело в том, что наглядный образ, которым мы иллюстрируем какое-либо понятие, **когда его первый раз вводим**, ассоциируется с этим понятием чрезвычайно прочно и в будущем всегда сопутствует этому понятию. Поэтому, если некоторое понятие может быть связано с различными образами, то вопрос о том, какой из них сделать первым, является чрезвычайно ответственным.

Мы рекомендуем учителю избрать третью точку зрения.

Во-первых, определение угла как части плоскости, заключенной между двумя лучами, выходящими из одной точки, является более конкретным и простым, чем определение при помощи меры вращения (которая сама нуждается в определении) или наклонения.

Во-вторых, мера вращения или наклонение суть числа, а угол — это геометрический образ; в начале курса геометрии часто приходится рассматривать углы равные, но различные (т. е. различно расположенные на плоскости). Между мерой вращения и углом как геометрическим образом такая же разница, как между длиной отрезка и самим отрезком.

Нет никакой необходимости вводить понятие о внутренней и внешней областях угла. Две полупрямые, исходящие из одной точки, определяют два разных угла. Мы будем каждый раз указывать, какой из них мы рассматриваем. При отсутствии специального указания обычно имеется в виду угол, меньший развернутого.

Разумеется, определение угла, которое мы рекомендуем, не может обслужить весь школьный курс математики. В тригонометрии нам придется стать на вторую точку зрения, так как она легче позволяет обобщить понятие угла, введя углы, бо́льшие полного оборота. Однако оно вполне достаточно для всего курса планиметрии; в стереометрии приходится обобщить понятие угла на случай скрещивающихся прямых.

Необходимо заставить учеников ясно осознать, что сторонами угла являются бесконечные лучи, и, таким образом, величины отрезков, изображающих на чертеже стороны угла, не имеют никакой связи с величиной угла. Угол не увеличится, если удлинить на чертеже его стороны.

Равенство и неравенство углов

После введения понятия угла следует определить равные углы и понятия „больше“ и „меньше“ для углов. При этом не надо определять понятие равенства (конгруентности) для всех геометрических образов вообще, а говорить только об углах. Во-первых, педагогически целесообразнее начать с конкретного геометрического образа, а потом вернуться к понятию равенства еще раз или даже еще несколько раз. Во-вторых, понятие равенства (конгруентности) для бесконечных фигур, каковыми являются углы, имеет некоторую специфическую особенность, отличающую его от этого же понятия для случая конечных фигур; об этой особенности см. гл. V, § 1 (стр. 94).

Смежные углы. Развернутый угол

Определение смежных углов не вызывает затруднений. Несколько сложнее понятие развернутого угла. Если угол, увеличиваясь, превращается в развернутый, то в этот момент его вершина становится неопределенной. Между тем развернутый угол — не то же самое, что полуплоскость, потому что, если речь идет о развернутом угле, то на прямой, служащей границей полуплоскости, должна быть отмечена точка, являющаяся вершиной угла.

Прямой угол

Прямой угол мы рекомендуем определять как угол, конгруентный своему смежному. Определение стабильного учебника (угол в 90°) выдвигает на первый план второстепенное свойство. Угол в 90° именно потому и представляет особый интерес, что он равен своему смежному. Кроме того, предлагаемое нами определение является более удобным с оперативной точки зрения: для доказательства того, что некоторый угол является прямым, обычно приходится доказывать, что он равен своему смежному. Наконец, равенство угла своему смежному есть внутреннее свойство угла, а определение стабильного учебника связывает понятие прямого угла со случайной единицей измерения углов (градусы). Вообще мы полагаем, что градусное измерение углов можно отложить надолго (до изучения окружности). В начале курса геометрии за единицу для измерения углов можно принимать прямой угол.

Острый угол определяется либо как угол, меньший прямого, либо как угол, меньший своего смежного; полезно привести оба определения. Аналогичное замечание относится к тупому углу. Разумеется, надо приучать учеников к тому, что, давая два определения какого-либо понятия, они обязаны доказывать их эквивалентность.

Первые теоремы

Определив прямой угол и перпендикуляр, следует доказать теоремы.

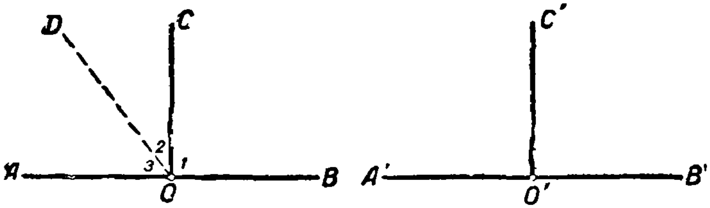
1. Все прямые углы равны между собой [1].

2. Из точки, взятой на прямой, можно восставить перпендикуляр к этой прямой и притом только один.

3. Из точки, взятой вне прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр и притом только один.

4. Смежные углы составляют в сумме $2d$.

Это — первые теоремы, с которыми знакомятся ученики. На их примере следует рассказать о том, что́ такое теорема. Напоминаем,



Черт. 33. Теорема о равенстве прямых углов.

что, ставя проблему, очень важно сначала сделать ее неясной, т. е. показать ученикам, что данная теорема не является само собой разумеющейся, а требует доказательства (гл. III, стр. 71).

Равенство прямых углов

Рассмотрим первую теорему. Многие ученики скажут, что само собой разумеется, что прямые углы равны между собой; им будет неясно, что́ здесь надо доказывать. Ставим вопрос следующим образом. Пусть даны два прямых угла; это значит лишь то, что каждый из них равен своему смежному. Таким образом, нам дано, что угол $\widehat{AOC}$ равен своему смежному и угол $\widehat{A'O'C'}$ своему смежному (черт. 33). Следует ли отсюда, что угол $\widehat{AOC}$ равен углу $\widehat{A'O'C'}$ (т. е. что эти углы могут быть совмещены наложением)? Это не очевидно. Другими словами, смежные прямые углы равны между собой по определению, но верно ли это для несмежных прямых углов?

Далее напоминаем, что необходимо уделять очень большое внимание записи при доказательстве теорем (гл. III, стр. 79). В данной теореме надо записать:

Условие	Следствие
$\widehat{AOC}$ — прямой	$\widehat{AOC} = \widehat{A'O'C'}$
$\widehat{A'O'C'}$ — прямой	

[1] В стабильном учебнике эта теорема отсутствует, так как там принят другой порядок изложения (сразу вводится измерение центральных углов дугами).

Впоследствии будем записывать „$\widehat{AOC} = d$“. Пока следует воздержаться от такой записи, так как пока не доказано, что все прямые углы разны между собой, букву d нельзя рассматривать как символ определённой величины.

Для доказательства теоремы надо наложить второй чертеж на первый так, чтобы точка O' попала в O, луч $O'A'$ пошел по лучу OA и луч $O'C'$ оказался бы в одной полуплоскости с OC. Допустим, что луч $O'C'$ не пойдет по лучу OC, а займет положение OD. Тогда

$$\widehat{1} = \widehat{2} + \widehat{3} \text{ (потому что угол } \widehat{1} = \widehat{BOC} \text{ — прямой)}$$

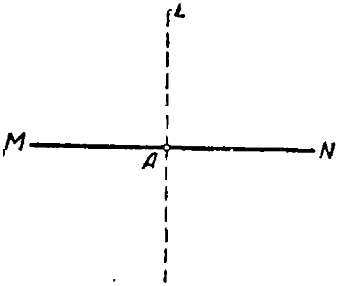
$$\widehat{1} + \widehat{2} = \widehat{3} \text{ (потому что угол } \widehat{1} + \widehat{2} = \widehat{B'O'C'} \text{ — прямой).}$$

Вычитая эти равенства одно из другого, получим:

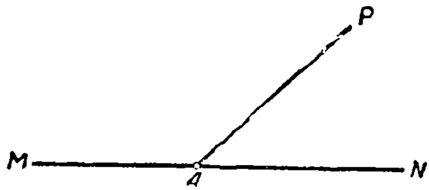
$$-\widehat{2} = \widehat{2}, \text{ т. е. } \widehat{2} = 0,$$

чтó противоречит предположению, что прямые OC и OD различны.

Это доказательство при изложении в школе придется слегка изменить, учитывая, что ученики еще не знакомы с алгеброй. Можно, не вычитая полученных равенств, объяснить, что они противоречат друг другу. Действительно, во втором равенстве



Черт. 34.



Черт. 35.

левая часть увеличилась по сравнению с левой частью первого равенства, а правая часть, наоборот, уменьшилась. Поэтому, если первое равенство справедливо, то второе не может быть справедливо.

В связи с этой теоремой можно объяснить ученикам, чтó такое „доказательство от противного“. Разумеется, к этому придется возвращаться еще много раз.

Существование перпендикуляра

Для второй теоремы можно предложить два доказательства. Пусть на прямой MN дана точка A (черт. 34). Перегнем чертеж в точке A так, чтобы луч AN пошел по лучу AM. Прямая AL, по которой перегнется чертеж, перпендикулярна MN, потому что при перегибании угол $\widehat{NAL}$ совмещается с углом $\widehat{MAL}$. Другое доказательство основано на непрерывности. Проведем из точки произвольный луч AP (черт. 35). Если AP не перпендикулярно MN, то из двух углов с вершиной A один меньше другого. Если $\widehat{NAP} < \widehat{MAP}$, то вращаем луч AP около точки A в такую сторону, чтобы угол $\widehat{NAP}$ увеличивался, а угол $\widehat{MAP}$ уменьшался. В конце концов наступит такое положение, когда угол $\widehat{NAP}$ станет больше угла $\widehat{MAP}$. Следовательно, существует промежуточное положение луча AP, при котором угол $\widehat{NAP}$ равен $\widehat{MAP}$.

Вопрос об использовании непрерывности

Некоторые методисты возражают против второго доказательства, так как оно опирается на понятие непрерывности, являющееся, по их мнению, весьма сложным и абстрактным. Нам кажется, что они смешивают две разные вещи. Известно, что наиболее простые и элементарные понятия часто оказываются весьма трудными для логического анализа. Понятие непрерывности является весьма простым и знакомым каждому человеку. Ни один ученик не подвергнет сомнению приведенное здесь доказательство. Другое дело, что облечь интуитивно знакомое понятие непрерывности в логическую форму (например, в форму аксиомы Дедекинда) представляет значительную сложность. Поскольку мы этого не делаем и даже не упоминаем о непрерывности, а предполагаем, что ученикам это обстоятельство (существование промежуточного положения AP, при котором $\widehat{NAP} = \widehat{MAP}$) настолько ясно, что они не заметят наличия здесь некоторой несформулированной аксиомы, пользование непрерывностью не представляет ни малейшей трудности. Введение же нового метода доказательства является положительным моментом. Доказательства, основанные на непрерывности, в геометрии весьма часты, особенно в качестве эвристических наведений.

Первое доказательство имеет то преимущество, что оно *эффективно*, т. е. оно не только устанавливает существование перпендикуляра, но и дает способ для его нахождения (перегибание чертежа); второе доказательство дает только существование перпендикуляра.

Единственность перпендикуляра

Доказав *существование* перпендикуляра в точке A, надо доказать его *единственность*. Прежде всего надо убедить учеников в том, что это нуждается в доказательстве. Перегибание чертежа приводит к единственной прямой, по которой чертеж перегнется, и, казалось бы, единственность перпендикуляра тем самым доказана. Выясним этот вопрос в более общей форме, имея в виду и другие доказательства единственности, встречающиеся в геометрии.

Допустим, что мы указываем определенный способ для нахождения объекта, удовлетворяющего некоторым условиям, и этот способ приводит к единственному результату. Остается открытым вопрос: может быть, существует другой способ для нахождения искомого объекта, и этот другой способ призодит к другому результату? В данном случае, если искать перпендикуляр в точке A к прямой MN перегибанием чертежа, то мы приходим к единственному перпендикуляру. Но, может быть, какой-нибудь другой способ построения приведет нас к другому перпендикуляру? Чтобы доказать единственность, необходимо, не опираясь на способ нахождения искомого объекта, доказать, что не может быть двух различных объектов, удовлетворяющих данным условиям. В данном случае рассуждаем так: допустим, что в точке A существовали бы два перпендикуляра к прямой MN (безразлично, какими способами найденные). Повторяя то рассуждение, которое мы применяли в теореме о равенстве прямых углов, придем к противоречию.

Есть несколько иной путь для доказательства единственности: доказывают, что всякий объект, удовлетворяющий данным условиям, обязательно должен получаться при помощи определенного построения. Пусть, например, дано, что $AL \perp MN$ (черт. 34). Перегнем чертеж по AL. Тогда луч AN должен совпасть с AM (вследствие равенства углов $\widehat{NAL}$ и $\widehat{MAL}$). Следовательно, перпендикуляр AL обязательно должен быть линией перегибания чертежа (при совпадении AN с AM). Но так как такое перегибание определяет единственную линию перегибания (последнее мы, впрочем, принимаем интуитивно; в действительности это эквивалентно доказываемой теореме, и, таким образом, мы лишь наглядно, на модели, убеждаемся в истинности этой теоремы), то перпендикуляр — единственный.

Мы не будем останавливаться на теореме о существовании и единственности перпендикуляра, проходящего через точку вне прямой. Она также может быть доказана перегибанием чертежа (как в стабильном учебнике) или непрерывным вращением.

Без всяких затруднений доказывается, что сумма двух смежных углов равна $2d$, и вытекающая отсюда теорема о равенстве вертикальных углов.

Треугольники

Исчерпав весь этот подготовительный материал, мы можем перейти к изучению многоугольников и — в первую очередь — треугольников. Изучение треугольников мотивируется тем, что треугольник есть простейшая фигура. Это значит, что не может быть фигуры, ограниченной менее чем тремя прямыми: двухугольников не бывает. Некоторые комментаторы Евклида считали это положение особой аксиомой, оно фигурирует в некоторых списках „Начал“ под названием 9-й аксиомы или VI постулата: „Две прямые линии не могут заключать (или содержать) пространства“.

Классификация *треугольников по величине сторон и по величине* углов может быть дана либо теперь же, либо несколько позже. Важно подчеркнуть, что это классификации с различными основаниями деления. Ученикам это можно объяснить в той форме, что нельзя ставить в один ряд эти две классификации, т. е. следующие замечания являются ошибочными.

— Это не равнобедренный треугольник, а прямоугольный.

— Какой это треугольник: остроугольный или равносторонний? Важно также понять, какие виды треугольников являются частными случаями других. Например, равносторонний треугольник является частным случаем равнобедренного; противопоставлять их нельзя. Утверждение „Это не равнобедренный треугольник, а равносторонний" ошибочно.

Понятия о высоте, медиане и биссектрисе также могут быть введены либо теперь же, либо несколько позже, в тот момент, когда в них возникнет надобность.

Симметрия Отдел о симметрии геометрических фигур относительно оси, данный в стабильном учебнике, мы не рекомендуем проходить. Это раздел, имеющий весьма мало применений в других разделах элементарной геометрии. Учение о симметрии, напротив, само интересно как повод для приложения других геометрических теорий, в первую очередь — признаков конгруентности треугольников. Поэтому симметрию целесообразнее проходить после признаков конгруентности треугольников.

На этом заканчиваются уроки, которые можно считать вводными. Теперь ученики накопили достаточный запас основных понятий, чтобы начать систематическую работу по геометрии. Им предстоит перейти к первому ясно очерченному разделу курса: признаки конгруентности треугольников и их применение.

ГЛАВА V

КОНГРУЕНТНЫЕ ФИГУРЫ

§ 1. Значение теории конгруентности в курсе геометрии

Терминологическое замечание В школьном курсе укоренился обычай называть р а в н ы м и фигуры, которые могут быть совмещены наложением. В современной научной литературе такие фигуры называются не равными, а к о н г р у е н т н ы м и. Мы объясним, почему не следует называть такие фигуры равными.

Равенство есть некоторое отношение между величинами, которое в разных отделах математики может иметь разный конкретный смысл, но, во всяком случае, должно обладать некоторыми общими свойствами. К этим свойствам принадлежат, например, те, о которых идет речь во 2-й и 3-й аксиомах Евклида.

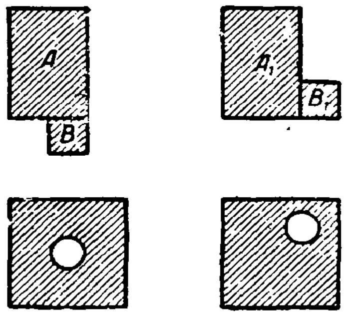
А к с и о м а 2. Если к равным прибавить равные, то получатся равные.

А к с и о м а 3. Если от равных отнять равные, то останутся равные.

На черт. 36 прямоугольник A может быть совмещен наложением с прямоугольником A_1, а прямоугольник B — с прямоугольником B_1. Несмотря на это, фигура, составленная из прямоугольников A и B, не может быть совмещена с фигурой, составленной из прямоугольников A_1 и B_1. Таким образом, если называть равными фигуры, могущие быть совмещенными, то выйдет, что от прибавления к равным фигурам равных могут получиться неравные.

На том же чертеже изображены два „равные" квадрата, от них отняты „равные" круги. Оставшиеся части (заштрихованные) не „равны" между собой.

Итак, отношение между фигурами, заключающееся в том, что они могут быть совмещены, есть особое геометрическое отношение, не похожее на равенство. Поэтому для обозначения этого отношения необходим особый термин.



Черт. 36.

К сожалению, в учебной литературе до сих пор по традиции удерживается термин „равенство" вместо „конгруентность". Мы объяснили несостоятельность такой терминологии с научной точки зрения. Но, быть может, он имеет право на существование по мотивам педагогическим?

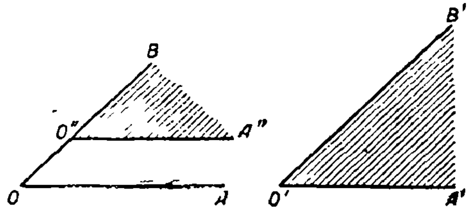
На этот вопрос следует ответить отрицательно. Мы понимаем, что́ значит трудное понятие или трудное рассуждение, но мы отказываемся понять, что́ значит трудный термин. Произнести слово „конгруентный" ученику не труднее, чем „равный". Иногда приходится слышать, что „равенство" — слово знакомое, „конгруентность" — незнакомое. Однако этот довод говорит в пользу нашей точки зрения. Если „равенство" — слово, уже́ знакомое ученикам, то употребление этого слова не в том смысле, в каком оно употребляется обычно, должно приводить к недоразумениям. Такое недоразумение возникает обычно в теории площадей, когда ученики склонны называть равными фигуры с равными площадями (что́ вполне соответствует смыслу слова „равный"). Удобнее употребить совсем новое слово — „конгруентность"; с ним у учеников ничто не ассоциируется, и они будут понимать его только в том смысле, какой мы ему припишем в определении.

Исходя из этих соображений, мы рекомендуем учителю с самого начала пользоваться научной терминологией и говорить, например, „признаки конгруентности треугольников", а не „признаки равенства треугольников". При этом, разумеется, учитель столкнется с одним затруднением: формулировки будут отличаться от формулировок учебника и задачника, которые пока еще не перешли на правильную терминологию. Из-за этого расхождения будет весьма трудно добиться от учеников единообразной терминологии. Мы надеемся, что в учебную литературу будет внесено соответствующее изменение, и тогда это затруднение отпадет.

Для отрезков допустимо называть конгруентность равенством, если только условиться при сложении и вычитании отрезков совмещать эти отрезки концами, т. е. делать так, чтобы сумма или разность двух отрезков представляла **один** отрезок, а не пару отдельных отрезков.

Конгруентность углов

Понятие конгруентности для углов и вообще для незамкнутых частей плоскости требует одной оговорки. Мы определили выше конгруентные фигуры как фигуры, которые **могут быть** совмещены наложением. Неточно говорить, что конгруентные фигуры это такие, которые совмещаются при наложении. Совмещение зависит от того, как мы произведем наложение; при ненадлежащем способе наложения конгруентные фигуры могут и не совместиться. Итак, если даны две фигуры A и A_1 и мы произвольным образом наложим A_1 на A, то: если A_1 совместится с A, то эти фигуры конгруентны; если A_1 не совместится с A, то из этого ничего не вытекает. Но если при наложении фигура A_1 совместится с частью фигуры A, то фигуры A и A_1 безусловно не конгруентны.



Черт. 37.

Это положение, верное для фигур, неверно для незамкнутых частей плоскости. Пусть имеются два конгруентные угла (черт. 37). Если наложить угол $\widehat{A'O'B'}$ так, чтобы он занял положение $\widehat{A''O''B}$ $(O''A'' \parallel OA)$, то обнаружится, что угол $\widehat{A'O'B'}$ конгруентен **части** угла $\widehat{AOB}$; в то же время угол $\widehat{A'O'B'}$ конгруентен и всему углу AOB [1]). Мы видим, что угол, рассматриваемый как часть плоскости, может быть конгруентен своей части. Это обстоятельство вызвало ряд известных в истории геометрии недоразумений (см., например, попытку доказательства V постулата, принадлежащую Луи Бертрану; гл. VI, стр. 119).

Было бы целесообразнее установить для углов раз навсегда определенный прием наложения, а именно налагать угол $\widehat{A'O'B'}$ на угол $\widehat{AOB}$ так, чтобы вершина O' совместилась с вершиной O, луч $O'A'$ пошел по лучу OA и оба угла оказались по одну сторону от луча OA. Если при этом луч $O'B'$ совместится с лучом OB, то углы конгруентны, в противном случае — нет. Конгруентные углы можно также называть **равными**, если условиться при построении суммы

---

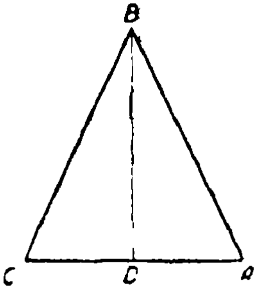
[1]) То положение, что фигура (т. е. ограниченная со всех сторон часть плоскости) не может быть конгруентна своей части, является частным случаем принципа де-Цольта, который будет рассмотрен в главе X (§ 3). Как видно, принцип де-Цольта несправедлив для бесконечных частей плоскости.

и разности углов всегда прикладывать их одной стороной, т. е. делать так, чтобы сумма или разность двух углов представляла один угол, а не два.

Фактически мы здесь рассматриваем угол не как часть плоскости, а как часть пучка, т. е. одномерный образ. Поэтому заштрихованная область $\widehat{A''O''B}$ на черт. 37 не является частью угла $\widehat{AOB}$. *Частью угла может являться только угол с той же вершиной.*

Роль признаков конгруентности треугольников в курсе геометрии

Движение вводится в геометрию для установления понятия конгруентности. Однако нет необходимости прибегать к движению каждый раз, когда требуется доказать конгруентность каких-либо отрезков, углов или других фигур. Можно свести к минимуму непосредственное[1]) использование движения в геометрии. В этом и заключается назначение признаков конгруентности треугольников. После того как признаки конгруентности треугольников доказаны, можно больше нигде не пользоваться движением для доказательства конгруентности отрезков и углов, а включать эти отрезки и углы в состав каких-нибудь треугольников и доказывать конгруентность этих треугольников, ссылаясь на доказанные признаки конгруентности треугольников. Целесообразно ли с педагогической точки зрения так *поступать? Этот вопрос будет подвергнут* обсуждению ниже.



Черт. 38.

Пример. Пусть требуется доказать, что в равнобедренном треугольнике биссектриса является одновременно медианой и высотой. Итак, дано, что BD — биссектриса и $BA = BC$ (черт. 38). Перегнем чертеж по BD, или, другими словами, произведем отражение в BD; дальнейшее доказательство ясно. Здесь мы непосредственно используем движение (отражение). Этого можно избежать, рассуждая так: $BA = BC$, $\widehat{ABD} = \widehat{CBD}$, сторона BD — общая; следовательно, $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$, откуда и следует доказываемая теорема.

Для доказательства конгруентности не отрезков или углов, а других образов, не могущих служить элементами треугольника (например, дуг окружностей), приходится прибегать непосредственно к движению (например, в теореме „Дуги одной окружности или равных окружностей, стягиваемые равными хордами, равны между собой").

---

[1]) Непосредственное использование движения — это доказательство конгруентности каких-либо фигур путем наложения. Если же мы не производим наложения, но ссылаемся на признаки конгруентности треугольников, то мы также используем движение, хотя не непосредственно, потому что эти признаки были доказаны путем наложения.

§ 2. Конгруентность и движение

Абстрактный характер движения в геометрии

Для доказательства признаков конгруентности треугольников Евклид пользуется движением. В дальнейшем он обращается к движению чрезвычайно редко.

Пользуясь наложением одной фигуры на другую, т. е. передвигая фигуру в ее плоскости, Евклид в своих определениях, аксиомах и постулатах не предусматривает возможности движения. Он опирается на интуитивное представление о движении, не находя необходимым заранее сформулировать те свойства движения, которыми необходимо пользоваться в геометрии.

Движение, которым мы пользуемся при геометрических доказательствах, представляет дальнейшую абстракцию по сравнению с движением, изучаемым в кинематике, потому что в геометрии мы исключаем понятие времени. Мы не рассуждаем о том, сколько времени и с какой скоростью движется в плоскости одна фигура, пока она придет в совпадение с другой фигурой. Нам даже безразлично, к а к она двигалась, т. е. какие промежуточные положения занимала. Нам важен лишь окончательный результат, заключающийся в том, что фигура совпала с другой фигурой.

Два способа введения в геометрию движения и конгруентности

Понятия движения и конгруентности определяются одно через другое. Поэтому одно из них должно быть принято без определения (т. е. либо оно должно считаться известным интуитивно, либо необходимо сформулировать в аксиомах те его свойства, на которые мы намерены ссылаться). Отсюда ясно, что существуют два способа для введения в геометрию понятий движения и конгруентности.

П е р в ы й с п о с о б: положить в основу понятие движения. Если мы знаем, что́ значит „движение“, то легко определить, какие фигуры называются конгруентными. Этим способом пользовался Евклид. Мы покажем дальше, как этот способ можно сделать логически совершенным, если сформулировать в аксиомах те свойства движения, которые необходимы при построении геометрии.

В т о р о й с п о с о б: положить в основу понятие конгруентности. Если считать непосредственно известным (не опираясь на понятие движения), какие фигуры являются конгруентными, то, во-первых, можно определить движение: движением называется такое преобразование плоскости, при котором всякая фигура в этой плоскости остается конгруентной исходной. Во-вторых, можно вовсе обойтись без понятия движения, так как движение используется в геометрии только для установления понятия конгруентности. Этот способ использован Гильбертом.

Оба способа одинаково безупречны с логической точки зрения, но педагогически они неразноценны.

Рассмотрим теперь оба способа подробно.

Какие свойства движения необходимы в геометрии

При доказательстве первого признака конгруентности треугольников мы рассуждаем так. Пусть в треугольниках ABC и $A'B'C'$ $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$. Налагаем второй треугольник на первый так:

1) чтобы точка A' попала в точку A,

2) чтобы прямая $A'B'$ пошла по прямой AB,

3) чтобы точка B' оказалась на этой прямой от точки A с той же стороны, что́ и точка B, и

4) чтобы второй треугольник оказался по ту же сторону от прямой AB, что́ и первый.

После этого мы доказываем:

5) что точка B' совпадет с точкой B,

6) что прямая $A'C'$ пойдет по прямой AC,

7) что точка C' совпадет с точкой C и

8) что прямая $B'C'$ совпадет с прямой BC.

Спрашивается: почему первые четыре положения мы требуем, т. е. считаем, что от нас зависит наложить второй треугольник на первый так, чтобы эти условия соблюдались, а следующие четыре положения мы считаем от нас независящими и доказываем их? Это вытекает из нашего интуитивного представления о движении. Нам кажется очевидным, что всегда можно, двигая фигуру в плоскости, добиться того, чтобы любая точка этой фигуры попала в любую наперед заданную точку плоскости, но, вообще говоря, нельзя добиться того, чтобы две любые точки фигуры попали в две наперед заданные точки плоскости. Для построения геометрии необходимо заранее сформулировать, каких совмещений можно достичь движением, т. е. что́ мы вправе *требовать* при наложении фигур.

Движение как геометрическое преобразование

Понятие преобразования играет основную роль в геометрии. В целях подготовки к нему мы рассмотрим некоторые частные случаи преобразований (конгруентность, подобие).

Изменим нашу точку зрения на движение следующим образом. Раньше мы представляли себе твердую (неизменную) фигуру, которая движется в плоскости; эта плоскость остается неподвижной. Теперь будем представлять себе, что фигура твердо связана с плоскостью и не может в ней двигаться. Движется не фигура, а вся плоскость (оставаясь сама в себе); при этом движении плоскость несет на себе фигуру, твердо с ней связанную.

Так, если треугольник нанесен на лист бумаги, а этот лист бумаги лежит на столе, то треугольник не может двигаться по бумаге. Однако лист бумаги можно передвигать по столу; при этом и треугольник будет двигаться в плоскости стола вместе с тем листом бумаги, на который он нанесен.

Если эта точка зрения покажется читателю непривычной, то мы должны предупредить его, что для ясного понимания многих вопросов геометрии (всех вопросов, связанных с преобразованиями) все-таки необходимо на эту точку зрения перейти.

Отсюда вытекает, что мы теперь должны рассматривать плоскость как *двойную* или, иначе говоря, мы должны рассматривать две плоскости, совмещенные вместе. Если бы мы мыслили только одну плоскость и все фигуры, лежащие в ней, были бы с ней твердо связаны, то мы не могли бы наблюдать взаимного движения фигур: при движении нашей плоскости все принадлежащие ей фигуры двигались бы вместе с ней, и их взаимное расположение не менялось бы. Кроме того, говорить о движении плоскости вообще не имело бы смысла, так как движение может быть обнаружено лишь по отношению к некоторым образам, условно принимаемым за неподвижные.

Итак, мы имеем совпадающие плоскости. Для различения припишем им какие-нибудь названия, например, будем говорить „первая плоскость" и „вторая плоскость". Теперь если на чертеже отмечена точка A, то ее надо считать за две точки: одна из них принадлежит первой плоскости, а другая — второй. Пока эти точки совпадают, но когда мы начнем двигать вторую плоскость, то они разойдутся.

В приведенном выше примере с треугольником, нанесенным на лист бумаги, первая плоскость — это поверхность стола, а вторая — лист бумаги. Если один треугольник нанесен непосредственно на стол, а другой — на лист бумаги, то, двигая лист бумаги по столу, мы будем наблюдать движение одного треугольника относительно другого.

Формулировка свойств геометрических движений

Будем пока считать, что мы имеем интуитивное представление о движении плоскости самой в себе. *Основываясь на этом представлении*, сформулируем некоторые свойства движений.

Свойство 1. Движением можно любую заданную точку плоскости совместить с любой другой заданной точкой.

Итак, можно данную точку A' перевести в любую другую данную точку A, но это требование еще не определяет движения. В самом деле, после того, как точка A' приведена в совмещение с точкой A, можно повернуть вторую плоскость около точки A на произвольный угол. При этом повороте точка A' останется в совмещении с точкой A. Если через точку A в первой плоскости проходила некоторая данная прямая a, а через точку A' во второй плоскости — некоторая данная прямая a', указанным вращением можно добиться того, чтобы прямая a' совпала с прямой a.

Свойство 2. И кроме того [1]), любую заданную прямую, проходящую через первую точку, можно совместить с любой заданной прямой, проходящей через вторую точку.

После того как точка A' совместилась с точкой A и прямая a' совместилась с прямой a, можно еще повернуть вторую плоскость около точки A на 180°; такой поворот не расстроит уже достигнутых

---

[1]) Формулировки всех свойств движения являются продолжениями одна другой.

совмещений. Следовательно, мы можем достичь того, чтобы часть прямой a', лежащая по заданную сторону от точки A' (луч); совпала с частью прямой a, лежащей по заданную сторону от точки A: для этого надо, смотря по обстоятельствам, либо повернуть вторую плоскость вокруг точки A на $180°$, либо не поворачивать. Это свойство можно сформулировать так:

Свойство 3. И кроме того, можно добиться, чтобы заданная точка B' прямой a' оказалась по данную сторону от точки A на прямой a.

Свойства 2 и 3 можно было бы объединить в следующей формулировке:

И кроме того (т. е. кроме совмещения точки A' с точкой A), любой заданный луч, выходящий из точки A', можно совместить с любым заданным лучом, выходящим из точки A.

После этого, не расстраивая ужé достигнутых совмещений, можно еще перевернуть вторую плоскость около прямой a, или, другими словами, отразить ее в этой прямой. Следовательно, мы можем достичь того, чтобы часть второй плоскости, лежащая по заданную сторону от прямой a' (полуплоскость), совпала с частью первой плоскости, лежащей по определенную сторону от прямой a; для этого надо, смотря по обстоятельствам, либо отразить вторую плоскость в прямой a, *либо не отражать*. Это свойство можно сформулировать так:

Свойство 4. И кроме того, можно добиться, чтобы заданная точка C', не лежащая на прямой a', оказалась по заданную сторону от прямой a.

Мы утверждаем, что больше ничего от движения требовать нельзя; другими словами, если все указанные требования будут выполнены, то движение будет вполне определенным.

Движение как процесс и как соответствие

Это утверждение нуждается еще в следующем пояснении. Термин „движение" употребляется в геометрии в двух различных смыслах, а именно:

Первый смысл. Движение понимается как процесс, заключающийся в том, что некоторый геометрический образ, рассматриваемый как твердый, непрерывно изменяет свое положение в пространстве [1]).

---

[1]) В частности, может случиться, что этот образ движется сам в себе, например, плоскость в плоскости. В этом случае мы все равно считаем, что данный образ изменяет свое положение в пространстве. Дело в том, что, рассматривая, например, плоскость, мы считаем, что все ее точки индивидуализированы; это будет иметь место, если в плоскости установлена система координат. Поэтому, если плоскость сдвинулась, хотя бы оставаясь сама в себе, то ее положение в пространстве изменилось, так как каждая ее точка занимает не то положение, что прежде.

Другое дело, если бы мы рассматривали гладкую плоскость, т. е. плоскость, в которой не установлена система координат и точки которой, следовательно, не индивидуализированы. Движение такой плоскости можно заметить лишь в том случае, если она выходит из своего первоначального положения; о движении же ее самой в себе вообще не имеет смысла говорить, так как это движение не может быть обнаружено.

Второй смысл. Движение понимается как соответствие между точками данного геометрического образа в исходном и в конечном положении. При этом мы совершенно не интересуемся тем процессом, который привел наш образ из начального положения в конечное, а интересуемся лишь окончательным результатом.

Понятие о движении в первом смысле (движение как процесс) является непосредственной абстракцией того понятия о движении, которое изучается в кинематике. Разница между кинематическим и геометрическим движением как процессом заключается в том, что в геометрии мы отвлекаемся от времени и рассматриваем непрерывное изменение положения геометрического образа, не интересуясь тем, какому моменту времени соответствует каждое промежуточное положение. Понятие же о движении как соответствии представляет дальнейшую абстракцию, так как здесь мы отвлекаемся от рассмотрения промежуточных положений движущегося образа.

Когда мы говорим „линия есть след движущейся точки", то мы понимаем движение в первом смысле.

Когда мы изучаем признаки конгруентности треугольников, мы всегда пользуемся движением во втором смысле (движение как соответствие). В самом деле, нам безразлично, какие промежуточные положения занимал второй треугольник, *прежде чем* совместился с первым; важен лишь окончательный результат: можно ли совместить два данные треугольника или нет?

Вполне определенное движение

Когда речь идет о движении как соответствии, то мы считаем движение вполне определенным, если *установлено, какая точка первой плоскости* соответствует каждой точке второй плоскости, и обратно. В этом смысле и было сказано, что, если удовлетворить всем требованиям, о которых идет речь в свойствах 1—4, то этим движение будет вполне определено. Итак, в свойствах 1—4 перечисляется, что́ мы имеем право требовать, т. е. утверждается, что существует движение, удовлетворяющее всем этим требованиям. Теперь мы утверждаем, что, кроме того, что́ перечислено в свойствах 1—4, больше ничего требовать нельзя, или, другими словами, существует лишь единственное движение, удовлетворяющее всем выставленным требованиям. Это свойство сформулируем так:

Свойство 5. Если теперь (т. е. после удовлетворения сформулированных выше четырех требований) во второй плоскости дана точка D' (безразлично, принадлежащая прямой a' или нет), то она совместится со вполне определенной точкой D первой плоскости.

Можно сформулировать это свойство несколько иначе:

Свойство 5'. Не существует двух движений, которые оба удовлетворяли бы требованиям 1—4, но одно переводило бы заданную точку D' второй плоскости в точку D_1 первой плоскости, а другое переводило бы ту же самую точку D' в точку D_2, не совпадающую с D_1.

Групповое свойство движений

Свойство 6. Результат двух движений есть движение. Другими словами, если первое движение переводит точки X в точки Y (X — любая точка плоскости, а Y — соответствующая точка второй плоскости), а второе движение переводит точки Y в точки Z, то преобразование, переводящее точки X в точки Z, тоже является движением.

Это свойство называется групповым свойством движений. Без него нельзя доказать транзитивности конгруентности, т. е. следующего положения: если фигура P конгруентна фигуре Q, а фигура Q конгруентна фигуре R, то фигура P конгруентна фигуре R.

Аксиоматическое определение движений

Мы сказали выше, что все эти свойства вытекают из нашего интуитивного представления о движении. Движение обладает еще многими другими свойствами, но для геометрии[1] нужны только эти шесть. Поэтому, если мы в геометрических рассуждениях будем каждый раз обращаться к нашему интуитивному представлению о движении, то будем вводить в геометрию лишние (т. е. такие, которые нигде не будут использованы) представления. Лучше принять наши шесть свойств в качестве аксиом; в этих аксиомах сформулированы все свойства движений, которые нужны для геометрии, и в дальнейшем, пользуясь движениями, не будем обращаться к интуитивному представлению о нем, а будем ссылаться на эти шесть аксиом.

Введя при помощи этих шести аксиом понятие движения (плоского), можно определить понятие конгруентности. Две фигуры называются конгруентными, если они могут быть совмещены движением. Согласно свойству 1, всякие две точки конгруентны. Из свойств 1 и 2 легко вывести, что всякие две прямые конгруентны. Далее совсем легко доказать все аксиомы конгруентности Гильберта; предоставляем читателю самому сделать это.

Особая роль треугольников в теории конгруентности

Почему в теории конгруентности основную роль играют признаки конгруентности треугольников, а не каких-либо других фигур?

Пусть даны две конгруентные фигуры P и P' (черт. 39); этим однозначно определено движение второй плоскости (плоскости фигуры P'), при котором фигура P' совпадет с P[2]. Возьмем в плоскости фигуры P' какую-нибудь точку A'; ей соответствует в плоскости фигуры P некоторая вполне определенная точка A. Если в плоскости фигуры P' взять несколько точек A', B', C', D', ..., то в плоскости фигуры P определятся соответственные точки A, B, C, D, ... Можно проводить прямые через всевозможные пары точек A', B', C', D', ... и соответственные

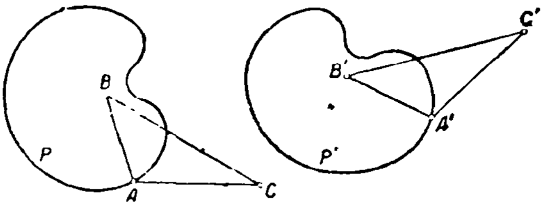
---

[1]) На плоскости.

[2]) В некоторых исключительных случаях, о которых сказано ниже, задание двух конгруентных фигур не определяет вполне движения, совмещающего одну с другой.

прямые на другой плоскости; тогда обе плоскости покроются сетками из конгруентных многоугольников. Впрочем, это проведение прямых не дает ничего нового, так как они уже определены заданием точек. Может случиться, что эта сеть вполне определяет то движение, которое вначале определялось заданием фигур P и P'; тогда задание фигур P и P' *для определения движения станет излишним.*

Поставим вопрос: какова минимальная (с наименьшим числом вершин) сетка, определяющая движение? Другими словами: какие две простейшие конгруентные фигуры должны быть даны в двух плоскостях, чтобы при совмещении этих фигур эти плоскости оказались совершенно „склеенными", т. е. не допускали бы никакого изменения своего взаимного положения?



Черт. 39. Конгруентные фигуры.

Итак, мы теперь хотим устанавливать соответствие между точками двух совмещенных плоскостей не при помощи требований, сформулированных в свойствах 1—4, а непосредственно задавая в этих плоскостях конгруентные фигуры.

Зададим в каждой плоскости по одной точке. Ясно, что этого недостаточно.

Тогда зададим в каждой плоскости по две точки. Разумеется, эти две пары точек не могут быть заданы произвольно; необходимо, чтобы определяемые ими в каждой плоскости отрезки были конгруентны. Спрашивается: **если даны два конгруентные отрезка a и a', то определяется ли этим единственное движение плоскости, при котором отрезок a' совместится с a?**

Первый случай. Концы отрезков не индивидуализированы.

Второй случай. Концы отрезков индивидуализированы.

В первом случае требуется совместить отрезок a' с отрезком a, но безразлично, какой из концов отрезка a' с каким из концов отрезка a совместится. Допустим, что каким-либо движением мы достигли требуемого совмещения. Тогда можно, **не нарушая достигнутого совмещения**, сделать еще следующее:

1) Повернуть вторую плоскость[1]) на 180° около середины отрезка a,

2) отразить вторую плоскость в прямой, на которой лежит отрезок a.

Во втором случае концы отрезков индивидуализированы, например, обозначены разными буквами; пусть это конгруентные отрезки AB и $A'B'$. Требуется найти движение, совмещающее A' с A и B' с B.

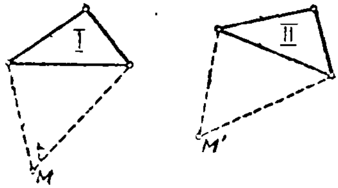
[1]) Разумеется, саму в себе; мы рассматриваем лишь плоские движения.

Этот случай отличается от предыдущего тем, что здесь, найдя одно требуемое движение, нельзя сделать поворота плоскости на 180° около середины отрезка, но попрежнему можно отразить вторую плоскость в прямой AB.

Итак, задание в каждой плоскости пары точек недостаточно для определения единственного движения. Делаем следующую попытку: зададим в каждой плоскости по три точки.

Теперь мы стоим перед следующим вопросом: даны два конгруентные треугольника ABC и $A'B'C'$. Вполне ли определено движение, совмещающее треугольник $A'B'C'$ с треугольником ABC?

Прежде чем ответить на этот вопрос, отметим одно существенное обстоятельство. Когда нам было предъявлено требование совместить два конгруентные отрезка, то оказалось необходимым различать случаи, когда концы отрезков индивидуализированы и когда они не индивидуализированы. При задании трех точек все они сами собой оказываются индивидуализированными, так как лежат против разных сторон треугольника (исключением является случай, когда треугольник — равнобедренный).



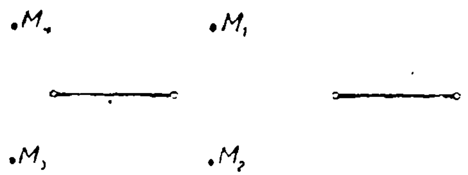
Черт. 40. Конгруентные треугольники.

Теперь легко понять, что задание двух конгруентных треугольников определяет одно и только одно движение, совмещающее второй треугольник с первым. Треугольник есть простейшая фигура, обладающая таким свойством. Этим и объясняется, почему признаки конгруентности треугольников играют столь важную роль. Конгруентность любых других фигур может быть сведена к конгруентности треугольников.

Пусть даны два конгруентные треугольника (черт. 40); мы нарочно не ставим букв в вершинах. Пусть в плоскости второго треугольника дана точка M'. Когда мы говорим, что движение, совмещающее второй треугольник с первым, однозначно определено, то это значит, что всякой точке M' второй плоскости соответствует одна, вполне определенная точка первой плоскости. Эту точку легко построить: построим треугольник, основанием которого служит одна из сторон второго треугольника, а вершиной — точка M', затем построим конгруентный треугольник, основанием которого будет служить соответственная сторона первого треугольника, причем точка M должна лежать в той же полуплоскости, что весь первый треугольник, или в другой, смотря по тому, лежит ли точка M' в той же полуплоскости, что и второй треугольник. Вершина этого построенного треугольника и будет искомая точка M.

Напоминаем, что равнобедренный треугольник является исключением. Если даны два конгруентные равнобедренные треугольника, то, совместив второй с первым, можно еще, не расстраивая этого совмещения, отразить вторую плоскость в высоте первого треугольника.

Изложенный выше вопрос об особой роли треугольника в теории конгруентности можно рассмотреть несколько иначе. Пусть даны два конгруентные отрезка (черт. 41). Движение, переводящее второй в первый, является не вполне определенным, потому что: 1) при задании отрезка невозможно (без дополнительных указаний) различать две полуплоскости, определяемые этим отрезком; 2) если концы отрезка не индивидуализированы, то невозможно различать два направления на этом отрезке. Поэтому, если во второй плоскости дана точка M', то движение, совмещающее второй отрезок с первым, может привести точку M' в любое из четырех положений M_1, M_2, M_3, M_4.

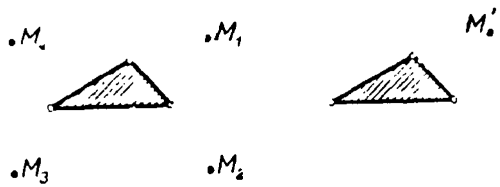


Черт. 41.

Если же задать два конгруентные треугольника, т. е. к отрезкам добавить еще по одной точке (черт. 42), то эта добавленная точка выполняет двоякую роль:

1) она позволяет различать полуплоскости, лежащие по разные стороны отрезка. Вследствие этого ясно, что точка M' не может совместиться с точками M_2 и M_3;

2) она позволяет различать концы первоначально взятого отрезка, так как она лежит ближе к одному, чем к другому. Поэтому добавление третьей точки устраняет неопределенность, имевшую место раньше: теперь ясно, что движение, совмещающее второй треугольник с первым, переведет точку M' именно в M_1, а не в какую-либо из точек M_2, M_3, M_4.



Черт. 42.

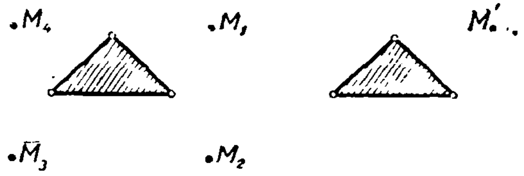
Если же добавленная третья точка образует с первоначальным отрезком равнобедренный треугольник (черт. 43), то она выполняет первую роль (индивидуализирует полуплоскости), но не выполняет второй роли (не индивидуализирует концов). Поэтому движение, совмещающее второй треугольник с первым (черт. 43), может перевести точку M' либо в M_1 либо в M_4, но во всяком случае не в M_2 или M_3.

Движения первого и второго рода

В дальнейшем нам придется различать движения первого и второго рода. Движения первого рода — это движения плоскости самой в себе, без отражения ее в какой-либо прямой, т. е. без переворачивания ее на другую сторону. Движения второго рода включают в себя отражение, т. е. переворачивание плоскости.

Пусть даны две конгруентные фигуры. Если на контуре одной фигуры отметить в определенном порядке какие-нибудь три точки

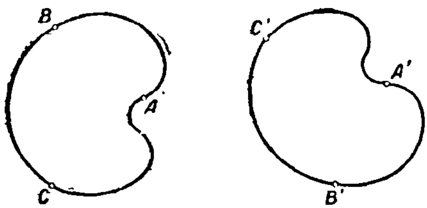
A, B, C, то тем самым на этом контуре определится направление обхода ABC. На контуре второй фигуры найдутся три вполне определенные точки A', B', C' [1]), соответствующие точкам A, B, C (черт. 44); эти три точки определяют на втором контуре направление обхода $A'B'C'$. Если направление обхода ABC совпадает с направлением $A'B'C'$, то фигуры могут быть совмещены движением первого рода, в противном случае требуется движение второго рода [2]). Например, на черт. 44 точки A, B, C определяют на контуре первой фигуры направление обхода против часовой стрелки, а точки A', B', C' на контуре второй фигуры — по часовой стрелке. Следовательно, чтобы совместить фигуры, изображенные на черт. 44, необходимо предварительно перевернуть одну из них.



Черт. 43.

Совмещение двух конгруентных фигур

Можно доказать следующую теорему: если в плоскости даны две конгруентные одинаково ориентированные фигуры, то их можно совместить либо вполне определенным вращением (т. е. вращением около вполне определенного центра на вполне определенный угол; знак угла зависит от того, совмещаем мы первую фигуру со второй или вторую с первой), либо вполне определенным параллельным переносом.



Черт. 44. Противоположно ориентированные конгруентные фигуры.

Ясно, что если даны две конгруентные противоположно ориентированные фигуры, то для их совмещения надо, кроме указанного выше движения, произвести одно отражение в какой-нибудь прямой, так как при ограждении ориентировка фигуры изменяется. Однако в этом случае вращение или параллельный перенос перестают быть вполне определенными. В самом деле, пусть F и F' — две конгруентные, противоположно ориентированные фигуры.

---

[1]) Это утверждение допускает несколько исключений, возникающих, если данные две конгруентные фигуры не определяют единственного движения, а могут быть совмещены несколькими способами (например, если это — равнобедренные треугольники, правильные многоугольники, круги и т. п.).

[2]) В приведенном рассуждении совершенно несущественно, что точки A, B, C взяты на контуре первой фигуры. Можно было взять три произвольные точки (лишь бы они не служили вершинами равнобедренного треугольника) в плоскости первой фигуры. Им соответствуют три точки в плоскости второй фигуры. Если направление обхода по контурам двух получившихся треугольников одинаково, то две данные фигуры совмещаются движением первого рода, в противном случае — второго.

Отразим F' в произвольной прямой; тогда она перейдет в фигуру F_1. Теперь F и F_1 суть конгруентные одинаково ориентированные фигуры; следовательно, они могут быть совмещены вполне определенным вращением или параллельным переносом. Если бы мы отразили фигуру F' в другой прямой, то получили бы фигуру F_2, для совмещения которой с F потребовалось бы другое вращение или параллельный перенос[1]).

Аналитическое выражение движений

Для учителя необходимо знакомство с аналитической трактовкой движений, которая дается в аналитической геометрии. Формулы преобразования координат

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b \end{aligned}\right\}$$

могут рассматриваться как формулы движения. Здесь (x', y') — произвольная точка плоскости, а (x, y) — новое положение этой точки после движения. Движение определяется тремя параметрами: a и b — компоненты переноса плоскости параллельно осям X и Y, а α — угол поворота плоскости.

§ 3. Методические замечания к признакам конгруентности треугольников

Какими данными определяется треугольник

Излагая в школе признаки конгруентности треугольников, необходимо подчеркнуть следующий момент. Каждый признак конгруентности показывает, какими элементами треугольник вполне определяется. Признак „Если две стороны и заключенный между ними угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и заключенному между ними углу другого треугольника, то треугольники конгруентны“ другими словами выражает, что не может быть двух различных треугольников, имеющих соответственно одинаковые две стороны и заключенный между ними угол. Это значит, что задание двух сторон и заключенного между ними угла вполне определяет треугольник. Эта мысль иногда не подчеркивается, так как учителю она кажется слишком очевидной, а между тем она обычно ускользает от внимания учеников. Чтобы этого не случилось, мы рекомендуем учителю каждый признак конгруентности треугольников немедленно сопровождать задачей на построение треугольника по соответствующим данным. Итак, здесь придется решить три задачи: построить треугольник: 1) по двум сторонам и углу, заключенному между ними, 2) по стороне и двум прилежащим углам, 3) по трем сторонам. Интересно исследование этих задач. Первая задача всегда возможна (мы предполагаем, что задаются углы меньше развернутого). Вторая

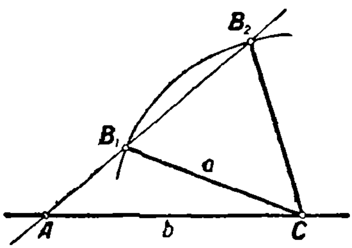
---

[1]) Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. 1, М. 1936 (стр. 92—93).

возможна при условии, что сумма двух данных углов меньше $2d$, но этого исследования пока провести не удастся. Третья задача возможна при условии, что сумма двух меньших сторон больше большей стороны; здесь ученики вновь сталкиваются с теоремой, известной им ранее.

Четвертый признак конгруентности треугольников

После изложения трех признаков конгруентности треугольников естественно возникает следующий вопрос: конгруентны ли два треугольника, если они имеют по две соответственно равных стороны и по равному углу, **п р о т и в о л е ж а щ е м у** одной из равных сторон. Этот вопрос легко решается построением. Пусть даны сторона $BC=a$, сторона $AC=b$ и угол $\widehat{BAC}=A$; требуется построить треугольник по этим данным. На произвольной прямой откладываем отрезок $AC=b$ (черт. 45). При точке A строим угол, равный данному углу A. Принимая C за центр, строим окружность радиусом, равным a; пусть B_1 и B_2 суть точки пересечения этой окружности с прямой AB_1B_2. Треугольники AB_1C и AB_2C оба удовлетворяют условиям задачи: они имеют одну и ту же сторону b, одну и ту же сторону a и один и тот же угол A.



Черт. 45. Построение треугольника по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них.

Оставляя в стороне исследование этой задачи (она обычно исследуется в тригонометрии), мы лишь констатируем, что **в н е к о т о р ы х с л у ч а я х** эта задача имеет два решения; следовательно, общего признака конгруентности треугольников по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них, не существует.

Если угол A — острый и задача имеет два решения, то треугольники AB_1C и AB_2C различаются тем, что у одного из них угол, противолежащий стороне b, — острый, а у другого — тупой ($\widehat{AB_1C}+\widehat{AB_2C}=2d$); угол, противолежащий стороне b, является прямым лишь в том случае, когда задача имеет одно решение. Если угол A — тупой или прямой, то задача ни в коем случае не может иметь более одного решения. Отсюда вытекает так называемый **ч е т в е р т ы й п р и з н а к к о н г р у е н т н о с т и т р е у г о л ь н и к о в**:

если две стороны a и b одного треугольника соответственно равны двум сторонам a' и b' другого треугольника, углы A и A', лежащие против равных сторон a и a', равны между собой, а **п р о у г л ы** B и B', **л е ж а щ и е п р о т и в д р у г о й п а р ы р а в н ы х с т о р о н** b и b', **и з в е с т н о, ч т о о н и о д н о р о д н ы** (т. е. одновременно оба либо острые, либо прямые, либо тупые), то треугольники конгруентны.

Интересно рассмотреть вопрос о том, сколькими данными (независимыми) определяются разные другие фигуры. Этот вопрос следует расчленить в зависимости от того, хотим мы определить фигуру, не учитывая ее положения на плоскости (с точностью до движения) или учитывая положение на плоскости.

Рассмотрим n-угольник. Чтобы определить его, учитывая положение на плоскости, необходимо задать координаты всех вершин. Каждая вершина определяется двумя координатами. Следовательно, для определения n-угольника необходимо задать $2n$ условий. Если же требуется определить n-угольник с точностью до положения на плоскости, то надо на три условия меньше, потому что множество всех движений на плоскости зависит от трех параметров.

Последнее положение можно мотивировать иначе. Если мы хотим определить n-угольник, не интересуясь его положением на плоскости, то первую вершину можно поместить куда угодно, например, в начало координат. Таким образом, для определения положения первой вершины не требуется никаких данных. Если первая вершина закреплена, то многоугольник можно вращать вокруг этой вершины и добиться, что вторая вершина попадет на ось OX; для определения положения этой вершины надо указать одну координату. Когда две вершины закреплены, то многоугольник больше не может двигаться, и для определения положения каждой из остальных $n-2$ вершин надо задать по две координаты. Всего для определения n-угольника с точностью до положения на плоскости требуется $2n-3$ координат или каких-либо других независимых данных.

В задачах по элементарной геометрии почти всегда требуется определить фигуру с точностью до положения на плоскости. Предлагая задачу, где требуется найти какую-нибудь фигуру, учитель должен знать, сколько условий должно быть дано в этой задаче.

Рассмотрим несколько примеров. Четырехугольник определяется пятью условиями ($2n-3$ при $n=4$), например, четырьмя сторонами и одной диагональю или четырьмя сторонами и одним углом.

Если вид четырехугольника указан заранее, то для его определения требуется меньше пяти условий, так как указание вида равносильно заданию нескольких условий. Например, если указано, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция, то тем самым дано одно условие ($BC \parallel AD$), и поэтому для определения трапеции нужны четыре условия (например, трапеция определяется четырьмя сторонами). Если указано, что $ABCD$ — параллелограм, то тем самым даны два условия ($AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$). Следовательно, параллелограм определяется тремя условиями (например, двумя соседними сторонами и углом между ними).

В статье В. П. Ермакова „Число условий, определяющих геометрическую фигуру на плоскости" („Журнал элементарной математики", т. 1, Киев 1884—1885, стр. 26—29) приведена следующая таблица:

	Исключая положение на плоскости	Включая положение на плоскости
Треугольник	3 условия	6 условий
Четырехугольник	5 "	8 "
n-угольник	$2n-3$ "	$2n$ "
Трапеция	4 "	7 "
Параллелограм	3 "	6 "
Прямоугольник или ромб	2 "	5 "
Правильный многоугольник или вообще фигура, подобная данной	1 "	4 "
Круг	1 "	3 "

Читатель без труда пополнит эту таблицу еще многими примерами. В статье В. П. Ермакова не обращено внимания на то обстоятельство, что числа левого и правого столбцов, вообще говоря, различаются на 3 (выше было разъяснено, почему). Из этого правила есть лишь два исключения, которые мы сейчас обнаружим.

Допустим, что фигура определенного вида определяется, исключая положение на плоскости, k условиями. Возьмем одну определенную фигуру этого вида и будем всячески двигать ее по плоскости, т. е. размножать эту фигуру при помощи всех движений. Применяя к нашей фигуре одно определенное движение, мы получим из нее одну определенную фигуру. Таким образом, из одной фигуры мы получим столько новых фигур, сколько существует движений, т. е. множество, зависящее от трех параметров. Но множество фигур данного вида, исключая положение на плоскости, зависит от k параметров. Следовательно, множество фигур данного вида, включая положение на плоскости, зависит от $k+3$ параметров.

Исключением является тот случай, когда существует бесконечное множество движений, при которых фигуры данного вида непрерывно скользят сами в себе (т. е. точки данной фигуры переходят друг в друга, а фигура в целом не изменяется). В этом случае существует бесконечное множество движений, не вызывающих размножения данной фигуры. Всякое движение плоскости состоит из поступательного движения и вращения. При поступательных движениях неподвижными остаются прямые линии, а при вращениях — окружности. Следовательно, только для прямой линии и окружности[1]) разность чисел в левом и правом столбцах вышеприведенной таблицы меньше трех[2]).

---

[1]) Это рассуждение, чтобы быть вполне строгим, требует некоторых понятий из теории групп. Оно сводится к нахождению траекторий одночленных подгрупп группы движений.

[2]) Точка также служит исключением (ее можно рассматривать как окружность нулевого радиуса).

Действительно, для определения прямой линии, исключая положение на плоскости, требуется 0 условий (так как все прямые одинаковы), а включая положение на плоскости — 2 условия (например, отрезки, отсекаемые прямой на осях координат). Для определения круга, исключая положение на плоскости, требуется 1 условие (например, величина радиуса), а включая положение на плоскости — 3 условия.

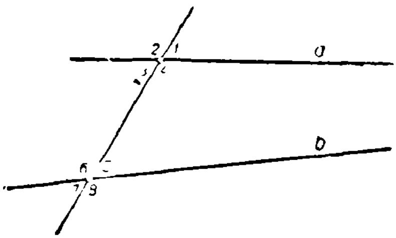
ГЛАВА VI

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

§ 1. Роль V постулата в теории параллельных прямых

Прямые признаки параллельности

Вопрос об определении параллельных прямых был рассмотрен в гл. III (стр. 60—62), и теперь мы сразу перейдем к изложению этого раздела. Важнейшим обстоятельством в теории параллельных прямых является то, что здесь приходится ввести новую аксиому. Эта аксиома вводится не сразу: некоторая часть теории параллельных строится без этой аксиомы. Посмотрим, что́ может быть изложено без этой новой аксиомы и где без нее нельзя обойтись.



Черт. 46.

Теория параллельных начинается с изложения признаков параллельности прямых. Рассматриваются две прямые, пересеченные третьей (черт. 46); при этом получаются восемь углов. Вводятся названия этих углов (внутренние накрест-лежащие, соответственные и т. д.). Можно установить двенадцать признаков параллельности, связанных с величиной этих углов:

1) $\widehat{3}=\widehat{5}$
2) $\widehat{4}=\widehat{6}$
} Внутренние накрест-лежащие углы равны между собой.

3) $\widehat{1}=\widehat{7}$
4) $\widehat{2}=\widehat{8}$
} Внешние накрест-лежащие углы равны между собой.

5) $\widehat{1}=\widehat{5}$
6) $\widehat{2}=\widehat{6}$
7) $\widehat{3}=\widehat{7}$
8) $\widehat{4}=\widehat{8}$
} Соответственные углы равны между собой.

$9)\ \widehat{4}+\widehat{5}=2d$
$10)\ \widehat{3}+\widehat{6}=2d$ } Внутренние односторонние углы составляют в сумме два прямых

$11)\ \widehat{1}+\widehat{8}=2d$
$12)\ \widehat{2}+\widehat{7}=2d$ } Внешние односторонние углы составляют в сумме два прямых

Легко показать, что наличие любого одного из этих признаков влечет за собой все остальные. Таким образом, для всяких двух прямых, пересеченных третьей, либо имеют место одновременно все двенадцать признаков, либо не имеет места ни один из них. Например, если $\widehat{3}=\widehat{5}$, то углы $\widehat{1}$ и $\widehat{7}$ тоже равны между собой, как углы, вертикальные равным, углы $\widehat{4}$ и $\widehat{5}$ составляют в сумме $2d$, потому что углы $\widehat{4}$ и $\widehat{3}$ — смежные и т. д.

Так называемые **прямые признаки параллельности** формулируются так: если имеет место любой из вышеприведенных двенадцати признаков, то прямые a и b параллельны. В силу сделанного выше замечания (что любой из этих признаков влечет за собой все остальные) достаточно доказать какой-нибудь один из прямых признаков параллельности, например: *если внутренние накрест лежащие углы равны между собой, то прямые a и b параллельны.*

Роль теоремы о внешнем угле треугольника

Эта теорема доказывается от противного; доказательство основывается на теореме о внешнем угле треугольника: внешний угол треугольника больше каждого из внутренних, не смежных с ним.

Таким образом, теорема о внешнем угле треугольника необходима в самом начале теории параллельных. В дальнейшем доказывается более точная теорема о внешнем угле треугольника: внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним. Эта теорема является непосредственным следствием того, что сумма углов треугольника равна двум прямым. Однако необходимо сначала доказать „грубую“ теорему о том, что внешний угол больше каждого из внутренних, не смежных с ним, не устанавливая, что он равен их сумме. Причина этого заключается в том, что „грубое“ свойство внешнего угла не зависит от аксиомы о параллельных и необходимо в самом начале теории параллельных, а „точное“ свойство внешнего угла может быть доказано лишь после теории параллельных, и его доказательство, как мы увидим дальше, не может быть проведено без помощи аксиомы о параллельных.

В некоторых учебниках (например, Н. А. Глаголев, Элементарная геометрия. Планиметрия, М. 1944), где теория параллельных прямых излагается раньше свойств треугольников, прямые признаки параллельности доказываются иначе, без использования теоремы о внешнем угле. Технического упрощения при этом не получается, так как применяемое там доказательство прямых признаков параллельности не проще, чем доказательство теоремы о внешнем угле.

С другой стороны, теряется важный факт, что „грубая“ часть теоремы о внешнем угле не зависит от V постулата. Теория параллельных прямых содержит бо́льшие логические тонкости, чем свойства треугольников, поэтому ее лучше проходить позже.

V постулат

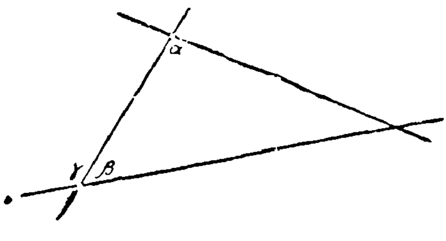
После доказательства прямых признаков параллельности надо доказать на выбор либо обратные, либо противоположные теоремы (см. гл. II, стр. 44), т. е. доказать одно из двух:

1) если прямые a и b параллельны, то внутренние накрест-лежащие углы равны между собой,

2) если внутренние накрест-лежащие углы не равны между собой, то прямые a и b не параллельны.

Эти (и аналогичные) теоремы называются обратными признаками параллельности. Именно для доказательства этих признаков появляется необходимость в новой аксиоме. Эта аксиома фигурирует у Евклида под названием V постулата и формулируется так:

Требуется, чтобы, если прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, которые вместе меньше двух прямых, эти прямые, будучи продолжены неограниченно, пересекались с той стороны, с которой лежат углы, которые вместе меньше двух прямых.



Черт. 47.

Упоминание о том, с какой стороны пересекаются прямые, излишне: надо постулировать лишь тот факт, что они пересекаются. Если этот факт установлен, то легко доказать, не пользуясь никакой новой аксиомой, что они пересекаются именно с той стороны, с какой сумма внутренних односторонних углов меньше двух прямых. В самом деле, предположим противное. Положим, что прямые пересекаются с той стороны, где сумма внутренних односторонних углов больше двух прямых. В таком случае имеем (черт. 47):

$$\alpha + \beta > 2d,$$
$$\gamma + \beta = 2d.$$

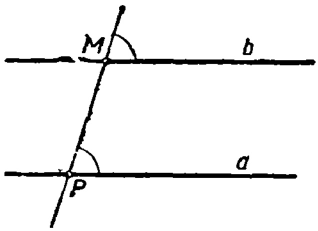
Из этих соотношений вытекает $\gamma < \alpha$, т. е. внешний угол треугольника меньше внутреннего, не смежного с ним, что противоречит ранее доказанной теореме.

Аксиома Плейфера

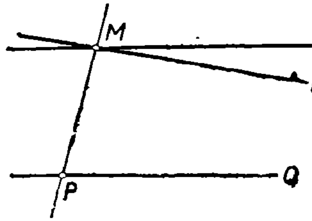
V постулат можно заменить многими другими эквивалентными предложениями. В современных учебниках аксиому параллельных обычно дают в формулировке, предложенной английским математиком Джоном Плейфером (1797 г.).

Через точку вне прямой можно провести только одну прямую, параллельную данной. Иначе говоря: через точку вне прямой нельзя провести двух прямых, параллельных данной.

Особенно подчеркнем следующее. В этой аксиоме не утверждается, что через точку вне прямой можно провести одну параллельную к этой прямой. Это положение не нуждается в постулировании; оно легко доказывается. Пусть дана прямая a, точка M вне ее (черт. 48).



Черт. 48.



Черт. 49.

Проводим через точку M произвольную прямую MP, пересекающую a. Затем проводим через M прямую b, образующую с MP тот же угол, что́ и a. Прямые a и b параллельны. Аксиома Плейфера утверждает не то, что **можно** провести одну параллельную, а то, что можно провести **только** одну, т. е., что **нельзя** провести больше одной параллели.

Эквивалентность V постулата и аксиомы Плейфера

Пятый постулат Евклида и аксиома Плейфера взаимно эквивалентны. Это значит: 1) из V постулата вытекает аксиома Плейфера, 2) из аксиомы Плейфера вытекает V постулат. Докажем оба положения.

Пусть известно, что постулат Евклида справедлив, и требуется доказать аксиому Плейфера. Допустим, что через точку M проходят две прямые MN и MN', параллельные прямой PQ (черт. 49). Проведем через точку M прямую MP, пересекающую PQ. Имеем:

$$\widehat{NMP} + \widehat{QPM} = 2d,$$

$$\widehat{N'MP} + \widehat{QPM} = 2d,$$

потому что, если бы сумма внутренних односторонних углов не равнялась $2d$, то, по аксиоме Евклида, прямые пересекались бы. Из этих равенств вытекает:

$$\widehat{NMP} = \widehat{N'MP},$$

чего не может быть, если прямые MN и MN' не совпадают.

Пусть известно, что аксиома Плейфера справедлива, и требуется доказать постулат Евклида. Пусть дано, что

$$\widehat{N'MP} + \widehat{QPM} \neq 2d;$$

требуется доказать, что прямые MN' и PQ пересекаются. Проведем через точку M прямую MN, удовлетворяющую условию

$$\widehat{NMP} + \widehat{QPM} = 2d.$$

Прямая MN параллельна PQ на основании одного из прямых признаков параллельности. А так как, по аксиоме Плейфера, через точку M проходит только одна прямая, параллельная PQ, то прямая MN' не может быть параллельна PQ, что и требовалось доказать.

Ближайшие следствия V постулата

После введения аксиомы о параллельных следует ряд теорем, которые не могут быть доказаны без этой аксиомы, а именно:

1) Обратные признаки параллельности (равносильные признакам непараллельности).

2) Если какая-нибудь прямая пересекает одну из двух параллелей, то она пересекает и другую (другими словами: если какая-нибудь прямая пересекает одну прямую из пучка параллелей, то она пересекает все прямые этого пучка).

3) Две прямые, параллельные одной и той же третьей, параллельны между собой.

4) Перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой пересекаются.

5) Теоремы об углах с взаимно-параллельными или перпендикулярными сторонами.

6) Теорема о сумме углов треугольника.

Каждая из этих теорем эквивалентна аксиоме о параллельных. Если бы удалось доказать одну из них, не пользуясь аксиомой о параллельных, то надобность в этой аксиоме отпала бы. Однако, как выяснится дальше, этого сделать нельзя.

§ 2. Попытки доказательства V постулата

Причина попыток доказательства V постулата

Аксиома о параллельных сыграла важную роль в истории математики. Сразу после Евклида начались попытки доказать ее, т. е. перевести в разряд теорем. Со времен Евклида до первой четверти XIX в., т. е. в течение двух тысячелетий, вряд ли можно указать многих математиков, которые не занимались бы этим вопросом. Ни на какую другую математическую проблему не было затрачено столько усилий, как на попытки доказательства этого постулата. Почему этот вопрос столь сильно привлекал к себе внимание? Во-первых, потому, что все другие аксиомы применяются у Евклида с самых первых шагов, а V постулат впервые используется сравнительно поздно (в 29-м предложении „Начал"). Довольно большая часть геометрии может быть построена без помощи V постулата. Казалось очень желательным устранить этот постулат, занимающий в геометрии столь особое место, и строить геометрию, не прибегая к новым аксиомам сверх тех, которые встречаются в самом начале. Во-вторых, V постулат (особенно в формулировке Евклида) носит несравненно более громоздкий и сложный для представления характер, чем все остальные аксиомы. Большинство математиков не хотело примириться с тем, что столь сложное предложение принимается в качестве аксиомы, и пыталось доказать его.

Учитель должен быть знаком с типичными попытками доказательства V постулата. Весьма возможно, что при прохождении теории параллельных некоторые ученики предъявят учителю свои попытки доказательства. Эти попытки, если только они не окажутся совершенно нелепыми, а будут обладать некоторой внешней убедительностью (т. е. ошибка в них будет скрыта более или менее глубоко), почти наверное будут повторять одно из уже предлагавшихся доказательств. В этой области уже все настолько испробовано, что вряд ли можно совершить какую-нибудь новую ошибку. Учитель не должен поощрять попыток доказательства V постулата учениками. Это — задача бесплодная, и ученики, интересующиеся математикой, могут найти более полезное применение своим силам. Однако если такие доказательства будут предложены, то учитель должен исчерпывающе разъяснить допущенные в них ошибки.

Попытка Посидония

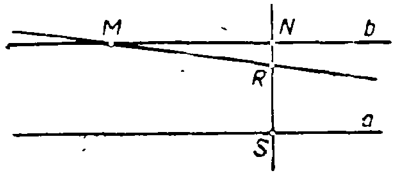
Одна из первых попыток устранить V постулат принадлежит Посидонию, предложившему определять параллельные прямые как равно отстоящие. При таком определении надобность в V постулате отпадает. Недопустимость этого определения была выяснена в гл. III (стр. 60—61).

Попытка Прокла

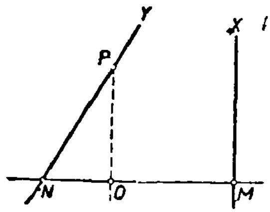
Прокл доказывал V постулат, опираясь на так называемую „аксиому Аристотеля": если две прямые пересекаются, то при неограниченном удалении по одной из них от точки пересечения расстояния от точек этой прямой до другой прямой неограниченно возрастают. Пусть прямая b, проходящая через точку M, параллельна прямой a. Докажем, что всякая другая прямая, проходящая через точку M, пересекает a (черт. 50). Прямые MN и MR пересекаются в точке M. В некоторой точке N прямой b восставляем к ней перпендикуляр. Тогда NR есть расстояние от R до N, а NS — расстояние между параллельными прямыми. Если прямая MR нигде не пересекает a, то расстояние NR всегда должно оставаться меньше NS. Но это невозможно, так как при неограниченном удалении точки N от M расстояние NR, в силу аксиомы Аристотеля, должно неограниченно возрастать, а NS, как расстояние между параллельными прямыми, остается ограниченным. Следовательно, прямая MR должна пересечь прямую a.

Прежде чем указать ошибку в доказательстве Прокла, сформулируем четко, в чем заключается проблема, которую пытался решить Прокл и другие геометры, доказывавшие V постулат. Требуется доказать V постулат (или какое-нибудь эквивалентное ему предложение) на основании остальных аксиом, не вводя каких-либо новых аксиом. Задача не в том, чтобы заменить V постулат другим предложением, принимаемым за аксиому, — это нетрудно сделать многими способами. Требовалось доказать V постулат, опираясь только на те положения геометрии, которые доказываются без помощи этого постулата. Таким образом, доказательство, в которое автор открыто вводит некоторую другую аксиому, на основании которой затем доказывает V постулат, не является решением проблемы. Однако во многие доказательства авторы вводят некоторую новую аксиому скрыто, незаметным для самих себя образом. Они опираются на некоторое положение, которое кажется столь очевидным, что они не формулируют его и не замечают, что на него опираются. Мы сейчас увидим, что именно так обстоит дело в доказательстве Прокла.

Аксиома Аристотеля, на которую ссылается Прокл, в действительности не является аксиомой. То положение, что пересекающиеся прямые по мере удаления от точки пересечения неограниченно расходятся, может быть строго доказано независимо от V постулата. Но Прокл в своем доказа-



Черт. 50.



Черт. 51.

тельстве опирается еще на другое положение, которое кажется ему столь очевидным, что он не находит нужным его специально оговорить, а именно, что расстояние между двумя параллельными прямыми остается ограниченным. Это положение не может быть доказано без помощи V постулата. Если мы отвергнем V постулат, то неизбежно придем к тому, что параллельные прямые в одном направлении неограниченно удаляются одна от другой. Утверждение, что расстояние между параллельными прямыми ограничено, есть новая аксиома, эквивалентная V постулату. Таким образом, доказательство Прокла есть замена одной аксиомы другой.

Попытка Валлиса Английский математик Валлис (1616—1703) доказывает V постулат на основании следующего положения: ко всякой данной фигуре можно построить подобную фигуру с любым коэфициентом подобия. Далее Валлис рассуждает следующим образом.

Пусть MX есть перпендикуляр к прямой MN, а NY — наклонная к той же прямой (черт. 51); требуется доказать, что NY и MX пересекаются [1].

Если мы докажем, что всякая наклонная к прямой MN в точке N пересекает MX, то тем самым будет доказано, что через точку N проходит только одна прямая, параллельная MX. У Валлиса берутся две произвольные прямые, пересеченные третьей. Мы, сохраняя идею Валлиса, заменяем одну из прямых перпендикуляром для упрощения доказательства.

Возьмем на прямой NY какую-нибудь точку P и опустим из нее перпендикуляр PQ на прямую MN. Получим треугольник NPQ.

Увеличим подобно треугольник NPQ во столько раз (по линейным размерам), во сколько раз MN больше NQ, т. е. примем отношение $\frac{NQ}{MN}$ за коэфициент подобия. Если на отрезке MN построить этот увеличенный треугольник, то сторона, сходственная QP, пойдет по прямой MX (ввиду

---

[1] Для доказательства V постулата достаточно доказать, что перпендикуляр и наклонная к одной прямой пересекаются. В самом деле, перпендикуляр к прямой MN, восставленный в точке N, параллелен MX (на основании прямых признаков параллельности).

равенства углов). Так как фигура, подобная треугольнику, есть треугольник, то прямая NY должна пересечь MX в некоторой точке S, положение которой определяется из пропорции

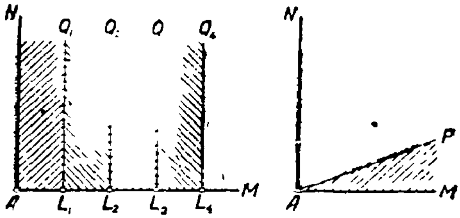
$$\frac{MS}{PQ}=\frac{MN}{NQ}.$$

Доказательство Валлиса тоже представляет замену одной аксиомы другой. Мы увидим дальше, что существование подобных фигур не может быть доказано без помощи V постулата. Если отвергнуть V постулат, то придем к выводу, что подобных фигур не существует. Кроме того, мы увидим, что для доказательства V постулата достаточно допущение более скромное, чем допущение Валлиса: если существует хоть одна пара неравных треугольников с одинаковыми углами, то V постулат справедлив.

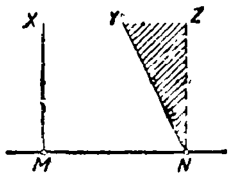
Попытка Луи Бертрана

Весьма остроумная попытка доказательства V постулата принадлежит Луи Бертрану из Женевы (не смешивать с Жозефом Бертраном). Рассмотрим прямой угол $\widehat{MAN}$ (черт. 52) и отложим на стороне AM равные отрезки $AL_1=L_1L_2=$ $=L_2L_3=L_3L_4=\ldots$

В точках L_1, L_2, L_3, $L_4, \ldots$ восставим перпендикуляры L_1Q_1, L_2Q_2, L_3Q_3, $L_4Q_4, \ldots$ к стороне AM. При этом образуется бесконечная последователь-



Черт. 52. Сравнение угла с полосой (Л. Бертран).



Черт. 53.

ность полос, заштрихованных на черт. 52. Каждая полоса составляет бесконечно малую часть прямого угла, потому что в прямом угле $\widehat{MAN}$ помещается бесконечное множество таких полос. Как видим, Луи Бертран рассматривает прямой угол как часть плоскости и путем наложения сравнивает ее с полосой, тоже рассматриваемой как часть плоскости. Далее рассмотрим угол $\widehat{MAP}$, образующий часть прямого угла $\widehat{MAN}$. Как бы ни был мал угол $\widehat{MAP}$, он во всяком случае составляет конечную часть прямого угла, так как при откладывании этого угла достаточное число раз мы с избытком покроем прямой угол.

Теперь докажем, что перпендикуляр и наклонная к одной прямой пересекаются. Пусть MX перпендикуляр к MN, а NY — наклонная к MN (черт. 53). Допустим, что NY не пересечет MX, т. е. прямая NY не перейдет по другую сторону прямой MX. В таком случае угол $\widehat{ZNY}$, заштрихованный на черт. 53, полностью *уместится внутри полосы ZNMX. Но это невозможно*, потому что угол составляет конечную часть прямого угла, а полоса — бесконечно малую.

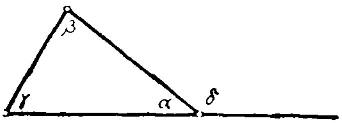
Ошибка этого доказательства заключается в том, что здесь сравниваются путем наложения бесконечные части плоскости, причем молчаливо предполагается, что это сравнение производится по тем же правилам, что и сравнение конечных частей плоскости. Для конечных фигур мы считаем, что если фигура B целиком укладывается внутри фигуры A, то площадь фигуры B меньше площади фигуры A. Для бесконечных частей плоскости сравнение по площади, разумеется, теряет всякий смысл. Для углов устанавливается специальный способ сравнения (гл. V, стр. 94); если сравнивать углы как части плоскости, то можно прийти к парадоксальному результату, что один угол одновременно равен другому, меньше его и больше его (гл. V, черт. 37, стр. 94). Угол и полосу нельзя сравнивать, так как это разнородные величины; сравнение же их по площади, как мы видим, незаконно.

Эквивалентность V постулата и теоремы в сумме углов треугольника

Теорема о том, что сумма углов треугольника равна $2d$, эквивалентна V постулату. В самом деле:

1) Если через точку вне прямой можно провести только одну параллельную к этой прямой, то сумма углов треугольника равна $2d$.

Эта теорема доказывается в школьном курсе элементарной геометрии, где принимается аксиома о том, что через точку вне прямой можно провести к ней только одну параллельную, а затем с использованием этой аксиомы доказывается, что сумма углов треугольника равна $2d$.



Черт. 54.

2) Если сумма углов треугольника равна $2d$, то через точку вне прямой можно провести только одну параллельную к этой прямой.

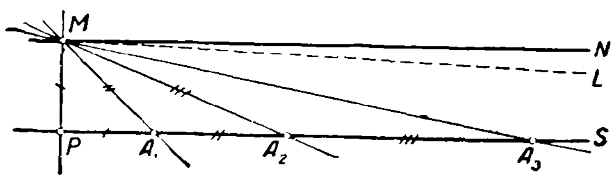
Прежде всего заметим, что если сумма углов треугольника равна $2d$, то внешний угол равен сумме двух внутренних, не смежных с ним. В самом деле, из равенств (черт. 54)

$$\alpha+\beta+\gamma=2d,$$
$$\alpha+\delta=2d$$

вытекает

$$\delta=\beta+\gamma.$$

Пусть теперь M — точка вне прямой PS, $MP\perp PS$ (черт. 55). В таком случае $MN\parallel PS$. Докажем, что всякая прямая ML, проходящая через точку M и отличная от MN, пересекает PS.



Черт. 55.

Строим на прямой PS последовательность точек A_1, A_2, $A_3, \ldots$ следующим образом:

$$PA_1=PM,\ A_1A_2=A_1M,\ A_2A_3=A_2M,\ldots$$

Треугольник A_1PM — равнобедренный; следовательно, в нем углы при основании равны между собой. Каждый из них равен $\frac{d}{2}$ (потому что угол

$\widehat{A_1PM}=d$, а сумма всех углов треугольника, по нашему предположению, равна $2d$). Так как $\widehat{PMN}=d$, то

$$\widehat{A_1MN}=\frac{d}{2}.$$

Переходим к треугольнику $\widehat{A_1MA_2}$:

$$\widehat{A_2A_1M}=2d-\frac{d}{2}=\frac{3}{2}d,$$

$$\widehat{A_2MA_1}=\frac{1}{2}\left(2d-\frac{3}{2}d\right)=\frac{d}{4}.$$

Следовательно,

$$\widehat{A_2MN}=d-\left(\frac{d}{2}+\frac{d}{4}\right)=\frac{d}{4}.$$

Продолжая аналогично подсчитывать углы, образованные секущими MA_1, $MA_2, \ldots$ с прямой MN, находим:

$$\widehat{A_1MN}=\frac{d}{2},$$

$$\widehat{A_2MN}=\frac{d}{4},$$

$$\widehat{A_3MN}=\frac{d}{8},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\widehat{A_nMN}=\frac{d}{2^n},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Пусть прямая ML образует с MN угол, равный ε:

$$\widehat{LMN}=\varepsilon.$$

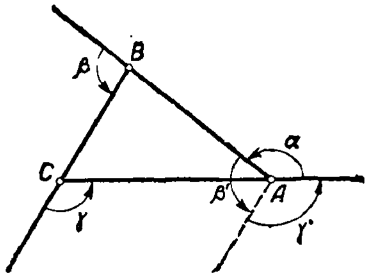
Продолжая наше построение достаточно далеко, мы получим секущую MA_n, лежащую к MN ближе, чем ML. Для этого надо взять число n столь большим, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\frac{d}{2^n}<\varepsilon.$$

Тогда прямая ML окажется входящей внутрь треугольника PMA_n. Прямая, входящая в треугольник, должна из него выйти. Следовательно, прямая ML должна пересечь прямую PS, что́ и требовалось доказать.

Итак, доказано, что теорема о том, что сумма углов треугольника равна $2d$, эквивалентна V постулату. Поэтому многие математики пытались доказать V постулат через посредство этой теоремы. Если бы удалось, не опираясь на V постулат, доказать, что сумма углов треугольника равна $2d$, то тем самым V постулат был бы доказан.

Попытка Тибо Немецкий математик Тибо пытался доказать эту теорему следующим образом. Продолжая стороны треугольника, как показано на черт. 56, мы получим внешние углы. Вектор $\overline{AB}$, будучи повернут на эти углы в о к р у г р а з н ы х в е р ш и н т р е у г о л ь н и к а, не изменит своего направления; следовательно, сумма этих поворотов равна $4d$. Разъясним это несколько подробнее. Представим себе человека, обходящего треугольник по контуру. В начальный момент этот человек стоит в вершине A и смотрит в вершину B. Пройдя сторону AB, человек повернется на угол β; теперь он стоит в вершине B и смотрит в вершину C. Пройдя сторону BC, он повернется на угол γ; теперь он стоит в вершине C и смотрит в вершину A. Пройдя сторону CA, он повернется на угол α. Теперь он полностью вернулся в исходное положение: он опять стоит в вершине A и смотрит в вершину B. Следовательно, он совершил полный оборот, т. е.



Черт. 56.

$$\alpha+\beta+\gamma=4d.$$

Так как очевидно

$$\widehat{A}=2d-\alpha,$$
$$\widehat{B}=2d-\beta,$$
$$\widehat{C}=2d-\gamma$$

($\widehat{A}$, $\widehat{B}$ и $\widehat{C}$ обозначают в н у т р е н н и е углы треугольника), то, складывая эти равенства, находим:

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=6d-(\alpha+\beta+\gamma)=6d-4d=2d.$$

Ошибка Тибо заключается в том, что он предполагает, что вращения вокруг разных точек равносильны вращениям на такие же углы вокруг одной точки. Мы сейчас покажем, что это предположение равносильно V постулату.

Положим, что в точке A в начальный момент находятся два человека; оба они смотрят в вершину B. Первый обходит треугольник по контуру, второй остается на месте. Когда первый придет в вершину B и повернется на угол β, второй, оставаясь на месте, повернется на угол β', чтобы смотреть *параллельно* первому (т. е. по направлению пунктирного луча на черт. 56). Будет *ли* угол β' равен углу β? Эти углы суть соответственные при параллельных, а теорема о том, что соответственные углы при параллельных равны между собой (как и все обратные признаки параллельности) основана на V постулате. Итак, не опираясь на V постулат, нельзя утверждать, что $\beta'=\beta$.

Далее первый человек, придя в C, повернется на угол γ, а второй, оставаясь в A, повернется на угол γ', чтобы смотреть по той же прямой. Аналогично предыдущему, нельзя утверждать, что $\gamma'=\gamma$. Наконец, первый придет в точку A, и здесь оба человека повернутся на один и тот же угол α. Второй человек, оставаясь в точке A, совершил полный оборот, т. е.

$$\alpha+\beta'+\gamma'=4d,$$

а первый повернулся на $\alpha+\beta+\gamma$. Как ясно из предыдущего, без V постулата нельзя утверждать, что $\alpha+\beta+\gamma=\alpha+\beta'+\gamma'$.

Попытка Лежандра

Интересно доказательство Лежандра. Лежандр рассуждает следующим образом. Пусть дан треугольник ABC. A priori есть три возможности: 1) сумма углов треугольника ABC больше $2d$, 2) она равна $2d$, 3) она меньше $2d$. Обозначая сумму углов треугольника ABC через S_{ABC} (a priori не известно, что у всех треугольников сумма углов — одна и та же), запишем эти три возможности так:

$$\begin{aligned} &1)\ S_{ABC} > 2d, \\ &2)\ S_{ABC} = 2d, \\ &3)\ S_{ABC} < 2d. \end{aligned}$$

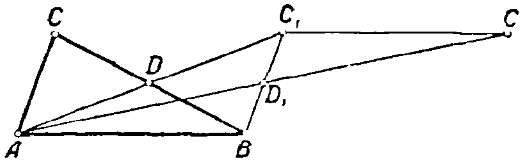
Если удастся опровергнуть первую и третью возможности, то тем самым будет доказана вторая возможность.

Предварительно заметим, что сумма д в у х углов треугольника не может быть больше $2d$, так как (черт. 54, стр. 120) из соотношений

$$\begin{aligned} \gamma + \alpha &> 2d \\ \delta + \alpha &= 2d \end{aligned}$$

вытекало бы $\gamma > \delta$, что противоречит теореме о внешнем угле треугольника.

Рассмотрим теперь треугольник ABC и предположим, что сумма его углов больше $2d$. Если это так, то разность между суммой углов треуголь-



Черт. 57.

ника и $2d$ называется и з б ы т к о м этого треугольника. Обозначая избыток треугольника ABC через ε, будем иметь:

$$S_{ABC} = 2d + \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0).$$

Делим сторону BC пополам; пусть D есть середина BC (черт. 57). Строим медиану AD и продолжаем ее на отрезок DC_1, равный AD:

$$DC_1 = AD.$$

Медиана AD делит угол A на два угла, вообще говоря, неравных. Соединяем C_1 с концом той стороны (AB или AC), *п р и к о т о р о й л е ж и т м е н ь ш и й у г о л*; на черт. 57 угол $\widehat{C_1AB}$ меньше угла $\widehat{C_1AC}$, поэтому точка C_1 соединена с точкой B, а не с точкой C. Если бы медиана AD разделила угол A пополам, то мы соединили бы C_1 с любой из вершин B или C.

Докажем, что сумма углов построенного таким образом треугольника ABC_1 равна сумме углов исходного треугольника ABC. Треугольники ADC и BDC_1 конгруентны. При переходе от треугольника ABC к треугольнику ABC_1 угол $\widehat{CAD}$ (составляющий в первом треугольнике часть угла $\widehat{A}$) заменяется равным углом $\widehat{BC_1D}$, а угол $\widehat{ACD}$ — равным углом $\widehat{C_1BD}$ (составляющим во втором треугольнике часть угла $\widehat{B}$). Таким образом, $S_{ABC} = S_{ABC_1}$. Угол же при вершине A при переходе от треугольника ABC к треугольнику ABC_1 уменьшился более чем вдвое:

$$\widehat{BAC_1} \leqslant \frac{A}{2} \qquad \text{(через } A \text{ обозначен угол } \widehat{BAC}\text{).}$$

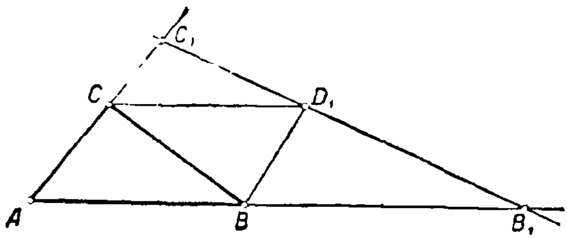
Итак, применяя к любому треугольнику указанное построение, получим другой треугольник, имеющий ту же самую сумму углов, но один из углов которого уменьшится по сравнению с соответственным углом данного треугольника более чем вдвое.

Применяя к треугольнику ABC_1 то же построение, мы получим треугольник AC_1C_2, у которого

$$S_{AC_1C_2} = S_{ABC_1} = S_{ABC};$$

$$\widehat{C_1AC_2} \leqslant \frac{\widehat{BAC_1}}{2} < \frac{A}{4}\ ^{1)}.$$

Продолжая это построение неограниченно, мы получим последовательность треугольников $\triangle, \triangle_1, \triangle_2, \ldots$ с одинаковыми суммами углов, причем



Черт. 58.

угол α_n при вершине A треугольника $\triangle_n$ будет удовлетворять неравенству:

$$\alpha_n < \frac{A}{2^n}.$$

Возьмем число n столь большим, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\frac{A}{2^n} < \varepsilon.$$

Тогда в треугольнике $\triangle_n$ сумма углов равна $2d + \varepsilon$, а угол при вершине A меньше ε. Следовательно, сумма двух остальных углов больше, чем $2d$, что невозможно. Наше предположение, что сумма углов треугольника равна $2d + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, привело нас к противоречию.

В этом доказательстве ошибок нет. Итак, Лежандр доказал, что сумма углов треугольника не может быть больше $2d$. Остается доказать, что она не может быть меньше $2d$.

---

1) Мы ставим знак $<$, а не $\leqslant$, потому, что в нашей последовательности треугольников не может быть двух равнобедренных треугольников.

Положим, что сумма углов треугольника ABC меньше, чем $2d$, т. е.

$$S_{ABC}=2d-\varepsilon \qquad (\varepsilon>0).$$

ε называется дефектом треугольника. На стороне BC строим треугольник BCD_1, конгруентный треугольнику ABC; для этого строим $BD_1=AC$ и $CD_1=AB$. Через точку D_1 проводим произвольную прямую, пересекающую стороны угла $\widehat{BAC}$; точки пересечения обозначим через B_1 и C_1. Имеем:

$$\begin{array}{ll} S_{ABC}=2d-\varepsilon & \\ S_{BCD_1}=2d-\varepsilon & \text{(потому что } \triangle ABC\equiv\triangle BCD_1) \\ S_{BB_1D_1}<2d & \left.\right\} \text{(потому что из } S_{ABC}<2d \text{ вытекает,} \\ S_{CC_1D_1}<2d & \text{что во всяком треугольнике сумма углов меньше, чем } 2d) \end{array}$$

Сложим эти соотношения:

$$S_{ABC}+S_{BCD_1}+S_{BB_1D_1}+S_{CC_1D_1}<8d-2\varepsilon.$$

Сумма, стоящая в левой части, представляет сумму углов треугольника AB_1C_1 плюс еще девять углов с вершинами в B, C и D_1; эти девять углов составляют в сумме $6d$. Поэтому, вычитая из обеих частей последнего неравенства $6d$, получим:

$$S_{AB_1C_1}<2d-2\varepsilon.$$

Это неравенство показывает, что дефект треугольника AB_1C_1 больше, чем 2ε. Таким образом, имея треугольник, сумма углов которого меньше чем $2d$, всегда можно построить другой треугольник, дефект которого превышает дефект первого треугольника более, чем в два раза. Применяя к этому второму треугольнику то же построение, получим третий треугольник, дефект которого превышает дефект первого треугольника более чем в четыре раза. Продолжая это построение неограниченно, мы получим последовательность треугольников

$$\triangle,\ \triangle_1,\ \triangle_2,\ \ldots,$$

при чем

$$\begin{array}{lll} \text{дефект} & \text{треугольника} & \triangle=\varepsilon \\ \text{»} & \text{»} & \triangle_1>2\varepsilon \\ \text{»} & \text{»} & \triangle_2>4\varepsilon \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \text{»} & \text{»} & \triangle_n>2^n\cdot\varepsilon \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Таким образом, дефекты наших треугольников возрастают неограниченно. Это противоречит тому факту, что дефект треугольника не может превышать $2d$. Итак, предположение, что сумма углов треугольника $\triangle$ меньше, чем $2d$, приводит нас к противоречию.

Ошибка этого доказательства заключается в следующем: Лежандр предполагает, что через точку внутри угла всегда можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла. Таким образом, он вместо V постулата вводит без доказательства новое положение. Анализ этого положения показал, что оно не может быть доказано без помощи V постулата.

Вопрос о постоянстве суммы углов треугольника

Во всяком случае можно, не пользуясь V постулатом, доказать, что сумма углов треугольника не может быть больше $2d$. Остаются две возможности: 1) сумма углов треугольника равна $2d$, 2) сумма углов треугольника меньше $2d$. При этом легко доказать, что если сумма углов треугольника постоянна (т. е. одна и та же во всех треугольниках), то она равна $2d$. Проведем в треугольнике ABC прямую AD, соединяющую вершину A с произвольной точкой стороны BC (черт. 59). Складывая все углы треугольника ABD и все углы треугольника ACD, мы получим в сумме все углы треугольника ABC плюс два смежных угла при точке D:

$$S_{ABD} + S_{ACD} = S_{ABC} + 2d.$$

Если сумма углов треугольника постоянна, то мы можем сумму углов в с я к о г о треугольника обозначать одной и той же буквой S. Тогда предыдущее равенство дает:

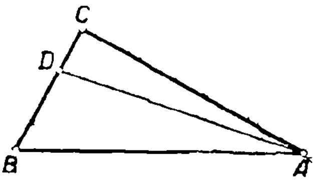
$$2S = S + 2d;$$

откуда

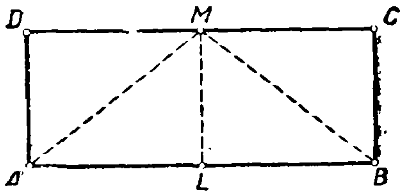
$$S = 2d.$$

Итак, имеются следующие две возможности: 1) сумма углов во всех треугольниках одна и та же, и в этом случае она обязательно равна $2d$, 2) сумма углов треугольника меньше $2d$ и притом переменна (т. е. в различных треугольниках различна). Логически мыслима еще третья возможность: сумма углов в одних треугольниках равна $2d$, а в других — меньше $2d$; однако дальше мы увидим, что эта возможность исключается.

Работа Саккери Рассматривая различные попытки доказательства V постулата, мы пока пропустили работу итальянского математика Саккери (1667—1733). Эта работа, несмотря на содержащуюся в ней ошибку, является наиболее серьезной из всех попыток подобного рода. В ней установлено много важных результатов. Она оказала большое



Черт. 59.



Черт. 60.

влияние на дальнейшее развитие геометрии и много содействовала окончательному выяснению этого трудного вопроса, последовавшему значительно позже. Саккери является непосредственным предшественником неевклидовой геометрии, возникшей в XIX в.

Работа Саккери, вышедшая в 1733 г., называется „Euclides ab omni naevo vindicatus; sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia" („Евклид, освобожденный от всех пятен, или опыт, устанавливающий самые первые принципы универсальной геометрии"). Саккери, как и большинство математиков до XIX в., считал, что принятие без доказательства V постулата — „пятно" на Евклиде, и устранить это пятно можно, только доказав V постулат.

Исходный пункт рассуждений Саккери следующий. В двух точках A и B прямой AB восставим к этой прямой перпендикуляры, отложим на этих перпендикулярах равные отрезки BC и AD и соединим точки C и D (черт. 60). Мы получим четырехугольник $ABCD$, характеризующийся условиями:

$$\widehat{A} = \widehat{B} = d, \qquad AD = BC.$$

Такой четырехугольник теперь принято называть **ч е т ы р е х у г о л ь н и к о м С а к к е р и**. Основание AB, к которому прилежат прямые углы, будем называть **н и ж н и м о с н о в а н и е м**, противоположную сторону CD — **в е р х н и м о с н о в а н и е м**, а две другие стороны AD и BC — **б о к о в ы м и с т о р о н а м и**. Предостерегаем читателя от поспешного заключения, что четырехугольник Саккери есть прямоугольник. Необходимо помнить, что мы ограничены в средствах доказательства: мы можем опираться только на те положения геометрии, которые предшествуют V постулату[1]). Опираясь на эти положения, можно лишь доказать, что углы $\widehat{C}$ и $\widehat{D}$ равны между собой. Для доказательства делим AB пополам; пусть L середина AB, т. е. $AL = LB$. В точке L восставляем перпендикуляр к AB и обозначаем через M точку его пересечения с верхним основанием. Соединяем M с A и B. Имеем: $\triangle ALM \equiv \triangle BLM$ (по первому признаку). Из конгруентности этих треугольников следует $AL = BL$ и $\widehat{LAM} = \widehat{LBM}$. Переходим к треугольникам ADM и BCM. В них $\widehat{DAM} = \widehat{CBM}$ (как дополнения до прямого угла равных углов $\widehat{LAM}$ и $\widehat{LBM}$) и стороны, заключающие эти углы, одинаковы в обоих треугольниках; следовательно, $\triangle ADM \equiv \triangle BCM$. Из конгруентности этих треугольников следует $\widehat{BCM} = \widehat{ADM}$, что́ и требовалось доказать.

Теперь Саккери рассматривает следующие три возможные гипотезы:

1) углы при верхнем основании — прямые (hypothesis anguli recti — гипотеза прямого угла),

2) углы при верхнем основании — острые (hypothesis anguli acuti — гипотеза острого угла),

3) углы при верхнем основании — тупые (hypothesis anguli obtusi — гипотеза тупого угла).

Саккери выводит всевозможные следствия из каждой гипотезы. Он доказывает ряд теорем, имеющих гипотетическую форму: „Если справедлива гипотеза прямого угла, то ..., если справедлива гипотеза острого угла, то ..., если же справедлива гипотеза тупого угла, то ...“ Цель Саккери заключается в следующем: доказать, что гипотезы острого и тупого угла приводят к противоречию. Если бы это удалось доказать, то тем самым была бы доказана гипотеза прямого угла, а вместе с ней, как выяснено в работе Саккери, и V постулат.

Особая заслуга Саккери заключается в том, что он довольно далеко развернул цепь следствий, вытекающих из каждой гипотезы. Теперь стало ясно, к каким результатам приведет нас та или иная гипотеза. Однако Саккери не сомневался в том, что гипотеза прямого угла — единственно возможная, и заботился исключительно о том, чтобы опровергнуть две другие. Мысль о том, что какая-либо другая гипотеза может быть логически равноправна с гипотезой прямого угла и, следовательно, могут существовать различные геометрии, основанные на разных гипотезах, тогда еще казалось невозможной и впервые возникла лишь лет на 90 позже.

Гипотеза тупого угла действительно приводит к противоречию и, следовательно, должна быть отброшена; поэтому мы не будем приводить следствий, вытекающих из этой гипотезы. Что касается гипотезы острого угла, то Саккери считал, что она тоже привела его к противоречию, но в этом он ошибался. Многие исследователи, приходя к результатам, непривычным и противоречащим наглядности, полагали, что они пришли к противоречию. Однако противоречие налицо лишь тогда, когда доказаны два противоречащие друг другу предложения; например, если доказано, что внешний угол треугольника больше внутреннего, не смежного с ним, а затем доказано, что он меньше внутреннего, не смежного с ним, то здесь налицо противоречие.

Пусть M — какая-нибудь точка на верхнем основании четырехугольника Саккери (черт. 61), а P и R — какие-нибудь точки на его продолжении.

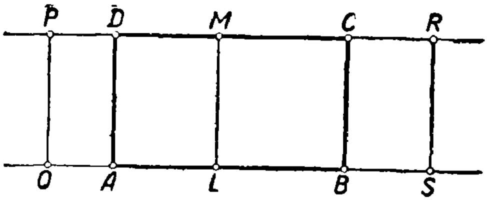
---

[1]) Или на те, которые, хотя доказываются после V постулата, но не зависят от него.

Обозначим боковые стороны четырехугольника Саккери через l. В таком случае:

при гипотезе прямого угла	при гипотезе острого угла
$ML = l$	$ML < l$
$PQ = l$	$PQ > l$
$RS = l$	$RS > l$

При гипотезе острого угла при неограниченном удалении точки P влево и точки R вправо расстояния PQ и RS неограниченно возрастают, т. е. прямые AB и CD неограниченно удаляются одна от другой. Кратчайшим расстоянием между этими двумя прямыми является перпендикуляр к AB, восставленный в середине отрезка AB. Этот перпендикуляр является единственным общим перпендикуляром к прямым AB и CD. Таким образом, если принять гипотезу острого угла, то геометрическое место точек, равноудаленных от прямой, есть не прямая линия, а кривая. Геометрическое место точек, отстоящих от прямой AB на расстоянии l (и лежащих сверху от нее) есть кривая [1], проходящая через точки C и D; между точками C и D эта кривая расположена выше прямой CD (потому что точки прямой CD, лежащие между C и D, удалены от AB менее, чем на l), а на остальном протяжении — ниже прямой CD.



Черт. 61.

Далее доказывается следующая теорема: для всех четырехугольников Саккери справедлива одна и та же гипотеза (т. е. не может быть, чтобы в одном четырехугольнике Саккери углы при верхнем основании были прямые, а в другом — острые).

Далее выясняется, что если справедлива гипотеза прямого угла, то через точку вне прямой можно провести только одну прямую, не пересекающую данной. Если же справедлива гипотеза острого угла, то через точку вне прямой можно провести бесконечное множество прямых, не пересекающих данной. Таким образом, гипотеза прямого угла эквивалентна V постулату, и если бы удалось опровергнуть гипотезу острого угла, то V постулат был бы доказан.

Из приведенных выше теорем сравнительно легко доказывается, что если в одном треугольнике сумма углов равна $2d$, то и во всяком треугольнике сумма углов равна $2d$. Если же в одном треугольнике сумма углов меньше $2d$, то и во всяком треугольнике сумма углов меньше $2d$.

Интересно отметить, что если в плоскости существует хотя бы одна пара неконгруентных треугольников с одинаковыми углами [2], то V постулат справедлив. Пусть ABC и $A'B'C'$ — два неконгруентные треугольника, причем углы первого соответственно равны углам второго. Предположим, что $A'B' < AB$. Наложим треугольник $A'B'C'$ на треугольник ABC так, чтобы точка A' попала в A и сторона $A'B'$ пошла по стороне AB; при этом сторона $A'C'$ пойдет по стороне AC.

Точка B' окажется внутри отрезка AB, так как мы предположили, что $A'B' < AB$. Точка C' тоже окажется внутри отрезка AC. В самом деле,

---

[1] Эта кривая называется эквидистантой.

[2] Мы не называем их подобными, так как не установлено, что из равенства углов вытекает пропорциональность сторон.

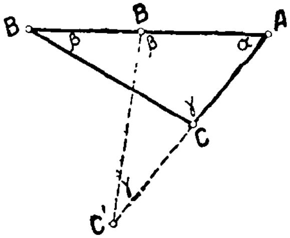
если бы точка C' попала на продолжение AC (черт. 62), то в треугольнике CDC' оказалось бы

$$\widehat{ACD} = \widehat{AC'D} = \gamma,$$

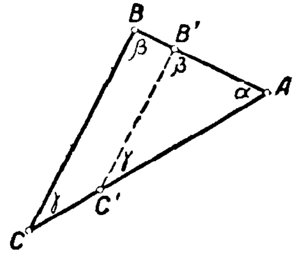
т. е. *внешний угол равнялся бы внутреннему, не смежному с ним.* Следовательно, при наложении треугольники займут не такое положение, как на черт. 62, а такое, как на черт. 63. Подсчитаем сумму углов четырехугольника $BCC'B'$:

$$S_{BCC'B'} = \beta + \gamma + (2d - \gamma) + (2d - \beta) = 4d.$$

Если сумма углов некоторого четырехугольника равна $4d$, то сумма углов треугольника равна $2d$. В самом деле, четырехугольник можно разбить



Черт. 62.



Черт. 63.

диагональю на два треугольника. Так как ни в одном из них сумма углов *не может быть больше* $2d$, то сумма углов каждого из них равна $2d$.

Вспоминая доказательство V постулата, предложенное Валлисом, мы видим, что *можно доказать V постулат, введя гораздо более скромное допущение,* чем это сделал Валлис. Нет надобности предполагать, что каждой фигуре есть подобная с любым *коэфициентом подобия,* а достаточно предположить, что существует одна пара неконгруентных треугольников с одинаковыми углами.

Работа Ламберта Несколько позже Саккери аналогичным путем шел немецкий математик Ламберт (1728—1777); он рассматривал четырехугольник, три угла которого — прямые, и исследовал различные возможные предположения относительно четвертого угла. Если бы ему удалось опровергнуть предположения, что четвертый угол — *острый или тупой,* то тем самым V постулат был бы доказан.

§ 3. Понятие о неевклидовой геометрии

Возможность неевклидовой геометрии Саккери и Ламберт, как и все их предшественники, не допускали и мысли о том, что может существовать *геометрия, основанная на другой гипотезе,* нежели гипотеза прямого угла. Их целью являлось доказать гипотезу прямого угла и тем самым — V постулат. Они изучали следствия, вытекающие из гипотез острого и тупого угла только для того, чтобы среди этих следствий обнаружить противоречия; они не подозревали, что эти следствия могут представлять самостоятельный интерес.

Идея о том, что может существовать геометрия, отличная от евклидовой, возникла в первой четверти XIX в. Чрезвычайно интересно, что эта идея, не возникшая в течение двух тысяч лет, несмотря на тщательную разработку вопроса о V постулате, теперь возникла почти *одновременно* у нескольких исследователей, работавших совершенно независимо друг от друга и не знавших друг о друге. По этому поводу венгерский математик Вольфганг Болиаи сказал: „Идеи подобны фиалкам ранней весной; когда наступает время — они появляются из-под снега одновременно во многих местах".

Гаусс Первым пришел к мысли о возможности „неевклидовой" геометрии (т. е. геометрии, отличной от евклидовой) Гаусс (1777—1855). Первые намеки на это встречаются в его письмах. Начиная с 1808 г., Гаусс довольно далеко развил эту геометрию, однако в течение своей жизни ничего не опубликовал из этих изысканий. Даже в частной переписке он упоминал об этих идеях с просьбой хранить их в секрете, так как полагал, что современники не смогут понять их и отнесутся к ним с насмешкой. Лишь после смерти Гаусса, в 1863 г., когда началось опубликование его переписки, стало известно о работах Гаусса в области неевклидовой геометрии.

Немецкий юрист Швейкарт, будучи в 1812—1814 гг. профессором права в Харькове и занимаясь геометрией как любитель, пришел к открытию новой геометрии, названной им „астральной". Работа Швейкарта не была опубликована. Его краткая записка, содержащая важнейшие результаты этой геометрии, была переслана Гауссу в 1818 г. Гаусс отозвался о работе Швейкарта с большим сочувствием, но предостерегал от ее опубликования. Аналогично Гаусс, спустя шесть лет, поступил с Тауринусом, также самостоятельно пришедшим к этим идеям.

Лобачевский Первый, кто опубликовал изыскания в области неевклидовой геометрии, был русский математик, профессор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский (родился 2 ноября 1793 г.[1]), умер 23 февраля 1856 г.). 22 февраля 1826 г. Лобачевский прочел на заседании физико-математического отделения Казанского университета доклад о началах геометрии. Рукопись этого доклада не сохранилась, его краткое изложение появилось в печати в 1829 г.

В отличие от Гаусса Лобачевский явился неутомимым борцом за свои идеи. Встреченный всеобщим непониманием и даже грубыми насмешками в печати, он всю жизнь разрабатывал открытую им геометрию и продолжал публиковать работы в этой области. Лишь после смерти Лобачевского его *идеи получили всеобщее признание.*

Болиаи В 1832 г. появилась работа венгерского математика Иоганна Болиаи, также пришедшего к открытию неевклидовой геометрии и далеко продвинувшегося в ней. Эта работа была помещена в качестве приложения к учебнику Вольфганга Болиаи (отца Иоганна) „Tentamen juventutem studiosam in elementa Matheseos parae introducendi" („Попытка ввести учащуюся молодежь в элементы чистой математики") и называлась „Appendix scientiam absolute veram exhibens" („Приложение, содержащее абсолютно истинное учение о пространстве").

Не вдаваясь в подробное изложение неевклидовой геометрии, приведем некоторые ее положения, следуя в этом изложении Лобачевскому.

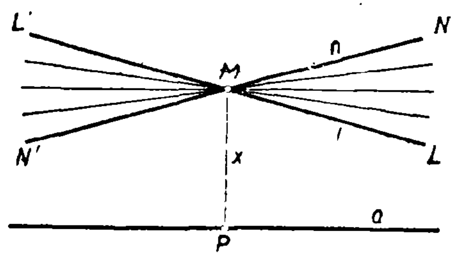
Исходное положение Лобачевского Лобачевский, как и все другие геометры, занимавшиеся теорией параллельных, начал с попыток доказать V постулат от противного. Предположим, что мы исходим из следующей системы аксиом: 1) Все аксиомы евклидовой геометрии, кроме V постулата, 2) аксиома Лобачевского: через точку вне прямой можно провести более чем одну прямую, не пересекающую данной. Таким образом, системы аксиом геометрии Евклида и геометрии Лобачевского различаются только одной аксиомой, все остальные аксиомы у них — общие. Поэтому в дальнейших рассуждениях, относящихся к геометрии Лобачевского, мы можем опираться на все те теоремы, которые доказываются без использования V постулата. Сюда относятся во всяком

---

[1]) Эта дата фигурирует во всех биографиях Лобачевского и до сих пор считается официально признанной датой его рождения. Однако, по недавно обнаруженным архивным данным, более достоверной датой является 1 декабря 1792 г.

случае все те теоремы, которые в школьном курсе геометрии предшествуют аксиоме о параллельных (но не только они: есть ряд теорем, доказываемых после этой аксиомы, но независящих от нее).

Если мы допустили, что через точку M, лежащую вне прямой a (черт. 64), проходит более чем одна прямая, не пересекающая a, то мы должны будем признать, что таких прямых существует бесконечное множество. В самом деле, если прямые l и n не пересекают a, то и все прямые, выходящие из точки M и проходящие между l и n (в том углу, который не содержит перпендикуляра MP, опущенного из M на a), тоже не пересекают a.



Черт. 64. Прямые, не пересекающие прямую a, в геометрии Лобачевского.

Пучок прямых, проходящих через M, разделяется на две части: 1) прямые, пересекающие a, 2) прямые, не пересекающие a. Существуют две прямые $ML \equiv l$ и $MN \equiv n$, служащие границами между этими частями пучка (черт. 64). Это значит, что всякая прямая, проходящая через M и *расположенная внутри угла* $\widehat{LMN}$, *не пересекает* a, а всякая прямая, проходящая через M и расположенная внутри угла $\widehat{LMN'}$, пересекает a. Сами прямые ML *и* MN *не пересекают* a; *они называются* п а р а л л е л ь н ы м и к a. Прямая $L'L$ называется п р а в о п а р а л л е л ь н о й, а прямая NN' — л е в о п а р а л л е л ь н о й. Другие прямые, не пересекающие a, называются *р а с х о д я щ и м и с я.*

Угол параллельности

Опустим из M перпендикуляр MP на a и обозначим его длину через x. Угол между этим перпендикуляром *и одной из параллельных называется* у г л о м п а р а л л е л ь н о с т и. Этот угол зависит от величины x. Чем дальше точка M расположена от прямой a, тем угол параллельности меньше. Угол параллельности, соответствующий расстоянию x, обозначается $\Pi(x)$:

$$\widehat{PML} = \Pi(x).$$

Каждому отрезку x соответствует свой угол параллельности. Когда точка M стремится к прямой a, угол параллельности стремится к $\frac{\pi}{2}$, когда же точка M неограниченно удаляется от прямой a, то угол параллельности стремится к нулю:

$$\lim_{x \to 0} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x \to \infty} \Pi(x) = 0$$

Мы сейчас разъясним, почему тот факт, что к а ж д о м у о т р е з к у с о о т в е т с т в у е т о п р е д е л е н н ы й у г о л, казался современникам Лобачевского особенно невероятным.

Абсолютная мера длины

В евклидовой геометрии существует абсолютная мера угла, но не существует абсолютной меры длины. Абсолютной мерой мы называем такую единицу измерения, которая может быть определена логически. Логическое определение мы противопоставляем *непосредственному показу. Если бы мера длины могла* быть определена логически, то разные лица, ознакомившись с этим определением, смогли бы её построить, и построенные ими отрезки оказались бы конгруентными между собой.

Любая единица для измерения углов — прямой угол, градус, радиан — может быть определена логически. Единица длины, например, метр, логически определена быть не может. Метр можно либо непосредственно показать, либо указать его отношение к каким-нибудь длинам из окружающей нас природы (например, одна сорокамиллионная часть земного меридиана).

Отсутствие абсолютной длины непосредственно связано с наличием подобия: если существует подобие фигур, то нет абсолютной единицы длины, если подобия не существует, то абсолютная единица длины есть. Допустим, что существует абсолютная мера длины. Она представляет отрезок, определяемый при помощи некоторого построения. Но если существует подобие фигур, то чертеж, соответствующий этому построению, можно подобно изменить. При этом все входящие в него отрезки изменят свою величину и, следовательно, ни один из них не может служить абсолютной единицей длины.

Если допустить, что может существовать соответствие, при котором каждому отрезку соответствует определенный угол, то мы придем к выводу, что существует абсолютная мера длины. За абсолютную меру длины можно принять отрезок, соответствующий какому-нибудь определенному углу, например, углу в 45°.

Многие математики считали существование абсолютной единицы длины логической нелепостью. А так как отрицание V постулата неизбежно приводит к абсолютной единице длины, то они считали V постулат доказанным от противного. Был даже сформулирован так называемый „принцип однородности": не может углу соответствовать отрезок. Однако „принцип однородности" не может быть доказан. Он представляет допущение, эквивалентное V постулату. Существование абсолютной единицы длины хотя и противоречит нашим привычным представлениям, но не противоречит каким-либо ранее доказанным геометрическим теоремам.

Существование абсолютной меры длины связано с отсутствием подобия. В геометрии Лобачевского не существует подобных фигур, в частности — подобных треугольников. Существует признак конгруентности треугольников по трем углам: если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого, то треугольники конгруентны. Далее выясняется, что площадь треугольника пропорциональна его дефекту:

$$Q = kD,$$

где Q — площадь треугольника, D — его дефект (т. е. разность $\pi - S$, где S — сумма углов треугольника), а k — коэфициент пропорциональности, один и тот же для всех треугольников; он зависит лишь от того, в каких единицах мы измеряем площадь и сумму углов.

Так как дефект D не может превышать π, то из последней формулы следует, что площадь любого треугольника не может превышать $k\pi$. Таким образом, при неограниченном возрастании сторон треугольника площадь его не будет возрастать неограниченно и никогда не перейдет некоторого предела.

Вопрос об отсутствии противоречий в геометрии Лобачевского

Лобачевский развил все теории своей геометрии, соответствующие содержанию элементарной геометрии, построил тригонометрию, аналитическую и диференциальную геометрию. При этом он нигде не обнаружил противоречия. Однако остался открытым вопрос: не может ли встретиться противоречие при дальнейшем развитии его геометрии? Заметим, между прочим, что этот вопрос вполне законен не только для геометрии Лобачевского, но и для геометрии Евклида и вообще для всякой математической теории. Почему же для геометрии Лобачевского этот вопрос стоял очень остро с момента ее возникновения, а для евклидовой геометрии до второй половины XIX в. этот вопрос никому не приходил в голову? Это объясняется тем, что евклидова геометрия в течение тысячелетий проверена практикой; система, в которой имеется *логическое* противоречие, не может осуществляться на практике.

Попытка опытной проверки геометрии Лобачевского

Вполне естественно, что у Лобачевского и у других творцов неевклидовой геометрии возникла идея проверки опытом, какая из двух геометрий справедлива. Однако *такая проверка наталкивается на ряд принципиальных* затруднений. Не имея возможности рассмотреть здесь этот *важный* вопрос, мы укажем одно из них (впрочем, не самое важное).

Дело в том, что во все формулы геометрии Лобачевского входит некоторая константа, которую нельзя *определить теоретически*. Например, мы видим, что площадь треугольника выражается формулой

$$Q = k \cdot D,$$

где k — коэфициент пропорциональности, один и тот же для всех треугольников. Чтобы определить этот коэфициент, *надо для какого-нибудь одного* треугольника знать и площадь и сумму углов. Если этот коэфициент весьма *велик*, то треугольники с большим дефектом имеют весьма большую площадь. Треугольники, с которыми мы имеем дело на практике, могут быть недостаточно велики. Измерение их углов показывает, что сумма углов равна 180° (*с неизбежной при всяком измерении неточностью*). Однако наши угломерные инструменты имеют определенную степень точности: мы не можем измерить угол точнее, чем до 0,1″. Следовательно, если измерение дало, что сумма углов треугольника равна 180°, то это значит, что она заключена между 179°59′59″,9 и 180°00′00″,1[1]), и таким образом вопрос остается нерешенным. Другое дело, если бы опыт показал, что сумма углов треугольника определенно не равна 180°, причем отклонение столь значительно, что не может быть объяснено неточностью инструментов; тогда евклидова геометрия была бы опровергнута[2]). Если сумма углов треугольника менее 180°, но в малых треугольниках этого не удается обнаружить опытом, то следует произвести опыт с возможно бо́льшими треугольниками, так как дефект треугольника пропорционален его площади. Лобачевский пытался измерять углы треугольника, вершинами которого служили неподвижные звезды, но не пришел к определенным результатам.

Можно подвергать проверке не только теорему о сумме углов треугольника, но любую теорему, в которой проявляется различие между евклидовой геометрией и геометрией Лобачевского. Но всегда возникает одна и та же трудность: различие между евклидовой геометрией и геометрией Лобачевского, *принципиально* очень большое, может быть очень невелико количественно, если речь идет о малых областях пространства. Например, Лобачевский доказал, что угол параллельности $\Pi(x)$ определяется следующей формулой:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-\frac{x}{R}}$$

---

[1]) Выше мы доказывали, что сумма углов треугольника не может быть более 180°, но мы предполагали, что остаются в силе в с е а к с и о м ы е в к л и д о в о й г е о м е т р и и, к р о м е V п о с т у л а т а. Если же отказаться еще от некоторых аксиом, то сумма углов треугольника может быть и более 180°.

[2]) Евклидова геометрия требует точного равенства суммы углов треугольника 180°, а *неевклидова* — неравенства. Точное равенство никогда не может быть установлено опытом, а неравенство может. Поэтому, если в реальном пространстве имеет место евклидова геометрия, то это никогда не может быть подтверждено опытом, если же неевклидова — то это может обнаружиться при увеличении точности наших инструментов (мы отвлекаемся от *некоторых других* препятствий к опытной проверке геометрии).

(R — некоторая константа, которая характеризует пространство и не может быть вычислена теоретически; она может быть принята за абсолютную меру длины). Если R весьма велико, то при малых значениях x (т. е. когда точка M на черт. 64 находится близко от прямой a) показатель $-\frac{x}{R}$ близок к нулю. Следовательно, для $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)$ получается значение почти 1, откуда $\frac{1}{2}\Pi(x)$ равняется почти 45°, а $\Pi(x)$ — почти 90°; между тем евклидова геометрия отличается от геометрии Лобачевского именно тем, что в евклидовой геометрии $\Pi(x) = 90°$, а в геометрии Лобачевского $\Pi(x) < 90°$.

Доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского

Итак, Лобачевскому не удалось доказать отсутствие противоречий в своей геометрии. Позже это было сделано. Итальянский геометр Бельтрами в 1868 г. обнаружил, что на поверхности, называемой псевдосферой, имеет место геометрия Лобачевского. Если вместо прямых рассматривать геодезические линии[1]), то сумма углов треугольника оказывается менее двух прямых, и вообще на этой поверхности реально осуществляются все положения геометрии Лобачевского. Поскольку из законов евклидовой геометрии вытекает существование такой поверхности, то если нет противоречий в евклидовой геометрии, то их нет и в геометрии Лобачевского.

Позже были даны другие доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского. Пуанкаре дал интерпретацию геометрии Лобачевского в системе плоской евклидовой геометрии[2]). Гильберт доказал, что если есть противоречие в евклидовой геометрии, то есть противоречие в арифметике действительных чисел. Таким образом, если мы уверены в отсутствии противоречий в арифметике действительных чисел, то мы должны быть уверены в отсутствии противоречий в геометрии Лобачевского.

Тем самым окончательно доказана недоказуемость V постулата на основании остальных аксиом евклидовой геометрии.

Оценка работ Лобачевского

В настоящее время существуют теории, включающие евклидову геометрию и геометрию Лобачевского в некоторые весьма общие схемы, в которых эти геометрии получаются при некоторых частных предположениях как частные случаи; при этом, кроме геометрии Лобачевского, получается ряд других неевклидовых геометрий. Весьма удобная схема, рассматривающая евклидову и некоторые неевклидовы геометрии как частные случаи проективной геометрии, принадлежит Ф. Клейну. С этими идеями Клейна (так называемое, *„проективное мероопределение“*) учитель математики обязательно должен быть знаком.

Эти исследования привели все вопросы, связанные с неевклидовой геометрией, в полную ясность. Кроме того, они дали простые и наглядные методы построения неевклидовой геометрии. При жизни Лобачевского эти методы еще не были известны. Он шел трудными путями, пробиваясь сквозь дремучий лес. Благодаря гениальному чутью, он уверенно шел в правильном направлении. Он прошел бóльшую часть пути, но не вышел из леса. Оказалось, что осталось сделать еще один шаг, и геометры вышли из темного леса на яркий свет. Двухтысячелетний вопрос о V постулате

---

[1]) Геодезическая линия — линия, являющаяся на данной поверхности кратчайшим расстоянием между двумя точками. На плоскости геодезическими линиями служат прямые, на сфере — дуги больших кругов и т. д.

[2]) См., например, С. А. Богомолов, Основания геометрии, М. — П. 1923, стр. 173—219.

был разрешен полностью. Этот последний шаг удалось сделать лишь благодаря работам Лобачевского и других творцов неевклидовой геометрии, но, к сожалению, сам Лобачевский не дожил до этого.

Ф. Клейн, характеризуя работы Лобачевского, Гаусса, Болиаи, Швейкарта и Тауринуса, говорит: „Аксиоматические исследования этого периода весьма ненаглядны и крайне трудны для понимания, так что вполне возможно говорить о „дебрях дремучего леса исчислений Лобачевского". Проективное мероопределение... пролагает удобную просеку через этот дремучий лес, так что для понимания неевклидовой геометрии и, в частности, также для доказательства ее непротиворечивости изучение трудных исследований того периода становится совершенно излишним. Тем более мы должны изумляться глубокому уму исследователя, который пробился к ясному конечному результату, не имея перед собой наглядной картины отношений, о которых идет речь" (Ф. Клейн, Неевклидова геометрия, М.—Л. 1936, стр. 302).

Правильное положение V постулата у Евклида

Обвинение Евклида в том, что он допустил на своей системе „пятно" в виде V постулата, оказалось несостоятельным, и после двухтысячелетнего разбирательства Евклид в этом пункте полностью оправдан современной наукой. V постулат недоказуем (на основании остальных аксиом евклидовой геометрии), и Евклид проявил гениальную прозорливость, поместивши это положение в число постулатов. Евклид настолько превосходил в логическом отношении своих современников и геометров многих последующих поколений, что понимал несостоятельность тех попыток доказательства V постулата, которые вводили их в заблуждение. Через две тысячи лет наука окончательно пришла к тому же решению вопроса о месте V постулата в геометрии, которое было дано Евклидом.

Педагогическая ценность теории параллельных прямых

Мы видели, что теория параллельных прямых содержит много тонких логических моментов. Учитель должен воспользоваться этим для логического развития учеников. Все теоремы в этом разделе курса доказываются без сложных вспомогательных построений и без выкладок. Логический момент выступает здесь в обнаженном виде. Метод доказательства от противного должен быть подробно выяснен, как в общем виде, так и на примерах. Должна быть подчеркнута роль аксиомы о параллельных и выяснено, что́ доказывается без этой аксиомы и что́ — с ее помощью.

Неевклидова геометрия является благодарной темой для работы математического кружка в старших классах. В VI классе она для учеников недоступна. Фиксировать внимание учеников на разборе попыток доказательства V постулата ни в коем случае не следует, так как это иногда приводит к обратному результату — втягивает их в занятия этой бесплодной задачей. Достаточно упомянуть, что были многочисленные попытки доказать V постулат, но в настоящее время доказано, что этого сделать нельзя. Если же кто-нибудь из учеников самостоятельно предложит доказательство аксиомы о параллельных, то его ошибка должна быть разъяснена ему исчерпывающим и убедительным для него образом.

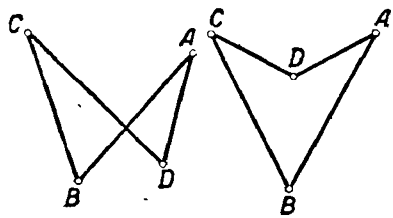
Глава VII

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

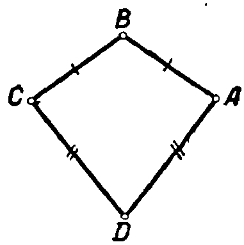
Выпуклые четырехугольники

В школьном курсе изучаются только выпуклые четырехугольники. Многоугольник называется выпуклым, если он полностью расположен по одну сторону от любой своей стороны, продолженной неограниченно. Таким образом, исключаются четырехугольники, изображенные на черт. 65.

Вершины выпуклого четырехугольника мы будем обозначать в последовательном порядке соответственно буквами A, B, C и D.



Черт. 65. Невыпуклые четырехугольники.



Черт. 66. Дельтоид.

A и B, B и C, C и D, D и A суть пары соседних вершин, A и C, B и D суть пары противоположных вершин, AB и BC, BC и CD, CD и DA, DA и AB суть пары соседних сторон, AB и CD, BC и DA суть пары противоположных сторон, AC и BD — диагонали.

Противоположные элементы многоугольника

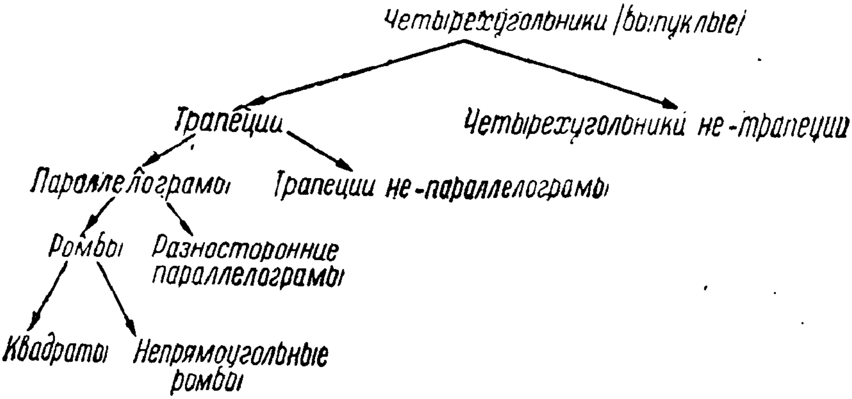
Понятие о противоположных вершинах или противоположных сторонах имеет смысл только для многоугольников с четным числом сторон. Зато для этих многоугольников не имеет смысла понятие о противолежании вершины и стороны, которое имеет смысл для многоугольников с нечетным числом сторон.

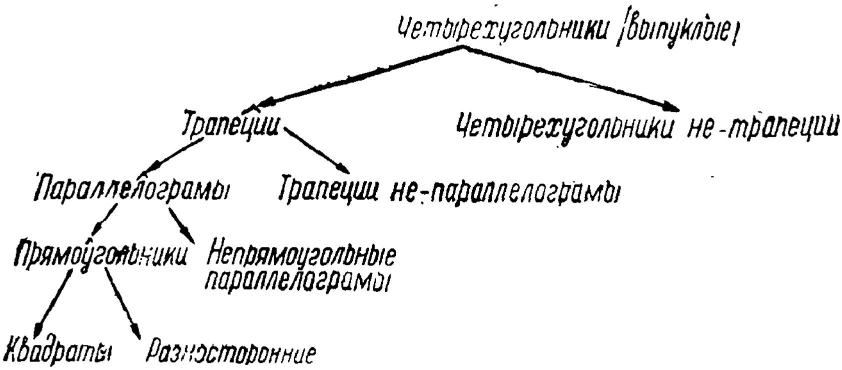
Классификация четырехугольников

Глава о четырехугольниках в школьном курсе геометрии посвящена, главным образом, изучению свойств некоторых частных видов четырехугольников. Поэтому мы должны начать с вопроса о классификации четырехугольников, которая приводит к выделению этих частных видов.

За основание деления принимается параллельность или непараллельность противоположных сторон, потому что параллельность противоположных сторон влечет за собой множество других важных свойств, и, следовательно, четырехугольники, обладающие этим признаком, полезно выделить в особый класс. Четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, называется трапецией.

Если у четырехугольника обе пары противоположных сторон параллельны, то он называется параллелограмом. Таким образом, параллелограм входит в следующую ступень классификации. Параллелограмы можно классифицировать по-разному: принимая за основание деления либо величину сторон, либо величину углов. При этом мы получили одну из следующих классификаций:





Таким образом, квадрат одновременно является частным видом ромба и прямоугольника.

Иногда особо выделяется четырехугольник, у которого $AB = BC$ и $CD = DA$ (черт. 66). Такой четырехугольник называется дельтоидом. Ромб является частным видом дельтоида.

Спорный вопрос об определении трапеции

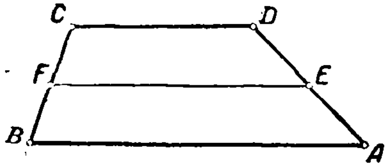
В связи с приведенной классификацией мы должны остановиться на спорном методическом вопросе: об определении трапеции. Здесь конкурируют два определения.

Первое. Трапецией называется четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны.

Второе. Трапецией называется четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие не параллельны[1]).

Если принять первое определение, то параллелограм является частным видом трапеции, при втором определении параллелограм — не трапеция.

Преимущество первого определения заключается в том, что оно приводит к ясной и удобно обозримой логической классификации. Второе же определение сразу вводит критерии, которые принадлежат не к одной, а к двум последовательным ступеням логической классификации (1) свойства одной пары противоположных сторон, 2) свойства другой пары противоположных сторон) и поэтому должны вводиться не сразу, а последовательно. Принимая второе определение, мы проигрываем в логической ясности.



Черт. 67.

Кроме того, рассматривать параллелограм как частный вид трапеции представляет и практическое преимущество: все свойства трапеции автоматически (т. е. без специального доказательства) переносятся на параллелограм (например, свойства средней линии трапеции).

Защитники второго определения исходят из того, что если рассматривать параллелограм как трапецию, то его придется относить к равнобочным трапециям. Между тем в дальнейшем доказывается *ряд свойств равнобочных трапеций, которые не имеют места для параллелограмов*, например:

в равнобочной трапеции углы при основании равны между собой;

в равнобочной трапеции диагонали равны между собой;

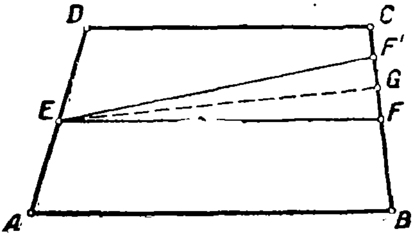
около равнобочной трапеции можно описать окружность и т. д.

Кроме того, можно указать некоторые общие свойства трапеций, по отношению к которым параллелограм является исключительным случаем (например, как мы увидим дальше, обратная теорема о средней линии трапеции). Однако во многих теоремах некоторые частные случаи являются исключительными. Например, в гл. V мы познакомились с одним из важнейших свойств треугольника. „Если в плоскости закреплен некоторый треугольник, то вся плоскость закреплена, т. е. не может быть никаких движений плоскости, при которых данный треугольник совмещался бы сам с собой". Эта теорема не применима к равнобедренному треугольнику. Тем не менее никто не предлагает исключить равнобедренные треугольники из класса треугольников.

Если параллелограм считать равнобочной трапецией, то во всех вышеприведенных теоремах после слов „равнобочная трапеция" придется сделать оговорку „если она не является параллелограмом". Чтобы избежать этого усложнения, некоторые методисты предпочитают заранее исключить параллелограм из числа трапеций.

[1]) В стабильном учебнике принято второе определение.

Мы полагаем, что это мелкое неудобство первого определения гораздо менее важно и принципиально, чем его преимущества. Логическая ясность всегда должна выдвигаться на первый план. Поэтому мы рекомендуем учителю придерживаться первого определения. Что касается затруднения с равнобочной трапецией, то его можно обойти двумя способами: 1) внося во все теоремы указанную выше оговорку, 2) внеся эту оговорку раз навсегда в определение равнобочной трапеции, т. е. определив так: „трапеция называется равнобочной, если ее боковые стороны равны, но не параллельны".



Черт. 68.

В соответствии с изложенной выше точкой зрения мы считаем, что следует начинать не со свойств параллелограма, а со свойств трапеции. Тогда будем постепенно нисходить от более общих видов четырехугольников к более частным, и свойства, доказанные для некоторого вида четырехугольников, будут справедливы и для следующих видов.

Средняя линия трапеции

Важнейшее свойство трапеции заключается в следующем: средняя линия трапеции (средней линией называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон) параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме.

Не останавливаясь на доказательстве (есть разные способы; большей частью они основаны на теореме о средней линии треугольника, доказываемой ранее), не представляющем никаких затруднений, обратим внимание учителя на то, что необходимо исследовать различные обращения этой теоремы. Их существует два, как видно из следующих соображений. Отрезок EF (черт. 67) характеризуется следующими условиями:

$$AE = ED \quad (1) \qquad EF \parallel AB \quad (3)$$

$$BF = FC \quad (2) \qquad EF = \frac{1}{2}(AB + CD) \quad (4)$$

Мы видели, что из первых двух условий вытекают последние два. Между тем, отрезок, концы которого лежат на боковых сторонах трапеции, характеризуется двумя условиями (потому что положение точки на боковой стороне определяется одним условием). Следовательно, надо составить все сочетания по два из приведенных четырех условий и проверить, вытекают ли из любых двух условий два другие:

1)	из условий	(1) и (2)	вытекают ли условия	(3) и (4)?
2)	„	(1) „ (3)	„ „ „	(2) „ (4)?
3)	„	(1) „ (4)	„ „ „	(2) „ (3)?
4)	„	(2) „ (3)	„ „ „	(1) „ (4)?
5)	„	(2) „ (4)	„ „ „	(1) „ (3)?
6)	„	(3) „ (4)	„ „ „	(1) „ (2)?

Вопрос 2) совпадает с вопросом 4) ввиду равноправия боковых сторон, вопрос 3) совпадает с вопросом 5). Поэтому мы отбрасываем вопросы 4) и 5).

На вопрос 3) следует ответить отрицательно, как видно из черт. 68. На этом чертеже EF — средняя линия, $EG \perp BC$, $FG = GF'$. Треугольник FEF' равнобедренный, т. е. $EF = EF'$. Таким образом, отрезок EF' удовлетворяет условиям (1) и (4), но не удовлетворяет условиям (2) и (3). На вопросы 1), 2) и 6), как легко доказать, следуют утвердительные ответы. Этим вопросам соответствуют три теоремы:

1) Основная теорема о средней линии.

2) „Если отрезок, концы которого лежат на боковых сторонах трапеции, делит пополам одну из этих сторон и параллелен основаниям, то он делит пополам другую боковую сторону и равен полусумме оснований".

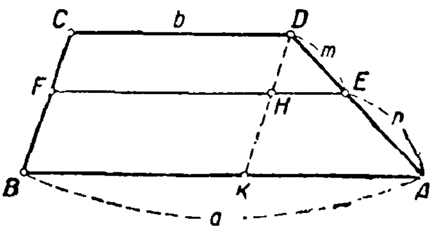
6) „Если отрезок, концы которого лежат на боковых сторонах трапеции [1]), параллелен основаниям и равен их полусумме, то он делит пополам обе боковые стороны". Эта теорема не применима к параллелограму.

Полезно, хотя бы в качестве упражнения, ознакомить учеников со следующим важным свойством средней линии: „Отрезок средней линии, заключенный между диагоналями трапеции, равен полуразности оснований". Для параллелограма из этой теоремы следует, что средняя линия проходит через точку пересечения диагоналей.

Обобщения теоремы о средней линии трапеции

Теорема о средней линии трапеции имеет в дальнейшем важные обобщения. Укажем два из них.

1°. Пусть точка E делит сторону AD не пополам, а в каком-нибудь отношении $\frac{n}{m}$ (черт. 69) и через точку E проведена прямая EF, параллельная основаниям трапеции. Легко доказать, что эта прямая разделит другую боковую сторону в том же отношении $\frac{m}{n}$. Обратно: если точки E и F делят боковые стороны трапеции в одинаковых отношениях, то соединяющая их прямая EF параллельна основаниям трапеции.



$$EF = \frac{ma + nb}{m + n}.$$

Черт. 69.

Для вычисления отрезка EF проведем через D прямую DK параллельно CB (черт. 69). Имеем:

$$\frac{EH}{AK} = \frac{m}{m + n}.$$

---

[1]) Здесь существенно, что стороны рассматриваются как отрезки, т. е. концы данного отрезка не должны лежать на продолжениях сторон.

Но $AK = a - b$; таким образом, $EH = \frac{m(a-b)}{m+n}$.

Следовательно, $EF = EH + HF = \frac{m(a-b)}{m+n} + b = \frac{ma+nb}{m+n}$.

Окончательно:
$$EF = \frac{ma+nb}{m+n}. \qquad (5)$$

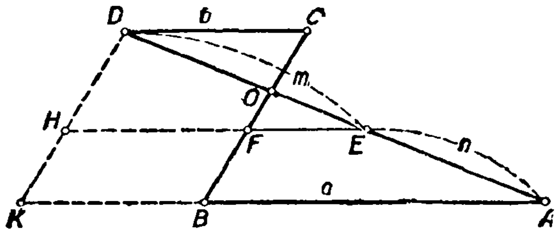
При $m = n$ формула (5) дает длину средней линии трапеции.

2°. Предыдущую теорему можно обобщить на случай „обобщенной трапеции", т. е. невыпуклого четырехугольника, у которого противоположные стороны параллельны (черт. 70).

Проводя, как и прежде, $DK \parallel CB$ и рассматривая EF как разность $EH - FH$, найдем:

$$\left.\begin{aligned} &EF = \frac{ma-nb}{m+n}, \text{ если } \frac{m}{n} > \frac{b}{a}, \text{ т. е. } EF \text{ лежит между } O \text{ и } AB \\ &EF = \frac{nb-ma}{m+n}, \text{ „ } \frac{m}{n} < \frac{b}{a}, \text{ „ } EF \text{ „ „ } O \text{ „ } CD \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Однако формулам (6) можно придать более экономный вид, если рассматривать направленные отрезки. Введем на параллельных прямых AB и CD какое-нибудь направление в качестве положительного, например, от A к B. Тогда в „обобщенной трапеции" мы должны принимать a положительным, а b — отрицательным. В таком случае можно всегда (и для обыкновенной трапеции и для „обобщенной") пользоваться формулой (5). При этом формула (5) дает не только величину, но и направление отрезка (считая от E к F, где E — точка на стороне AD, а F — на BC): если получается положительный результат, то отрезок EF имеет то же направление, что и AB, если отрицательный — то EF имеет то же направление, что и CD.



Черт. 70. „Обобщенная трапеция".

3°. Теоремы 1° и 2° можно обобщить также на случай, когда EF проходит не между основаниями трапеции, а вне их. В этом случае отношение $\frac{m}{n}$ следует считать отрицательным. Все эти рассуждения служат хорошим примером тех удобств, которые достигаются введением в геометрию относительных величин.

Пример 1. В обыкновенной трапеции $a = 3$, $b = 2$. Прямая EF проходит выше верхнего основания трапеции, причем расстояние между EF и верхним основанием равно $3h$, где h — высота трапеции. Найти EF.

В данном случае $\frac{m}{n} = \frac{DE}{EA} = -\frac{3}{4}$. Знак минус можно отнести либо к числителю, либо к знаменателю; полагая, например, $m = -3$, $n = 4$, получим:

$$EF = \frac{-3 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{-3+4} = -1.$$

Знак минус указывает, что направление EF противоположно направлению AB.

Пример 2. В обыкновенной трапеции определить отрезок средней линии, заключенный между диагоналями.

Средняя линия делит боковую сторону в отношении $\frac{m}{n}=1$. Фигура, образованная основаниями и диагоналями обыкновенной трапеции, есть „обобщенная трапеция". Поэтому мы используем формулу (1), полагая $m=n=1$ и считая, что a и b имеют разные знаки. Получим, что искомый отрезок равен полуразности оснований.

Теоремы 1°, 2° и 3° имеют ряд приложений в номографии. Теорема 1° позволяет построить номограмму формулы Рихмана, встречающейся в физике при вычислении плотности сплавов, температуры при смешении различных жидкостей и т. п. вопросах. На теоремах 2° и 3° основан способ Ван-Ден-Берга для графического решения системы линейных уравнений [1]).

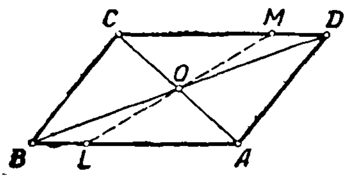
Характеристические свойства параллелограма

Переходя к параллелограмам, мы прежде всего останавливаемся на общих свойствах параллелограмов. Параллелограм $ABCD$ (черт. 71) обладает следующими свойствами:

1) $AB \parallel CD$,
2) $BC \parallel AD$,
3) $\widehat{BAD}+\widehat{ABC}=2d$,
4) $\widehat{ADC}+\widehat{BCD}=2d$,
5) $\widehat{BAD}+\widehat{CDA}=2d$,
6) $\widehat{ABC}+\widehat{DCB}=2d$,
7) $\widehat{BAD}=\widehat{BCD}$,
8) $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$,
9) $AB=CD$,
10) $BC=DA$,
11) $AO=OC$,
12) $BO=OD$,
13) $LO=OM$

(LM — произвольная прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелограма) и множеством других свойств.

За определение параллелограма обычно принимаются свойства 1) и 2). Можно определить параллелограм и по-иному, но, во всяком случае, в определение параллелограма должны быть включены два условия, потому что, как мы видели в гл. V (стр. 111), параллелограм определяется тремя условиями, а четырехугольник общего вида — пятью; следовательно, необходимы два условия для выделения класса параллелограмов из класса всех четырехугольников [2]).



Черт. 71.

Это соображение приводит к ряду интересных теорем следую-

[1]) См. Д. Н. Головнин, Графическая математика, М. — Л. 1931, стр. 130—134.

[2]) При этом свойство 13) не может считаться за одно условие, так как в нем идет речь о произвольной, а не об определенной прямой.

щего характера: утверждается, что та или иная пара из приведенных выше условий **достаточна** для того, чтобы данный четырехугольник был параллелограмом. Наиболее важны следующие комбинации:

1) и 9), т. е. „Если две противоположные стороны четырехугольника параллельны и равны между собой, то этот четырехугольник — параллелограм".

9) и 10), т. е. „Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны между собой, то этот четырехугольник — параллелограм".

11) и 12), т. е. „Если диагонали четырехугольника делятся в точке пересечения пополам, то этот четырехугольник — параллелограм".

Рекомендуем читателю исследовать всевозможные сочетания по два условий 1) — 12) и определить, какие из них достаточны для характеристики параллелограма.

При изложении свойств параллелограма полезно каждый раз ставить вопрос о возможности обращения этих теорем, например:

В параллелограме противоположные углы попарно равны между собой. Только ли в параллелограме[1]) это имеет место?—Да.

В параллелограме противоположные стороны попарно равны между собой? *Только ли в параллелограме это имеет место?* — Да.

Свойство 13) выражает, что точка пересечения диагоналей параллелограма является его центром симметрии. Всякий четырехугольник (выпуклый), имеющий центр симметрии, есть параллелограм; свойство 13), таким образом, одно достаточно для характеристики параллелограма. При этом нет необходимости указывать, что точка пересечения диагоналей является центром симметрии. Если только известно, что четырехугольник имеет центр симметрии, то он (центр симметрии) обязательно находится в точке пересечения диагоналей.

Построения параллелограма

Изложение свойств параллелограма полезно сопровождать способами построения параллелограма, вытекающими из этих свойств.

1) Построение параллелограма, основанное на свойствах 11) и 12). Проводим две пересекающиеся прямые. От точки пересечения O откладываем по одной прямой в обе стороны равные между собой отрезки $OA = OC$; на другой прямой тоже откладываем в обе стороны от точки O равные между собой отрезки $OB = OD$. Четырехугольник $ABCD$ есть параллелограм. Это построение можно использовать на гладкой (нелинованной) бумаге.

2) Построение параллелограма, основанное на свойствах 1) и 9), с использованием линованной бумаги. На одной линейке откладывается произвольный отрезок AB, на другой линейке откладывается равный ему отрезок CD, причем направление от C к D противоположно направлению от A к B. Четырехугольник $ABCD$ есть параллелограм. Это построение удобно также на клетчатой бумаге.

[1]) Подразумевается, что речь идет только о четырехугольниках.

Поступательное движение плоскости

В связи с этим построением можно ознакомить учеников со следующим важным свойством поступательного движения плоскости. Поступательным называется такое движение, при котором все точки движутся по параллельным прямым. Можно доказать, что при этом все точки смещаются на равные отрезки. В самом деле, пусть при поступательном движении точки A и B переходят соответственно в A' и B'. Имеем $AB = A'B'$ и $AA' \parallel BB'$. В таком случае $AA' = BB'$.

Ромб и прямоугольник

После изучения общих свойств параллелограма естественно перейти к важным частным видам параллелограма — *ромбу и прямоугольнику*. У прямоугольника диагонали равны между собой и обратно: если диагонали параллелограма равны между собою, то этот параллелограм есть прямоугольник. Диагонали ромба равны между собою и являются биссектрисами углов ромба. Каждое из этих свойств диагоналей является достаточным для того, чтобы параллелограм был ромбом. Отсюда вытекает следующий способ построения ромба, особенно удобный на клетчатой бумаге. Проводим две перпендикулярные прямые. От точки их пересечения O откладываем на одной из них произвольные равные между собой отрезки $OA = OC$. На другой тоже откладываем произвольные равные между собой отрезки $OB = OD$. Четырехугольник $ABCD$ есть ромб.

Квадрат является частным случаем ромба и прямоугольника. Следовательно, его диагонали обладают всеми перечисленными выше свойствами (что́ не требует особого доказательства):

1) каждая из них делится в точке пересечения пополам,
2) они равны между собой,
3) они взаимно перпендикулярны,
4) они являются биссектрисами углов.

Интересно выяснить, какие сочетания свойств 1) — 4) достаточны для того, чтобы выпуклый четырехугольник был квадратом. Прежде всего заметим, что выпуклый четырехугольник определяется пятью условиями, а квадрат — одним. Следовательно, для того чтобы выпуклый четырехугольник был квадратом, на него надо наложить четыре условия. При этом свойство 1) надо считать за два условия:

1а) диагональ AC делится в точке пересечения пополам;
1б) диагональ BD делится в точке пересечения пополам.

Свойство 4) на первый взгляд равносильно четырем условиям:

4а) диагональ AC делит пополам угол A;
4b) диагональ AC делит пополам угол C;
4c) диагональ BD делит пополам угол B;
4d) диагональ BD делит пополам угол D.

При более внимательном рассмотрении оказывается, что любое из этих четырех условий есть следствие трех остальных (рекомендуем читателю доказать это). Таким образом, свойство 4) следует считать за три условия.

При указанном раздроблении свойств 1) и 4) мы получим $C_7^4=35$ сочетаний по четыре условия. Не вдаваясь в это кропотливое исследование (которое может дать учителю богатый материал для задач *на доказательство*), ограничимся случаями, когда свойства 1) и 4) не дробятся. Тогда имеем только три возможные сочетания этих свойств, равносильные четырем условиям, а именно:

1), 2) и 3)
2) и 4)
3) и 4).

Каждое из этих сочетаний достаточно для характеристики квадрата, т. е. имеем следующие три теоремы:

1) Если в выпуклом четырехугольнике диагонали в точке пересечения делят друг друга пополам, равны между собой и взаимно перпендикулярны, то этот четырехугольник есть квадрат.

2) Если в выпуклом четырехугольнике диагонали равны между собой и являются биссектрисами углов четырехугольника [1]), то этот четырехугольник есть квадрат.

3) Если в выпуклом четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами углов четырехугольника, то этот четырехугольник есть квадрат.

Интересно провести аналогичное исследование для прямоугольника и для ромба.

ГЛАВА VIII

ОКРУЖНОСТЬ

Основные понятия, связанные с окружностью

Изучение окружности начинается с некоторых простых ее свойств, которые мы лишь напомним, не вдаваясь в их методическое исследование.

Определение окружности и круга (которое, впрочем, известно и раньше).

Центр. Диаметр. Радиус.

Окружность — замкнутая кривая.

Симметрия окружности и круга относительно центра и относительно каждого диаметра.

Диаметр делит окружность и круг на две конгруентные части.

Окружности равных радиусов конгруентны, т. е. заданием радиуса окружность определяется с точностью до движения.

Дуга. Хорда. Равенство дуг. Равные дуги могут быть только в одной окружности или в равных окружностях. Любые дуги из неравных окружностей всегда не равны.

Неравенство дуг. Для дуг одной окружности (или равных окружностей) могут быть установлены понятия „больше" и „меньше". Для дуг неравных окружностей эти понятия смысла не имеют.

Измерение дуг градусами.

Соответствие между дугами и хордами.

Здесь имеется в виду:

---

[1]) Достаточно сказать: являются биссектрисами трех углов четырехугольника.

В одном круге (или в равных кругах):

1) равные хорды стягивают равные дуги;

2) меньшая хорда стягивает меньшую дугу (т. е. бо́льшая хорда стягивает бо́льшую дугу);

3) обратная 1-й: равные дуги стягиваются равными хордами;

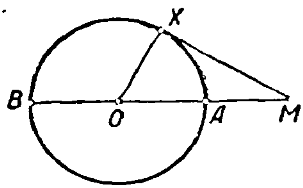
4) обратная 2-й: меньшая дуга стягивается меньшей хордой (т. е. бо́льшая дуга стягивается бо́льшей хордой).

Относительное положение точки и окружности

Остановимся несколько подробнее на вопросе о взаимном расположении: окружности и точки, окружности и прямой и двух окружностей.

Относительное положение окружности и точки зависит от соотношения между величинами: радиусом окружности R и расстоянием d от центра окружности до данной точки. Если $d < R$, то точка лежит внутри окружности; если $d = R$, то точка лежит на окружности; если $d > R$, то точка лежит вне окружности.

Понятия „внутри“ и „вне“ на этой стадии обучения понимаются интуитивно, без логического определения. Для окружности они не вызывают никаких сомнений, и потребность в логическом определении возникает лишь тогда, когда мы пытаемся перенести их на другие кривые, особенно на незамкнутые.



Черт. 72.

Полезно ввести понятие о расстоянии точки до окружности. Это понятие возникает из следующих соображений. Пусть дана окружность с центром O и точка M, лежащая вне или внутри окружности. Соединяя точку M с различными точками X на окружности, будем получать различные расстояния MX. Среди этих расстояний есть одно наименьшее и одно наибольшее. Если прямая OM пересекает окружность в точках A и B, то MA и MB суть эти экстремальные расстояния. В самом деле, из треугольника MOX (черт. 72; точка M для определенности взята вне окружности) имеем:

$$MO - OX < MX < MO + OX,$$

или, так как OX есть радиус,

$$MO - R < MX < MO + R,$$

т. е.

$$MA < MX < MB,$$

что́ и требовалось доказать. В случае, когда точка M лежит внутри окружности, доказательство аналогично.

Расстоянием точки M от окружности называется расстояние от M до ближайшей к ней точки окружности. По доказанному выше, эта ближайшая точка есть одна из точек пересечения секущей, проходящей через M и центр окружности, с окружностью.

Введенное понятие позволяет сформулировать следующую легко доказываемую теорему:

Геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии d от окружности радиуса R, представляет две окружности, концентрические с данной и имеющие радиусы $R-d$ и $R+d$.

Впрочем, если $d>R$, то рассматриваемое геометрическое место состоит из одной окружности.

Вместо второй окружности радиуса $R-d$, которая не существует, потому что $R-d$ — отрицательная величина, можно построить окружность радиуса $d-R$. Она является геометрическим местом точек, для которых наибольшее расстояние до данной окружности равно d. Рекомендуем читателю выяснить, как эти случаи непрерывно переходят один в другой.

Относительное положение прямой и окружности

При изучении взаимного расположения окружности и прямой важное методическое значение имеет теорема о том, что окружность не может иметь более двух общих точек с прямой, способствующая разрушению неправильных интуитивных представлений, что́ является одной из целей преподавания математики. Многие ученики, вычерчивая прямую, похожую на касательную к окружности, полагают, что эта прямая имеет сплошной (весьма малый) отрезок, общий с окружностью. Это весьма распространенное заблуждение основано на несовершенстве чертежа, на котором линии имеют толщину. Обращаясь к классу с соответствующим вопросом, учитель, вероятно, услышит, что окружность и прямая могут на некотором участке сливаться. Тогда учитель может воспользоваться указанной теоремой, чтобы опровергнуть этот взгляд.

Взаимное положение окружности и прямой зависит от соотношения между радиусом окружности R и расстоянием d от центра окружности до прямой:

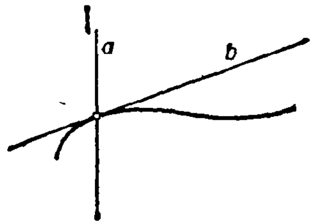
1) Если $d<R$, то прямая пересекает окружность в двух точках; такая прямая называется секущей.

2) Если $d=R$, то прямая имеет с окружностью только одну общую точку[1]; такая прямая называется касательной.

3) Если $d>R$, то прямая не имеет общих точек с окружностью.

Все три теоремы допускают обращение.

[1]) Учитель должен пресекать возникающую иногда у учеников неправильную терминологию: касательная пересекает окружность в одной точке. Касание отличается от пересечения, так как в точке касания сливаются по меньшей мере две общие точки (мы предполагаем, что читателю известен точный смысл этой сокращённой формулировки). На материале элементарной геометрии, где из кривых изучается только окружность, нельзя привести соответствующего контрпримера, так как всякая прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, обязательно есть касательная. Для кривой, изображенной на черт. 73, прямая a, имеющая с кривой только одну общую точку, все-таки является секущей, а прямая b — касательной.



Черт. 73.

Доказательство теорем 2) и 3) просто. Сложнее обстоит с теоремой 1). Можно указать на данной прямой точку, расстояние которой от центра окружности меньше, чем R: это — точка P, являющаяся проекцией центра на данную прямую. Следовательно, P лежит внутри круга. Если от точки P отложить в каждую сторону по данной прямой отрезки $PL = PM = R$, то точки L и M лежат вне круга (из прямоугольного треугольника OPL имеем $OL > PL = R$). Исходя из непрерывности прямой, можно доказать, что между точками P и L (а также между P и M) имеется точка, расстояние которой от O равно R, т. е. лежащая на окружности. Разумеется, в VII классе это доказательство не соответствует уровню учеников. Мы рекомендуем учителю сослаться на интуицию: прямая не может целиком помещаться внутри круга. Следовательно, прямая, имеющая одну точку внутри круга, должна где-то в него входить и выходить.

Теорема 2) связывается с установлением основного свойства касательной: касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Отсюда вытекает, что в каждой точке окружности имеется единственная касательная.

Относительное положение двух окружностей

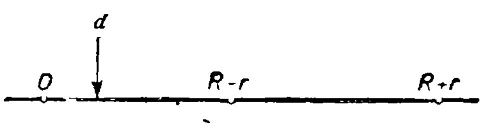
Остановимся подробнее на вопросе о взаимном положении двух окружностей, связанном с интересными логическими вопросами.

Основной теоремой в этом разделе является следующая: если две окружности имеют общую точку вне линии центров, то они имеют еще одну общую точку, симметричную с первой относительно линии центров.

Две различные окружности не могут иметь трех общих точек. Если они имеют две общие точки, то эти точки симметричны относительно линии центров. Если они имеют только одну общую точку, то эта точка должна лежать на линии центров.

Рассматривая различные случаи взаимного расположения двух окружностей, мы замечаем, что они характеризуются различными соотношениями между суммой радиусов, разностью радиусов и линией центров (расстоянием между центрами). Целесообразно различать пять случаев взаимного расположения двух окружностей. Это можно объяснить геометрически и аналитически.

Геометрическое объяснение. Допустим, что две окружности имеют различные радиусы. Может случиться, что первая целиком находится внутри большей; это — первый случай. Если меньшая окружность будет двигаться, удаляясь от центра большей, то наступит момент, когда она коснется большей изнутри; это — второй случай. При дальнейшем движении меньшая окружность будет пересекать бо́льшую в двух точках; это — третий случай. Далее наступит момент внешнего касания; это — чет-



Черт. 74.

вертый случай. Далее меньшая окружность окажется целиком вне *большей*, это — *пятый случай*.

Аналитическое объяснение. Пусть R — радиус большей окружности, r — радиус меньшей, а d — *линия* центров. Отметим на числовой прямой числа $R-r$ и $R+r$ (черт. 74).

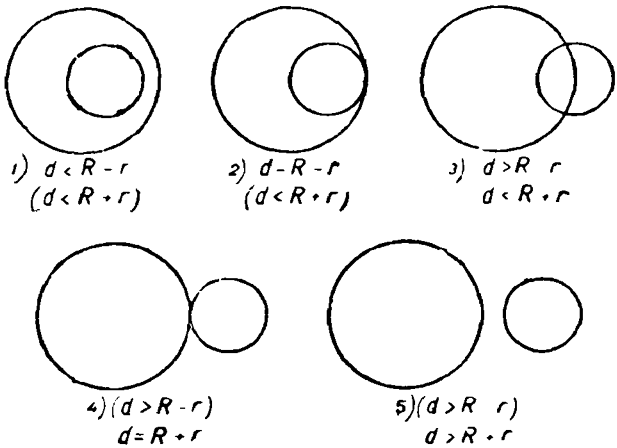
В *дальнейшем будем рассматривать только положительную* часть числовой прямой (от 0 до ∞), потому что все рассматриваемые величины ($R-r$, $R+r$ и d) положительны. Точки $R-r$ и $R+r$ делят числовую полупрямую на три интервала:

от 0 до $R-r$,
" $R-r$ " $R+r$,
" $R+r$ " ∞.

Число d, изображающее линию центров, может занимать на числовой полупрямой пять положений:

1) $0 \leqslant d < R-r$,
2) $d = R-r$,
3) $R-r < d < R+r$,
4) $d = R+r$,
5) $R+r < d < \infty$.

На черт. 75 изображены пять случаев взаимного расположения двух окружностей. В каждом случае указаны соотношения между d и



Черт. 75. Относительное положение двух окружностей.

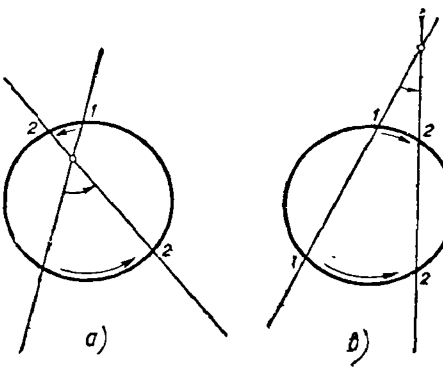
$R-r$ и между d и $R+r$. Полезно выяснить, что некоторые из этих соотношений достаточны для характеристики определенного расположения двух окружностей, а некоторые — нет. Например, если $d < R-r$, то одна окружность *лежит* внутри другой (*потому* что на чертежах 75 неравенство $d < R-r$ встречается только один раз или потому что на числовой полупрямой черт. 74 это неравенство соблюдается только на одном интервале). Напротив, неравенство $d<R+r$ недостаточно для характеристики определенного расположения двух окружностей (потому что на чертежах 75 неравенство $d<R+r$ встречается три раза или потому что на числовой полупрямой черт. 74 это неравенство соблюдается на двух интервалах).

На чертежах 75 заключены в скобки те соотношения, указание которых излишне (они вытекают из соотношений, приведенных вместе с ними). Указание соотношений, не заключенных в скобки, достаточно для характеристики каждого случая. Мы видим, что только для характеристики третьего случая необходимо указать два соотношения.

Изучение этих вопросов представляет полезное логическое упражнение.

Измерение углов дугами

В разделе, трактующем об измерении углов при помощи дуг, основной является теорема о том, что центральный угол измеряется дугой, на которую опирается[1]). Все остальные теоремы легко сводятся к этой. Трудность этой основной теоремы заключается в необходимости рассмотрения случая, когда данный угол несоизмерим с принятой единицей угла. Эти вопросы будут рассмотрены в гл. X.



Черт. 76.

При рассмотрении теорем об углах, имеющих вершину внутри круга, на окружности или вне круга, интересно обратить внимание на непрерывный переход этих случаев друг в друга. Этот вопрос часто возникает у учеников без всякого наталкивания. Они усматривают противоречие в следующем. Пусть вершина угла лежит внутри круга весьма близко к окружности; тогда угол измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами. Сдвинем незначительно вершину данного угла так, чтобы его вершина оказалась вне круга. При этом угол по величине изменится незначительно, а закон, по которому он измеряется, как будто резко изменится: теперь он будет измеряться не полусуммой, а полуразностью дуг, заключенных между его сторонами. Это кажущееся недоразумение объясняется тем, что по мере приближения вершины угла к окружности (изнутри или снаружи) одна из дуг, заключенных между его сторонами, стремится к нулю. Таким образом, при переходе вершины угла через окружность выражение $\frac{\alpha+\beta}{2}$ непрерывно переходит в $\frac{\alpha-\beta}{2}$ (β переходит через нуль).

[1]) Следует пресекать часто встречающуюся неправильную терминологию: центральный угол р а в е н дуге, на которую он опирается

Если бы мы рассматривали направленные дуги, то все теоремы об измерении углов при помощи дуг свелись бы к единственной теореме: всякий угол, стороны которого пересекают (или касаются) окружность, измеряется полусуммой (алгебраической) дуг, заключенных между его сторонами. Это — еще один пример экономии, достигаемой использованием относительных величин. На черт. 76 стрелочкой отмечен угол от первой прямой ко второй. Также отмечены дуги от первой прямой ко второй. На черт. 76*a* все три направления вращения совпадают. На черт. 76*b* направления дуг различны, причем направление вращения от первой стороны угла ко второй такое же, как в бóльшей дуге.

После теорем об измерении углов при помощи дуг необходимо рассмотреть геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом. Это важно при решении многих задач на построение.

Касательная к окружности

Изучение касательных к окружности связано с решением некоторых основных задач на построение, а именно:

1) Построить касательную в данной точке на окружности.

2) Провести касательные к окружности из данной точки вне круга.

3) Провести общие касательные к двум окружностям.

По поводу второй задачи заметим, что есть решение, более простое, чем то, которое приводится в учебниках; это решение доступно лишь учителю, но не ученикам, так как основано на свойствах поляр. Проведем из точки M несколько секущих (для построения достаточно двух). Пусть первая секущая пересекает окружность в точках A_1 и B_1, вторая — в точках A_2 и B_2 и т. д. Тогда следующие точки лежат на поляре точки M:

точка	пересечения	прямых	A_1B_2	и	A_2B_1,
„	„	„	A_1A_2	„	B_1B_2,
„	„	„	A_2B_3	„	A_3B_2,
„	„	„	A_2A_3	„	B_2B_3

и т. д.

Строя любые две из этих точек и соединяя их прямой, мы получим поляру точки M; поляра, как известно, служит хордой прикосновения, т. е. точки пересечения этой поляры с окружностью дают искомые точки касания.

Это построение имеет два преимущества перед построением, приводимым в учебниках:

1) оно выполняется при помощи одной линейки, в то время как обычное построение требует употребления циркуля;

2) оно применимо к построению касательных ко всем коническим сечениям, в то время как обычное построение основано на специальных свойствах окружности и применимо только к построению касательных к окружности.

Третья задача (построение общих касательных к двум окружностям) имеет большую педагогическую ценность. Это — первая встречающаяся в курсе геометрии задача на построение с большим числом решений (четыре) и с разнообразными случаями, встречающимися в исследовании. При решении этой задачи ясно выступают отдельные этапы решения задач на построение (анализ, построение, доказательство и исследование), которые в более элементарных задачах часто оказываются тривиальными. Анализ задачи основан на остроумном искусственном соображении (увеличение или уменьшение радиуса одного круга на величину, равную радиусу другого, и связанный с этим параллельный перенос касательной, в результате которого она пройдет через центр второго круга), которое, однако, не содержит ничего громоздкого и сразу легко воспринимается учениками. В силу этих свойств, задача доставляет ученикам большое удовлетворение.

При исследовании задачи, как и всегда в таких случаях, полезно проследить непрерывный переход друг в друга различных случаев.

Вопрос о вписанных и описанных четырехугольниках можно рассмотреть по образцу, приведенному в гл. III (стр. 67—69). При исследовании задачи о построении круга, вписанного в треугольник, можно познакомить учащихся с *вневписанными кругами.*

ГЛАВА IX

ПОДОБИЕ ФИГУР

§ 1. Основные свойства подобия

Важность общего понятия о подобии

Изучение подобных фигур начинается с подобия треугольников. Существенным недостатком прохождения этого раздела в средней школе является то, что обычно ограничиваются подобием треугольников и многоугольников. Между тем необходимо дать ученикам общее понятие о подобии. Во-первых, это — единственный хороший пример геометрического преобразования, рассматриваемый в школьном курсе (конгруентность — слишком тривиальный пример). Во-вторых, в практических применениях подобия (использование карт, планов, фотокопировальные процессы и т. д.) всегда приходится иметь дело с подобием в общем смысле. Понятие о подобии фигур принадлежит к кругу общеобразовательных сведений, повседневно необходимых каждому человеку, и учитель, исключающий это понятие из курса геометрии, делает большую ошибку.

Понятие о подобных треугольниках

Подобные треугольники определяются как треугольники, у которых углы одного равны углам другого, а сходственные (т. е. лежащие против равных углов) стороны пропорциональны. Пропорциональность отрезков встречается в этом месте впервые в курсе геометрии, и введение этого понятия связано с методическими трудностями. Учитель должен особенно внимательно отнестись к этому моменту.

Главе о подобии треугольников предшествует теория измерения отрезков: нахождение общей меры, несоизмеримые отрезки, отношение двух отрезков. Эти вопросы мы выделяем в специальную главу об измерении величин (гл. X).

Признаки подобия треугольников основываются на лемме: прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.

Коэфициент подобия

Переходя к доказательству признаков подобия треугольников, полезно установить следующую общую точку зрения. Треугольник определяется тремя данными. Если отвлечься от размеров треугольника, а характеризовать только его форму, то для определения треугольника достаточно двух данных. Поэтому во всех признаках подобия должны фигурировать два условия. Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Число

$$k=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}$$

называется коэфициентом подобия. Коэфициент подобия — весьма важное понятие, и напрасно авторы учебников и учителя пренебрегают им. Выясним, в чем заключаются методические преимущества введения этого понятия. Эти преимущества двоякого рода: 1) технические, позволяющие достичь упрощений при решении задач, 2) принципиальные, способствующие лучшему уяснению понятия подобия.

Рассмотрим задачу: стороны треугольника суть 2, 4 и 5, периметр подобного ему треугольника равен 33; определить стороны второго треугольника. Так как периметр первого треугольника равен $2+4+5=11$, то сразу можно определить коэфициент подобия

$$k=\frac{11}{33}=\frac{1}{3};$$

следовательно, стороны второго треугольника в три раза больше сходственных сторон первого треугольника. Разумеется, предварительно должно быть доказано, что не только отношение сходственных сторон, но также отношение сходственных высот, биссектрис, периметров и вообще любых линейных сходственных элементов равно коэфициенту подобия.

Если не пользоваться коэфициентом подобия, то приходится искомые отношения приравнивать отношениям известных отрезков. При использовании же коэфициента подобия мы не связываем его с отношением каких-нибудь определенных отрезков, а рассматриваем его как число, характеризующее данную пару подобных фигур.

Что касается принципиального значения коэфициента подобия, то оно заключается в следующем: коэфициент подобия есть символ, закрепляющий и в удобной форме фиксирующий ту важнейшую мысль, что в подобных фигурах любые сходственные отрезки имеют одно и то же отношение. Ученики, не ознакомленные с этим понятием, нуждаются в особом доказательстве того, что в подобных треугольниках сходственные высоты пропорциональны сходственным сторонам, а после этого доказательства они будут сомневаться, относится ли это свойство также к сходственным биссектрисам или медианам. У учеников, привыкших к коэфициенту подобия, такие недоразумения никогда не возникнут.

Стабильный учебник хотя и вводит понятие о коэфициенте подобия (п 173), но почти не использует его. Например, теорема о том, что периметры подобных многоугольников относятся, как сходственные стороны, доказывается так. Пусть многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ подобны. Тогда:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}.$$

Если имеем ряд равных отношений, то сумма всех предыдущих относится к сумме всех последующих, как какой-нибудь из предыдущих — к своему последующему. Таким образом:

$$\frac{AB+BC+CD+DE}{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1}=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}.$$

Мы предлагаем иначе формулировать эту теорему: **отношение периметров подобных многоугольников равно коэфициенту подобия.** Доказательство:

$$\begin{aligned} AB&=k\cdot A_1B_1\\ BC&=k\cdot B_1C_1\\ CD&=k\cdot C_1D_1\\ DE&=k\cdot D_1E_1. \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, находим:

$$AB+BC+CD+DE=k\cdot(A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1),$$

что и требовалось доказать.

Использование коэфициента подобия при выводе формулы для объема усеченной пирамиды

Приведем один пример, показывающий, что использование коэфициента подобия не только содействует лучшему уяснению понятия подобия, но иногда позволяет достигать значительных упрощений в доказательствах[1]). Пусть требуется вычислить объем усеченной (параллельно основанию) пирамиды, у которой площадь нижнего основания равна B, площадь верхнего основания равна b, а высота равна H. Дополним, как это обычно делается, усеченную пирамиду до полной. Верхняя (добавленная)

[1]) Этот пример сообщен автору И. Б. Абельсоном.

пирамида подобна всей пирамиде; обозначим коэфициент подобия (т. е. отношение линейных размеров верхней пирамиды к соответственным линейным размерам всей пирамиды) через k. Если через h обозначить высоту верхней пирамиды, то

$$\frac{h}{H+h}=k,$$

откуда

$$h=\frac{k}{1-k}H, \qquad H+h=\frac{1}{1-k}H. \qquad (*)$$

Отношение соответственных площадей равно квадрату коэфициента подобия, т. е.:

$$\frac{b}{B}=k^2, \qquad b=k^2B. \qquad (**)$$

Отношение соответственных объемов равно кубу коэфициента подобия. Если объем всей пирамиды равен

$$V_1=\frac{1}{3}B(H+h)=\frac{1}{3}BH\cdot\frac{1}{1-k},$$

то объем верхней пирамиды равен k^3V_1, а объем усеченной пирамиды равен разности этих объемов:

$$V=V_1-k^3V_1=V_1(1-k^3)=\frac{1}{3}BH(1+k+k^2)=\frac{1}{3}H(B+kB+k^2B).$$

В силу равенства $(**)$ k^2B есть b, а

$$kB=\sqrt{B\cdot k^2B}=\sqrt{Bb}\ ^{1)}.$$

Таким образом,

$$V=\frac{1}{3}H(B+\sqrt{Bb}+b),$$

что и требовалось доказать.

Общее понятие о подобии

Переходим к установлению общего понятия о подобии. В стабильном учебнике это понятие связано с подобным расположением фигур. Мы полагаем, что этого не следует делать, так как при этом мы суживаем понятие о подобии. Подобное расположение есть лишь частный случай подобного преобразования (хотя всякие две подобные фигуры можно путем движения сделать подобно расположенными). К тому же, суживая таким образом понятие подобия и затемняя тем самым его логическую сущность, мы ничего не выигрываем в смысле технического упрощения, а, наоборот, усложняем дело, так как связываем свойства подобия с некоторыми конструкциями, определяющими гомотетию.

---

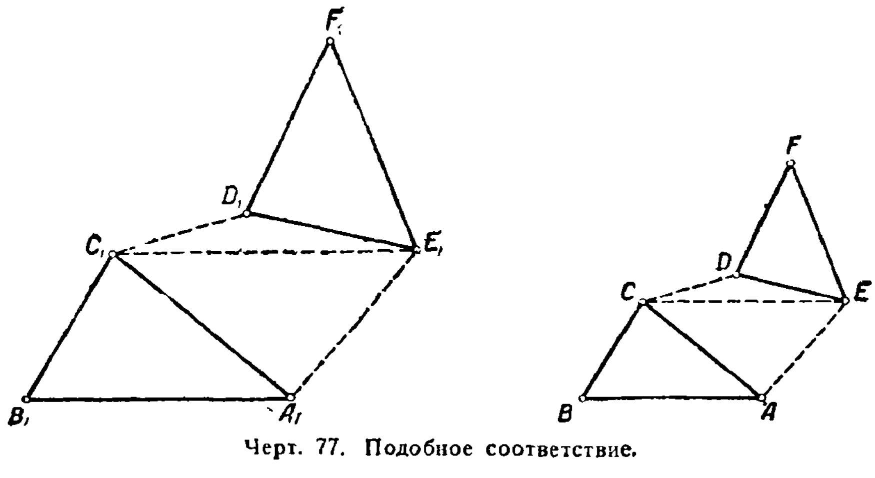
1) Этого искусственного преобразования можно избежать, заменив k через $\sqrt{\frac{b}{B}}$: $\quad kB=\sqrt{\frac{b}{B}}\cdot B=\sqrt{Bb}$.

Подобие есть некоторое взаимно-однозначное точечное преобразование плоскости. Итак, мы опять (как в главе о конгруентных фигурах) рассматриваем две плоскости (может быть, совмещенные), и если даны две подобные фигуры P и P_1, то мы считаем, что каждая из них вделана в соответствующую плоскость, и рассматриваем подобное соответствие между этими плоскостями.

Если A, B, C — три *любые* точки одной плоскости, а A_1, B_1, C_1 — три *соответственные* точки другой плоскости, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Эго условие есть определение подобия. Отсюда следует, что если между двумя плоскостями установлено подобное соответствие, то любой угол в одной плоскости равен соответственному углу в другой плоскости, а отношение любых двух соответственных отрезков равно коэфициенту подобия.

Постоянство коэфициента подобия в подобном соответствии

Мы не приводим доказательства всех свойств определенного таким образом подобия, так как оно весьма просто, и читатель легко выполнит его сам. Покажем для примера, как доказать постоянство коэфициента подобия. Вопрос заключается в следующем: по определению подобия любой треугольник первой плоскости подобен соответственному треугольнику второй



Черт. 77. Подобное соответствие.

плоскости, однако в этом определении не говорится, что коэфициент подобия для любой пары треугольников — один и тот же. Пусть в первой плоскости даны два треугольника ABC и DEF. Во второй плоскости им соответствуют треугольники $A_1B_1C_1$ и $D_1E_1F_1$. Согласно определению подобия,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k,$$

$$\frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EF}{E_1F_1} = \frac{FD}{F_1D_1} = k'.$$

Требуется доказать, что $k = k'$. Треугольнику CDE первой плоскости соответствует треугольник $C_1D_1E_1$ второй плоскости (черт. 77). Следовательно,

$$\frac{DE}{D_1E_1} = \frac{CE}{C_1E_1}.$$

Треугольнику ACE первой плоскости соответствует треугольник $A_1C_1E_1$ второй плоскости. Следовательно,

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{CE}{C_1E_1}.$$

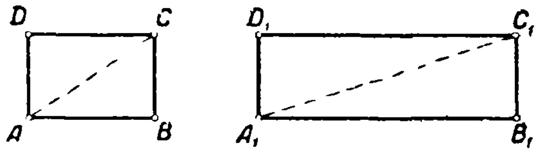
Сравнивая две последние пропорции, находим:

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{DE}{D_1E_1},$$

т. е. $k = k'$, что́ и требовалось доказать.

Достаточные признаки подобия фигур произвольного вида

Для подобия двух фигур достаточно либо равенства всех соответственных углов, либо пропорциональности всех соответственных отрезков. Это свойство при поверхностном отношении может привести к следующему недоразумению. При изучении подобных многоугольников учитель обычно обращает внимание учеников на то, что для подобия треугольников достаточно равенства углов (или пропорциональности сторон), а для подобия многоугольников этого недостаточно. Например, два прямоугольника, изображенные на черт. 78, не подобны, хотя углы у них одинаковые. Это недоразумение объясняется тем, что для подобия фигур произвольного вида достаточно равенство **всех** соответственных углов, а не только углов, входящих в контуры этих фигур. Если бы в подобном соответствии точкам A, B, C, D соответствовали точки A_1, B_1, C_1, D_1, то, например, угол $\widehat{CAB}$ должен был бы равняться углу $\widehat{C_1A_1B_1}$, что́ не имеет места.



Черт. 78.

Подобное расположение

После изучения общего понятия о подобном соответствии можно перейти к его частному случаю — **гомотетии** или **подобному расположению**. Следует доказать, что две подобно расположенные фигуры подобны. Затем следует теорема об окружностях: всякие две окружности можно рассматривать как подобно расположенные и притом двумя способами — у них имеется один внутренний центр подобия и один внешний. Значение этой теоремы будет выяснено ниже.

Теорема Шаля Теорию подобно расположенных фигур увенчивает теорема Шаля, устанавливающая связь между подобием и подобным расположением: всякие две подобные фигуры можно движением привести к подобному расположению (и притом бесконечно многими способами).

Пусть даны две подобные фигуры P и P_1, пусть A, B, C — какие-нибудь три точки первой фигуры, а A_1, B_1, C_1 — соответственные точки второй фигуры. Из подобия этих фигур следует:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}=k.$$

Возьмем в плоскости второй фигуры произвольную точку O_1 и проведем лучи O_1A_1, O_1B_1, O_1C_1. На этих лучах отложим от точки O_1 отрезки O_1A', O_1B', O_1C', удовлетворяющие условию

$$O_1A'=k\cdot O_1A_1,$$
$$O_1B'=k\cdot O_1B_1,$$
$$O_1C'=k\cdot O_1C_1.$$

Из теории подобного расположения известно, что треугольник $A'B'C'$ подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, причем коэфициент подобия равен k:

$$\frac{A'B'}{A_1B_1}=\frac{B'C'}{B_1C_1}=\frac{C'A'}{C_1A_1}=k.$$

Из сопоставления написанных выше пропорций следует, что $A'B'=AB$, $B'C'=BC$, $C'A'=CA$. Следовательно, треугольники $A'B'C'$ и ABC конгруентны.

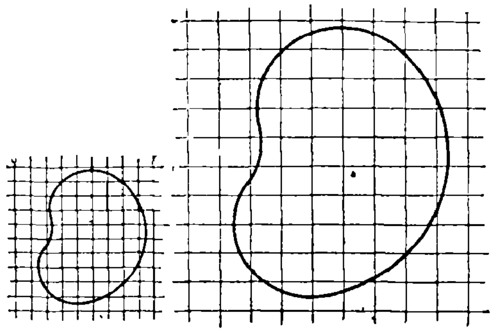
Каждая точка M_1 фигуры P_1 (это значит: точка плоскости, твердо связанной с фигурой P_1) переходит в точку M', лежащую на луче O_1M_1 и определяемую равенством $O_1M'=k\cdot O_1M_1$. Точке M' соответствует точка M фигуры P, занимающая относительно треугольника ABC такое же положение, что и точка M' относительно треугольника $A'B'C'$ (т. е. $M'A'=MA$, $M'B'=MB$, $M'C'=MC$). Это значит, что фигура P', гомотетичная фигуре P_1, конгруентна фигуре P, что и требовалось доказать.

При этом построении центр гомотетии может быть взят произвольно относительно фигуры P_1. Каждому положению центра гомотетии соответствуют две фигуры P', конгруентные P_1, потому что можно принять k положительным или отрицательным, лишь бы было $|k|=\frac{A'B'}{A_1B_1}$. При отрицательном k фигура P' будет конгруентно-симметрична P.

Подобное копирование Положим, что требуется вычертить фигуру, подобную данной фигуре P с заданным коэфициентом подобия. Для этого следует „отнести“ данную фигуру P к более простой фигуре, например, к треугольнику, и определять положение каждой точки фигуры P относительно этого треугольника. Проще принять за систему отнесения не треугольник, а сетку, покрывающую плоскость. Обычно используют сетку из квадратов (для точности построения — возможно более мелких) (черт. 79). Затем вычерчивают сетку из квадратов другого размера с данным коэфициентом подобия k. Берут множество точек фигуры P и на втором чертеже отмечают точки, занимающие такое же положение во второй сетке квадратов (иначе говоря — имеющие те же координаты во второй системе).

Ознакомление учеников с этим способом мы считаем необходимым. Во-первых, этот способ практически весьма удобен, им пользуются при копировании фигур со сложными контурами (например, географических карт). Поэтому следует его стимулировать. При прохождении геометрии ученику часто приходится изображать подобные фигуры, и надо приучить его к использованию для этой цели клетчатой бумаги.

Во-вторых, этот способ имеет большую теоретическую ценность. Он закрепляет в сознании учеников ту идею, что преобразуется не отдельная фигура, а плоскость. Преобразование плоскости характеризуется переходом одной сетки в другую. Если на первой сетке нанесена какая-нибудь фигура, то сетка, преобразуясь, автоматически преобразует и эту фигуру.



Черт. 79. Подобное копирование.

Эта идея является общей для всех геометрических (точечных) преобразований. Всякое преобразование плоскости может быть наглядно охарактеризовано, если мы покроем плоскость сеткой квадратов, а затем вычертим преобразованную сетку (которая, вообще говоря, не будет состоять из квадратов). Как бы ни было сложно рассматриваемое преобразование, если обе сетки вычерчены, то „копирование" (т. е. построение по данной фигуре P преобразованной фигуры P_1) осуществляется так же просто, как в случае подобия. Построение таких сеток обычно используется при изучении преобразования плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ в плоскость комплексного переменного $w = u + iv$ посредством аналитической функции $w = f(z)$.

Можно еще ознакомить учеников с прибором, механически осуществляющим подобное копирование, — пантографом.

§ 2. Логарифмическая спираль и ее роль в теории подобия

Автоподобные линии

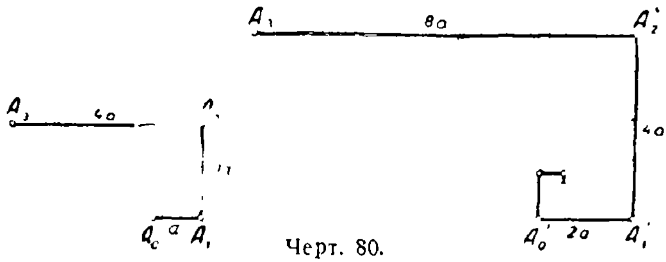
Наше изучение свойств подобия будет неполным, если мы не ознакомимся с автоподобной кривой — логарифмической спиралью. Замечательные свойства этой кривой относительно подобного преобразования могут быть получены совсем элементарно.

Автоподобной (т. е самой себе подобной) называется линия, которая после подобного преобразования не изменяется, т. е. превращается в конгруентную линию. Простейшим примером автоподобной линии является прямая.

Спиральная ломаная, инвариантная относительно подобных преобразований с коэфициентом подобия 2^n

Рассмотрим следующее построение. Пусть отрезок $A_0A_1 = a$ (черт. 80). Строим $A_1A_2 \perp A_0A_1$ и откладываем $A_1A_2 = 2a$. Строим $A_2A_3 \perp A_1A_2$ и откладываем $A_2A_3 = 4a$. Продолжаем это построение неограниченно, каждый раз удваивая предыдущий отрезок и проводя перпендикуляры в определенном направлении вращения, например, против часовой стрелки. Кроме того, исходя из точки A_0, продолжим этот процесс неограниченно в противоположную сторону, т. е. будем проводить перпендикуляры в сторону по часовой стрелке и каждый раз уменьшая предыдущий отрезок вдвое.

Возьмем полученную спиральную ломаную и подобно увеличим ее вдвое (по линейным размерам) (черт. 80). При этом каждый отрезок этой ломаной примет величину следующего отрезка, например, отрезок $A_0A_1 = a$ превратится в отрезок $A_0'A_1' = 2a$. Новая ломаная будет конгруентна первоначальной: если ее повернуть на 90° против часовой стрелки и надлежащим образом перенести поступательно, то она совместится с первоначальной. Выражаясь не вполне точно, но более впечатляюще, можно сказать, что нашу ломаную нельзя увеличить вдвое. *При попытке такого увеличения она только повернется на 90° против часовой стрелки.* Для возможности такого



Черт. 80.

утверждения существенно, что наша ломаная бесконечна в обе стороны, т. е. не имеет ни первого, ни последнего звена.

Построенная нами ломаная превращается в конгруентную ломаную при подобном преобразовании с коэфициентом подобия 2, 4, 8,..., а также $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ и вообще

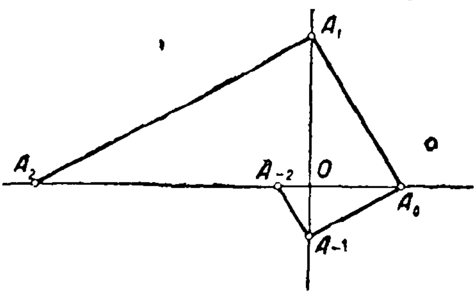
$$k = 2^n,$$

где n — любое целое число (положительное или отрицательное). Однако эта ломаная не является автоподобной, так как она не выдерживает подобного преобразования с произвольным коэфициентом.

Спиральная ломаная, инвариантная относительно подобных преобразований с коэфициентом подобия q^n

Попытаемся обобщить приведенное выше построение. Прежде всего придадим ему следующую форму. Возьмем две перпендикулярные прямые OX_0 и OX_1 (черт. 81). На прямой OX_0 отложим отрезок $OA_0 = l$, а на OX_1 — отрезок $OA_1 = 2l$, затем, поворачиваясь каждый раз на 90° против часовой стрелки, строим $OA_2 = 4l$, $OA_3 = 8l, \ldots$ и т. д. Двигаясь в обратную сторону, строим отрезки $OA_{-1} = \frac{1}{2}l$, $OA_{-2} = \frac{1}{4}l, \ldots$ и т. д. Соединяя последовательно полученные точки $\ldots A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \ldots$, мы получим нашу прямоугольную ломаную. При этом угол наклона каждого звена к соответствующему радиусу-вектору имеет постоянное значение:

$$\varphi = \widehat{OA_nA_{n+1}} = \operatorname{arc\,tg} 2.$$



Черт. 81.

Чтобы обобщить приведенное построение, заметим следующее:

1) Мы рассматриваем последовательные радиусы-векторы $\ldots OA_{-2}, OA_{-1}, OA_0, OA_1, OA_2, \ldots$; угол между двумя последовательными радиусами-векторами один и тот же. Мы прини-

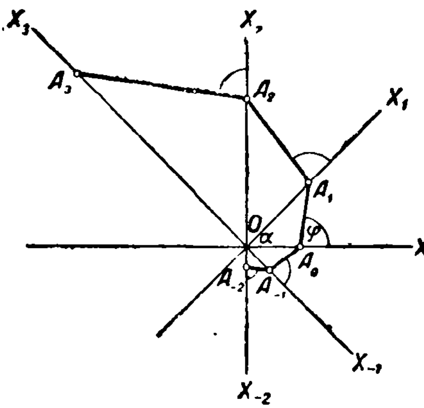
мали его за 90°; можно придать ему произвольное значение α. Если принять ось OX_0 за начальную, то **углы последовательных радиусов-векторов с осью OX_0 образуют арифметическую прогрессию.**

2) Последовательные радиусы-векторы увеличиваются в геометрической прогрессии со знаменателем 2; можно увеличивать их в геометрической прогрессии со знаменателем q.

Итак, проведем оси $\ldots OX_{-2}$, OX_{-1}, OX_0, OX_1, $OX_2, \ldots$ так, что две последовательные оси образуют угол α (черт. 82). Откладываем на последовательных осях радиусы-векторы, образующие геометрическую прогрессию:

$$\ldots OA_{-2}=q^{-2}a,\ OA_1=q^{-1}a,\ OA_0=a,\ OA_1=qa,\ OA_2=q^2a, \ldots$$

Построение радиусов-векторов, образующих геометрическую прогрессию, проще всего производить так. Два соседние радиуса-вектора, например OA_0 и OA_1, берутся произвольно. Затем определяем угол φ между звеном A_0A_1 и осью OX_0 и в дальнейшем проводим каждое звено ломаной под тем же углом к предыдущей оси (черт. 82). Очевидно, звенья ломаной образуют геометрическую прогрессию с тем же знаменателем q, что́ и последовательные радиусы-векторы.



Черт. 82.

Полученная таким образом спиральная ломаная остается конгруентной сама себе при подобном преобразовании с коэфициентом подобия q^n (n — целое). При гомотетии с центром в O и коэфициентом подобия q^n наша спираль повернется на угол $n\alpha$ (по часовой стрелке или против в зависимости от того, будет ли q меньше или больше единицы).

Таким образом, мы получим спираль, которая выдерживает подобные преобразования с коэфициентами подобия

$$\ldots,\ q^{-2},\ q^{-1},\ 1,\ q,\ q^2,\ \ldots$$

Логарифмическая спираль

Можно сделать эти числа следующими более часто. Для этого проведем биссектрисы всех углов между последовательными осями. На биссектрисе угла между осями OX_0 и OX_1 отложим радиус-вектор $OA_{\frac{1}{2}}=q^{\frac{1}{2}}a$ и т. д. В результате этого построения мы получим спиральную ломаную, которая выдерживает подобное преобразование с коэфициентами подобия

$$\ldots q^{-2},\ q^{-\frac{3}{2}},\ q^{-1},\ q^{-\frac{1}{2}},\ 1,\ q^{\frac{1}{2}},\ q,\ q^{\frac{3}{2}},\ q^2, \ldots$$

Если будем делить углы α не пополам, а на n равных частей и строить последовательные радиусы-векторы в геометрической прогрессии со знаменателем $q^{\frac{1}{n}}$, то мы получим спиральную ломаную, для которой допустимые коэфициенты подобия $q^{\frac{k}{n}}$ (k — целое) будут следовать тем чаще, чем больше n. Остается перейти к пределу при $n \to \infty$ и тем самым заставить эти коэфициенты следовать непрерывно; тогда мы получим спираль, выдерживающую подобное преобразование с любым коэфициентом подобия.

Эта идея сопоставления арифметической прогрессии с геометрической и превращения *обеих прогрессий в непрерывные есть основная идея теории* логарифмов.

Важно отметить, что при предельном переходе уже построенные точки A_i сохраняются, но между ними вставляется ряд новых. Таким образом, мы строим точки с полярными координатами

$$\ldots(-2\alpha,\ q^{-2}a),\ (-\alpha,\ q^{-1}a),\ (0,\ a)\ (\alpha,\ qa),\ (2\alpha,\ q^2a),\ldots;$$

наша предельная спираль пройдет через все эти точки. Затем вставляем промежуточные точки вида

$$\left(\frac{p\alpha}{n},\ q^{\frac{p}{n}}a\right)$$

(на первом месте всюду указывается полярный угол, т. е. угол радиуса-вектора с осью OX_0, а на втором — длина радиуса-вектора). Соединяя все построенные точки (напоминаем, что они строятся без вычисления и измерения радиусов-векторов, а путем проведения каждого звена ломаной под постоянным углом к предыдущей оси) плавной кривой, получим предельную кривую, называемую логарифмической спиралью (происхождение этого названия выяснится ниже).

Как видно из предыдущего, логарифмическая спираль характеризуется следующим свойством: при возрастании полярного угла в арифметической прогрессии с *любой разностью* α радиус-вектор возрастает (или убывает) в геометрической прогрессии; знаменатель этой прогрессии зависит от α, т. е. $q = q(\alpha)$. Если принять за единицу длину радиуса-вектора, отложенного на оси OX_0, т. е. соответствующего полярному углу $\varphi = 0$, то:

полярному	углу	α	соответствует	радиус-	вектор	q
"	"	2α	"	"	"	q^2
"	"	3α	"	"	"	q^3
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
"	"	$n\alpha$	"	"	"	q^n
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

Обозначая $n\alpha = \varphi$, т. е. $n = \frac{\varphi}{\alpha}$, получим, что радиус-вектор ρ, соответствующий полярному углу φ, равен $q^{\frac{\varphi}{\alpha}}$. Обозначая константу $q^{\frac{1}{\alpha}}$ через a, получим:

$$\rho = a^{\varphi}. \tag{1}$$

Равенство (1) представляет уравнение логарифмической спирали в полярных координатах. Определим из него φ:

$$\varphi = \log_a \rho. \tag{2}$$

Эта зависимость является причиной названия „логарифмическая спираль".

Мы полагаем $a > 0$. Положим для определенности $a > 1$.

Тогда

$$\lim_{\varphi \to -\infty} a^{\varphi} = 0.$$

Это показывает, что при неограниченном вращении радиуса-вектора по часовой стрелке он стремится к нулю, т. е. точка $\rho = 0$ является асимптотической точкой спирали. Если бы было $0 < a < 1$, то спираль закручивалась бы вокруг своей асимптотической точки против часовой стрелки. Асимптотическая точка называется также полюсом логарифмической спирали.

Важно отметить, что у логарифмической спирали найдется радиус-вектор любой величины от 0 до ∞.

Некоторые свойства логарифмической спирали

Докажем несколько важных свойств логарифмической спирали.

Свойство 1. При гомотетии с любым коэфициентом подобия и с центром в полюсе спирали логарифмическая спираль переходит в конгруентную спираль с тем же полюсом, повернутую на некоторый угол по отношению к первоначальной спирали.

Доказательство. При указанной гомотетии спираль

$$\rho = a^{\varphi} \qquad (1)$$

превратится в спираль

$$\rho = ka^{\varphi}. \qquad (1')$$

Уравнение (1') можно представить в виде

$$\rho = a^{\varphi + \log_a k},$$

откуда видно, что это — первоначальная спираль (1), повернутая на угол

$$\varphi_0 = \log_a k$$

против часовой стрелки (угол измеряется в радианах).

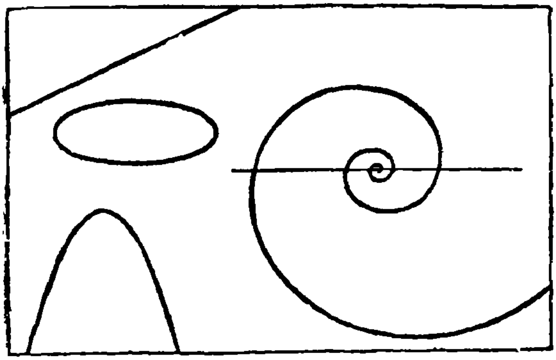
Пример. В логарифмической спирали $\rho = 2^{\varphi}$ все радиусы-векторы увеличены втрое. На какой угол повернется данная спираль?

Ответ:

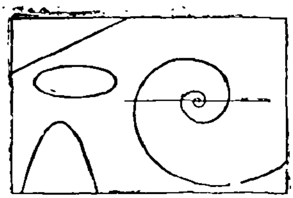
$$\varphi_0 = \log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} = \frac{0{,}47712}{0{,}30103} = 1{,}5850 \text{ радианов} = 90°48'49'', 71.$$

Свойство 2. В любой точке логарифмической спирали угол между радиусом-вектором и касательной — один и тот же.

Доказательство. Пусть A_1 и A_2 суть две точки на логарифмической спирали. Первая имеет радиус-вектор ρ_1, а вторая ρ_2. Подвергнем данную спираль гомотетии с коэфициентом $k = \frac{\rho_2}{\rho_1}$. Тогда первоначальная спираль перейдет



a



b

Черт. 83.

в новую спираль, причем точка A_1 перейдет в точку A_1' с радиусом-вектором $\rho_1' = k\rho_1 = \rho_2$. Угол между радиусом-вектором и касательной при подобном преобразовании не изменится; следовательно, у новой спирали в точке A_1' он будет тот же, что у первоначальной спирали в точке A_1. Но новая спираль конгруентна первоначальной; поворачивая новую спираль на такой угол, чтобы радиус-вектор OA_1' совместился с равным ему радиусом-вектором OA_2, мы найдем, что угол между радиусом-вектором и касательной у первоначальной спирали в точке A_2 — тот же, что у новой спирали в точке A_1', — т. е. тот же, что у первоначальной спирали в точке A_1, что и требовалось доказать.

Черт. 83 иллюстрирует свойство автоподобных кривых. На черт. 83 изображены прямая, эллипс, парабола и логарифмическая спираль. Черт. 83а представляет собою черт. 83b, увеличенный вдвое по линейным размерам. Если читатель сведет черт. 83b на прозрачную бумагу и попытается накладывать изображенные на нем линии на линии черт. 83а, то он убедится в том, что:

1) Прямая линия при увеличении чертежа не изменилась: прямая второго чертежа при наложении полностью совпадает с прямой первого чертежа (следует помнить, что обе прямые предполагаются бесконечными в обе стороны, а не ограниченными рамками чертежа). При наложении поворачивать чертеж не придется (рамки второго чертежа будут параллельны рамкам первого чертежа).

2) Эллипс второго чертежа нельзя совместить с эллипсом первого чертежа. Параболу с параболой совместить тоже нельзя.

3) Логарифмическую спираль второго чертежа можно совместить с логарифмической спиралью первого чертежа. Для этого следует повернуть второй чертеж на 180° по часовой стрелке; при этом спирали полностью совпадут (необходимо помнить, что обе спирали предполагаются совершающими бесконечное множество оборотов как против часовой стрелки — за рамки чертежа, так и по часовой стрелке — к полюсу).

ГЛАВА X

ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Классификация геометрических величин

Вопросы, связанные с измерением геометрических величин (длин, площадей и объемов), занимают значительную часть школьного курса геометрии. Сюда относятся вопросы нахождения общей меры, понятие о несоизмеримых величинах, свойства пропорциональных отрезков, теоремы, выражающие связь между линейными элементами различных фигур (например, теорема Пифагора), длина окружности, измерение площадей и объемов; сюда же относится измерение углов. Во всех этих вопросах есть некоторая общая часть, которая иногда заслоняется специфическими различиями. Для учителя полезно выделить эту общую часть и уяснить общую логическую природу этих вопросов, а также уяснить специфические особенности отдельных случаев в их взаимоотношениях. Поэтому мы объединяем все эти вопросы в одну главу.

В то же время предупреждаем читателя, что ввиду обширности этих вопросов мы не имеем возможности в этой книге изложить их систематически. Мы лишь наметим основные идеи и методические соображения, отсылая читателя за подробностями к другим источникам.

Мы будем классифицировать геометрические величины в зависимости от значений двух показателей:

p — число измерений данной величины,

n — число измерений пространства, в котором помещается данная величина; $p \leqslant n$.

Возможны следующие комбинации:

$n \backslash p$	1	2	3
1	Измерение длин прямолинейных отрезков. Сюда же относится измерение углов - линейных и двугранных - и градусное измерение дуг окружностей		
2	Длины кривых на плоскости	Площади плоских фигур. Сюда же относится измерение телесных углов	
3	Длины кривых в пространстве	Площади кривых поверхностей.	Объёмы.

§ 1. Прямолинейные отрезки.

Связь теории измерения отрезков с теорией действительных чисел

Проблема измерения прямолинейных отрезков эквивалентна проблеме построения теории действительных чисел.

В самом начале курса геометрии решается задача о нахождении отрезка, кратного данному, т. е. об умножении отрезка на целое число, и задача о делении отрезка на целое число. Комбинируя эти построения, мы можем построить отрезок $\frac{p}{q}a$, где a — данный отрезок, а p и q — целые числа, т. е. умножить данный отрезок на любое рациональное число.

Однако не всякий отрезок может быть выражен в виде $\frac{p}{q}a$, так как существуют несоизмеримые отрезки. Длина отрезка есть величина непрерывная, а множество рациональных чисел не является непрерывным. Для того чтобы измерять длины, рациональных чисел недостаточно. Необходимо дополнить множество рациональных чисел до непрерывного множества, введя иррациональные числа, т. е. построить теорию действительных чисел.

Если теория действительных чисел построена, то вопрос об измерении отрезков решается почти автоматически. Это ясно из рассмотрения числовой прямой, устанавливающей взаимно-однозначное соответствие между точками прямой (лучше сказать — между отрезками от начала до различных точек прямой) и действительными числами.

Современные математики склонны не замечать никакой разницы между эквивалентными вопросами. С научной точки зрения важно решить только одну проблему: либо построить аналитическую теорию действительных чисел, либо построить независимую от чисел теорию длин отрезков. Вопрос же об установлении связи между этими проблемами является совсем простым.

Совсем иной является точка зрения историка и педагога. Теория действительных чисел и теория длин отрезков педагогически не эквивалентны, и, строя методику геометрии, мы на первый план выдвигаем именно этот, второстепенный с научной точки зрения, вопрос: какая из различных (математически эквивалентных) точек зрения на понятие длины отрезка предпочтительнее с педагогической точки зрения.

Исторически эти две проблемы тоже не эквивалентны, как видно из следующих фактов. Строгая аналитическая теория действительных чисел была создана весьма поздно: она была окончательно оформлена Дедекиндом (1872)[1]. Справедливость требует указать, что более чем за двадцать два века до этого греческие математики Евдокс и Евклид уже создали вполне эквивалентную теорию: мы имеем в виду теорию пропорций, изложенную в пятой книге „Начал". Эта теория, логически безупречно строгая даже с точки зрения современной математики, эквивалентна теории действительных чисел, но математики последующих веков не усмотрели этого и не сумели перевести ее на аналитический язык. Только когда в XIX столетии теория действительных чисел была построена самостоятельно, эквивалентность этих теорий стала очевидной. Это показывает, сколь трудно иногда установить связь между вопросами, с математической точки зрения эквивалентными, и преподаватель должен учитывать это обстоятельство.

Три точки зрения на метрические зависимости

Между отрезками, входящими в состав различных геометрических фигур, существуют различные зависимости, называемые обычно метрическими соотношениями (например, $a^2+b^2=c^2$, где a и b — катеты, а c — гипотенуза прямоугольного треугольника). Возможны разные точки зрения на эти зависимости, а именно:

1) Геометрическая точка зрения (точка зрения Евклида). С этой точки зрения отрезки не измеряются числами. Буквы, входящие в формулы, обозначают не числа, выражающие длины отрезков, а самые отрезки. Выражения a^2 или ab понимаются как площадь соответственно квадрата, стороной которого служит отрезок a, или прямоугольника, сторонами которого служат отрезки a и b. Аналогично выражения a^3, a^2b, abc обозначают объемы. При этом площади и объемы тоже не измеряются числами. Равенство площадей понимается в том смысле,

[1]) В книге „Stetigkeit und die irrationale Zahlen", Braunschweig, 1872. Имеется русский перевод: Р. Дедекинд, Непрерывность и иррациональные числа, Одесса 1909.

что одну фигуру можно разрезать на части, из которых можно сложить вторую.

2) Промежуточная точка зрения. Буквы, входящие в формулы, суть числа, выражающие длины отрезков. При этом требуется, чтобы геометрические формулы были однородными; это требование (как будет пояснено ниже) дает возможность рассматривать буквы как **именованные числа**. Эта точка зрения принята в школьном преподавании.

3) Аналитическая точка зрения (которую мы условно назовем точкой зрения Декарта). Буквы, входящие в формулы, суть **отвлеченные** числа, выражающие отношения длин отрезков к принятой единице длины. Однородности формул не требуется.

Характеризуя первую точку зрения, необходимо еще добавить, что у Евклида вообще отсутствуют формулы, а все метрические зависимости формулируются словесно.

Нет необходимости доказывать неприменимость первой точки зрения в школьном преподавании. Наличие этой точки зрения у греческих геометров объясняется, во-первых, философскими соображениями, по которым арифметика считалась более низкой наукой, чем геометрия, во-вторых, отсутствием алгебраической символики и аналитической теории действительных чисел. При этих условиях арифметика не могла быть полезным подспорьем для геометрии. В наше время все эти соображения отсутствуют. Попытки выдержать чисто геометрическую точку зрения и обойти измерение отрезков числами привели бы к сложным и искусственным обходным построениям.

Поэтому мы остановимся только на сопоставлении второй и третьей точек зрения.

Однородность геометрических формул

Для второй точки зрения характерно требование однородности геометрических формул. С этой точки зрения геометрические соотношения между отрезками должны выражаться формулами вида

$$F(a,\ b,\ c, \ldots) = 0,$$

где a, b, $c, \ldots$ — длины отрезков, а F — однородная функция своих аргументов. Эти соотношения обладают тем свойством, что они не зависят от принятой единицы длины. В самом деле, пусть отрезок l принят за единицу длины, а a, b, $c, \ldots$ — длины отрезков, измеренных этой единицей. Перейдем к другой единице длины l_1, и пусть a_1, b_1, $c_1, \ldots$ — длины тех же отрезков, измеренных новой единицей. Имеем:

$$a = \frac{l_1}{l} a_1$$

$$b = \frac{l_1}{l} b_1$$

$$c = \frac{l_1}{l} c_1$$

$$\cdots\cdots$$

Согласно основному свойству однородных функций,

$$F(a,\ b,\ c,\ldots)=F\left(\frac{l_1}{l}a_1, \frac{l_1}{l}b_1, \frac{l_1}{l}c_1, \ldots\right)=\left(\frac{l_1}{l}\right)^n\cdot F(a_1, b_1, c_1, \ldots),$$

где n — измерение однородной функции F. Поэтому если

$$F(a,\ b,\ c,\ldots)=0,$$

то одновременно и

$$F(a_1,\ b_1,\ c_1,\ldots)=0,$$

т. е. рассматриваемое соотношение имеет место независимо от выбора единицы длины.

Поясним сказанное на примерах. Заодно покажем на примерах некоторые другие свойства однородных формул, не останавливаясь на общих доказательствах, которые весьма просты.

Пример 1. По теореме Пифагора $a^2+b^2=c^2$. Пусть за единицу длины принят 1 *см*, а стороны треугольника выражаются числами $a=3$, $b=4$, $c=5$. Тогда:

$$3^2+4^2=5^2.$$

Если за единицу длины принять 1 *мм*, то стороны того же треугольника выразятся числами $a_1=30$, $b_1=40$, $c_1=50$, но попрежнему

$$30^2+40^2=50^2.$$

Пример 2. Векторным произведением двух векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ называется вектор $\overline{OC}$, определяемый следующими тремя условиями: 1) длина вектора $\overline{OC}$ численно равна площади параллелограма, построенного на векторах $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ как на сторонах (т. е. вектор $\overline{OC}$ содержит столько единиц длины, сколько квадратных единиц содержится в площади этого параллелограма), 2) вектор $\overline{OC}$ перпендикулярен плоскости векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, 3) вектор $\overline{OC}$ направлен в ту сторону от плоскости векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, с которой вращение от вектора $\overline{OA}$ к вектору $\overline{OB}$ по кратчайшему направлению (т. е. на угол $\leqslant 180^\circ$) кажется происходящим против часовой стрелки.

Первое условие может быть выражено формулой:

$$OC=OA\cdot OB\cdot\sin(\overline{OA},\ \overline{OB})$$

(OA без черты сверху обозначает длину вектора $\overline{OA}$). Эта формула неоднородна. Сейчас мы покажем, к каким последствиям это приводит.

На черт. 84 изображены два перпендикулярные вектора $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, причем OA равно трем единицам длины, а OB — двум. Параллелограм, построенный на этих векторах, есть прямоугольник, площадь которого равна шести квадратным единицам. Следовательно, вектор $\overline{OC}$, перпендикулярный плоскости α, направленный, как показано на чертеже, и имеющий *шесть единиц длины*, есть векторное произведение векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.

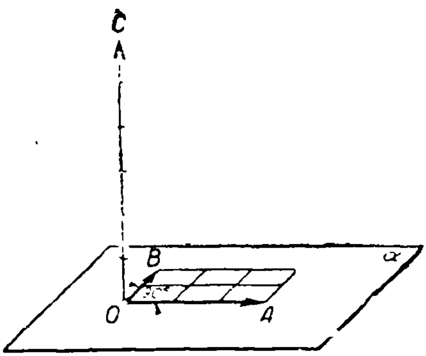
Уменьшим вдвое единицу длины. Тогда площадь прямоугольника будет равна 24 квадратным единицам. Векторное произведение должно равняться 24 (уменьшенным) единицам, т. е. фактически оно будет вдвое длиннее вектора $\overline{OC}$.

Итак, вектор $\overline{OC}$, изображенный на черт. 84, при одном выборе единицы длины является векторным произведением векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, а при другом — не является. Связь между векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ и их векторным произведением выражена неоднородной формулой и поэтому не инвариантна относительно замены единицы длины.

Рассматриваемая точка зрения до XVII в. считалась единственно возможной, причем рассматривались только формулы, все члены которых не выше третьего измерения. Это объясняется тем, что считалось необходимым геометрическое истолкование всех членов формул как отрезков, площадей или объемов. Этот „принцип однородности" не был поколеблен тем, что иногда в некоторых отдельных вопросах, не имевших отношения к геометрии, допускалось его нарушение. Так, например, в „Арифметике" Диофанта (конец III в. н. э.) рассматриваются 13 категорий чисел:

$$\frac{1}{x^6},\ \frac{1}{x^5},\ \frac{1}{x^4},\ \frac{1}{x^3},\ \frac{1}{x^2},\ \frac{1}{x},\ 1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5,\ x^6,$$

где x — неизвестное. Эти числа нельзя геометрически истолковать, принимая x за отрезок. В задачах, рассматриваемых у Диофанта, встречаются выражения вида x^2+x[1]), что является нарушением принципа однородности, так как здесь площадь складывается со стороной. Однако, повторяем, несмотря на эти отступления в отдельных вопросах, не имевших геометрического характера, принцип однородности оставался непоколебленным[2]).



Черт. 84. Векторное произведение.

Принцип однородности является полезным математическим принципом в некотором ограниченном круге вопросов. Навязывание же этого принципа всей математике в качестве универсального тормозило развитие науки, в частности создавало особенно большие неудобства для развития алгебры. Некоторые неудобства (правда, менее значительные) создаются для аналитической геометрии. Например, уравнение параболы $y=x^2$ для сторонников принципа одно-

---

[1]) У Диофанта, разумеется, нет такой символики.

[2]) А. П. Юшкевич, Декарт и математика (Р. Декарт, Геометрия, М — Л. 1938, стр. 261—262).

родности не имеет смысла, так как отрезок не может равняться площади; для сохранения размерности следует записать это уравнение в виде $ay=x^2$, где a — некоторый постоянный отрезок. Значительно хуже обстоит дело с уравнением $y^4=x^5$; здесь нужно обойти еще второй запрет принципа однородности: запрет рассматривать члены выше третьей степени.

Отношение основателей аналитической геометрии к принципу однородности

В XVII в. возникла аналитическая геометрия. Идеи аналитической геометрии впервые изложены у Пьера Ферма („Введение в изучение плоских и телесных мест", 1636 г.) и Рене Декарта („Геометрия", 1637 г.). В некоторых отношениях Ферма пошел дальше Декарта; например, у него встречается уравнение прямой, чего Декарт не рассматривал. Однако работа Ферма не оказала существенного влияния на дальнейшее развитие математики, а работа Декарта послужила источником развития аналитической геометрии и оказала громадное влияние на всю математику. Причина этого заключается в том, что Декарт отказался от принципа однородности. Он пользовался алгебраическим аппаратом, в котором все величины, как a, a^2, a^3 и т. д. изображаются отрезками. История показала, что отказ от принципа однородности освободил математику от связывавших ее пут и сразу позволил включить в рассмотрение громадный круг вопросов, которые раньше либо не могли быть рассмотрены, либо требовали при своем рассмотрении сложных обходных путей для соблюдения принципа однородности.

Педагогическое значение принципа однородности

Перейдем к методической стороне вопроса. Какой точки зрения на геометрические формулы следует держаться в школе?

Уже было сказано, что в некотором круге вопросов принцип однородности весьма полезен. Он также весьма удобен методически. Во-первых, он дает ценные мнемонические правила, позволяющие ученику избежать ошибок, связанных с нарушением размерности, в формулах для вычисления длин, площадей и объемов. Во-вторых, принцип размерности (более общий, чем принцип однородности) играет чрезвычайно важную роль в физике, и это является аргументом за то, чтобы учитель геометрии подготовил к нему учеников. Физика систематически имеет дело с умножением и делением любых именованных величин. Например, рассматривая формулу для периода качаний маятника

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l — длина маятника, а g — ускорение силы тяжести, ученик проверяет ее с точки зрения соблюдения равенства размерностей:

$$сек=1\cdot\sqrt{\frac{см}{\frac{см}{сек^2}}}.$$

Наконец (и это — самое важное), принцип однородности пригоден при рассмотрении всех тех связей между геометрическими величинами, которые не зависят от выбора единицы длины, т. е. тех связей, которые справедливы при любых подобных преобразованиях фигур, а не относятся к фигурам какой-либо фиксированной величины. Но таковы все без исключения формулы элементарной геометрии.

Важную роль играет принцип однородности в разделе приложений алгебры к геометрии, позволяя ученикам сразу распознать, какие отрезки могут быть построены (без задания единицы длины) и какие — нет. Может быть построен всякий отрезок

$$x = f(a,\ b,\ c,\ \ldots),$$

где a, b, c, ... — данные отрезки (данные графически, без указания их численных значений), а f — однородная функция первой степени[1]).

Ввиду этих соображений учитель должен использовать принцип однородности. Он должен настойчиво обращать внимание учеников на размерность встречающихся выражений и пользоваться этим принципом, чтобы опровергнуть ошибки в формулах, которые могут встретиться.

Разумеется, требование, чтобы все члены рассматриваемых формул были не выше третьей степени, является устаревшим. Оно имело смысл лишь при первой (геометрической) точке зрения. Раз мы уже стали на полуаналитический путь, рассматривая формулы как связи между числами (хотя и с некоторыми ограничениями), то это требование лишается всякой мотивировки. Нет никаких препятствий к тому, чтобы рассмотреть уравнение

$$x^4 = a^3b$$

и построить отрезок x:

$$x = \sqrt[4]{a^3b}.$$

Для этого надо представить x в виде

$$x = \sqrt{a\sqrt{ab}},$$

и тогда задача сводится к построению отрезка, среднего пропорционального между a и b, а затем среднего пропорционального между a и этим отрезком.

---

[1]) Мы говорим, что такой отрезок x „может быть построен" в том смысле, что он вполне определен графически, т. е. задача его нахождения имеет смысл. Но это не значит, что он может быть построен циркулем и линейкой. Для такой возможности необходимо (и достаточно), чтобы функция $f(a,\ b,\ c,\ \ldots)$ сводилась к конечному числу рациональных действий и извлечений квадратных корней, производимых над данными отрезками и целыми числами (С. О. Шатуновский, Об измерении прямолинейных отрезков и построении их помощью циркуля и линейки. Одесса 1925, стр. 26—32).

Аксиоматический способ введения понятия длины отрезка

Теперь перейдем к установлению понятия о длине отрезка. Это можно сделать двумя способами. Первый способ — аксиоматический. Условимся, что каждому отрезку приписывается положительное число, называемое его длиной. Как именно приписывается это число — безразлично, лишь бы удовлетворялись следующие три аксиомы:

1) Каждому отрезку приписывается одно, и только одно, положительное число, называемое его длиной.

2) Равным отрезкам приписываются равные длины.

3) Длина суммы двух отрезков равна сумме длин этих отрезков.

Этих аксиом оказывается достаточно, чтобы построить всю теорию длин отрезков. Так как мы уже говорили о непригодности аксиоматического метода в школьном преподавании, то на подробностях этого способа введения длин отрезков останавливаться не будем, отослав читателя к упомянутой уже книге С. О. Шатуновского.

Конструктивный способ введения понятия длины отрезка

Второй способ основан на конструкции, которая действительно относит каждому отрезку его длину. Этот способ состоит из двух частей.

Первая часть — единица длины еще не задана. Тогда нельзя определить, чему равна длина каждого отрезка, а можно лишь сравнивать между собой длины различных отрезков. Так, можно выяснить, будет ли длина отрезка a больше, равна или меньше длины отрезка b; можно также говорить об отношении длин $\frac{a}{b}$.

Первый шаг заключается во введении понятия об общей мере двух отрезков. Затем излагается алгорифм Евклида для нахождения общей меры двух отрезков.

После этого необходимо показать ученикам, что не всякие два отрезка имеют общую меру, т. е. существуют несоизмеримые отрезки. Для этого достаточно привести какой-нибудь пример двух отрезков, не имеющих общей меры. Обычно используют в качестве такого примера сторону и диагональ квадрата. Несколько проще доказывается несоизмеримость боковой стороны и основания равнобедренного треугольника с углами 36°, 36° и 108°. Впрочем, этот пример менее интересен для дальнейшего, поэтому ему предпочитают пример с квадратом.

Далее идет ряд теорем о пропорциональных отрезках, являющихся базой для теории подобия треугольников. Все это не требует введения единицы длины, а лишь понятия об отношении отрезков.

Важнейшим методическим вопросом в этой области является вопрос о доказательстве этих теорем для случая несоизмеримости отрезков.

Педагогическая ценность случаев несоизмеримости

У многих учителей существует тенденция доказывать подобные теоремы для случая соизмеримости, считая, что случай несоизмеримости является слишком трудным и не представляющим особого интереса. В книге Р. В. Гангнуса и Ю. О. Гурвица „Геометрия. Методическое пособие“ (ч. I, М. 1936, стр. 135) по поводу теоремы „Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается“ сказано: „Вопроса о соизмеримых и несоизмеримых углах или дугах можно и не касаться; рассмотрение последнего вопроса отнимает у учащихся много времени, нисколько существенно не содействуя расширению их кругозора“. Мы считаем такую точку зрения глубоко ошибочной и противоречащей правильным взглядам на цели преподавания математики в средней школе. Вопрос, о котором идет речь, является чрезвычайно важным в науке; следовательно, нельзя утверждать, что ознакомление с ним нисколько существенно не содействует расширению кругозора учащихся. Этот вопрос связан со столь же важным вопросом арифметики — теорией иррациональных чисел. При подобном пренебрежении к принципиальным вопросам мы не будем содействовать научному росту учащихся, а будем лишь набивать их головы фактами.

В соответствии с общими принципами преподавания геометрии мы полагаем, что учитель должен фиксировать внимание учеников на случаях несоизмеримости и добиваться отчетливого усвоения применяемого метода доказательства. Учитель должен использовать то обстоятельство, что случаи несоизмеримости встречаются в геометрии много раз (измерение центральных углов дугами, основная лемма о подобии треугольников, теорема о площади прямоугольника и т. д.), и каждый раз давать соответствующее доказательство. Это подготовит учеников к восприятию общей схемы подобных рассуждений.

Схема доказательств для случаев несоизмеримости

Доказательства различных теорем в случаях несоизмеримости основаны на следующем определении равенства иррациональных чисел. Два иррациональные числа считаются равными, если их рациональные приближения, взятые с любой одинаковой степенью точности, одновременно с недостатком или с избытком, равны между собой.

Напомним, что рациональными приближениями иррационального числа a с точностью до $\frac{1}{n}$ называются рациональные числа $\frac{p}{n}$ и $\frac{p+1}{n}$, удовлетворяющие неравенствам

$$\frac{p}{n}<a<\frac{p+1}{n}$$

(p и n — целые числа). Разумеется, предварительно надо выяснить, как сравнивается рациональное число с иррациональным. $\frac{p}{n}$ является приближенным значением числа a с недостатком, а $\frac{p+1}{n}$ — с избытком; оба приближения однозначно определяются заданием числа a и степени точности $\frac{1}{n}$. Относящиеся сюда методические подробности читатель найдет в курсе методики алгебры.

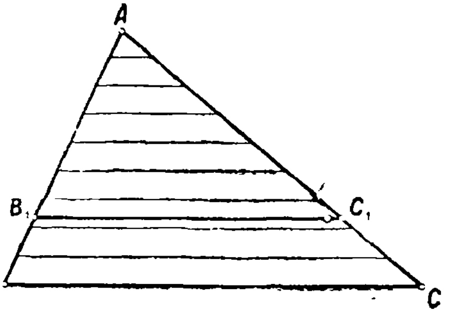
Рассмотрим в качестве примера основную лемму о подобии: прямая, параллельная какой-нибудь стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.

Пусть дан треугольник ABC и прямая $B_1C_1 \parallel BC$ (черт. 85). Требуется доказать, что треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC. Посмотрим, как доказывается пропорция $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$ в случае, когда AB и AB_1 несоизмеримы.

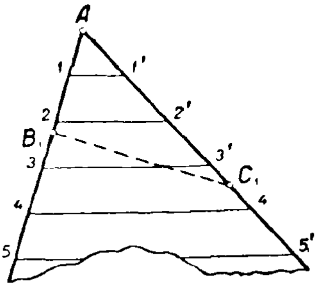
Зададимся произвольной степенью точности $\frac{1}{n}$, с которой будем измерять отношения $\frac{AB_1}{AB}$ и $\frac{AC_1}{AC}$, и разделим сторону AB на n равных частей. Через точки деления проведем прямые, параллельные прямым BC и BC_1. Легко доказываются следующие положения:

1) Проведенные прямые разделят сторону AC на n равных между собою частей.

2) Обозначим части, отложенные на стороне AB, через c, а на стороне AC — через b, т. е. $c = \frac{AB}{n}$, $b = \frac{AC}{n}$. Отрезок c не укла-



Черт. 85.



Черт. 86.

дывается в стороне AB_1 целое число раз, так как иначе он служил бы общей мерой для AB и AB_1.

3) Положим, что наибольшее число отрезков c, умещающихся в отрезке AB_1, есть p, т. е. $pc < AB_1 < (p+1)c$. В таком случае наибольшее целое число отрезков b, умещающихся в отрезке AC_1, тоже равно p. В самом деле, если отрезок c умещался в AB_1 более двух раз (но менее трех), а отрезок b умещался в AC_1 более трех раз, то сторона B_1C_1 пересекала бы прямую $33'$ (черт. 86).

Итак, мы имеем:

$$pc < AB_1 < (p+1)c,$$

$$pb < AC_1 < (p+1)b.$$

Кроме того, имеем

$$nc = AB,$$

$$nb = AC.$$

Разделим в первой системе неравенств крайние части на nc, а среднюю — на равную величину AB. Во второй системе неравенств разделим крайние части на nb, а среднюю — на равную величину AC. Получим:

$$\frac{p}{n} < \frac{AB_1}{AB} < \frac{p+1}{n}.$$

$$\frac{p}{n} < \frac{AC_1}{AC} < \frac{p+1}{n}.$$

Эти неравенства показывают, что приближенные рациональные значения отношений $\frac{AB_1}{AB}$ и $\frac{AC_1}{AC}$, вычисленные с одинаковой точностью $\left(\text{до } \frac{1}{n}\right)$ — одновременно с недостатком или с избытком, равны между собой. Так как это рассуждение справедливо при любом n (это — самый важный пункт доказательства!), то, согласно приведенному выше определению равенства иррациональных чисел,

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC},$$

что́ и требовалось доказать.

В доказательстве, приведенном в учебнике Киселева (1940 г., стр. 91), сторона AB последовательно делится на 10, 100, 1000 и т. д. частей. Таким образом, там доказывается, что любые приближенные значения отношений $\frac{AB_1}{AB}$ и $\frac{AC_1}{AC}$, выраженные в виде десятичных дробей с одинаковым числом десятичных знаков, одновременно с недостатком или с избытком, равны между собой.

Какой из этих двух вариантов доказательства следует предпочесть? Это всецело зависит от того, как излагается в курсе алгебры теория иррациональных чисел. Если иррациональное число определяется при помощи двух последовательностей десятичных дробей, то следует держаться второго варианта, если же определение иррационального числа не связывается с десятичной системой, — то первого.

Достаточность понятия об отношении отрезков для изложения метрических соотношений

Все изложенное до сих пор позволяет обосновать теорию подобия, доказать все теоремы о пропорциональных отрезках, теорему Пифагора и различные ее следствия. Весь этот материал не требует понятия о длине отрезка, а только об отношении отрезков. В самом деле, мы рассматриваем только однородные соотношения между длинами отрезков

$$F(a, b, c, \ldots) = 0,$$

а всякое такое соотношение, на основании определения однородных функций, может быть делением на n-ю степень (n — измерение функции F) одного из аргументов, например a, приведено к виду

$$F\left(1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \ldots\right) = 0.$$

Например, теорема Пифагора

$$a^2+b^2=c^2$$

может быть представлена в виде

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1.$$

Это замечание мы делаем, имея в виду интересы учителя. Применение же такой точки зрения в преподавании было бы совершенно нецелесообразно. Рассуждения об отношении длин, когда неизвестно, что́ такое длина, чрезмерно абстрактны для школьников. Мы уже́ говорили о нежелательности в школьном преподавании усложненных обходных путей ради соблюдения чистоты метода. К тому же при такой точке зрения нельзя будет решать задачи, где требуется вычислять длины отрезков, т. е. вся наша теория будет лишена своих наиболее естественных приложений. Наконец, интуитивное понятие о длине отрезка принадлежит к элементарным понятиям, имеющимся у всякого человека, и здесь мы имеем возможность, весьма важную для общего математического развития, уточнить это понятие, связав его с теорией действительных чисел.

Введение единицы длины

В т о р а я ч а с т ь — введение единицы длины. Если некоторый отрезок l принят за единицу длины, то длиной любого отрезка a называется отношение $\frac{a}{l}$.

Если отрезки a и l соизмеримы и r есть отрезок, являющийся их общей мерой, то

$$\left.\begin{aligned} a&=pr \\ l&=qr \end{aligned}\right\} \text{(p и q — целые положительные числа)}$$

и длина отрезка a равна $\frac{p}{q}$.

Если отрезки a и l несоизмеримы, то разделим отрезок l на n разных частей:

$$r=\frac{l}{n}.$$

Тогда будем иметь:

$$pr<a<(p+1)\,r\text{[1])},$$

где p — однозначно определенное целое число[2]). Деля на l:

$$p\cdot\frac{r}{l}<\frac{a}{l}<(p+1)\frac{r}{l},$$

---

[1]) Читатель не должен недоумевать по поводу того, что мы сравниваем отрезки, еще не установив понятия о длине отрезка. Это сравнение требует только откладывания одного отрезка на другом. Таким образом, можно судить о том, какой из двух отрезков больше, не умея измерять их длины.

[2]) Это основано на аксиоме Архимеда: Если a и b — два отрезка, причем $a<b$, то существует одно и только одно целое положительное число n такое, что $na<b<(n+1)\,a$.

или иначе: $$\frac{p}{n} < \frac{a}{l} < \frac{p+1}{n}.$$

Так как n произвольно, эти неравенства показывают, что приближенное рациональное значение $\frac{a}{l}$ с любой наперед заданной точностью является вполне определенным, а это значит, что само отношение $\frac{a}{l}$ является вполне определенным.

Можно для измерения отрезков пользоваться десятичными подразделениями единицы длины, т. е. последовательно откладывать в отрезке a отрезки l, $\frac{l}{10}$, $\frac{l}{100}$, ... и т. д. При этом будем получать

$$pl < a < (p+1)\,l,$$

$$p_1\frac{l}{10} < a - pl < (p_1+1)\frac{l}{10},$$

$$p_2\frac{l}{100} < a - \left(pl + p_1\frac{l}{10}\right) < (p_2+1)\frac{l}{100},$$

. . . .

$$p_n\frac{l}{10^n} < a - \left(pl + p_1\frac{l}{10} + p_2\frac{l}{100} + \ldots + p_{n-1}\frac{l}{10^{n-1}}\right) < (p_n+1)\frac{l}{10^n},$$

. . . .

Длина отрезка определится как бесконечная (вообще говоря) десятичная дробь $p,\ p_1p_2 \ldots\ p_n \ldots$

Этот способ чрезвычайно подробно и со многими методическими замечаниями развит в книге П. Лебега „Об измерении величин" (М. 1938, гл. II).

Сказанное выше о длине требует еще двух методических замечаний.

Единицу длины нельзя логически определить. Ее можно только показать или определить физически (1 *см* равен одной миллиардной части четверти земного меридиана). Об этом подробно говорилось в гл. VI (стр. 132).

Длина как именованная величина

При данном выше определении длины она является отвлеченной величиной. Вообще всякая величина будет выражаться отвлеченным числом, если определять ее при помощи отношения к величине того же рода, принятой за единицу.

Для математики такая точка зрения является наиболее удобной. Математические формулы имеют дело только с отвлеченными числами, наименования же возникают лишь при приложении этих формул к конкретным практическим вопросам. Физические формулы, напротив, имеют дело с именованными величинами. Возникающая таким образом дилемма для геометрии не имеет значения, потому что в ней гоподствует принцип однородности, и ее формулы не зависят от принятой единицы длины [1]).

Напротив, в математическом анализе этот момент существенен. Например, формула

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x,$$

во-первых, не имела бы смысла, если бы x был именованной угловой величиной (левая и правая части имели бы различные размерности). Во-вторых, она связана с определенным выбором единицы угла: если бы под x понималось отношение данного угла не к радиану, а к углу, равному одному градусу (т. е. под x понималось бы отвлеченное число, равное числу градусов в данном угле), то производная от $\sin x$ равнялась бы не $\cos x$, а $\frac{\pi}{180} \cos x$.

Эти обстоятельства показывают, что мы здесь имеем дело с трудным методическим вопросом. Аналогичная трудность возникает уже в курсе арифметики. Всякий учитель знает, как трудно решить задачу: сколько стоят 5 килограммов товара, если 1 килограмм стоит 3 рубля? На что следует множить 3 рубля: на отвлеченное или на именованное число? [2])

Мы рекомендуем учителю рассматривать длину как именованную величину. Выше уже говорилось о пользе понятия размерности для геометрии и особенно для физики. Ничем нельзя оправдать исключение из школьного курса столь важного научного понятия. Однако впоследствии (мы полагаем — в X классе) учитель должен подготовить учеников к восприятию чисто аналитической точки зрения; это удобнее всего сделать в курсе тригонометрии, где для этого есть более естественные возможности, чем в курсе геометрии. Ученики, воспитанные исключительно на размерности, испытывают специфические затруднения в курсе высшей математики.

Чтобы определить длину как именованную величину, надо то число, которое выше называлось длиной, умножить на l. Обычно это достигается указанием наименования, например:

$$a = 5 \text{ *см*}.$$

Обычно отрезок и его длина обозначаются одной и той же буквой, и, как известно, это не приводит ни к какой путанице. Введение различных обозначений диктуется лишь стремлением к логической тонкости, и, не являясь нужным для оперативных целей, не может быть рекомендовано в школе.

---

[1]) Для уточнения следует заметить, что в формулах, связывающих разнородные величины (например, длины и площади), играет роль согласование единиц измерения для этих величин. Например (см. ниже — стр. 195), почему в формуле для площади треугольника фигурирует коэфициент $\frac{1}{2}$?

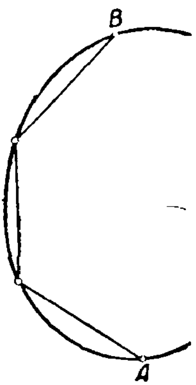
[2]) Мы полагаем, что эта задача решается так: $3 \frac{\text{руб.}}{\text{кг}} \times 5 \text{ кг} = 15$ руб.

§ 2. Длины кривых

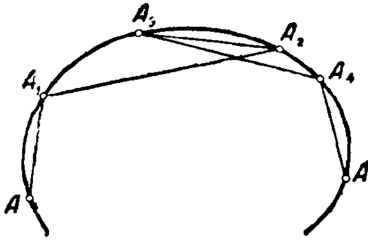
Понятие о длине кривой

В элементарной геометрии изучается только одна плоская кривая — окружность. Однако логическая проблема, возникающая при измерении длины окружности или произвольной плоской кривой,— одна и та же. Эта проблема заключается в том, как определить понятие „длина кривой". Понятие о длине прямолинейного отрезка, рассмотренное выше, основывалось на процессе откладывания одного отрезка, принятого за единицу длины, на другом. Поскольку этот процесс для кривых невозможен (прямолинейный отрезок нельзя совместить с криволинейной дугой), вся теория, установленная для длин прямолинейных отрезков, рушится, и мы должны начинать все сначала, т. е. определить понятие длины кривой.

Если AB — криволинейная дуга (черт. 87), то впишем в нее ломаную, т. е. построим ломаную, все вершины которой лежат на кривой AB и концы которой совпадают с концами рассматриваемой дуги. При этом всякая вершина ломаной A_i должна лежать на кривой между вершинами A_{i-1} и A_{i+1}, т. е. исключается случай, изображенный на черт. 88.



Черт. 87.



Черт. 88.

Будем неограниченно увеличивать число звеньев ломаной так, чтобы каждое звено стремилось к нулю.

По поводу этого условия сделаем два замечания.

1) Из того, что число звеньев неограниченно возрастает, еще не следует, что каждое звено стремится к нулю. В самом деле, мы можем фиксировать одно звено, например, AA_1, т. е. сохранить его неизменным в течение всего процесса, и неограниченно увеличивать число остальных звеньев. Тогда общее число звеньев будет неограниченно возрастать, но звено AA_1 не будет стремиться к нулю. Чтобы исключить такую возможность, необходимо специально оговорить, что каждое звено должно стремиться к нулю.

2) В выражении „каждое звено стремится к нулю" заключена некоторая неясность, потому что при последовательном вписывании ломаных не существует преемственности звеньев, т. е. рассматривая звено какой-нибудь ломаной, мы не можем считать, что это — „то же

самое звено" или что оно соответствует какому-нибудь определенному звену ломаной, которая раньше (на предыдущей ступени процесса) была вписана в кривую. Из этого затруднения можно выйти следующим образом. Будем у каждой ломаной рассматривать ее *наибольшее звено* (точнее говоря, звено, больше которого в данной ломаной звеньев нет, хотя могут быть звенья, равные ему). В таком случае требуется, чтобы наибольшие звенья последовательно вписываемых ломаных стремились к нулю.

В курсах интегрального исчисления доказывается, что при известных оговорках относительно рассматриваемой кривой длина вписанной ломаной стремится к пределу. Этот предел не зависит от способа вписывания ломаных. К этому же пределу стремится длина описанной ломаной. Этот общий предел принимается за длину кривой. Мы не будем рассматривать этот вопрос применительно к любым кривым, а остановимся на окружности.

Прежде всего надо, чтобы ученики ясно поняли, что нельзя *доказывать*, что длина окружности равна пределу периметров вписанных и описанных многоугольников. Такая постановка вопроса бессмысленна, потому что длина окружности *определяется* как этот предел, и пока мы не установили этого определения, мы вообще не знаем, чтó такое длина окружности, и поэтому не можем относительно нее ничего утверждать.

Руководствуясь общим принципом „сначала сделать неясным, а потом ясным", следует убедить учеников в том, что поскольку на окружности нельзя откладывать единицу длины, понятие длины окружности нуждается в особом логическом определении. Физические представления, например, представить себе окружность в виде проволоки, а затем разогнуть эту проволоку в прямолинейный отрезок и считать длину этого отрезка равной длине окружности, с логической точки зрения приводят к порочному кругу. В самом деле, *разогнуть* кривую, это значит изменить ее форму, не изменяя ее длины, и, следовательно, чтобы ввести понятие об *изгибании* кривых, необходимо *предварительно* иметь понятие о длине кривых.

Существование общего предела периметров вписанных и описанных многоугольников

Итак, длина окружности *определяется* как общий предел периметров вписанных и описанных многоугольников при условии, что число сторон этих многоугольников неограниченно возрастает, а каждая сторона стремится к нулю.

Однако для того чтобы иметь право сформулировать такое определение, необходимо предварительно доказать несколько теорем.

Теорема 1. Периметры вписанных многоугольников стремятся к пределу[1] (т. е. предел, который мы принимаем за длину окружности, действительно существует).

---

[1] Для краткости мы не будем каждый раз оговаривать, что число сторон неограниченно возрастает, а каждая сторона стремится к нулю.

Теорема 2. Этот предел не зависит от способа вписывания многоугольников.

Поясним, что многоугольники могут вписываться по любому закону. В частности, вершины каждого многоугольника могут не сохраняться у следующего многоугольника. В самом общем виде этот процесс происходит так. В окружность вписывается произвольный многоугольник; пусть его периметр равен p_1. Затем этот многоугольник стирается и вместо него в окружность вписывается какой-угодно другой многоугольник, лишь бы только наибольшая сторона второго многоугольника была меньше наибольшей стороны первого многоугольника; пусть периметр второго многоугольника равен p_2. Этот процесс продолжается неограниченно. Тогда наши две теоремы утверждают, что последовательность

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

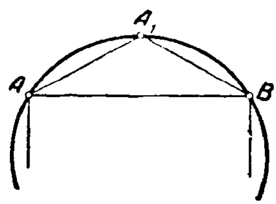
имеет предел, и этот предел не зависит от способа вписывания многоугольников.

Теорема 3. *Периметры описанных многоугольников стремятся к пределу.*

Теорема 4. Этот предел не зависит от способа описывания многоугольников.

Теорема 5. Пределы периметров вписанных и описанных многоугольников совпадают.

Теоремы 3—5 не являются обязательными, потому что можно определить длину окружности как предел периметров вписанных многоугольников, ничего не упоминая об описанных. Однако совпадение этих пределов представляет столь важный геометрический факт, что скрывать его от учеников нельзя.



Черт. 89.

Доказать все эти теоремы довольно трудно, и мы не можем рекомендовать учителю проводить все это в средней школе. Однако все эти теоремы доказываются весьма просто, если мы ограничимся определенным способом вписывания и описывания многоугольников. Будем, например, рассматривать только правильные многоугольники и при переходе от каждого многоугольника к следующему будем удваивать число сторон. При этом, разумеется, надо не замазывать, а откровенно сообщить ученикам, что мы ограничиваемся неполным доказательством теорем и предлагаем им принять на веру, что эти теоремы справедливы не только для правильных многоугольников и не только при удвоении числа сторон. Надо остерегаться возникновения у учеников неправильного представления, что длина окружности есть предел периметров обязательно правильных многоугольников.

Ход доказательств может быть такой. Так как $AA_1 + A_1B > AB$ (черт. 89), то при удвоении числа сторон периметр вписанного правильного многоугольника увеличивается. С другой стороны, периметр любого вписанного многоугольника меньше периметра всякого описанного многоугольника, например, меньше периметра описанного квадрата. Это легко доказать на основании теоремы о длине объемлющей и объемлемой ломаных. Таким образом, если рассмотреть последовательность

$$p_3,\ p_6,\ p_{12},\ p_{24},\ \ldots,$$

где p_n обозначает периметр правильного вписанного n-угольника, то оказывается, что элементы этой последовательности монотонно возрастают, но всегда остаются меньше постоянной (не зависящей от индекса) величины (периметр описанного квадрата). Поэтому, на основании теоремы Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной величины, эта последовательность имеет предел.

Таким образом, теорема 1 доказана. Теорема 2 при нашем способе рассуждений должна быть принята на веру, так как мы ограничиваемся определенным способом вписывания многоугольников. Теоремы 3 и 4 совершенно аналогичны соответственно теоремам 1 и 2.

Чтобы доказать теорему 5, надо воспользоваться формулой, которая выражает сторону правильного описанного многоугольника через сторону одноименного правильного вписанного многоугольника:

$$b_n = \frac{Da_n}{\sqrt{D^2 - a_n^2}}$$

(D — диаметр круга, a_n — сторона правильного вписанного n-угольника, b_n — сторона правильного описанного n-угольника). Обозначая через P_n и p_n периметры соответственно описанного и вписанного правильных n-угольников, будем иметь:

$$P_n = \frac{nDa_n}{\sqrt{D^2 - a_n^2}},$$

$$p_n = na_n.$$

Рассмотрим разность этих периметров:

$$P_n - p_n = na_n\left(\frac{D}{\sqrt{D^2 - a_n^2}} - 1\right) = p_n\left(\frac{D}{\sqrt{D^2 - a_n^2}} - 1\right).$$

Из этой формулы ясно, что

$$\lim_{n \to \infty} (P_n - p_n) = 0,$$

потому что при $n \to \infty$ множитель p_n все время остается меньше $4D$, а выражение в скобках стремится к нулю, так как $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Таким образом, при неограниченном возрастании числа сторон периметры правильных вписанных многоугольников возрастают, а периметры правильных описанных многоугольников убывают, причем разность этих периметров стремится к нулю. В таком случае, как известно из теории пределов, эти периметры имеют общий предел.

Вычисление π Теперь мы вправе дать определение длины окружности, о котором говорилось выше. Основываясь на этом определении, легко доказать теорему: отношение длины окружности к диаметру постоянно (т. е. не зависит от диаметра окружности); доказательство приводится во всех учебниках. Обозначая это отношение через π[1],

$$\frac{C}{D}=\pi,$$

получим:

$$C=\pi D=2\pi R,$$

т. е. длина окружности пропорциональна диаметру.

Евклид, рассматривая вопрос о длине окружности, ограничился установлением этого факта. Не интересуясь вычислительной стороной, он не рассматривал вопроса о вычислении коэфициента пропорциональности π. Этот вопрос был решен Архимедом, давшим для π значение $\frac{22}{7}$.

Учитель не должен обходить вопроса о вычислении π и ограничиваться сообщением ученикам готового результата. Подобная таинственность внушает ученикам мысль, что вычисление π для них совершенно недоступно. Желательно всегда в подобных случаях (вычисление логарифмов, тригонометрических функций и т. п.) показывать ученикам, как они могут сами это сделать; это стимулирует инициативу и веру в свои силы.

Определение длины окружности как предела периметров вписанных и описанных многоугольников имеет не только логическое, но и оперативное значение. Из него следует, что периметр любого такого многоугольника может рассматриваться как приближенное значение длины окружности и, следовательно, служить для приближенного нахождения. Чем больше число сторон, тем точнее будет результат. При этом весьма удобно исходить из периметра правильного вписанного шестиугольника и пользоваться формулой удвоения. Можно вычислить, например, периметр правильного вписанного 96-угольника и приближенно принять его за длину окружности. Однако эти выкладки, если не уловить в них закона составления периметров последовательных многоугольников, весьма громоздки. Поэтому мы рекомендуем придать им следующую форму.

Формула удвоения

$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}},$$

если положить в ней $R=1$, примет вид:

$$a_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}.$$

Исходя из того, что $a_4=\sqrt{2}$, и пользуясь формулой удвоения, последовательно получим:

$$a_4=\sqrt{2}$$
$$a_8=\sqrt{2-\sqrt{2}}$$
$$a_{16}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$
$$a_{32}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

. . . .

[1]) Обозначение отношения длины окружности к диаметру буквой π (первая буква греческого слова περιφέρεια — окружность) введено Эйлером в 1737 г. в статье „Variae observationes circa series infinitas" и начиная с 40—50-х годов XVIII столетия вошло во всеобщее употребление. До этого времени в математических работах это отношение или никак не обозначалось, или обозначалось каждый раз по-разному.

Вообще

$$a_{2^{n+1}}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}} \text{ (число радикалов} = n).$$

Следовательно,

$$p_{2^{n+1}}=2^{n+1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}} \text{ (число радикалов} = n).$$

Предел этого выражения равен 2π (длина окружности при $R=1$).

$$2\pi=\lim_{n\to\infty} 2^{n+1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}} \text{ (число радикалов} = n)$$

или, сокращая на 2,

$$\pi=\lim_{n\to\infty} 2^{n}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}} \text{ (число радикалов} = n).$$

Если бы мы исходили из $a_6=1$, то аналогично пришли бы к формуле:

$$\pi=3\lim_{n\to\infty} 2^{n-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} \text{ (число радикалов} = n).$$

Исходя, например, из первой формулы и придавая n значения 1, 2, 3, ..., получим следующие приближения для π:

1-е приближение ($n=1$; соответствует замене длины окружности периметром вписанного квадрата)

$$\pi=2\sqrt{2}=2,8;$$

2-е приближение ($n=2$; соответствует замене длины окружности периметром правильного вписанного 8-угольника)

$$\pi=4\sqrt{2-\sqrt{2}}=3,06;$$

3-е приближение ($n=3$; соответствует замене длины окружности периметром правильного вписанного 16-угольника)

$$\pi=8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=3,12;$$

4-е приближение ($n=4$; соответствует замене длины окружности периметром правильного вписанного 32-угольника)

$$\pi=16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}=3,136;$$

5-е приближение ($n=5$; соответствует замене длины окружности периметром правильного вписанного 64-угольника)

$$\pi=32\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}=3,139$$

и т. д. Все приближения даны до первого неверного знака включительно, чтобы наглядно показать получающуюся степень точности[1].

[1] Аналогичная схема с подробными вычислительными деталями приведена в статье В. Сергоского „Вычисление π в средней школе“ („Математика в школе“, 1938, № 5—6, стр. 56—70).

Замечательное свойство приближений Архимеда и Меция

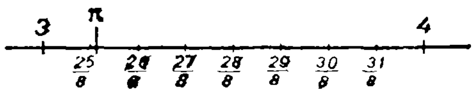
Приближенные значения π, указанные Архимедом $\left(\pi=\frac{22}{7}\right)$ и Мецием [1] $\left(\pi=\frac{355}{113}\right)$, обладают одним свойством, столь замечательным, что учитель должен знать о нем и обратить на него внимание учеников, хотя бы в математическом кружке. Мы имеем в виду следующий вопрос: каким преимуществом обладают приближенные значения π в 7-х и в 113-х долях.

Очевидно, можно найти приближенное значение π с точностью до $\frac{1}{n}$, где n — совершенно произвольное целое число. При этом допущенная ошибка будет меньше, чем $\frac{1}{2n}$ (если из двух приближенных значений — с недостатком и с избытком — выбирать то, которое ближе к измеряемой величине). Положим, например, что мы хотим вычислить π в восьмых долях. Найдем:

$$\frac{25}{8}<\pi<\frac{26}{8}.$$

Графически это значит, что на числовой прямой π лежит где-то в интервале между $\frac{25}{8}$ и $\frac{26}{8}$ (черт. 90). Легко выяснить, что π ближе к $\frac{25}{8}$, чем к $\frac{26}{8}$; поэтому за приближенное значение π примем $\frac{25}{8}$. Какую мы при этом допускаем ошибку? Поскольку интервал, в котором заключено π, равен $\frac{1}{8}$, и мы учитываем, что π лежит в левой половине этого интервала, мы можем быть уверены, что допущенная ошибка менее, чем $\frac{1}{16}$. Но может случиться, что фактически она гораздо меньше, потому что может оказаться, что π лежит весьма близко к левой границе интервала.

Будем различать две ошибки — априорную и фактическую. Априорная ошибка определяется заданием степени точности, если об истинной величине не делается никаких предположений. Фактическая ошибка не превышает априорной. Теперь спросим, какое приближенное значение π будет точнее — в 7-х долях или в 8-х? Если основываться на априорной ошибке, то вычисление в 8-х долях точнее, чем в 7-х. Но фактически оказывается, что вычисление в 7-х долях точнее, потому что при разделении интервала от 3 до 4 на седьмые доли π оказывается гораздо ближе к одной из точек деления, чем при разделении этого интервала на восьмые доли. Таблица, помещенная на следующей странице, является весьма убедительной.



Черт. 90. Приближенное выражение π в восьмых долях.

Из этой таблицы видно, что фактическая ошибка ведет себя весьма капризно и что седьмые доли являются весьма выгодными для выражения π по сравнению с ближайшими похожими долями. Седьмые доли дают столь большую точность, какую a priori можно было ожидать только от 394-х долей, потому что для 394-х долей априорная ошибка равна $\frac{1}{2\cdot 394}\doteq 0{,}00127$. Аналогичное явление имеет место для 113-х долей: они гораздо выгоднее, чем можно судить по их величине.

---

[1] Голландский инженер, живший в XVI столетии.

Наименование долей	Априорная ошибка	Приближенное значение π	Фактическая ошибка	Во сколько раз фактическая ошибка оказывается меньше априорной
5-е	$\frac{1}{10}=0{,}10000$	$\frac{16}{5}=3{,}20000$	0,05841	**В 2 раза**
6-е	$\frac{1}{12}=0{,}08333$	$\frac{19}{6}=3{,}16667$	0,02508	**В 3 раза**
7-е	$\frac{1}{14}=0{,}07143$	$\frac{22}{7}=3{,}14286$	0,00127	**В 56 раз**
8-е	$\frac{1}{16}=0{,}06250$	$\frac{25}{8}=3{,}12500$	0,01659	**В 4 раза**
9-е	$\frac{1}{18}=0{,}05556$	$\frac{28}{9}=3{,}11111$	0,03048	**В 2 раза**
10-е	$\frac{1}{20}=0{,}05000$	$\frac{31}{10}=3{,}10000$	0,04159	**Почти одинакова**

Причина указанного явления выясняется в теории непрерывных дробей. Эта теория дает методы нахождения наиболее выгодных рациональных приближений действительных чисел (выгодных в том смысле, чтобы при небольшом знаменателе получать возможно бóльшую точность). Мы не намерены здесь излагать эту теорию, а лишь указываем читателю, где он может найти разъяснение отмеченного выше явления. В теории непрерывных дробей доказывается, что наиболее выгодные (там это формулируется точнее) рациональные приближения мы получим, если разложим данное число в непрерывную дробь и будем брать ее последовательные подходящие дроби. Число π изображается непрерывной дробью следующим образом:

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

Имеем:

первая подходящая дробь $=3$

вторая „ „ $=3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$ (число Архимеда)

третья „ „ $=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}=\frac{333}{106}$

четвертая „ „ $=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+1}}=\frac{355}{113}$ (число Меция).

Мы видим, что Архимед не случайно выбрал именно седьмые доли для выражения π. На вопрос, как он пришел к этому, трудно ответить, потому что неизвестно, каким методом он пользовался для извлечения квадратных корней. Многие исследователи полагают, что этот метод основан на идее метода непрерывных дробей. Впрочем, особую выгодность седьмых долей можно обнаружить и эмпирически. Объяснить происхождение числа Меция еще труднее. Сообщение сына Меция, что его отец, пользуясь методом Архимеда, нашел для π верхнюю границу $\frac{377}{120}$ (почему именно в таких долях?) и нижнюю границу $\frac{333}{106}$, а затем взял среднее арифметическое числителей и среднее арифметическое знаменателей, не проливает света на вопрос о том, как Меций сумел обнаружить столь замечательное приближение.

Трансцендентность π

В 1882 г. немецкий математик Линдеманн доказал, что π есть число трансцендентное, т. е. оно не является корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэфициентами (доказательство можно прочесть в книге Вебера и Вельштейна „Энциклопедия элементарной математики", т. I, Одесса 1911, стр. 609—615). Тем более, следовательно, π не может быть выражено при помощи комбинации квадратных радикалов из целых чисел. Отсюда следует (стр. 171, сноска), что, имея диаметр окружности D, нельзя построить циркулем и линейкой отрезок πD, равный длине окружности. Задача спрямления окружности циркулем и линейкой неразрешима.

Приближенное спрямление окружности

Существует большое количество различных приближенных решений этой задачи. Например, положительный корень квадратного уравнения

$$x^2 + 8x - 35 = 0$$

таков:

$$x = -4 + \sqrt{51} = 3{,}141428,$$

т. е. он отличается от π приблизительно на 0,000165, т. е. меньше, чем на $\frac{1}{6000}$. Несколько более сложное квадратное уравнение

$$64x^2 - 160x - 129 = 0$$

имеет положительный корень, отличающийся от π менее, чем на одну десятимиллионную. Так как корни этих квадратных уравнений легко строятся циркулем и линейкой, то тем самым мы имеем способ приближенного построения π и, следовательно, приближенного спрямления окружности.

Эти построения, по нашему мнению, не имеют ни практического, ни теоретического интереса и не содержат идей, способствующих росту математического кругозора учеников; поэтому мы на них не останавливаемся.

Длины пространственных кривых

Мы упоминаем об этой проблеме только потому, что в нашей схеме (стр. 165) имеется соответствующая клетка, но рассматривать ее не будем. Во-первых, в школьном курсе геометрии пространственные кривые не изучаются. Во-вторых, измерение длин пространственных кривых не содержит почти ничего специфического по сравнению с измерением длин плоских кривых (за исключением лишь того, что длину пространственной кривой следует определять как предел длины обязательно вписанной ломаной, так как касательные к пространственной кривой не пересекаются, и понятие описанной ломаной теряет смысл).

§ 3. Площади

Площади суть величины

Изложение учения о площадях, принятое в школьном курсе, основано на наивной вере в существование площади каждой плоской фигуры. Многие учителя не замечают заключающейся в этом проблемы. Мы сейчас выясним содержание этой проблемы для того, чтобы учитель имел по этому поводу вполне отчетливые представления. В какой мере сто́ит разрушать наивные представления, имеющиеся на этот счет у учеников, мы обсудим особо.

Проблема, о которой идет речь, если говорить кратко, сводится к следующему: надо доказать, что площади образуют класс геометрических непрерывных величин.

Для того чтобы множество $\{a\}$ образовало класс величин, необходимо прежде всего, чтобы оно было упорядоченным. Это значит, что для элементов этого множества должны быть установлены понятия „меньше“ и „больше“ и для любых двух различных элементов a_1 и a_2 этого множества должно иметь место одно из двух соотношений: либо $a_1 < a_2$, либо $a_1 > a_2$. Далее должны быть установлены понятия „суммы“ и „разности“.

Для геометрических величин, кроме того, должно быть установлено понятие „части“, причем должна соблюдаться аксиома: если a есть часть b, то $a < b$.

Наконец, для непрерывного класса величин должна соблюдаться аксиома Дедекинда.

Простейший класс непрерывных геометрических величин представляют прямолинейные отрезки. Выше мы установили возможность измерения отрезков действительными числами.

Вообще, чтобы понять, почему различные геометрические величины измеряются действительными числами, заметим, что в некотором смысле множество действительных чисел (всех или в некотором интервале) представляет единственный существенный пример непрерывного упорядоченного множества. Точнее говоря, всякое непрерывное упорядоченное множество, содержащее всюду плотное на нем счетное множество, подобно множеству действительных чисел или его отрезку (смотря по тому, содержит данное множество первый и последний элементы или нет) [1]. Это значит, что возможно установить взаимно однозначное соответствие между данным множеством и множеством действительных чисел с сохранением порядка, т. е. если элементу a_1 данного множества соответствует действительное число p_1, а элементу a_2 — действительное число p_2, то из $a_1 < a_2$ вытекает $p_1 < p_2$. Это обстоятельство чрезвычайно важно для теории измерения геометрических величин. Условие теоремы, выделенное разрядкой, можно не принимать во внимание, так как оно направлено к исключению

---

[1] П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Введение в теорию функций действительного переменного, изд. 3-е, М. — Л. 1938. Гл. II, § 4 — „Упорядоченные множества“.

случаев, которые при измерении геометрических величин встретиться не могут; здесь мы лишены возможности разъяснить это подробнее.

Поэтому, если верно, что площади образуют класс геометрических величин, то должно быть возможно отнести каждой фигуре действительное число (положительное, так как нулевая площадь принимается за первый элемент множества площадей), причем это соответствие должно обладать следующими свойствами:

1) Каждой плоской фигуре ставится в соответствие положительное число (называемое площадью этой фигуры).

2) Конгруентные фигуры имеют одинаковые площади.

3) Если фигура разрезана на несколько частей, то сумма площадей этих частей равна площади всей фигуры.

Из свойства 3), между прочим, вытекает, что если из фигуры удалить некоторую часть, то площадь оставшейся части меньше, чем площадь всей фигуры (принцип де-Цольта).

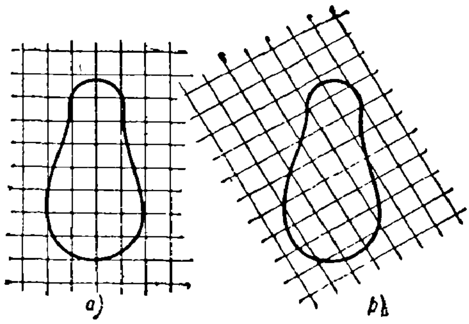
Требуется показать, что существует способ отнесения каждой фигуре положительного числа, удовлетворяющий указанным требованиям.

Специфический характер площадей как величин

Рассматриваемая задача измерения площадей является более сложной, чем задача измерения отрезков, по следующей причине. Для отрезков понятия „меньше" и „больше" могут быть установлены до введения понятия о длине отрезка; для этого достаточно откладывания отрезков одного на другом. Иначе говоря, только те отрезки имеют равные длины, которые конгруентны. Для измерения площадей плоских фигур необходимо найти способ отвлечься от их формы (в этом специфическое отличие теории измерения площадей от теории измерения отрезков). Плоские фигуры, не будучи конгруентными, могут тем не менее иметь одинаковую площадь.

Подсчет числа единичных квадратов в данной фигуре

В школьном курсе геометрии проблема измерения площадей решается следующим наивным образом. Покроем измеряемую фигуру сеткой квадратов, сторона которых принята за единицу, и сосчитаем число квадратов, умещающихся в данной фигуре (черт. 91*a*). Здесь возникает затруднение, связанное с тем, что встречаются квадраты, только частично находящиеся внутри фигуры. Преодоление этого затруднения требует измельчения квадратов и перехода к пределу. Мы не будем останавливаться на этом затруднении, так как нас интересует другая сторона вопроса. Итак, предположим, что указанное затруднение уже преодолено, т. е. что мы умеем **точно** определить число квадратов сетки, умещающихся внутри фигуры (т. е. умеем



Черт. 91.

точно учесть, какая часть каждого квадрата попадает внутрь фигуры); в результате этого подсчета мы получим некоторое действительное положительное число Q, которое и назовем площадью данной фигуры.

Чтобы это определение было законным, необходимо прежде всего доказать, что полученное таким образом число Q вполне определяется заданием фигуры, т. е. что оно не зависит от способа наложения сетки. Наложим на данную фигуру сетку единичных квадратов другим способом, например, как показано на черт. 91*b*. На чем основана уверенность, что число единичных квадратов, умещающихся в данной фигуре, всегда (т. е. при любом способе наложения сетки) будет одно и то же?

Если последний вопрос рассматривать не как математический, а как психологический, то на него легко ответить. Эта уверенность основана на вере в существование у каждой фигуры площади, обладающей перечисленными выше свойствами геометрической величины. Из этой веры вытекает, что число единичных квадратов, умещающихся в данной фигуре, есть отношение площади фигуры к площади квадрата и, следовательно, не может зависеть от способа наложения сетки. Однако, если мы хотим доказать существование площади, то мы должны прежде всего доказать, что число Q не зависит от способа наложения сетки, а затем, что это число Q обладает перечисленными выше тремя свойствами.

Мы не собираемся подробно строить здесь теорию площадей, отсылая читателя к книге П. **Лебега** „Об измерении величин". Мы лишь фиксируем внимание читателя на логическом пробеле, имеющемся в школьном изложении теории площадей. Вместе с тем мы рекомендуем учителю не пытаться заполнить этот пробел. Логическое построение теории площадей требует весьма длинных абстрактных рассуждений. Вера в существование площади настолько привита каждому, что ученики не заметят сделанных здесь вполне естественных допущений, как не замечал их Евклид. Евклид в своей теории площадей исходил из веры в существование площади, и мы считаем, что здесь, как и в других разделах элементарной геометрии, греческий уровень строгости является достаточным для средней школы.

Метод разложения

Если считать этот труднейший и основной вопрос теории площадей разрешенным, то дальнейшее развитие теории площадей не представляет никаких сложностей. Оно требует применения двух методов: 1) метода разложения, 2) метода пределов.

Метод разложения заключается в том, что данную фигуру разрезают на части, площади которых мы уже умеем определять, например, на треугольники, причем мы считаем несомненным, что при различных способах разложения фигуры на треугольники сумма площадей этих треугольников всегда будет одна и та же. Для того чтобы доказать методом разложения равенство площадей двух фигур, разбивают эти фигуры на попарно конгруентные части. Эту операцию иногда называют „перекраиванием" фигур: одну фигуру разбивают на некоторое (конечное) число частей и, располагая эти части в другом порядке, складывают из них другую фигуру.

Метод разложения является наиболее естественным методом для доказательства равенства площадей, поэтому этому методу обычно отдается предпочтение перед другими методами. Однако он применим не всегда. Интересно выяснить границы его применимости.

Равносоставленность

Две фигуры P и Q называются равносоставленными, если их можно разложить на конечное число попарно конгруентных частей, т. е. если можно перекроить одну в другую. Символически равносоставленность обозначается знаком $\mathrel{\underline{\top\!\top}}$:

$$P \mathrel{\underline{\top\!\top}} Q.$$

Основные свойства равносоставленности

Докажем несколько основных свойств равносоставленности.

Теорема 1. Равносоставленность обладает свойством транзитивности. Это значит: если $P \mathrel{\underline{\top\!\top}} Q$ и $Q \mathrel{\underline{\top\!\top}} R$, то $P \mathrel{\underline{\top\!\top}} R$.

Доказательство. Нанесем на фигурах P и Q линии, осуществляющие разложение этих фигур на попарно конгруентные части; будем в дальнейшем называть эти линии „синими". Нанесем также на фигурах Q и R линии, осуществляющие разложение этих фигур на попарно конгруентные части; эти линии будем называть „красными". Теперь на фигуре Q нанесены две системы линий: синие и красные.

Возьмем одну из частей, на которые разбита фигура P, и найдем конгруентную ей часть в фигуре Q. Эта часть в фигуре Q ограничена синими линиями; по ее „территории" не проходит никаких синих линий, но могут проходить красные. Перенесем эти красные линии на взятую часть фигуры P. Проделаем это со всеми частями фигуры P. В результате фигура P разобьется на более мелкие части, чем вначале: она будет состоять из тех частей, на которые разбита фигура Q синими и красными линиями вместе. Аналогично поступим с парой фигур R и Q, т. е. возьмем каждую из частей фигуры R, найдем конгруентную часть фигуры Q (она будет ограничена красными линиями) и проходящие по ней синие линии перенесем на исходную часть фигуры R. В результате фигура R разобьется на те же части, на которые разбита фигура Q синими и красными линиями вместе.

Таким образом, фигуры P и R окажутся разложенными на попарно конгруентные части, т. е. они равносоставлены, что́ и требовалось доказать.

Теорема 2. Равновеликие параллелограмы с одинаковыми углами равносоставлены [1]).

Пусть $ABCD$ и $A'B'C'D'$ (черт. 92) суть два параллелограма, причем $\widehat{DAB} = \widehat{D'A'B'}$ и площ. $ABCD =$ площ. $A'B'C'D'$. Введем обозначения: $AD = a$, $AB = b$, $A'B' = b'$, $A'D' = a'$ (через a и a' мы обозначаем соответственно меньшие стороны данных параллелограмов).

Имеем:

$$ab = a'b'.$$

Возьмем меньшую сторону второго параллелограма и будем откладывать ее в большей стороне первого параллелограма:

$$AL_1 = L_1L_2 = \ldots = L_{n-1}L_n = a'.$$

---

[1]) В дальнейших рассуждениях эта теорема будет использована только для прямоугольников. Однако при ее доказательстве угол параллелограмов не играет роли.

Здесь n — целое число, определяемое неравенствами:

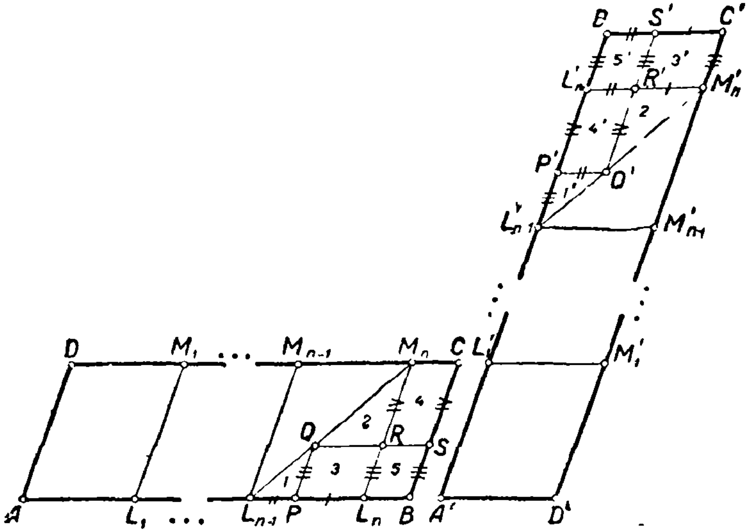
$$na' < b < (n+1)a'.$$

Деля эти неравенства на a', найдем:

$$n < \frac{b}{a'} < n+1,$$

т. е. n есть приближенное значение отношения $\frac{b}{a'}$, взятое с точностью до единицы с недостатком.

На отрезках AL_1, L_1L_2, ..., $L_{n-1}L_n$ строим параллелограмы, проводя через точки L_1, L_2, ..., L_n прямые, параллельные AD.



Черт. 92. Перекраивание равновеликих параллелограмов с равными углами.

Теперь на большей стороне второго параллелограма откладываем меньшую сторону первого параллелограма:

$$A'L_1' = L_1'L_2' = \ldots = L'_{n-1}L_n' = a.$$

Число n, указывающее, сколько раз сторона a уложится в b', — то же самое, что и в предыдущем случае. В самом деле, оно представляет приближенное значение отношения $\frac{b'}{a}$, взятое с точностью до единицы с недостатком. Но из равенства

$$ab = a'b'$$

вытекает

$$\frac{b}{a'} = \frac{b'}{a},$$

и, следовательно, указанные приближенные значения этих выражений равны между собой.

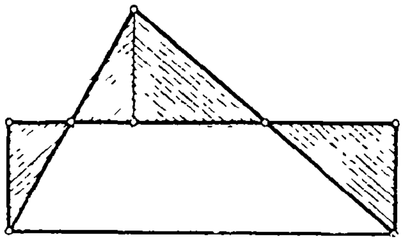
Далее строим $BP = a'$, $PQ \parallel AD$, Q — точка пересечения PQ с диагональю $L_{n-1}M_n$, $QS \parallel AB$. Аналогично во втором параллелограме: $B'P' = a$, $P'Q' \parallel A'D'$, Q' — точка пересечения $P'Q'$ с диагональю $L'_{n-1}M_n'$, $Q'S' \parallel A'B'$.

Докажем, что в результате этих построений параллелограмы $ABCD$ и $A'B'C'D'$ разложены на попарно конгруентные части.

Прежде всего в состав каждого параллелограма входит $n-1$ параллелограм со сторонами a и a' и треугольник $L_{n-1}M_{n-1}M_n$ (во втором параллелограме соответственно $L'_{n-1}M'_{n-1}M_n'$). Конгруентность этих составных частей в одном и в другом параллелограме очевидна, и остается рассмотреть трапеции $L_{n-1}M_nCB$ и $L'_{n-1}M_n'C'B'$.

Так как фигуры *1, 2, 3, 4, 5*, очевидно, имеют те же углы, что и фигуры *1', 2', 3', 4', 5'*, то для доказательства их конгруентности достаточно доказать конгруентность соответственных отрезков. Для этого важно доказать, что точка P делит отрезок $L_{n-1}L_n$ в том же отношении, в каком точка P' делит отрезок $L'_{n-1}L'_n$. Легко найдем:

$$L_{n-1}P = b - na',$$
$$PL_n = (n+1)a' - b,$$
$$\frac{L_{n-1}P}{PL_n} = \frac{b-na'}{(n+1)a'-b}.$$



Черт. 93. Перекраивание треугольника в прямоугольник.

Разделив в последнем выражении числитель и знаменатель на a', получим:

$$\frac{L_{n-1}P}{PL_n} = \frac{\frac{b}{a'} - n}{n+1-\frac{b}{a'}}.$$

Аналогичное отношение для второго параллелограма получится переменой ролей величин со штрихами и без штрихов:

$$\frac{L'_{n-1}P'}{P'L_n'} = \frac{\frac{b'}{a} - n}{n+1-\frac{b'}{a}},$$

но так как $\frac{b}{a'} = \frac{b'}{a}$, то $\frac{L_{n-1}P}{PL_n} = \frac{L'_{n-1}P'}{P'L_n'}$.

Далее находим:
$$\frac{L_{n-1}P}{PL_n} = \frac{L_{n-1}Q}{QM_n} = \frac{L_nR}{RM_n} = \frac{BS}{SC} =$$
$$= \frac{L'_{n-1}P'}{P'L'_n} = \frac{L'_{n-1}Q'}{Q'M'_n} = \frac{L'_nR'}{R'M'_n} = \frac{B'S'}{S'C'}.$$

Так как $BC = L'_{n-1}L'_n$, а точка S делит первый из этих отрезков в таком же отношении, в каком точка P' делит второй, то

$$BS = L'_{n-1}P',$$
$$SC = P'L'_n.$$

Не проводя до конца аналогичных рассуждений, отметим на черт. 92 равные отрезки, после чего равносоставленность трапеций $L_{n-1}M_nCB$ и $L'_{n-1}M'_nC'B'$ становится очевидной [1]).

---

[1]) Это доказательство принадлежит венгерскому математику Морицу Рети („Endlich-gleiche Flächen“, Mathematische Annalen, Bd. 38, 1891, стр. 405—428). В книге Н. А. Глаголева „Геометрия“ (ч. 1, М. — Л. 1944, стр. 219—220) дано более простое доказательство, но оно не дает непосредственного разложения параллелограмов на попарно конгруентные части.

Теорема 3. Всякий треугольник равносоставлен с прямоугольником, имеющим общее основание с треугольником и половинную высоту.

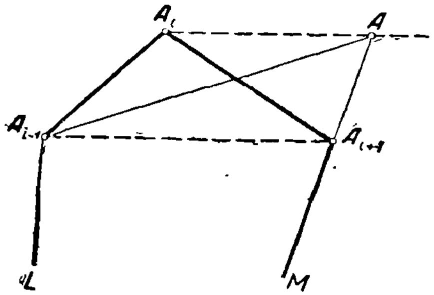
Доказательство ясно из черт. 93.

Теорема 4. Всякие два равновеликие треугольника равносоставлены.

Доказательство. Пусть P и Q суть два равновеликие треугольника. Тогда каждый из них равносоставлен прямоугольнику с тем же основанием и половинной высотой (теорема 3). Эти прямоугольники равносоставлены между собой (теорема 2). В таком случае треугольники P и Q равносоставлены (теорема 1).

Теорема 5. Всякий многоугольник можно перекроить в треугольник.

Доказательство. Пусть A_{i-1}, A_i и A_{i+1} — три последовательные вершины многоугольника (черт. 94). Строим $A_iA \parallel A_{i-1}A_{i+1}$, A — точка пересечения MA_{i+1} и A_iA. По теореме 4 треугольники $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ и $A_{i-1}AA_{i+1}$ равносоставлены. Поэтому, если в многоугольнике заменить треугольник $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ треугольником $A_{i-1}AA_{i+1}$, то получим новый многоугольник, равносоставленный с исходным и имеющий на одну вершину меньше. Повторяя это построение несколько раз, получим треугольник, равносоставленный с исходным многоугольником.



Черт. 94.

Теорема 6 (теорема Болиаи — Гервина)[1]. Всякие два равновеликие многоугольника равносоставлены.

Пусть P и Q — два равновеликие многоугольника. По теореме 5 многоугольник P можно перекроить в треугольник P', а многоугольник Q — в треугольник Q'. Треугольники P' и Q', будучи равновеликими, равносоставлены между собой (теорема 4). Из теоремы 1 следует, что многоугольники P и Q равносоставлены, что и требовалось доказать.

Схема изложения теории площадей многоугольников

Теорема Болиаи — Гервина, хотя и не сообщается ученикам, позволяет учителю сознательно подойти к построению теории площадей. Учителю должно быть ясно, что всю теорию площадей многоугольников можно построить, пользуясь только методом разложения. Если два многоугольника равновелики, то всегда возможно доказать их равновеликость, разрезая один из них (прямыми линиями) на конечное число частей и складывая из этих частей второй многоугольник.

Если мы не собираемся ограничиваться лишь сравнением площадей различных фигур (как это сделано у Евклида), а намерены получить формулы для измерения площадей числами, то необходимо предварительно вывести формулу для измерения площади фигур какого-нибудь определенного вида. Например, можно действовать так:

1) Вывести формулу для площади прямоугольника.

---

[1]) Впервые эта теорема была доказана Вольфгангом Болиаи в книге „Tentamen...", цитировавшейся на стр. 130. Более простое доказательство было дано Гервином (Gerwien, Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen gerad linigen Figuren in dieselben Stücke, „Journal für die reine und angewandte Mathematik", Bd. 10, 1833, стр. 228—234).

2) Вывести формулу для площади треугольника (по способу, иллюстрируемому черт. 93).

3) Выводить формулы для площадей различных многоугольников, разлагая их на треугольники.

Второй шаг в этой схеме с логической точки зрения является излишним, но он диктуется техническими удобствами: непосредственное перекраивание многоугольника в прямоугольник сложнее, чем разложение на треугольники.

Метод дополнения

При изложении теории площадей многоугольников иногда пользуются так называемым „методом дополнения". Для того чтобы доказать равновеликость многоугольников P и Q, к ним добавляют попарно конгруентные фигуры, стараясь дополнить их до фигур, равновеликость которых уже известна. Как видно из теоремы Болиаи—Гервина, метод дополнения не является необходимым, и равновеликость двух многоугольников всегда может быть доказана методом разложения[1]). Однако использование метода дополнения иногда дает значительное упрощение доказательств. Поэтому в школьном преподавании следует использовать оба метода.

Площадь прямоугольника

Итак, мы убедились, что в основе теории площадей многоугольников должна лежать формула для площади прямоугольника. Формулу для площади прямоугольника можно вывести, покрывая прямоугольник сеткой единичных квадратов (причем две соседние стороны прямоугольника идут по линиям сетки) и подсчитывая число квадратов в прямоугольнике. При этом необходимо рассмотрение трех случаев: 1) стороны прямоугольника выражаются целыми числами, 2) стороны выражаются дробными числами (или хоть одна дробным, а другая — целым), 3) стороны (или хоть одна из них) выражаются иррациональными числами. Доказательств мы не разбираем, считая их общеизвестными. Укажем лишь, что для получения формулы $S=ab$ необходимо, кроме обычных аксиом геометрии, ввести соглашение, что за единицу площади принята площадь квадрата, сторона которого равна линейной единице. Это соглашение обычно всегда подразумевается, хотя оно и не обязательно. При другом соглашении мы имели бы формулу $S=kab$, где k — коэфициент пропорциональности, зависящий от принятых единиц измерения. Точно так же коэфициент $\frac{1}{2}$, фигурирующий в формуле для площади треугольника, проистекает из того же соглашения. Если бы отрезки измерялись в санти-

[1]) Аксиоматическое исследование показывает, что теорема Болиаи—Гервина не может быть доказана без аксиомы Архимеда (см. сноску на стр. 176). В наших рассуждениях аксиома Архимеда использована при доказательстве теоремы 2 в том пункте, где мы утверждаем, что существует целое число n, удовлетворяющее неравенствам $na'<b<(n+1)a'$. Если бы мы поставили себе целью не пользоваться аксиомой Архимеда, то метод дополнения оказался бы существенно необходимым, и построить теорию площадей многоугольников, пользуясь только методом разложения, было бы нельзя. Разумеется, для школьного преподавания это соображение не имеет никакого значения.

метрах, а площади — в квадратных метрах, то формула для площади треугольника имела бы вид:

$$S = \frac{1}{20\,000} ab.$$

Способ изложения вопроса о площади прямоугольника Н. А. Глаголевым

Иное изложение вопроса о площади прямоугольника дано в учебнике Н. А. Глаголева. Считая, что для рациональных сторон формула выведена обычным способом, в случае иррациональных сторон автор *определяет* площадь прямоугольника как произзедение сторон. Предварительно автор доказывает, что два прямоугольника, имеющие одинаковые произведения сторон, равносоставлены (§ 250). Таким образом, автор не пользуется в теории площадей многоугольников никакими другими принципами, кроме равносоставленности [1]).

Выше мы показали, что *возможно* построить всю теорию площадей многоугольников, опираясь только на равносоставленность. Однако стремление к чистоте метода никогда не должно являться для учителя математики существенным доводом и не должно толкать его на сложные обходные пути.

Чем руководствовался Н. А. Глаголев, избирая такой способ изложения вопроса о площади прямоугольника? Мы полагаем, что ответ на этот вопрос заключается в следующих строках, которые мы цитируем из его книги (стр. 222):

„Если произведение сторон прямоугольника с иррациональными сторонами окажется числом рациональным, то оно попрежнему будет выражать число квадратов со стороной единица, которые можно уложить на этом прямоугольнике, разрезав, если нужно для этого, квадраты на части. Так, прямоугольник со сторонами $\sqrt{7}$ и $3\sqrt{7}$ имеет площадь 21 кв. ед. Такозо число квадратов со стороною единица, которые можно уложить на данном прямоугольнике, покрыв его полностью. Действительно, если взять прямоугольник со сторонами 3 и 7, то внутри его укладывается в точности 21 квадрат. Но этот прямоугольник, в силу теоремы § 250, можно разрезать на части, из которых составится данный прямоугольник со сторонами $\sqrt{7}$ и $3\sqrt{7}$, так как $3 \cdot 7 = \sqrt{7} \cdot 3\sqrt{7} = 21$. Следовательно, и внутри данного прямоугольника укладызается также 21 квадрат".

Итак, Н. А. Глаголев исходит из того, что при обычном изложении ученик будет иметь слишком сложное представление о площади прямоугольника со сторонами, например, $\sqrt{7}$ и $3\sqrt{7}$: он будет предстазлять эту площадь как предел, возникающий при *бесконечном* процессе исчерпывания прямоугольника сначала целыми

[1]) Обычный вывод формулы для площади прямоугольника для случая рациональных сторон, на который Н. А. Глаголев ссылается как на известный из курса арифметики, основан на *точном* исчерпании площади прямоугольника единичными квадратами конечным числом шагов (без предельного перехода), т. е. он сводится к принципу равносоставленности.

единичными квадратами, затем — сотыми долями, затем — десятитысячными и т. д. Н. А. Глаголев считает более целесообразным опираться на то, что можно конечным путем разрезать прямоугольник на части, из которых точно складывается 21 единичный квадрат.

Мы имеем несколько возражений против способа Н. А. Глаголева.

1. Способ покрытия фигуры сеткой единичных квадратов и подсчета числа этих квадратов наилучшим образом соответствует интуитивному представлению о площади, имеющемуся в сознании каждого человека.

2. В случае, когда этот подсчет не может быть выполнен путем конечного процесса, идея предельного перехода является вполне естественной и плодотворной не только для дальнейшего развития учения о площадях, но и вообще для всей математики. Способ Н. А Глаголева, имея некоторое преимущество в одном исключительном случае (прямоугольник с иррациональными сторонами и рациональной площадью), непригоден для дальнейшего развития теории площадей, ибо, как увидим ниже, теория площадей криволинейных фигур не может быть построена методом разложения.

3. Наличие двух разных определений понятия о площади (для прямоугольника с рациональными сторонами площадь определяется как число единичных квадратов, а для прямоугольника с иррациональными сторонами она определяется как произведение сторон) глубоко противоречит психологии учеников, не искушенных в математике.

Невозможность перекроить круг в многоугольник

При переходе к площадям криволинейных фигур метод разложения перестает служить как общий метод. Пусть, например, P есть круг, а Q — равновеликий с ним многоугольник. Покажем, что равновеликость P и Q не может быть доказана методом разложения.

Допустим, что круг P покрыт сетью линий, разрезающих его на конечное число частей, из которых может быть сложен многоугольник Q. Классифицируем эти линии так:

1) прямолинейные отрезки,

2) круговые дуги того же радиуса, что́ и круг P,

3) все остальные линии

Обозначим через l общую длину дуг 2). Разнимем круг P на части, на которые он разрезан, и рассмотрим контуры всех этих частей. В этих контурах участвуют, между прочим, круговые дуги того же радиуса, что́ и P; общая длина этих дуг такова:

$$\text{вогнутых } l,$$

$$\text{выпуклых } l+C,$$

где C — длина окружности P. Это ясно из того, что всякая круговая дуга, проходящая внутри круга P, служит общей границей двух соседних частей: в контур одной части она входит как выпуклая, а в контур другой — как вогнутая. Кроме того, дуги окружности, ограничивающей P, входят в контуры тех частей, которые примыкают к этой окружности, как выпуклые.

Если учесть, что из тех частей, на которые разложен круг P, можно сложить многоугольник Q, то сумма длин выпуклых круговых дуг какого-либо радиуса, входящих в контуры этих частей, должна равняться сумме длин вогнутых круговых дуг того же радиуса, потому что в контур многоугольника круговые дуги не входят, а круговые дуги, проходящие внутри многоугольника, входят в контуры отдельных частей один раз как выпуклые и один раз как вогнутые. Итак:

$$l + C = l,$$

или

$$C = 0.$$

Мы пришли к нелепости; следовательно, круг и многоугольник не равносоставлены.

Этот пример обнаруживает существование равновеликих, но не равносоставленных фигур и делает для учителя ясной причину, по которой нельзя избежать в теории площадей предельного перехода.

Мориц Рети исчерпывающе исследовал вопрос, при каком условии две равновеликие фигуры равносоставлены. Он дал необходимое и достаточное условие для этого, связав равносоставленность фигур с равносоставленностью их контуров. Он дал также построения для разложения на конгруэнтные части равносоставленных фигур любого вида. За подробностями отсылаем читателя к уже цитированной статье Рети (сноска на стр. 193).

Площади кривых поверхностей

Вопрос об определении площади кривой поверхности имеет ту же логическую основу, что и вопрос об определении площади плоской фигуры: необходимость доказать, что площади образуют класс геометрических величин. Однако этот случай имеет добавочные специфические трудности по сравнению со случаем плоских фигур.

Первое специфическое отличие этого случая заключается в том, что единичный квадрат, являющийся плоской фигурой, не может быть совмещен с кривой поверхностью. Поэтому непосредственное откладывание на кривой поверхности единичных квадратов невозможно.

Аналогичное затруднение мы встретили при переходе от измерения длин прямолинейных отрезков к измерению криволинейных дуг: на прямолинейном отрезке можно непосредственно откладывать единичный отрезок, а на криволинейной дуге нельзя. Тогда мы нашли выход из затруднения: мы определили длину криволинейной дуги как предел длины вписанной ломаной. Вполне естественно возникает мысль поступить и здесь аналогичным образом: пытаться определить площадь кривой поверхности как предел площади вписанной многогранной поверхности, когда число граней этой поверхности бесконечно возрастает, а каждая грань стягивается к точке.

Оказывается, так поступить нельзя.

Второе специфическое отличие случая кривой поверхности заключается в том, что площадь вписанной многогранной поверхности не имеет определенного предела, а этот предел зависит от способа вписывания. Этот факт был обнаружен в 1880 г. немецким математиком Германом Амандусом Шварцем [1]).

Шварц на весьма простом примере (прямого кругового цилиндра) показал, что площадь поверхности вписанного многогранника может

---

[1]) H. A. Schwarz, Sür une définition erronée de l'aire d'une surface courbe. (Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. II, Berlin, 1890).

стремиться к любой величине и может совсем не иметь предела (т. е. теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2 (стр. 180—181), не имеют места для поверхностей).

Открытие Шварца весьма важно для уразумения возможных способов изложения теории площадей кривых поверхностей, и мы считаем для учителя необходимым знакомство с этим результатом. Все подробности можно найти в статье А. Г. Школьника „Цилиндр Шварца“ („Математическое просвещение“, 1936).

В связи с работой Шварца возникает вопрос, насколько законно определение боковой поверхности цилиндра или конуса как предела боковых поверхностей вписанных призм или пирамид, принятое обычно в учебниках? Аналогичное сомнение возникает относительно обычного вывода поверхности шара.

Оказывается, обычный вывод законен, но это вовсе не самоочевидно. Явление Шварца возникает *лишь тогда, когда угол между* гранью вписанного многогранника и касательной плоскостью к поверхности не стремится к нулю, а в данном случае он стремится *к нулю*.

Однако мы видим, что *логическое обоснование вопроса о площади* кривой поверхности требует углубления в многочисленные тонкости, недоступные ученикам. Обычный способ изложения основан на *интуиции*, и ученики, изучающие вопрос о поверхности цилиндра, конуса и шара, *даже не подозревают, какие опасности* подстерегают их при попытке сойти с тропинки, проложенной в учебнике.

Мы считаем такое положение вполне приемлемым. Мы видели в гл. I, насколько несостоятельны попытки ввести в школьном курсе геометрии абсолютную строгость. В разных разделах курса мы соблюдаем бо́льший или меньший уровень строгости. Теория измерения геометрических величин, особенно площадей и объемов, является наиболее сложной для логического обоснования частью курса. Поэтому здесь приходится в максимальной степени опираться на интуицию.

§ 4. Объемы

Теорема Дена

Для установления понятия объема мы заполняем пространство семейством единичных кубов и пытаемся подсчитать число кубов внутри данного тела. Логическая проблема — доказать, что результат подсчета не зависит от способа построения семейства кубов — та же, что́ в теории площадей.

Однако теория объемов имеет то специфическое отличие от теории площадей, что метод разложения оказывается недостаточным даже для объемов многогранников.

При изложении вопроса об объеме пирамиды обычно доказывается следующая лемма: две пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами равновелики. При доказательстве этой леммы объем пирамиды рассматривается как предел суммы объемов вписанных призм (это рассуждение издавна получило название „чортовой лестницы"). Является ли применение метода пределов в этом вопросе необходимым?

В 1900 г. на I Международном математическом конгрессе в Париже Гильберт прочел доклад „Математические проблемы", в котором перечислил 23 проблемы, наиболее трудные и актуальные для математики. Третья из этих проблем заключается в следующем: всякие ли два равновеликие многогранника являются равносоставленными? [1]).

Эта проблема была решена в 1901 г. Максом Деном. Ответ оказался отрицательным.

Ден доказал следующую теорему. Пусть P и Q суть два равновеликие многогранника и пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ суть двугранные углы одного многогранника, а $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — двугранные углы другого многогранника. Для того чтобы было возможно перекроить один многогранник в другой, необходимо (но недостаточно), чтобы существовали целые положительные числа $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_n$ и целое (положительное, отрицательное или нуль) число k, удовлетворяющее равенству:

$$(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_m\alpha_m) - (B_1\beta_1 + B_2\beta_2 + \ldots + B_n\beta_n) = 2kd\,^{2)}.$$

Далее можно привести примеры равновеликих многогранников, для которых это условие не соблюдается и которые, следовательно, не могут быть перекроены один в другой.

Первоначальное доказательство теоремы Дена весьма сложно [3]). В 1903 г. В. Ф. Каган нашел другое, совсем простое доказательство этой теоремы. С доказательством В. Ф. Кагана читатель может ознакомиться по его книге „О преобразовании многогранников" (издание второе, М. — Л. 1933).

Так как две произвольные пирамиды не удовлетворяют условию Дена, то приведенная выше основная лемма о равновеликости двух пирамид с равновеликими основаниями и равными высотами не может быть доказана разложением этих пирамид на попарно конгруентные части. Мы видим, что появление „чортовой лестницы" (или какого-нибудь другого предельного перехода) не случайно.

Усовершенствование „чортовой лестницы"

При изложении в школе вопроса об объеме пирамиды между собою конкурируют два метода: 1) традиционный, основанный на рассмотрении предела суммы объемов вписанных и описанных призм, 2) основанный на принципе Кавальери.

Прежде чем обсуждать вопрос о том, какой из этих двух методов предпочтительнее, укажем, что если пользоваться традиционным методом, то в него следует внести одно улучшение. Обычно (см., например, „Стереометрию" Киселева, 1938, стр. 46—49) делаются три шага:

Первый шаг. Доказывается лемма о равновеликости двух пирамид с равновеликими основаниями и равными высотами.

Второй шаг. Треугольная пирамида дополняется до треугольной призмы и на основании леммы доказывается, что объем пирамиды составляет одну треть объема призмы. Отсюда получается формула для объема треугольной пирамиды.

---

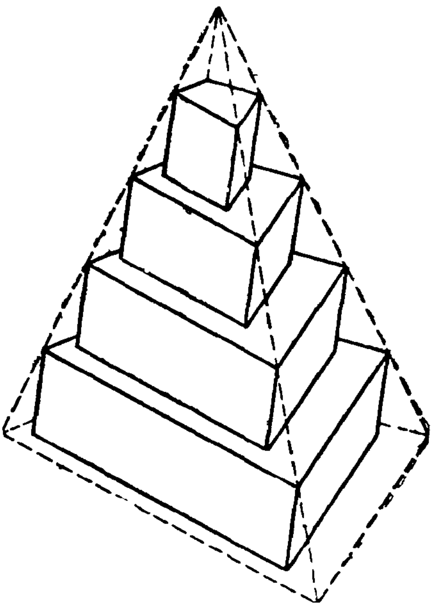
[1]) Мы цитируем не буквально: у Гильберта говорится о тетраэдрах.

[2]) d обозначает прямой угол, α_i и β_i выражены в частях прямого угла.

[3]) Это доказательство приведено в статье У. Амальди „Учение об эквивалентности (равенстве)" (Сборник „Вопросы элементарной геометрии" под редакцией Ф. Энриквеса, СПб 1913).

Третий шаг. Полученная формула распространяется (на основании леммы) на пирамиду с любым основанием.

Мы полагаем, что если рассматривать предел суммы объемов вписанных призм, то предпочтительно сразу получить формулу для объема любой пирамиды. Сама лемма, а также второй и третий шаги делаются при этом излишними. Обычное разделение доказательства на три шага объясняется лишь традицией, возникшей потому, что Евклид не выводил формул для измерения объемов, а лишь сравнивал между собой различные объемы. Теоремы о равновеликости пирамид с равновеликими основаниями и равными высотами и о том, что объем пирамиды составляет одну треть объема некоторой призмы, являются у Евклида не вспомогательными результатами, а окончательными. Доказательства современных учебников, сохраняя по традиции ход рассуждений Евклида, делают к ним добавление — вывод формулы.



Черт. 95. „Чортова лестница".

Предлагаемый нами ход рассуждений следующий. На черт. 95 изображена пирамида, высота которой разделена на n равных частей и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию пирамиды. Далее обычным образом построены вписанные призмы; боковые ребра призм параллельны высоте пирамиды.

Секущие плоскости отсекают на высоте отрезки (считая от вершины пирамиды):

$$\frac{H}{n}, \frac{2H}{n}, \frac{3H}{n}, \ldots, \frac{(n-1)H}{n},$$

где H — высота пирамиды. Известно, что площади параллельных сечений пирамиды относятся как квадраты их расстояний от вершины:

$$\frac{b}{B}=\frac{h^2}{H^2},$$

где b — площадь сечения, B — площадь основания, а h — расстояние сечения от вершины. Подставляя вместо h последовательно значения $\frac{H}{n}, \frac{2H}{n}, \frac{3H}{n}, \ldots, \frac{(n-1)H}{n}$, найдем площади последовательных сечений:

$$\frac{B}{n^2}, \frac{2^2\cdot B}{n^2}, \frac{3^2\cdot B}{n^2}, \ldots, \frac{(n-1)^2 B}{n^2}.$$

Умножая каждую из этих площадей на $\frac{H}{n}$ (высота каждой призмы), получим объемы последовательных призм. Составляем сумму этих объемов:

$$V_n = \frac{BH}{n^3} + \frac{2^2 BH}{n^3} + \frac{3^2 BH}{n^3} + \ldots + \frac{(n-1)^2 BH}{n^3} =$$
$$= \frac{BH}{n^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2].$$

Преобразуя выражение, стоящее в квадратных скобках по известной формуле, дающей сумму последовательных квадратов

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + p^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6},$$

получим:

$$V_n = \frac{BH}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{BH}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

Объем пирамиды V определится как предел этого выражения при $n \to \infty$ [1]):

$$V = \lim_{n \to \infty} V_n = \frac{1}{3} BH.$$

Это рассуждение применимо также и к конусу. При таком рассуждении (а также и при использовании принципа Кавальери) нет надобности дублировать теоремы об объеме конуса и усеченного конуса, а можно давать общую формулировку для пирамиды и конуса.

Принцип Кавальери

Вопрос о том, какой метод следует предпочесть — традиционный или основанный на принципе Кавальери, — вряд ли решается однозначно. Оба метода вполне допустимы. Традиционный метод, проверенный длительным опытом, не вызывает сомнений, а о принципе Кавальери можно высказать следующие соображения.

Против принципа Кавальери иногда выдвигается то соображение, что он представляет собою положение, принимаемое без доказательства (доказательство принципа Кавальери относится к интегральному исчислению и в средней школе может быть заменено лишь суррогатами). Это соображение не может являться решающим, особенно если учесть, сколь много положений принимается без доказательства в теории площадей и объемов. Однако оно все-таки имеет некоторый вес, так как *при прочих равных обстоятельствах* лучше избрать доказательный путь, чем вводить без доказательства новый принцип.

В пользу принципа Кавальери приводят те технические упрощения, которые он дает в вопросе об объеме пирамиды и далее, например,

---

[1]) Если объем любого тела уже был определен путем заполнения пространства семейством кубов, ребра которых стремятся к нулю, то положение, что объем пирамиды есть предел суммы объемов вписанных призм, подлежит доказательству. В школьном курсе мы здесь опираемся на интуицию.

при вычислении объема шара (Киселев „Стереометрия“, 1938, § 147, стр. 78—79.). Это соображение тоже мало существенно, потому что в вопросе об объеме пирамиды применение принципа Кавальери освобождает учеников не от каких-либо не доступных им тонкостей или искусственных построений, а от приведенной выше весьма естественной, хотя и несколько сложной выкладки, а такие выкладки для учеников несомненно полезны. В вопросе же об объеме шара принцип Кавальери тоже дает экономию в выкладках, но зато вводит искусственное соображение (сравнение шара и цилиндра с конической выемкой).

Мы полагаем, что при сравнении двух методов следует руководствоваться не этими частными соображениями, а тем, какой из них более плодотворен при дальнейшем развитии математики. Но с этой точки зрения трудно отдать предпочтение одному из этих методов, так как оба эти метода основаны на идеях, чрезвычайно существенных для математики. Значение этих идей далеко выходит за рамки вопроса об объеме пирамиды. Их развивающее влияние на учеников весьма велико; это — пропедевтика интегрального исчисления.

Все изложенное приводит нас к выводу: нет никаких оснований категорически предписать учителю отвергнуть традиционный метод и пользоваться принципом Кавальери, но нет и никаких противопоказаний против этого принципа. Учитель может положиться на свой методический вкус и смело идти как той, так и другой дорогой.

Вопрос о теории пределов в средней школе

В предыдущем изложении мы неоднократно обращались к предельному переходу. В методической литературе иногда приходится читать о проблеме теории пределов в средней школе, причем под этим названием подразумевается две проблемы:

1) Следует ли проходить в средней школе теорию пределов?

2) В случае положительного ответа на первый вопрос — в каком объеме и как ее следует проходить?

Мы считаем, что первая проблема не имеет права на существование. Предложение исключить пределы из курса средней школы не заслуживает серьезного обсуждения и является следствием либо невежества, либо узкого практицизма. В самом деле, никакого грамотного математика незачем убеждать, что без понятия предела нельзя сколько-нибудь полноценно изложить периодические дроби, теорию бесконечной убывающей геометрической прогрессии, теорию иррациональных чисел, вопрос о длине не только окружности, но даже и прямолинейного отрезка и вообще всю теорию измерения геометрических величин и ряд других вопросов, составляющих значительную по объему часть курса элементарной математики. Нельзя также всерьез обсуждать, важна ли идея предела для общего образования, поскольку это одна из самых важных идей математики. Мы уже не раз указывали, что все то, что важно в науке, важно и в школе.

Единственный довод, выдвигаемый противниками теории пределов, заключается в том, что идея предела слишком трудна и не доступна для школьников. Говорят, что даже студенты технических учебных заведений с трудом усваивают эту идею. Развивая эту точку зрения, М. Я. Выгодский предложил даже устранить понятие предела из курса математического анализа в высших технических учебных заведениях, по крайней мере в первом концентре [1]).

Этот довод, несмотря на свою внешнюю убедительность, несправедлив.

Трудности, возникающие при изучении каких-либо важных понятий, надо преодолевать, а не обходить. Заметим, что полная отмена образования самым радикальным способом устранила бы все педагогические трудности.

Идея предела является весьма естественной. Ее трудность — это трудность выразить в краткой и точной логической формулировке то, что̀ каждый человек смутно ощущает, говоря, что одна величина „стремится" к другой. Есть единственный способ преодолеть эту трудность: уделить понятию предела как можно больше времени и внимания.

Тот факт, что студенты втузов плохо усваивают пределы, не говорит в пользу исключения идеи предела из курса средней школы. Наоборот, если теория пределов будет изучаться в средней школе, то студенты, будучи уже́ знакомы с нею, будут лучше усваивать ее в более углубленном изложении в высшей школе.

Говорят, что студенты часто плохо усваивают иностранные языки. Значит ли это, что надо исключить иностранные языки из средней школы? Или, может быть, наоборот, следует усилить их изучение в средней школе?

Трудности, которые испытывают студенты при изучении пределов, в средней школе будут не больше, а меньше, потому что эти трудности объясняются не возрастом учащихся. В высшей технической школе на математику отводится столь мало времени, что на теорию пределов обычно уделяется не более двух-трех недель. В средней же школе есть возможность спокойно, в течение многих лет выяснять эту идею по различным частным поводам и, наконец, в старших классах формулировать ее в общем виде.

Поэтому трудности изучения теории пределов в средней школе сильно преувеличены. Однако если бы они даже были велики, то все равно учитель не имел бы права исключать ее, так как это приводит к сильнейшей порче и вульгаризации значительной части курса элементарной математики. Ученикам при этом прививаются логическая нетребовательность и привычка оперировать понятиями, смысла которых они не понимают.

Что касается объема, в котором должна изучаться теория пределов, то можно согласиться на весьма малый объем, так как к изучению пределов в средней школе предъявляются лишь следующие требования.

---

[1]) М. Я. Выгодский, Основания исчисления бесконечно малых, М. — Л. 1931.

1. Чтобы было дано понятие предела. Тем самым, во-первых, будет удлинен срок, в течение которого это понятие будет созревать в сознании учащихся (по сравнению с тем положением, когда это понятие вводится только в высшей школе). Во-вторых, будет подведена логическая база под многие понятия математики.

2. Чтобы была сообщена (без доказательства) теорема Вейерштрасса о существовании предела ограниченной монотонной переменной[1]), так как на этой теореме основываются почти все доказательства существования пределов в курсе элементарной математики.

3. Чтобы к этому были добавлены те минимальные сведения, которые необходимы, чтобы теория пределов приобрела некоторую связность.

ГЛАВА XI

Преподавание стереометрии

Специфические особенности преподавания стереометрии

В этой главе мы будем рассматривать лишь те вопросы методики геометрии, которые являются для стереометрии специфическими.

Вполне понятны причины, по которым стереометрия играет особую роль в деле развития геометрического воображения. Во-первых, в пространстве мы встречаемся с более сложными геометрическими соотношениями, чем на плоскости. Во-вторых, в планиметрии мы всегда имеем возможность выполнить точный чертеж и тем прийти на помощь нашему воображению. В стереометрии же чертеж представляет пространственные образы в искаженном виде, и его помощь воображению значительно более ограничена, чем в планиметрии. Зато самое выполнение чертежа весьма способствует развитию пространственного воображения, так как требует предварительного ясного представления изображаемых образов.

Логические рассуждения в стереометрии также играют специфическую роль. Если в планиметрии, особенно в ее начале, часто приходилось доказывать вещи весьма очевидные, то в стереометрии, вследствие слабости нашего пространственного зрения, логика становится необходимым для нас поводырем.

Роль моделей в курсе стереометрии

Трудности, связанные с недостаточным пространственным воображением, вызвали к жизни большое количество вспомогательных наглядных пособий: пространственные модели из всевозможных материалов, стереоскопические чертежи, анаглифы. Кроме неизменных моделей, существуют наборы принадлежностей, из которых можно каждый раз составлять разные комбинации точек, прямых и плоскостей.

---

[1]) А. П. Киселев, Планиметрия, М. 1940, §§ 229—230, стр. 13?. Приведенное там доказательство предполагает уже установленное наличие предела бесконечной десятичной дроби, т. е. непрерывность множества действительных чисел.

Нет надобности доказывать пользу моделей при разумном их применении. Важнее указать вред, который проистекает от чрезмерного увлечения моделями.

Прежде всего разграничим два случая:

1) когда ученикам даются готовые модели,

2) когда ученикам поручается изготовление моделей.

Самостоятельное изготовление моделей всегда приносит пользу ученикам. Эту пользу мы видим не в созерцании готовых моделей, а в самом процессе их изготовления. Во-первых, изготовляя модель, ученик в течение длительного времени фиксирует свое внимание на соответствующем геометрическом образе, и это содействует более прочному запоминанию. Во-вторых, изготовление каждой модели требует некоторого расчета. Например, чтобы склеить из бумаги многогранник, надо сообразить, как расположены его грани на развертке, вычислить длины ребер и т. д. Ясно, что эта работа способствует лучшему уяснению различных геометрических соотношений.

Иначе обстоит дело, когда учитель злоупотребляет демонстрацией готовых моделей. Этим он избавляет учеников от необходимости напрягать воображение и таким образом мешает его развитию. Мы должны предостеречь учителя от механических аналогий между геометрией и другими предметами. Например, на уроке географии ученик должен иметь перед глазами карту и показывать на ней объекты, о которых идет речь. Если же на уроке геометрии учитель спрашивает, что́ представляет собою диагональное сечение куба, то ученик должен внутренним зрением определить, что это — прямоугольник со сторонами a и $a\sqrt{2}$, где a — ребро куба. Разница объясняется тем, что географическая карта весьма сложна, и нельзя требовать, чтобы ученик помнил все детали. Геометрические же тела гораздо проще, и „устройство" куба надо представлять и без модели. Точно так же необходимо требовать, чтобы ученик мог описать ход изменения тригонометрических функций, не прибегая к подвижной модели тригонометрического круга и даже не прибегая к чертежу.

Разумеется, мы далеки от намерения вовсе запретить модели. Мы лишь не рекомендуем постоянно пользоваться ими. Можно, например, один раз показать подвижную модель тригонометрического круга, а затем требовать, чтобы ученик воспроизводил ее в памяти.

Роль чертежей в курсе стереометрии

Однако невозможно всегда требовать, чтобы ученики ограничивались лишь воображаемыми образами. В стереометрии встречаются достаточно сложные вопросы, где это недостижимо. Мы полагаем, что основным средством иллюстрации в стереометрии должен служить чертеж.

Значение чертежа в стереометрии обычно недооценивается. Даже в учебниках мы находим ошибочные чертежи, противоречащие законам начертательной геометрии [1]), а уж о чертежах, вы-

---

[1]) В „Стереометрии" Киселева (1938 г.) ошибочны почти все чертежи с конусами и шарами. Например, на стр. 67 говорится: „Из подобия тре-

полняемых учителями и тем более учениками, и говорить не приходится.

То, что говорилось о стереометрическом чертеже в начале этой главы, не доказывает, что в стереометрии чертеж имеет меньшее значение, чем в планиметрии. В планиметрии можно, пользуясь точными измерениями, с н а ч а л а сделать чертеж, а затем, пользуясь этим чертежом, *получить наглядное* представление. В стереометрии же механическое выполнение чертежа невозможно (по крайней мере, для ученика, незнакомого с начертательной геометрией); там требуется с н а ч а л а иметь некоторое наглядное представление. Таким образом, выполнение стереометрических чертежей является прекрасным средством для развития пространственного воображения.

Чертеж, выполняемый на доске учителем, имеет то преимущество перед моделью, что линии на нем не нанесены заранее все сразу, а появляются постепенно — по мере хода рассуждения.

Весьма возможно, что широко распространенное среди учителей пренебрежение к стереометрическому чертежу и одновременно увлечение моделями объясняются низким качеством чертежей. Книги с хорошими стереометрическими чертежами очень редки, учителя тоже в большинстве случаев чертят плохо. Большей частью учитель воспринимает раз навсегда (часто из книг) какое-нибудь неправильное изображение конуса или усеченной пирамиды и всегда воспроизводит его на доске. Разумеется, приятнее (и учителю и ученику) иметь дело с хорошей моделью, чем с плохим чертежом, который иногда создает у учеников зрительные иллюзии и направляет рассуждение на ложный путь. Однако хороший чертеж является лучшим пособием по стереометрии, а выполнение хороших чертежей учениками представляет в высшей степени полезное упражнение, содействующее лучшему усвоению теории.

Всякий учитель, который хорошо поставит эту сторону дела и уделит чертежам максимальное внимание, тем самым поднимет преподавание стереометрии на значительную высоту.

Важность начертательной геометрии для учителя

Для того чтобы развить культуру чертежа в курсе стереометрии, прежде всего необходимо, чтобы учитель был хорошо знаком с начертательной геометрией. Особенно необходимо знакомство с аксонометрией. Однако учителю нужно изучать аксонометрию с особой точки зрения. Стереометрический чертеж всегда представляет параллельную проекцию на доску или бумагу изображаемого тела. При этом учитель, выполняя чертеж, не задается определенным положением оригинала в пространстве. Ему только нужно знать, какие линии на чертеже *можно* провести произвольно и какие нельзя (т. е. их требуется построить), чтобы быть уверен-

угольников находим...» (имеется в виду черт. 134), а на черт. 134 нет никаких треугольников, потому что радиусы R и r не могут иметь концы на той образующей, какая показана на чертеже. То же замечание относится к черт. 136. На стр. 72 утверждается, что KM (черт. 141) есть высота сегмента, что неверно, и т. д.

ным, что существует какое-то положение оригинала в пространстве и какое-то направление проектирования, при которых чертеж будет именно таким.

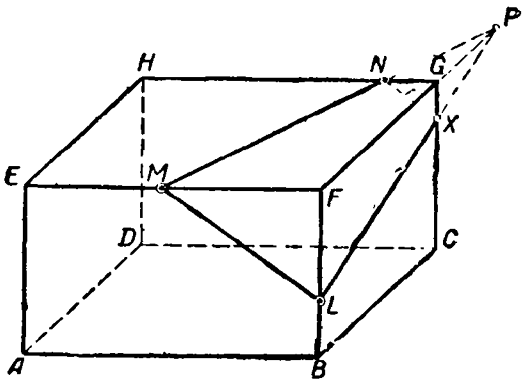
Лучшей книгой, рассматривающей вопрос с этой точки зрения, является книга Н. Ф. Четверухина „Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии" (Москва 1946). Она содержит исчерпывающую теорию вопроса, много разобранных примеров и около 200 прекрасных чертежей. Знакомство с этой книгой мы считаем необходимым для учителя.

Кроме того, возникает вопрос, как добиться выполнения учениками хороших чертежей. Ясно, что от учеников нельзя требовать основательного знакомства с начертательной геометрией.

Что должны знать ученики по начертательной геометрии

Есть некоторый минимум правил начертательной геометрии, с которым ученики должны быть ознакомлены. Например, ученики должны уметь вполне сознательно строить плоские сечения многогранников.

При выполнении же более сложных чертежей ученик должен либо рисовать, как рисуют художники с натуры, либо, если это ему недоступно, копировать шаблон учителя. В большинстве случаев ученик в чертежах подражает учителю или книге, и поэтому важно, чтобы образцы, с которых он копирует, были выполнены вполне грамотно.



Черт. 96. Построение плоского сечения параллелепипеда.

Построение плоских сечений многогранников основано на следующих положениях:

1. Плоскость определяется тремя точками (или двумя пересекающимися прямыми, или прямой и точкой).

2. Если плоскость π пересекает плоскости α и β, то линии пересечения π с α и π с β имеют точку пересечения, лежащую на линии пересечения плоскостей α и β.

3. Плоскость π пересекает две параллельные плоскости по двум параллельным прямым.

4. Параллельные прямые на чертеже изображаются параллельными прямыми (разумеется, при параллельной проекции; только ею мы и пользуемся в стереометрии).

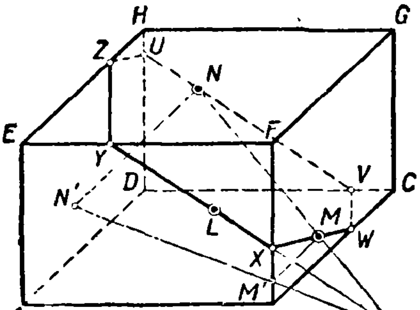
Третье положение является частным случаем второго, и его приходится выделять особо лишь в виду незнакомства учеников с несобственными (бесконечно удаленными) элементами.

Плоские сечения многогранников

Рассмотрим несколько примеров на построение сечений многогранников. Положение секущей плоскости следует задавать тремя точками. Положим, что эти три точки даны на ребрах. На черт. 96 изображен параллелепипед, и на его ребрах даны точки L, M и N; требуется построить сечение параллелепипеда плоскостью LMN.

Точки L и M принадлежат одной грани, поэтому их следует соединить прямой. По той же причине следует соединить точки M и N. Далее можно рассуждать двумя способами. Грани $BCGF$ и $EFGH$ пересекаются по ребру FG. Следовательно, секущая плоскость пересекает эти грани по прямым, точка пересечения которых лежит на FG. Одна из этих прямых (MN) ужé построена. Находим точку $P \equiv MN \times FG$. Соединяем L с P; прямая LP есть искомая линия пересечения секущей плоскости с гранью $BCGF$. Находим точку X, в которой LP пересекает CG, и соединяем X с N. Другой способ: так как грани $ABFE$ и $DCGH$ параллельны, то секущая плоскость сечет их по параллельным прямым. Одна из этих прямых (LM) ужé построена. Строим $NX \parallel ML$ и определяем точку X; затем соединяем X с L.

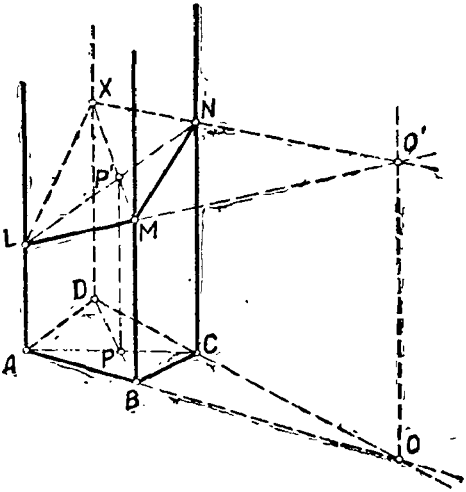
Рассмотрим теперь случай, когда точки заданы в гранях. Пусть даны точки L, M и N (черт. 97), причем указано, что точка L лежит в передней грани, M — в правой и N — в задней. Общий метод решения задач такого типа (даже в случае, когда точки даны не в гранях, а произвольным образом в пространстве) требует прежде всего, чтобы мы спроектировали все данные точки (из какого-нибудь центра или параллельно какому-нибудь направлению) на плоскость, на которой мы хотим найти след. В случае, когда точки даны в гранях, наиболее экономно проектировать на ту грань, в которой лежит одна из точек. Проектируем, например, все точки на переднюю грань; будем пользоваться *параллельной проекцией* с направлением проектирования, параллельным ребру AD. Проводим $MM' \parallel AD$; проекция точки M попадет на ребро BF. Проводим $NN' \parallel AD$ и откладываем $NN' = AD$. Очевидно, прямая $M'N'$ изображает проекцию прямой MN на переднюю грань. Строим точку $P \equiv MN \times M'N'$; эта точка есть изображение следа прямой MN на плоскости передней грани. Так как точка L сама лежит в передней грани, то, соединив P с L, получим линию пересечения секущей плоскости с плоскостью $ABFE$. Отрезок XY прямой PL, заключенный внутри прямоугольника $ABFE$, есть одна сторона искомого многоугольника.



Черт. 97. Построение плоского сечения параллелепипеда.

Соединяя X с M, получаем линию пересечения с правой гранью. Дальнейшее построение на чертеже не показано, так как теперь мы имеем три точки на ребрах, и задача сводится к предыдущей.

Метод, примененный при решении этой задачи, является весьма общим. Он может применяться и в том случае, когда точки L, M, N, через которые проходит секущая плоскость, даны не в гранях многогранника, а расположены как угодно в пространстве (в этом случае, разумеется, кроме изображений самих точек, должны быть даны изображения их проекций на какую-нибудь плоскость, называемые обычно „вторичными проекциями"). Сущность этого метода заключается в том, что все данные точки проектируются (из какой-нибудь точки или параллельно какому-нибудь направлению) на какую-нибудь грань многогранника. Затем находятся точки пересечения прямых LM, MN и NL с той гранью, на которую мы их проектировали. Все эти точки лежат на прямой, которая и есть линия пересечения плоскости LMN с данной гранью.



Черт. 98. Сечение призмы плоскостью, непараллельной основанию.

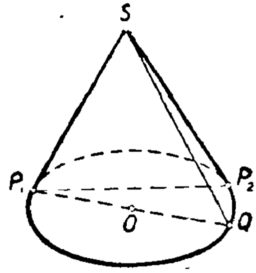
Рассмотрим еще один пример. Пусть требуется изобразить четырехугольную призму, усеченную непараллельно основанию. Довольно распространена следующая ошибка: чертят четырехугольник $ABCD$, изображающий основание призмы, проводят через точки A, B, C, D параллельные прямые, изображающие боковые ребра, и на этих прямых произвольно берут точки L, M, N, X. Ошибка заключается в том, что произвольно можно взять только три точки L, M, N, а четвертая должна быть построена. Построение показано на черт. 98.

Предположим, что точка X построена. Тогда плоскость $ACNL$ проходит через параллельные ребра призмы AL и CN, а плоскость $BDXM$ — через ребра BM и DX, параллельные первым. В таком случае линия пересечения плоскостей должна быть тоже параллельна боковым ребрам призмы. Отсюда получается следующее построение. Строим точку $P \equiv AC \times BD$. Проводим $PP' \parallel AL$. Строим точку $P' \equiv PP' \times LN$. Точка $X \equiv MP' \times DX$ является искомой. Вместо точки P можно было бы воспользоваться точкой $Q \equiv AB \times CD$ или точкой $R \equiv AD \times BC$.

Если бы требовалось построить четырехугольную пирамиду, усеченную непараллельно основанию, то построение было бы аналогичным. Разница заключалась бы в том, что вместо прямых, проводимых через точки P, Q или R *параллельно боковым ребрам призмы*, следовало бы через те же точки проводить прямые, *проходящие через вершину пирамиды*.

Изображения круглых тел

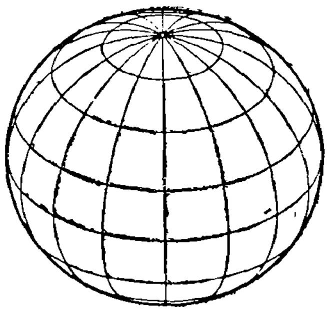
Относительно изображений прямых круговых конусов и цилиндров ограничимся несколькими замечаниями. Круг, лежащий в основании конуса (мы говорим о конусе для определенности, предоставляя читателю самому судить, в какой мере эти замечания относятся к цилиндру), изобразится эллипсом. Осевое сечение конуса есть треугольник, основанием которого является диаметр круга. Диаметр круга на чертеже изображается диаметром эллипса.



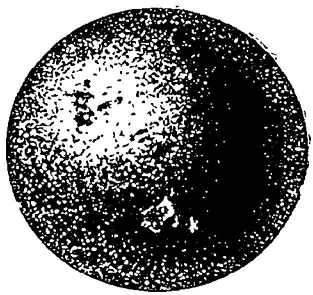
Черт. 99. Конус с осевым сечением.

Проведем на чертеже касательные из вершины конуса S к эллипсу, изображающему основание, и обозначим через P_1 и P_2 точки прикосновения (черт. 99). Обычная ошибка — полагать, что треугольник P_1SP_2 изображает осевое сечение конуса. Это неверно потому, что хорда P_1P_2 не проходит через центр (в книгах, авторы которых пренебрежительно относятся к чертежам, ее насильственно проводят через центр). Естественно возникают два вопроса:

1) Изображением чего служат прямые SP_1 и SP_2?



Черт. 100. Шар с меридианами и параллелями (изометрическая проекция).



Черт. 101. Теневой чертеж шара.

2) Как изобразить осевое сечение, проходящее, например, через образующую SP_1?

Всякая прямая, соединяющая S с какой-нибудь точкой эллипса, изображает образующую конуса. SP_1 и SP_2 являются на чертеже *крайними* образующими, т. е. они отделяют видимые образующие от невидимых. Короче говоря, SP_1 и SP_2 суть образующие, входящие в *абрис* конуса (абрис — линия на чертеже, ограничивающая видимую часть тела).

Чтобы построить осевое сечение, проходящее через образующую SP_1, надо провести через точку P_1 диаметр эллипса, т. е. прямую P_1O, где O — центр эллипса. Сечение P_1SQ на черт. 99 — осевое.

В теорию изображения шара мы входить не будем, отсылая читателя к рекомендованным выше сочинениям. На черт. 100 дано изображение шара в изометрической проекции. Грубой ошибкой является помещать Северный и Южный полюсы на абрисе шара.

Весьма полезными являются теневые изображения круглых тел, особенно шара (черт. 101). При изображении шара абрис является недостаточным, так как он представляет собою просто круг (в изометрической проекции), и чтобы создать представление о выпуклости шара, необходимо либо изображать на нем какие-нибудь линии (черт. 100), либо накладывать тени (черт. 101). Однако выполнения теневых чертежей нельзя требовать от всех учеников, а только от умеющих хорошо рисовать.

Глава о перпендикулярных и параллельных прямых и плоскостях

Стереометрия начинается разделом о перпендикулярных и параллельных плоскостях и прямых. Значение этого раздела для геометрического развития учащихся очень велико. В нем встречается очень много случаев, требующих доказательства того, что какие-нибудь прямые и плоскости расположены определенным образом. Эти вопросы, во-первых, способствуют развитию пространственного воображения (потому что требуется у в и д е т ь, как расположены прямые и плоскости, о которых идет речь и, во-вторых, способствуют логическому развитию учеников (потому что надо доказать замеченное). К сожалению, многие учители комкают этот раздел и переносят центр тяжести занятий на изучение формул для вычисления поверхностей и объемов. Тем самым они изгоняют из стереометрии ее геометрическую сущность. Задача „найти радиус шара, зная его объем" не является геометрической задачей; это — простенькая алгебраическая задача, искусственно переодетая в геометрическую форму. Задача же о построении общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым есть настоящая геометрическая задача, требующая от ученика пространственного воображения и логического развития.

Существующая практика преподавания стереометрии часто приводит к тому, что для учеников, поступающих после окончания школы в высшие технические учебные заведения, начертательная геометрия является чрезвычайно трудным предметом. Каждый учитель должен знать, что многим из его учеников (всем, кто пойдет во втузы) придется изучать начертательную геометрию. Эта наука требует хорошо развитого пространственного воображения. Раздел о прямых и плоскостях в пространстве является наиболее важным и для успешного изучения начертательной геометрии. Учитель, который затушевывает эти разделы и увлекается задачами на применение формул, оказывает ученикам плохую услугу.

Несколько спорным является вопрос о том, с чего начинать: с перпендикулярных прямых и плоскостей или с параллельных. Традиционный порядок заключается в том, что сначала излагаются свойства перпендикулярных прямых и плоскостей. Возможен и другой порядок; например, Н. А. Глаголев в своей переработке учебника стереометрии А. П. Киселева начинает со свойств параллельных прямых и плоскостей. Вопрос этот не является принципиальным, а техническим и сводится к тому, какое изложение проще. К этому обычно сводятся аргументы в пользу того или другого порядка. Например, Н. А. Глаголев в предисловии к учебнику стереометрии А. П. Киселева говорит: „Наиболее существенными моментами в переработке 2-й части являются следующие: перестановка порядка изложения вопросов о перпендикулярности и параллельности прямых и плоскостей в пространстве, чтó дало возможность значительно упростить доказательство отдельных теорем; сокращение числа теорем о параллельных прямых и плоскостях... Все это позволило выделить главнейшие моменты во взаимоотношениях параллельности и перпендикулярности в пространстве и сделать этот отдел геометрии более обозримым и более легко воспринимаемым“.

Поскольку нет никаких принципиальных возражений ни против того, ни против другого способа, каждый учитель имеет право пользоваться любым из них. Этим мы отнюдь не хотим сказать, что рассматриваемый вопрос неважен. Разумеется, чрезвычайно важно выбрать более простой способ изложения этого сравнительно трудного раздела стереометрии. Мы хотим лишь сказать, что при принципиальной равноценности обоих способов вопрос должен быть решен эмпирически. Старый способ поддерживается многолетней традицией. Со времени выхода переработанной „Стереометрии“ А. П. Киселева (1938 г.) учителя накопили большой опыт преподавания по новому способу. Весьма своевременно проанализировать этот опыт в методической печати.

Метод Монжа в курсе стереометрии

В последние годы распространилось обыкновение включать в курс стереометрии сведения о методе Монжа (ортогональные проекции на две перпендикулярные плоскости). Мы считаем прохождение этого раздела совсем необязательным. Он не имеет общеобразовательного значения и не является необходимым для всех учеников. Теория параллельных проекций на одну плоскость имеет гораздо большее общеобразовательное значение. В самом деле, эпюры Монжа употребляют только инженеры, а параллельные проекции применяет буквально каждый человек, который что-нибудь изображает на бумаге, будь это геометрическое тело, или несложный рисунок, или эскиз. Разумеется, имело бы большое общеобразовательное значение, чтобы выпускник средней школы понимал, в каких проекциях и по каким законам он чертит куб или конус, а не воспроизводил бы всегда механически заученный чертеж.

Метод Монжа не используется ни в каких других разделах стереометрии и представляет таким образом (в рамках школьного курса) боковой отросток этого курса. В самом деле, если из учебника А. П. Киселева механически вычеркнуть гл. II, посвященную методу Монжа, то здание стереометрии не поколеблется, и в дальнейших главах не потребуется никаких изменений.

Наконец, прохождение метода Монжа не может быть оправдано подготовкой к курсу высшей школы. Такая подготовка должна заключаться в сообщении ученикам знаний, идей и навыков, *на которых* потом будет строиться курс высшей школы, а не в механическом перенесении в среднюю школу *тех самых* вещей, которые изучаются в высшей школе.

В защиту метода Монжа можно привести то обстоятельство, что он является прекрасным средством для развития пространственного воображения. Однако теория параллельных проекций на одну плоскость (а еще лучше аксонометрия, к которой мы придем, если в теории параллельных проекций не будем ограничиваться свойствами положения, а введем метрические задачи) обладает этим же свойством, имея при этом ряд других преимуществ. В частности, одно из этих преимуществ заключается в том, что теория параллельных проекций позволяет ученикам сознательно выполнять наглядные чертежи, т. е. дает им геометрические основы рисования. Выполнение таких чертежей доставляет ученикам большое удовлетворение, чего нельзя сказать про выполнение эпюров Монжа, которые представляют собою чисто условные изображения, лишенные наглядности.

Резюмируя сказанное, мы полагаем, что метод Монжа, являясь весьма полезным для развития пространственного воображения, не является первоочередным, и нельзя рекомендовать его включение в курс стереометрии, пока туда не включены разделы, имеющие значительно большее общеобразовательное значение, чем этот метод.

ГЛАВА XII

ПРЕПОДАВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИИ

§ 1. Содержание курса тригонометрии

Разрыв между школьным курсом тригонометрии и наукой

Ни в одной математической дисциплине нет столь резкого разрыва между школьным курсом и наукой, как в тригонометрии. Школьные курсы алгебры и геометрии хотя и очень далеки *по своему объему* от современной науки, но во всяком случае не содержат ничего противоречащего ей. Эти курсы содержат *элементы* науки, и ученик, усвоивший их, может беспрепятственно изучать математику дальше. Курс же тригонометрии, как будет показано в этом параграфе, прививает ученикам антинаучные навыки, приносящие при дальнейшем изучении математики прямой вред. При изучении высшей математики приходится отучаться от многих идей, прививаемых в школьном курсе тригонометрии.

Ниже мы подробно рассмотрим противоречия между школьным курсом тригонометрии и наукой, а пока укажем, что эти противоречия, несмотря на их многообразность, имеют одну общую причину: тригонометрия как наука представляет главу анализа, а в школьном курсе ее рассматривают как главу геометрии.

Цели преподавания тригонометрии в школе

Преподавание математики в средней школе преследует различные цели. Одна из них — подготовка учеников к высшей школе. Эта цель — не единственная и даже не главная. Ее роль в различных математических предметах различна. В курсе арифметики эта цель почти совсем стушевывается, потому что арифметика имеет повседневное применение в практической жизни и необходима каждому человеку сама по себе, независимо от того, на какой ступени он прервет свое образование. В алгебре и геометрии эта цель играет более важную роль. В курсе же тригонометрии эта цель является первостепенной и почти единственной. Применений к повседневной практической жизни тригонометрия не имеет. Правда, она иногда бывает нужна рабочим и техникам некоторых специальностей, но здесь дело сводится почти исключительно к решению прямоугольных треугольников. Тригонометрия имеет также применение в школьном курсе физики (например, теория гармонического колебания).

Поэтому содержание школьного курса тригонометрии следует обсудить с точки зрения того, дает ли этот курс необходимую подготовку для изучения высшей математики и для изучения физики в средней школе. Говоря о высшей математике, будем подразумевать потребности студентов втузов. Во-первых, это самый многочисленный контингент „потребителей" тригонометрии. Во-вторых, если будет доказано, что школьный курс тригонометрии не годится в качестве фундамента даже для курса высшей математики во втузах, то это тем более будет относиться к гораздо более солидному курсу математики, проходимому на математических факультетах университетов и пединститутов.

Содержание тригонометрии как науки

Для решения вопроса о том, насколько школьный курс тригонометрии соответствует содержанию тригонометрии как науки и насколько этот курс пригоден в качестве фундамента для высшей математики и смежных дисциплин, необходимо выяснить:

1) в чем заключается содержание тригонометрии как науки?

2) каково применение тригонометрии в высшей математике и в смежных дисциплинах?

Тригонометрия изучает свойства особого рода функций, обозначаемых $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и т. д. и называемых тригонометрическими функциями. Эти функции имеют многочисленные применения в разных областях математики и других наук. Естественно подразделить тригонометрию на две части:

a) изучение тригонометрических функций и их свойств,

b) применение этих функций к разным вопросам (сюда относятся вопросы, в которых тригонометрические функции не являются самоцелью, а вводятся как аппарат, дающий возможность решить вопрос).

Впрочем, вторую часть можно и не относить к тригонометрии.

Определение тригонометрических функций при помощи диференциального уравнения

Изучение тригонометрических функций, разумеется, должно начинаться с их определения. Это определение может быть дано многими способами. Мы остановимся на трех из них.

Рассмотрим линейное диференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0 \qquad (1)$$

и будем искать два его решения y_1 и y_2, удовлетворяющие начальным условиям:

$$\text{при} \quad x=0 \quad y_1=0, \quad \frac{dy_1}{dx}=1,$$

$$\text{»} \quad \text{»} \quad y_2=1, \quad \frac{dy_2}{dx}=0.$$

Если считать, что тригонометрические функции нам неизвестны (мы как раз сейчас занимаемся вопросом об их определении), то уравнение (1) решить нельзя. Это значит, что его решение не может быть выражено как комбинация (в конечном числе) известных нам функций (алгебраических функций, показательной и логарифмической функций), но это отнюдь не значит, что решения не существует. Согласно теореме Коши о существовании решения диференциального уравнения, решения уравнения (1), удовлетворяющие указанным начальным условиям, существуют. Поскольку мы не можем выразить их при помощи известных ранее функций, будем рассматривать их как новые функции и введем для них следующие обозначения:

Функция, удовлетворяющая диференциальному уравнению $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ и начальным условиям $y\Big|_{x=0}=0, \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=1$, называется синусом и обозначается $\sin x$.

Функция, удовлетворяющая диференциальному уравнению $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ и начальным условиям $y\Big|_{x=0}=1, \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=0$, называется косинусом и обозначается $\cos x$.

Диференциальные уравнения вообще часто являются средством введения новых функций.

Исходя из этого определения синуса и косинуса, можно вывести все их свойства. Как это сделать — показано, например, в статье Ф. В. Доброхотова „Очерк аналитической теории тригонометрических функций" („Математическое просвещение", вып. 9, М. — Л. 1936).

Определение тригонометрических функций при помощи степенных рядов

Другое возможное определение синуса и косинуса — при помощи степенных рядов. Ряды, выражающие синус и косинус, могут быть выведены из уравнения (1) и могут быть взяты в качестве исходного пункта. Будем искать общее решение уравнения (1) в виде степенного ряда:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\ldots \qquad (*)$$

Диференцируя этот ряд два раза, получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=1\cdot 2a_2+2\cdot 3\cdot a_3x+3\cdot 4\cdot a_4x^2+4\cdot 5\cdot a_5x^3+\ldots$$

Подставляем эти ряды в уравнение (1):

$$1\cdot 2\cdot a_2+2\cdot 3\cdot a_3x+3\cdot 4\cdot a_4x^2+4\cdot 5\cdot a_5x^3+\ldots+a_0+a_1x+$$
$$+a_2x^2+a_3x^3+\ldots=0.$$

Поскольку левая часть должна быть тождественно (при любом x) нулем, то коэфициенты при всех степенях x должны быть нулями. Это приводит к следующей бесконечной системе уравнений

$$\begin{aligned}
&a_0+1\cdot 2\cdot a_2=0,\\
&a_1+2\cdot 3\cdot a_3=0,\\
&a_2+3\cdot 4\cdot a_4=0,\\
&a_3+4\cdot 5\cdot a_5=0,\\
&a_4+5\cdot 6\cdot a_6=0,\\
&a_5+6\cdot 7\cdot a_7=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

В этой системе уравнения с нечетными индексами не связаны с уравнениями с четными индексами (они содержат разные коэфициенты). Решая последовательно уравнения с четными индексами, мы видим, что a_0 придется считать произвольным; а остальные коэфициенты можно выразить через a_0:

$$a_2=-\frac{1}{2!}a_0$$

$$a_4=-\frac{1}{3\cdot 4}a_2=\frac{1}{4!}a_0$$

$$a_6=-\frac{1}{5\cdot 6}a_4=-\frac{1}{6!}a_0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Аналогично, рассматривая уравнения с нечетными индексами, выражаем все входящие в них коэфициенты через a_1, которое остается произвольным:

$$a_3=-\frac{1}{3!}a_1,$$

$$a_5=-\frac{1}{4\cdot 5}a_3=\frac{1}{5!}a_1$$

$$a_7=-\frac{1}{6\cdot 7}a_5=-\frac{1}{7!}a_1$$

Подставляя найденные значения коэфициентов в ряд (*), получим:

$$y=a_0\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)+$$
$$+a_1\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right) \qquad (**)$$

Формула (**) дает формальное общее решение уравнения (1); это решение содержит две произвольные постоянные a_0 и a_1. Для использования начальных условий найдем производную выражения (**):

$$\frac{dy}{dx} = a_0\left(-\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)+$$
$$+a_1\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right) \qquad (***)$$

Для получения синуса подставим в (**) и (***) $x=0$ и приравняем $y|_{x=0}$ нулю, а $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ единице. Получим:

$$0 = a_0$$
$$1 = a_1.$$

Подставляя в формулу (**) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, найдем:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots \qquad (2)$$

Аналогично для определения косинуса положим в формулах (**) и (***) $y|_{x=0}=1$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$. Найдем:

$$1 = a_0$$
$$0 = a_1$$

Теперь формула (**) даст:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \qquad (3)$$

Можно было бы просто написать ряды (2) и (3), не выводя их ниоткуда. Эти ряды сходятся при всех значениях x (что легко доказать, например, пользуясь признаком сходимости д'Аламбера) и, следовательно, определяют некоторые функции x; условимся называть эти функции синусом и косинусом.

Определивши синус и косинус, мы определяем остальные тригонометрические функции так:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}. \qquad (4)$$

Подчеркиваем, что формулы (4) не подлежат доказательству, а являются определениями $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ и $\csc x$.

Все свойства $\sin x$ и $\cos x$ могут быть выведены из рядов (2) и (3); эти ряды таким образом могут служить исходным пунктом для развития всей гониометрии. При таком построении гониометрия будет независима от геометрических построений; все формулы будут выводиться аналитически.

Геометрическое определение тригонометрических функций

Наконец, третье определение тригонометрических функций — геометрическое. Это то определение, которое всегда дается в школьных учебниках. Оно может иметь различные модификации (например, можно определять тригонометрические функции как отношения сторон прямоугольного треугольника или при помощи тригонометрического круга).

Недостатки геометрического определения тригонометрических функций

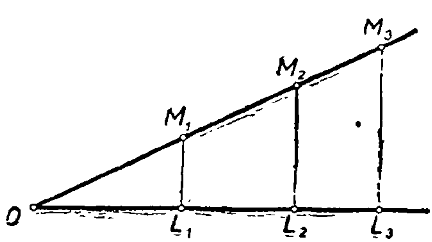
Оставляя пока в стороне методические соображения, зададимся вопросом, являются ли приведенные выше определения равноценными с научной точки зрения?

На этот вопрос следует ответить отрицательно: геометрическое определение хуже.

Первый недостаток геометрического определения тригонометрических функций заключается в том, что свойства этих функций ставятся в зависимость от некоторых положений, имеющих место только в евклидовой геометрии; в действительности же свойства тригонометрических функций вовсе не зависят от того, какой геометрией мы пользуемся. Поясним это примерами.

Пример 1. На одной из сторон угла x возьмем точки M_1, M_2, M_3, ... и опустим из них перпендикуляры M_1L_1, M_2L_2, M_3L_3, ... на другую сторону (черт. 102). Прямоугольные треугольники M_1OL_1, M_2OL_2, M_3OL_3, ... подобны между собой. Поэтому отношение катета, противолежащего углу x, к гипотенузе будет во всех этих треугольниках одно и то же:

$$\frac{L_1M_1}{OM_1}=\frac{L_2M_2}{OM_2}=\frac{L_3M_3}{OM_3}=\dots \qquad (5)$$



Черт. 102.

Мы привели обычное доказательство того, что отношение *противолежащего катета* к гипотенузе не зависит от положения точки M_1 на стороне угла и, следовательно, зависит только от величины угла. На этом факте основано определение синуса. Допустим теперь, что мы изучаем геометрию Лобачевского. В ней подобных треугольников не существует, и пропорции (5) неверны. Значит ли это, что в геометрии Лобачевского нельзя пользоваться понятием синуса? Ученик, воспитанный на учебнике Рыбкина, должен предположить, что в геометрии Лобачевского если и есть синус, то он отличен от евклидова синуса.

Пример 2. Применяя к треугольнику M_1OL_1 теорему Пифагора

$$M_1L_1^2+OL_1^2=OM_1^2$$

и деля обе части этого равенства на OM_1^2, получим

$$\left(\frac{M_1L_1}{OM_1}\right)^2+\left(\frac{OL_1}{OM_1}\right)^2=1$$

или

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1. \qquad (6)$$

Это доказательство основано на теореме Пифагора, каковая не имеет места в неевклидовых геометриях, например, в геометрии Лобачевского. Естественно возникает сомнение, справедлива ли в геометрии Лобачевского формула (6).

Студенты, изучающие математический анализ и пользующиеся при этом тригонометрическими функциями, обычно не знают, зависят ли результаты анализа от выбора той или иной геометрии. Будет ли, например, ряд Фурье для некоторой функции один и тот же при гипотезах Евклида и Лобачевского? Можно ли вычислить интеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ подстановкой $x = \sin t$, *если принимать геометрию* Лобачевского? Последний вопрос не может быть обойден даже тем, что этот интеграл вычисляется и без тригонометрической подстановки. Как известно, этот интеграл равен $\frac{\pi}{4}$. Студент, который знает лишь одно определение π как отношения длины окружности к длине диаметра, естественно должен думать, что с этим числом можно иметь дело только в евклидовой геометрии. В геометрии Лобачевского отношение длины окружности к длине диаметра не является постоянным.

Второй недостаток геометрического определения тригонометрических функций заключается в том, что по этому определению тригонометрические функции являются обязательно функциями угла. Это обстоятельство в *глазах школьника* отличает тригонометрические функции от всех других функций. Школьник смотрит совсем разными глазами на функции $\lg x$ и $\sin x$: он понимает, что́ значит логарифм числа, но не понимает, что́ значит синус числа. Ему внушено, что можно рассматривать только синус угла. Если даже углы измеряются в так называемой отвлеченной мере и рассматривается $\sin 2$, то все-таки под этим символом понимается синус угла, равного двум радианам.

Научная точка зрения на тригонометрические функции

Научная точка зрения на тригонометрические функции заключается в следующем. Синус и косинус суть функции, определяемые рядами (2) и (3) [1]. Аргумент принимает числовые значения. Все свойства этих функций вытекают из формул (2) и (3) и, следовательно, не зависят ни от каких геометрических положений. Во многих формулах фигурирует некоторая константа, обычно обозначаемая буквой π; эта константа может быть определена либо как наименьший положительный корень уравнения $\sin x = 0$, либо как половина периода синуса и множеством других способов. Разумеется, эквивалентность этих определений должна быть доказана Например, можно действовать так: 1) доказать, что уравнение $\sin x = 0$ имеет наименьший положительный корень, 2) обозначить его через π (при этом можно вычислить этот корень с любой степенью точности), 3) доказать, что $\sin x$ является периодической функцией, 4) доказать, что период $\sin x$ равен 2π, где π — число, определенное выше. Во всяком случае число π определяется аналитически и, следовательно,

---

[1]) Можно взять какое-нибудь другое аналитическое определение.

не зависит от того, какой геометрией мы пользуемся и как разрешается вопрос о длине окружности.

Введенные таким образом тригонометрические функции допускают геометрическую интерпретацию в системе евклидовой геометрии (мы имеем в виду их истолкование при помощи тригонометрического круга). Если принять за x отношение длины дуги к радиусу, то отношение линии синуса к радиусу есть как раз та функция от x, какая определена рядом (2). Однако это не определение синуса, а лишь одна из возможных интерпретаций. При этой интерпретации синус является функцией угла. Свойства тригонометрических функций при этой интерпретации получают наглядную геометрическую иллюстрацию, но эти свойства не зависят от того, справедлива ли евклидова геометрия.

Аналитические применения тригонометрии

Переходим к вопросу о применениях тригонометрии. Тригонометрия столь органически вросла в математический анализ, механику, физику и другие дисциплины, что нельзя ставить вопрос о перечислении ее применений. Мы хотим выяснить лишь преобладающий характер этих применений. Мы увидим, что в подавляющем большинстве случаев в этих применениях тригонометрические функции выступают не как функции угла.

В математическом анализе все переменные рассматриваются как отвлеченные величины (наименования приписываются им лишь в задачах прикладного характера). Отказ от этой точки зрения вызвал бы множество затруднений, о которых говорилось в гл. X в связи с принципом однородности (стр. 167—171). Как, например, можно рассматривать функцию $y = x + \sin x$, если x считать углом, а $\sin x$ — отвлеченной величиной?

Укажем ряд примеров, когда рассмотрение тригонометрических функций как функций угла является неудобным. Пусть требуется найти производную синуса. Производная синуса есть следующий предел:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin (x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Как истолковать выражение $\frac{\sin (x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$, если знаменатель рассматривать как угол, а числитель — как отвлеченную величину?

Если бы тригонометрические функции не были введены в элементарной математике, то они возникли бы в задаче об обращении некоторых интегралов, например,

$$y = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}. \qquad (7)$$

Эта задача заключается в том, чтобы из равенства (7) выразить x как функцию от y. Имеем: $x = \sin y$; это может служить определением синуса. Как видим, эта задача не имеет никакого отношения к углам.

Диференциальные уравнения могут приводить к решениям, выражающимся при помощи тригонометрических функций. В вопросах механики аргументом часто является время, и таким образом приходится рассматривать, например, синус времени. Это обычно вызывает затруднения у студентов, привыкших рассматривать тригонометрические функции как функции угла.

Особенно затрудняет студентов рассмотрение необычных комбинаций тригонометрических функций (необычных — в том смысле, что они никогда не встречаются в школьных учебниках). Например, в оптике встречаются так называемые интегралы Френеля:

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Как понимать выражение $\sin(x^2)$, если рассматривать только синус угла? Придется приписать x размерность „квадратный корень из угла".

Резюмируем все сказанное. Точка зрения на тригонометрические функции как на функции угла чрезвычайно неудобна для математического анализа. Правда, во многих случаях можно преодолеть возникающие затруднения путем введения коэфициентов, исправляющих размерность. Например, в уравнении $s = \sin t$ можно ввести коэфициенты:

$$s = a \cdot \sin \omega t,$$

где a имеет размерность „длина", а ω — „угол, деленный на время". Однако ясно, что выделение тригонометрических функций как функций неравноправных со всеми остальными (x^2, e^x, $\ln x$ суть функции произвольного аргумента, а $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ — обязательно функции угла) совершенно нецелесообразно.

Кроме аналитических применений, тригонометрия имеет и геометрическое применение: решение треугольников. Исторически — это первая задача, потребовавшая применения тригонометрии. Задача о решении треугольников возникла в древности в связи с землемерием, астрономией и строительным делом. Этой задаче тригонометрия обязана своим возникновением. Решение треугольников потребовало введения особых функций угла; таким образом и возникли синус, косинус и т. д. [1]) как **функции угла**. Самое название тригонометрии указывает на то, что первоначально ее **единственной** задачей было решение треугольников (τρίγονον — треугольник, μετρέω — измерять; таким образом, слово „тригонометрия" обозначает „измерение треугольников"). Решение треугольников в течение многих веков оставалось единственной задачей тригонометрии. Под влиянием этой задачи сложился школьный курс тригонометрии, для

---

[1]) Эти функции не сразу возникли в том виде, в каком мы употребляем их в настоящее время; мы не вдаемся здесь в подробную историю тригонометрических функций.

которого характерны две особенности: 1) точка зрения на тригонометрические функции как функции угла, 2) приспособление всей теории тригонометрических функций к задаче решения треугольников. Правда, развитие математического анализа и механики оказало некоторое влияние на курс тригонометрии. Например, обобщение понятия об угле (введение отрицательных углов и углов любой величины) не вызвано потребностями решения треугольников. Однако мы покажем дальше, что эти уступки совершенно недостаточны. Решение треугольников все-таки остается основной задачей в школьном курсе тригонометрии; в этом заключается несоответствие школьного курса современной науке.

Можно только удивляться столь прочному и длительному влиянию исторической традиции. Только по традиции школьный курс тригонометрии игнорирует аналитические приложения тригонометрических функций, ставшие в математике первостепенными уже триста лет назад.

Мы дальше вскроем подробнее отмеченное здесь несоответствие и покажем, что оно проникло во все детали курса тригонометрии. Пока отметим, что современный школьный курс тригонометрии, помимо того, что он не соответствует науке (это обстоятельство само по себе еще недостаточно, чтобы осудить школьный курс), не соответствует также тем целям, ради которых тригонометрия преподается в школе. Мы указывали, что эти цели заключаются почти исключительно в обслуживании курса высшей школы и смежных дисциплин. Школьный курс, во-первых, прививает ученикам такую точку зрения на тригонометрические функции, которая является серьезной помехой при изучении анализа. Во-вторых, школьный курс содержит много лишних вопросов, общеобразовательное значение которых почти равно нулю. К ним принадлежат чрезвычайно специальные методы решения треугольников (логарифмически-тригонометрические вычисления, формулы Мольвейде и т. д.). Эти вопросы важны для очень ограниченного круга специальностей (геодезия и астрономия). Из всех выпускников средней школы, которые будут использовать тригонометрию, подавляющее большинство составляют студенты втузов; они будут пользоваться тригонометрией при изучении математического анализа. Геодезисты и астрономы составят ничтожное меньшинство. Несмотря на это, школьный курс тригонометрии построен так, как будто единственной задачей средней школы является подготовка геодезистов и астрономов, причем им дается не только теоретическая подготовка для решения треугольников, но и все вычислительные детали, позволяющие прямо со школьной скамьи приступать к практической деятельности.

Как определять тригонометрические функции в школе

До сих пор мы говорили о недостатках существующего курса тригонометрии. Переходим к положительной части: в чем должна заключаться реформа школьного курса? В этом параграфе мы остановимся на общих вопросах, связанных с содержанием курса; детали, относящиеся к отдельным разделам курса, будут рассмотрены в следующих параграфах

Как было выяснено выше, курс тригонометрии должен дать ученикам сведения о теории тригонометрических функций, рассматриваемых как функции произвольного (не углового) аргумента. Как это сделать?

Здесь мы сталкиваемся с существенной трудностью: в школьном курсе исходить из аналитического определения тригонометрических функций невозможно. Ученики IX класса не знакомы ни с теорией рядов, ни с теорией диференциальных уравнений. Пока никто не предложил аналитической теории тригонометрических функций, пригодной для средней школы, мы должны признать, что единственно возможным в школе определением тригонометрических функций является геометрическое [1]). Таким образом, первое понятие о тригонометрических функциях ученики получат как о функциях угла.

После этого в некотором месте курса дается обобщение понятия о тригонометрических функциях следующим образом. Пусть x — любое действительное число. Рассмотрим угол, содержащий x радианов; синус этого угла будем по определению считать равным синусу числа x. Такое изложение принято в учебнике А. Ф. Берманта и Л. А. Люстерника [2]), где читатель найдет все подробности.

К сожалению, вредные традиции, принятые в преподавании тригонометрии, столь укоренились, что даже авторы учебника, специально написанного с целью реформы курса, не могут полностью от них освободиться, как видно из следующей цитаты.

„Пусть дано число x; что́ понимается под значением, например, $\sin x$? Прежде всего условимся считать (если не сделано никаких специальных оговорок), что число x служит радианной мерой некоторого угла (дуги). Далее мы принимаем значение $\sin x$ равным значению синуса угла в x радианов. Для практического отыскания этого значения нужно или непосредственно произвести подходящие построения и измерения, как описано в гл. I § 12 и в гл. III § 37, или воспользоваться готовой таблицей. И в том и другом случае радианную меру обычно удобнее перевести в градусную, потому что и средства измерения углов (транспортиры) и таблицы обычно рассчитываются на градусную меру.

Пример. $\sin 2{,}7$ равен значению синуса угла в 2,7 радиана $\approx$ $\approx 155^\circ$: $\sin 2{,}7 \approx \sin 155^\circ = \sin 25^\circ \approx 0{,}423$".

Указание относительно перехода в градусную меру чрезвычайно непоследовательно. Тот факт, что „таблицы обычно рассчитываются

---

[1]) Геометрическое определение тоже может быть дано по-разному. Какой вариант избрать — вопрос менее принципиальный; он будет рассмотрен в § 2 (стр. 229—231 и 234).

[2]) А. Ф. Бермант и Л. А. Люстерник, Тригонометрия, М. 1940, гл. IV, § 46.

на градусную меру", не является убедительным аргументом: от самих авторов зависело дать в своем учебнике другую таблицу, в которой сразу *можно было бы найти* $\sin 2{,}7 = 0{,}427$.

Роль радианного измерения углов

Однако сообщить ученикам это определение — *совершенно не достаточно, чтобы привить им правильные взгляды на тригонометрические функции.* Традиционный курс тригонометрии всем своим подбором задач и приложений прививает взгляд на тригонометрические функции как функции угла. Традиция эта столь сильна, что освободиться от нее очень трудно. Учитель, желающий провести реформу курса и ограничивающийся сообщением ученикам вышеприведенного определения, ничего не достигнет. Необходима коренная перестройка курса в следующих направлениях.

Радианное измерение углов находится в школьном курсе в полном пренебрежении.

Во-первых, оно применяется гораздо реже градусного. Необходимо отказаться от этого обыкновения и внедрять мысль, что основной прием измерения углов — радианное измерение, и лишь в редких случаях (только в геометрических приложениях) удобно пользоваться градусным.

Во-вторых, даже в тех случаях, когда радианное измерение углов используется, оно используется нецелесообразно. Мы **з а с т а в л я е м** учеников писать:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

вместо

$$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}.$$

Так как в **э т и х п р и м е р а х** радианное измерение никаких преимуществ перед градусным не имеет, то ученики неизбежно должны — сознательно или бессознательно — прийти к следующим выводам. Существует особый способ измерения углов — радианный. Он не имеет никаких преимуществ перед градусным, но **д л я у п р а ж н е н и я** надо пользоваться то тем, то другим. Учитель иногда заставляет вместо 90° писать $\frac{\pi}{2}$.

В-третьих, сущность радианного измерения углов обычно остается непонятной ученикам вследствие того, что почти во всех задачах употребляется измерение углов в долях π, а не в десятичных дробях. Этот совершенно неестественный прием измерения углов объясняется силой традиции: хотя мы и пользуемся радианным измерением углов, но „естественной" или „круглой" единицей мы все-таки по привычке считаем прямой $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ или развернутый угол (π), а не угол в один радиан. Нам показалось бы диким, если бы в какой-нибудь задаче был задан угол, содержащий $\frac{5}{\pi}$ градусов, а угол в $\frac{\pi}{12}$ радианов не вызывает нашего удивления. Подобная практика приводит к тому, что ученики рассматривают $\frac{\pi}{2}$ как некоторое собственное имя для обозначения прямого угла (вроде обозначения прямого угла буквой d) и не понимают, что $\frac{\pi}{2}$ есть количество радианов в прямом угле. В подтверждение этого утверждения рекомендуем учителю произвести следующий опыт: задать вопрос, сколько радианов в прямом угле. Значительная часть учеников будет решать этот вопрос, деля 90° на 57° (или на $57^\circ 18'$).

Тригонометрические таблицы с радианным измерением углов

Пренебрежение к радианному измерению углов нашло яркое выражение в том факте, что никогда ученикам не даются тригонометрические таблицы, где аргумент измеряется в радианной мере. Таких таблиц нет ни в одном сборнике таблиц, предназначенных для средней школы, да и вообще в русской литературе такие таблицы встречаются чрезвычайно редко [1]). Для того чтобы найти $\sin 2{,}13$, ученик должен перевести 2,13 радиана в градусную меру, а затем обращаться к имеющимся в его распоряжении таблицам.

В-четвертых, пренебрежение к радианному измерению углов часто приводит к неверным графикам тригонометрических функций. Этот вопрос более подробно рассмотрен ниже (стр. 235).

Первое мероприятие, которое должен провести учитель, сочувствующий реформе, — это использование радианного измерения углов в качестве основного (что, разумеется, не исключает градусного измерения в геометрических вопросах). Для этого прежде всего необходимо снабдить учеников соответствующей таблицей и повседневно пользоваться ею. Эта таблица должна иметь, например, такой вид:

---

[1]) Они имеются в следующих книгах:

1. Hütte, Справочная книга для инженеров, М. 1930.

2. С. Р. Брилинг, Математический справочник для студентов, инженеров и техников, М.—Л. 1933.

3. Н. М. Бескин, Курс аналитической геометрии для втузов, ч. I, М.—Л. 1933.

4. И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев, Справочник по математике, М.—Л. 1945.

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
0,00	0,0000	1,0000	0,0000
1	0100	0000	0100
2	0200	0,9998	0200
3	0300	9996	0300
4	0400	9992	0400
5	0500	9988	0500
6	0600	9982	0601
7	0699	9976	0701
8	0799	9968	0802
9	0899	9960	0902
0,10	0998	9950	1003
1	1098	9940	1104
2	1197	9928	1206
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
1,55	0,9998	0,0208	48,0785
6	9999	0108	92,6205
7	1,0000	0008	1225,7656
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞
8	1,0000	— 0,0092	— 108,6422
9	0,9998	0192	— 52,0670
1,60	9996	0292	— 34,2325
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

„Нетрадиционные“ комбинации тригонометрических функций

Второе мероприятие должно заключаться в насыщении курса задачами с „нетрадиционными“ комбинациями тригонометрических функций. Неопределенность этого термина вызывается самим существом дела, так как „традиционные“ комбинации не представляют класса функций, допускающего математическое определение, а выделяются лишь благодаря тому, что составители учебников и задачников, стремясь скрыть от учащихся, что бывают тригонометрические функции не углового аргумента, как будто сговорились ограничить рассматриваемые функции очень однообразными комбинациями. Поясним на нескольких задачах, что мы понимаем под „нетрадиционными“ комбинациями.

Пример 1. Вычислить $\sin \lg 3$.

Решение. $\sin \lg 3 = \sin 0,477 = 0,4951$.

Пример 2. Вычислить $\cos \operatorname{tg} 1$.

Решение. $\cos \operatorname{tg} 1 = \cos 1,557 = 0,0138$.

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{tg}(x^2 - 1) = 1$.

Решение. $x^2-1=\frac{\pi}{4}+n\pi$, $x=\pm\sqrt{\frac{\pi}{4}+1+n\pi}\approx$ $\approx\pm\sqrt{1{,}79+3{,}14n}$. В частности:

$$\text{при } n=0 \quad x=\pm\sqrt{\frac{\pi}{4}+1}\approx\pm\sqrt{1{,}7854}\approx\pm1{,}336,$$

$$\text{„ } n=1 \quad x=\pm\sqrt{\frac{5\pi}{4}+1}\approx\pm\sqrt{4{,}9320}\approx\pm2{,}221,$$

$$\text{„ } n=2 \quad x=\pm\sqrt{\frac{9\pi}{4}+1}\approx\pm\sqrt{8{,}0683}\approx\pm2{,}840$$

и т. д.

Пример 4. Решить уравнение $\sin x^2=\sin x$.

Решение. $\sin x^2-\sin x=0$.

$$2\sin\frac{x^2-x}{2}\cos\frac{x^2+x}{2}=0.$$

Первая возможность:

$$\sin\frac{x^2-x}{2}=0,$$

$$\frac{x^2-x}{2}=n\pi \qquad (n\text{ — целое}),$$

$$x^2-x-2n\pi=0,$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+8n\pi}}{2}.$$

Условие действительности:

$$1+8n\pi>0, \quad n>-\frac{1}{8\pi}>-0{,}04,$$

так как n — целое, то это условие дает, что n — любое **целое неотрицательное** число.

Вторая возможность:

$$\cos\frac{x^2+x}{2}=0,$$

$$\frac{x^2+x}{2}=\frac{\pi}{2}+n\pi=\frac{\pi}{2}(2n+1) \qquad (n\text{ — целое}),$$

$$x^2+x-\pi(2n+1)=0,$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\pi(2n+1)}}{2}.$$

Условие действительности:

$$1+4\pi(2n+1)>0,$$

$$n>-\frac{1}{2}-\frac{1}{8\pi}>-0{,}6,$$

т. е. n — любое **целое неотрицательное** число.

Пример 5. Решить уравнение $\operatorname{tg}\operatorname{ctg}x = \operatorname{ctg}\operatorname{tg}x$.

Решение. $\operatorname{tg}\operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}\operatorname{tg}x = 0$,

$$\frac{\cos(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x)}{\sin\operatorname{tg}x \cdot \cos\operatorname{ctg}x} = 0,$$

$$\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi}{2}(2n+1) \quad (n \text{ — целое}),$$

$$\frac{2}{\sin 2x} = \frac{\pi}{2}(2n+1),$$

$$\sin 2x = \frac{4}{\pi(2n+1)}.$$

Условие действительности:

$$-1 < \frac{4}{\pi(2n+1)} < 1.$$

Этим неравенствам удовлетворяют все целые числа, кроме 0 и -1.

Например, при $n=1$ имеем $\sin 2x = \frac{4}{3\pi} = 0{,}42441$, откуда $2x = 0{,}43831$, $x = 0{,}21916$. По таблицам находим:

$$\operatorname{tg} 0{,}21916 = 0{,}2227;$$

$$\operatorname{ctg} 0{,}21916 = 4{,}4897.$$

Замечая, что сумма последних двух чисел $0{,}2227 + 4{,}4897 = 4{,}7124$, что́ совпадает с приближенным значением $\frac{3\pi}{2}$, убеждаемся без дальнейшей проверки по таблицам, что тангенс одного из этих чисел является котангенсом другого.

Пример 6. Построить графики функций $\frac{\sin x}{x}$, $x\sin x$, $x^2\sin x$ и т. д.

Ограничимся этими примерами, так как в наши задачи не входит давать полный набор упражнений, а пояснить, что́ мы понимаем под „нетрадиционными" комбинациями тригонометрических функций.

Установление правильного соотношения между отдельными разделами курса

Третье мероприятие должно заключаться в изменении удельного веса отдельных разделов курса. Не надо бояться выбросить как ненужный балласт некоторые детали, относящиеся к решению треугольников, и усилить аналитическую сторону тригонометрии. Этот вопрос будет подробно рассмотрен в следующих параграфах.

§ 2. Начало курса тригонометрии

Вопрос о концентрическом построении курса тригонометрии

На самом пороге курса тригонометрии мы сталкиваемся с методическим вопросом, возбуждающим споры. Конкурируют следующие два варианта:

1) Сначала определяются тригонометрические функции острого угла (как отношения сторон прямоугольного треугольника) На этой базе строится небольшой пропедевтический курс тригонометрии. Он содержит формулы, свя-

зывающие функции одного угла (острого) и решение прямоугольных треугольников. Затем проходится второй концентр: тригонометрические функции *любого* угла.

2) Сразу дается обобщение понятия угла и определяются тригонометрические функции *любого* угла, т. е. для определения тригонометрических функций используется не прямоугольный треугольник, а тригонометрический круг.

В пользу первого варианта выдвигаются следующие доводы.

Во-первых, понятие о тригонометрических функциях любого угла содержит значительные трудности. Вопрос о знаках тригонометрических функций в разных четвертях и о ходе изменения этих функций при изменении угла всегда с трудом и не сразу усваивается учениками. Поэтому предлагается сначала пройти первый концентр, где *эти* трудности совершенно отсутствуют, и тем самым облегчить прохождение второго концентра.

Во-вторых, первый концентр представляет собой нечто законченное: тригонометрический аппарат для решения прямоугольных треугольников. Решение прямоугольных треугольников — одно из очень важных применений тригонометрии; оно необходимо всякому человеку. Поэтому первый концентр следует рассматривать не только как пропедевтику, служащую для подготовки к „настоящей" тригонометрии, но и как раздел, имеющий самостоятельное общеобразовательное значение. Наличие этого раздела особенно важно для тех учащихся, которые не оканчивают средней школы.

Мы считаем эти соображения неубедительными и высказываемся в пользу второго варианта по следующим причинам.

1°. Формирование какого-либо понятия в сознании учащихся в высшей степени зависит от того, в каком виде произошло первое знакомство с этим понятием. Первое впечатление является чрезвычайно сильным и обычно сохраняется всю жизнь. Если первое знакомство с синусом произойдет, как с отношением противолежащего катета к гипотенузе, то стереть это представление и заменить его другим нелегко и даже вряд ли возможно. Эта замена будет вызывать психологическое сопротивление учеников, и всю жизнь представление о синусе острого угла будет для них более знакомым и привычным, чем определение синуса из второго концентра. Поскольку представление о синусе острого угла совершенно недостаточно для большинства приложений тригонометрии, лучше сразу дать ученикам то понятие, которое пригодно для дальнейшего.

2°. Концентрическое прохождение не облегчает трудностей, связанных с изучением тригонометрических функций любого угла. Ученику, знакомому с синусом, как с отношением противолежащего катета к гипотенузе, нисколько не легче усвоить вопрос об изменении синуса в различных четвертях, чем ученику, который впервые познакомился с синусом в тригонометрическом круге. Мы полагаем, что концентрическое прохождение даже усиливает эти трудности, так как легче выучиться вновь, чем переучиться.

3°. В курсе математики иногда встречаются трудности, связанные не с тем, что нужно усвоить какие-нибудь сложные доказательства, а с тем, что в какой-нибудь области надо создать абсолютно прочные навыки и ассоциации. Для трудностей этого рода характерно, что они вовсе не являются трудностями понимания, и поэтому их нельзя победить никакими разъяснениями. Самым лучшим примером трудностей этого рода является таблица умножения. Усвоение таблицы умножения — длительный и мучительный процесс, неизбежный для всякого человека. Между тем в таблице умножения нет ничего затруднительного для понимания. Здесь имеется только трудность тренировки: необходимо добиться не того, чтобы ученик понял, что $7 \times 8 = 56$, а того, чтобы ассоциация между 7×8 и 56 стала абсолютно прочной и автоматической. Изучение изменения тригонометрических функций представляет трудность именно такого рода (хотя гораздо меньшую, чем таблица умножения): необходимы абсолютно прочные представления о расположении тригонометрических линий в разных четвертях, об их изменениях и знаках. Трудности подобного рода могут преодолеваться только упорной тренировкой. Эта тренировка рано или поздно все равно необходима, и введение пропедевтического концентра ее только отсрочит, но не уменьшит и не облегчит.

4°. Единственным существенным аргументом в пользу пропедевтического концентра является общеобразовательное значение решения прямоугольных треугольников. Но этот аргумент имеет значение только в том случае, если речь идет о введении элементов тригонометрии в курсе семилетки. Систематический курс тригонометрии начинается в IX классе. Таким образом, вопрос о введении понятия о тригонометрических функциях в VII классе не имеет ничего общего с тем вопросом, который мы здесь обсуждаем. Это — практический программный вопрос, в обсуждение которого мы здесь не входим. Изучение тригонометрических функций в VII классе не является пропедевтикой тригонометрии, а преследует особые цели, и курс тригонометрии в IX классе должен начинаться независимо от этого.

Обобщение понятия угла

В соответствии с изложенной точкой зрения курс тригонометрии должен начинаться с обобщения понятия угла. Угол в тригонометрии рассматривается не как часть плоскости, а как мера вращения. Важно отметить, что берется угол не между двумя прямыми, а между двумя осями (осью называется прямая, на которой указано положительное направление) или, что то же самое, между двумя полупрямыми, выходящими из одной точки. Все эти моменты очень удобно иллюстрируются при помощи тригонометрического круга, где рассматривается угол между подвижным и неподвижным радиусами. Углу приписывается знак, для чего необходимо различать, какая ось является первой и какая второй. Угол между осями a и b (где a — первая ось, а b — вторая) обозначается (a, b). Задание двух осей a и b определяет угол (a, b) не вполне, а лишь с точностью до кратных 360°. В некоторых вопросах различие между этими углами не играет роли (например, $\sin(a, b)$ является величиной вполне определенной, не зависящей от того, какое значение угла (a, b) мы подразумеваем). В других вопросах это играет роль (например, в вопросе о том, на какой угол повернулась стрелка часов или на какой угол закручена пружина); в таких случаях должно указываться, какое из значений угла (a, b) имеется в виду.

Для углов имеет место правило цепи

$$(a, b)+(b, c)=(a, c) \tag{8}$$

и обобщенное правило цепи

$$(a, b)+(b, c)+(c, d)+\ldots+(i, k)+(k, l)=(a, l) \tag{9}$$

Эти правила аналогичны формулам Шаля для направленных отрезков. Правила цепи справедливы независимо от расположения осей, от знаков и величин углов. Поэтому они очень важны в качестве формального аппарата для дальнейшего развития тригонометрии, так как позволяют давать общие (не зависящие от чертежа) доказательства различных формул.

Если углы определены с точностью кратных 360°, то и формулы (8) и (9) справедливы с точностью до кратных 360°.

Является ли радианное измерение углов отвлеченным?

Далее обычно излагается вопрос об измерении углов, вернее — о радианном измерении углов, так как остальные способы известны ученикам из курса геометрии. В этом вопросе обычно допускается путаница, заключающаяся в том, что радианное измерение считают отвлеченным. Необходимо прежде всего, чтобы учитель сам ясно разобрался в этом вопросе.

Никакая величина не может измеряться отвлеченным числом. Всякая величина измеряется в некоторых единицах, причем за единицу принимается определенная величина того же рода: единицей массы служит масса, единицей скорости — скорость, единицей угла — угол. Эта точка зрения очень убедительно изложена в курсе физики О. Д. Хвольсона, и мы настоятельно рекомендуем читателю ознакомиться с соответствующим местом [1]), а здесь ограничимся лишь краткими замечаниями.

Угол не представляет собой исключения. При радианном измерении углов за единицу принимается угол, характеризующийся тем, что длина дуги, на которую он опирается, будучи принят за центральный, равна радиусу; этот угол называется радианом. Бессмысленно утверждать, что какой-нибудь угол равен отвлеченному числу 2, но может быть угол, равный двум радианам.

Иногда говорят, что за меру угла принимается отношение данного угла к радиану. Такая точка зрения вполне возможна, и тогда угол действительно будет характеризоваться отвлеченным числом.

---

[1]) О. Д. Хвольсон, Курс физики, т. I, Л. — М. 1933. Введение, § 9. Особенно см. критику понятия „удельный вес" (стр. 38), вполне аналогичную нашим соображениям о невозможности отвлеченного измерения углов.

Однако такая точка зрения не имеет специального отношения именно к углам. Любую величину можно характеризозать ее отношением к принятой единице; в таком случае массы, площади, силы будут характеризоваться отвлеченными числами. Кроме того, такая точка зрения не имеет никакого специального отношения к радианному измерению углов: можно было бы принять за единицу угол в 1° и характеризовать всякий угол отвлеченным числом, выражающим отношение этого угла к углу в 1°. Другими словами, можно было бы записывать углы в градусах при помощи отвлеченных чисел, опуская значок „градус" (подобно тому, как мы обычно опускаем слово „радиан"). Угол в 45° при таком соглашении выражался бы отвлеченным числом 45. Мы видим, что радианное измерение углов не более отвлеченно, чем измерение углов в любых других единицах или чем вообще измерение любых величин.

Наконец, говорят, что радианная мера угла есть отношение длины дуги к радиусу и поэтому является отвлеченным числом. Отношение длины дуги к радиусу, действительно является отвлеченным числом, но недопустимо утверждать, что угол р а в е н этому отношению. Верно лишь то, что число радианов, заключающихся в угле, равно отношению дуги к радиусу, но из численного равенства не вытекает равенство размерностей.

Все отмеченные противоречия устраняются при следующей точке зрения на радианное измерение углов.

1°. Радиан есть угол, принимаемый за единицу при измерении углов. Например, говорят: $\alpha = 2$ радианам, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ радианов.

2°. При рассмотрении тригонометрических функций любого (не углового) аргумента дается определение, уже́ упоминавшееся выше: синус отвлеченного числа x считается (по определению!) совпадающим с синусом угла в x радианов. Это определение и является поводом для недоразумений, рассмотренных выше. Дадим несколько пояснений.

Использование в этом определении радианной меры углов является только условностью. С таким же успехом можно было бы условиться считать синус отвлеченного числа x совпадающим с синусом угла в x градусов; например, синус числа 2 равнялся бы при таком определении $\sin 2^\circ \approx 0{,}034899$. Если принято синусом отвлеченного числа x считать не синус угла в x градусов, а синус угла в x радианов, то причина этого совсем не в том, что радианное измерение углов отвлеченно, а градусное — нет. Причина этого в том, что общепринятое определение тригонометрических функций отвлеченного аргумента приводит в математическом анализе к более простым формулам, чем всякое иное определение.

В формуле

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

буква x обозначает не угол, а отвлеченное число, потому что $\frac{\pi}{2}$ —

отвлеченное число. Применительно к углам эту формулу следует писать:

$$\sin(90^\circ + x) = \cos x$$

или

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\text{ рад.} + x\right) = \cos x.$$

Последняя запись, впрочем, никогда не употребляется, и с этим приходится мириться, хотя сделанные выше замечания остаются в силе.

Как определять тригонометрические функции при помощи тригонометрического круга

Определение тригонометрических функций угла любой величины почти всегда дается при помощи линий в тригонометрическом круге. Другие точки зрения (например, определение синуса и косинуса при помощи проекций подвижного радиуса на первый и второй диаметры, а остальных функций — как их отношения, без введения специальных линий) не встречают серьезной поддержки у методистов, и мы считаем возможным на них не останавливаться[1]). Введение специальных линий для всех функций создает единообразие в их изучении и придает их свойствам бо́льшую наглядность. Однако сообщить ученикам о проекциях подвижного радиуса на первый и второй диаметры и изложить элементы теории проекций необходимо для того, чтобы дать общий вывод для тригонометрических функций суммы. Этот вопрос будет подробно рассмотрен в § 3.

Пользоваться ли тригонометрическим кругом единичного или произвольного радиуса

Несколько более оживленное обсуждение вызывает вопрос о том, рассматривать ли круг единичного или произвольного радиуса. В пользу единичного круга выдвигают следующий довод. Если $R = 1$, то линия синуса численно совпадает с синусом, в противном случае приходится усложнять дело рассмотрением отношения линии синуса к радиусу.

Это соображение представляется нам совершенно несущественным. Нельзя считать, что для учеников IX и X классов рассмотрение отношения двух отрезков может представлять затруднение. Употребление единичного круга представляет упрощение только в одном случае: когда мы на чертеже графически измеряем тригонометрические функции. В теоретических же вопросах применение единичного круга никаких упрощений не дает. Зато оно имеет существенные недостатки. Во-первых, затемняется важная идея о том, что синус есть отвлеченная величина, а не отрезок, и создается опасность смешения синуса и линии синуса. Во-вторых, нежелательно вводить в определение моменты, не играющие роли для определяемого понятия. Вместо того чтобы привить ученикам мысль, что синус угла не зависит от линейных размеров чертежа, мы связываем определение синуса с чертежом определенных размеров.

Поэтому мы рекомендуем пользоваться кругом произвольного радиуса и определять синус как отношение линии синуса к радиусу.

---

[1]) Они рассмотрены в книге В. В. Репьева, Методика тригонометрии.

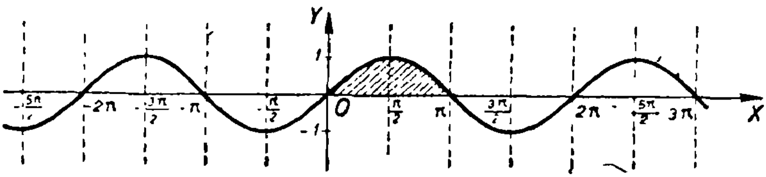
Графики тригонометрических функций

Изучение тригонометрических функций (как и вообще всяких функций) должно сопровождаться построением их графиков. В сознании учеников график должен прочно ассоциироваться с соответствующей функцией. Это придает наглядность свойствам функций и содействует развитию функционального мышления.

Укоренившийся в средней школе взгляд на тригонометрические функции как функции угла в числе многих вредных последствий влечет одну распространенную небрежность при изучении графиков. Если в уравнении

$$y = \sin x$$

рассматривать x как угол, а y — как отвлеченную величину, то вопрос *о выборе* о д и н а к о в о г о м а с ш т а б а *по осям X и Y* не имеет смысла. Ученики часто отмечают на оси X произвольный отрезок, принимаемый за 1° или за 90°, а на оси Y — произвольный отрезок, принимаемый за 1. При таком подходе получится синусоида с произвольным соотношением между вертикальными и горизонтальными размерами. Таким образом, ученики остаются в неведении относительно того, что у синусоиды $y = \sin x$ расстояние между последовательными



Черт. 103. $y = \sin x$.

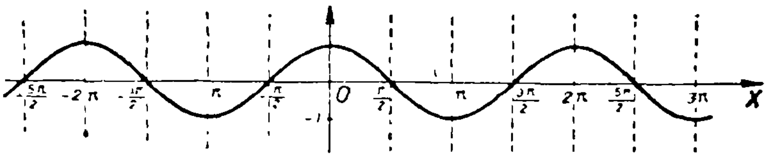
точками пересечения с осью X обязательно в $\pi \approx 3{,}14$ раза больше максимальной высоты, и их глаз не привыкает к правильному виду этой синусоиды. Даже в стабильном учебнике Рыбкина (§ 46) мы читаем: „Вдоль оси OX будем откладывать отрезки, изображающие в произвольном масштабе числовые значения аргумента, а вдоль оси OY — отрезки, изображающие в д р у г о м п р о и з в о л ь н о м м а с ш т а б е (разрядка наша. — *Н. Б.*) числовые значения функции“. Приведенные графики неправильны. Например, для синусоиды, изображенной на черт. 33, отношение $\frac{OA}{R} = 3{,}9$, в то время как оно должно равняться π.

Это обстоятельство постоянно приводит к недоразумениям при изучении высшей математики. Например, вычисляя площадь, заштрихованную на черт. 103, студент пишет:

$$S = \int_0^\pi \sin x \cdot dx = 2$$

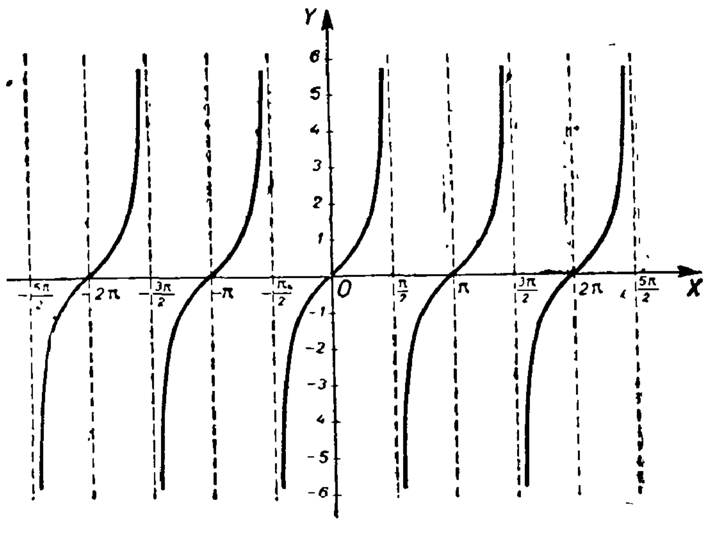
и затем недоумевает, каким именно двум квадратным единицам равна эта площадь и как вообще она может иметь определенную величину, если синусоиду можно произвольно начертить уже или шире.

На чертежах 103—108 даны правильные изображения графиков тригонометрических функций. При их построении следует пользоваться одним из двух способов.



Черт. 104. $y = \cos x$.

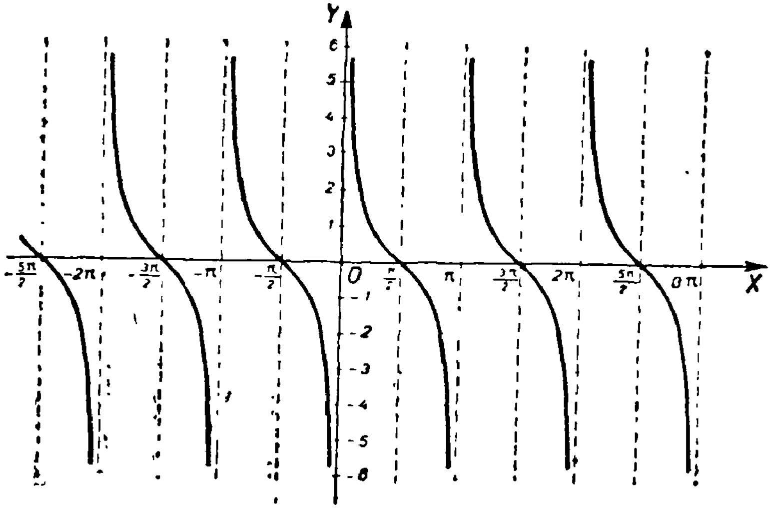
1°. Построить тригонометрический круг. На оси X отложить длину окружности, этот отрезок будет изображать 2π. На оси Y отложить радиус; этот отрезок будет изображать единицу. Затем в круге строятся разные углы, и их линии синусов (или других тригонометрических функций) графически переносятся на чертеж.



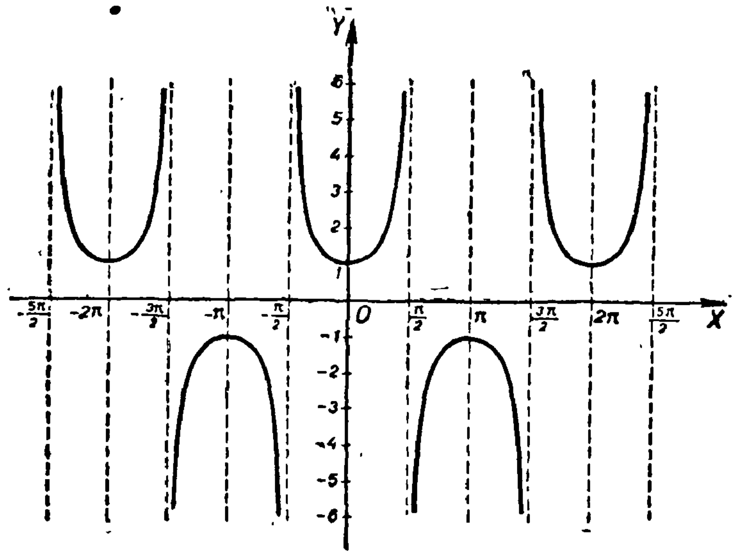
Черт. 105. $y = \operatorname{tg} x$.

2°. На осях X и Y отмечаются одинаковые единицы масштаба. Затем график строится по таблице (обязательно радианной, а не градусной; см. стр. 227).

Полезно ознакомить учащихся с влиянием коэфициента при x. На черт. 109 изображены синусоиды $y = \sin kx$. Весьма просто объясцить влияние коэфициента A в уравнении $y = A \cdot \sin kx$, вызывающего растяжение кривой вдоль оси Y. Изучение графиков чертежа 109



Черт. 106. $y = \operatorname{ctg} x$.



Черт. 107. $y = \sec x$.

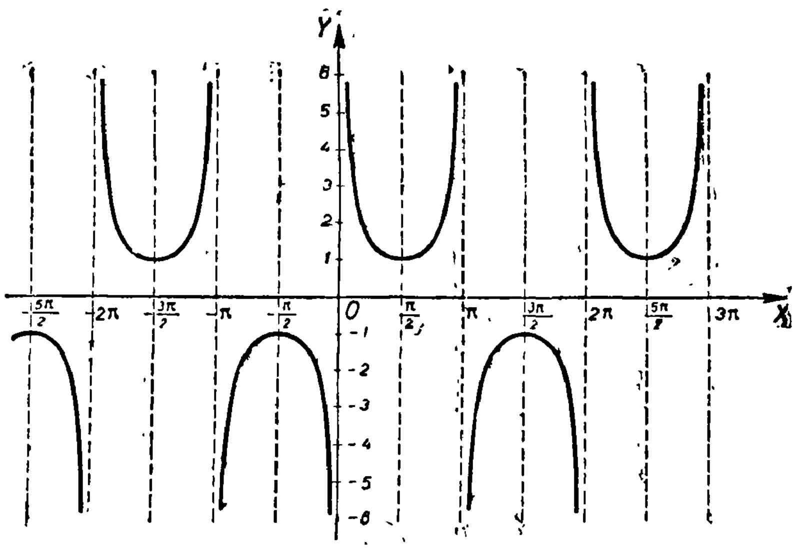
(и аналогичных графиков для других тригонометрических функций) помогает лучшему уяснению вопроса о периодах тригонометрических функций. Весьма важно (для изучения гармонического колебания и для приложений в анализе) познакомить учеников со связью между частотой k и периодом T:

$$T=\frac{2\pi}{k} \text{ (для синуса, косинуса, секанса и косеканса).}$$

$$T=\frac{\pi}{k} \text{ (для тангенса и котангенса).}$$

Мы не настаиваем, чтобы графики тригонометрических функций всегда строились только указанным образом. Нельзя игнорировать следующие два обстоятельства.

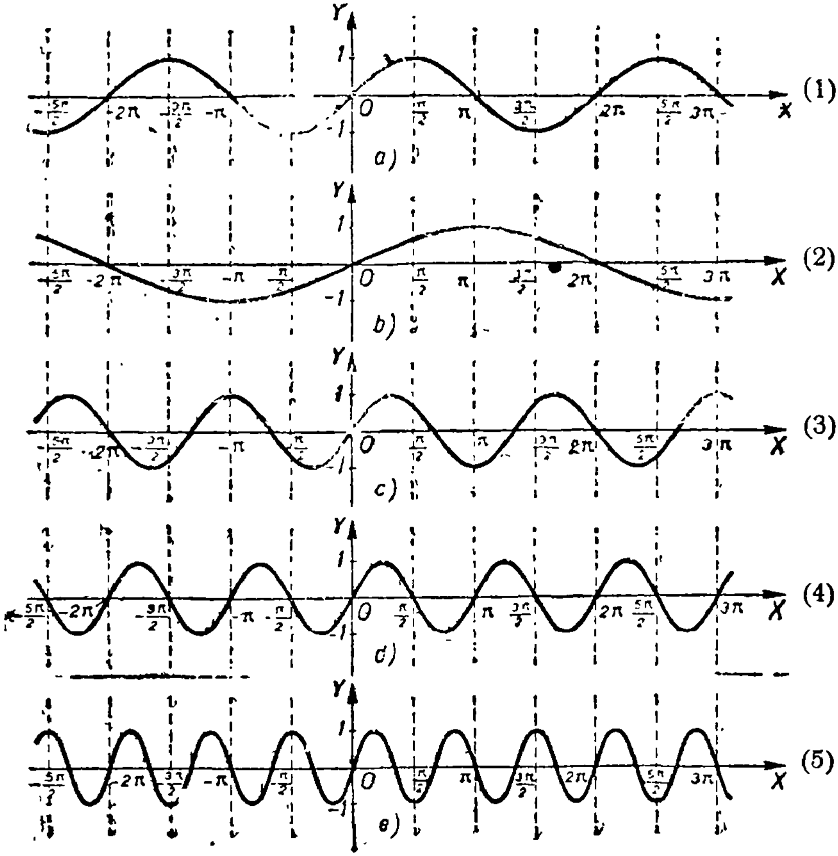
Во-первых, при построении графиков функций можно и иногда даже необходимо пользоваться различными масштабами на осях (иначе как бы мы построили график $y=1\,000\,x$?), и ученикам полезно знать, как влияет изменение масштабов на осях на вид графиков.



Черт. 108. $y=\csc x$.

Однако тригонометрические функции не должны быть в исключительном положении. Если для других функций учитель практикует построение графиков с различными масштабами по осям, то это же следует практиковать и для тригонометрических функций. Во всяком случае вопрос о влиянии масштабов не должен замазываться, и ученики должны знать, что при использовании одинаковых масштабов на обеих осях графики тригонометрических функций должны иметь именно такое соотношение размеров, как на чертежах 103—108.

Во-вторых, мы не исключаем рассмотрения тригонометрических функций как функций угла. В этом случае в уравнении $y=\sin x$ x и y суть величины различной природы, и масштабы по осям x и y устанавливаются независимо один от другого. Такая точка зрения не может быть обойдена на уроках математики, потому что при изучении физики ученики постоянно встречаются с графиками, изображающими зависимости между физическими величинами различной природы. Различие между этими точками зрения и различие между гра-



Черт. 109.

(1) $y=\sin x$, (2) $y=\sin\frac{1}{2}x$, (3) $y=\sin\frac{3}{2}x$, (4) $y=\sin 2x$, (5) $y=\sin 3x$.

фиками $y=\sin x$, построенными этими двумя способами, также не должно замазываться, а должно быть подробно разъяснено.

Формулы приведения

При выводе формул приведения тригонометрических функций к функциям острого угла можно различать следующие стадии.

Первая стадия. Постановка вопроса. Роль формул приведения для построения таблиц (возможность ограничиваться таблицами для значений угла от 0 до 45°). Перечисление случаев, подлежащих рассмотрению. Этих случаев — сорок два, потому что надо рассмотреть следующие углы:

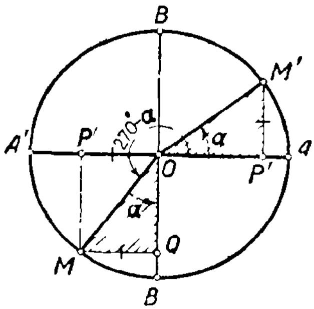
$$-\alpha,\ 90^\circ-\alpha,\ 90^\circ+\alpha,\quad 180^\circ-\alpha,\ 180^\circ+\alpha,\quad 270^\circ-\alpha,\ 270^\circ+\alpha$$

и от каждого из этих углов рассмотреть шесть тригонометрических функций. Под α пока подразумевается острый угол. Углы $360^\circ\pm\alpha$ не рассматриваются, потому что уже известно, что 360° является периодом для всех тригонометрических функций.

Вторая стадия. Каждая из упомянутых сорока двух формул выводится *непосредственно на основании чертежа*. Например, для доказательства формулы:

$$\cos(270^\circ-\alpha)=-\sin\alpha$$

следует обратиться к черт. 110. Несколько первых чертежей можно выполнить на доске или на бумаге, а затем следует требовать, чтобы ученики, выводя формулу, основывались на чертеже, представляемом в уме. Таким образом, вывод формул приведения представляет прекрасное упражнение, содействующее запоминанию расположения тригонометрических линий в разных четвертях.



Черт. 110.

Третья стадия. Когда все формулы приведения выведены, дается правило, охватывающее все эти формулы, а именно:

I. Во всех случаях, где фигурирует горизонтальный радиус, название функции не меняется, а где фигурирует вертикальный радиус, название меняется на кофункцию.

II. Если приводимая функция в рассматриваемой четверти (пока предполагается, что угол α — острый) положительна, то результат берется с плюсом, а если отрицательна, то с минусом.

Например, имея $\cos(270^\circ-\alpha)$, рассуждаем так. Так как 270° соответствует вертикальному радиусу, то косинус заменится синусом. Так как $270^\circ-\alpha$ есть угол третьей четверти, где косинус отрицателен, то результат должен быть с минусом. Таким образом, $\cos(270^\circ-\alpha)=$ $=-\sin\alpha$.

Четвертая стадия. Необходимо доказать, что все выведенные формулы справедливы для любого угла α, а не только для острого. Это доказательство в школе часто опускают. Мы уже неоднократно говорили, что невнимание к принципиальным вопросам недопустимо. Нельзя ограничиваться лишь тем, что необходимо для решения задач, и пренебрегать развитием математического мышления.

Пусть, например, требуется доказать, что формула

$$\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$$

справедлива для любого угла α. Положим для определенности $\alpha > 0$. В таком случае можно представить α в виде

$$\alpha = 90^\circ \cdot n + \beta,$$

где n — целое неотрицательное число и β — острый угол. Достаточно рассмотреть случай $n = 1, 2, 3$, так как при $n = 0$ угол α — острый, а при $n > 3$ можно отбросить от $90^\circ \cdot n$ целые обороты. Имеем

при $n = 1$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = \cos(180^\circ + \beta) = -\cos\beta,$$

$$-\sin\alpha = -\sin(90^\circ + \beta) = -\cos\beta;$$

при $n = 2$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = \cos(270^\circ + \beta) = \sin\beta,$$

$$-\sin\alpha = -\sin(180^\circ + \beta) = \sin\beta,$$

при $n = 3$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = \cos(360^\circ + \beta) = \cos\beta,$$

$$-\sin\alpha = -\sin(270^\circ + \beta) = \cos\beta.$$

Таким образом, во всех случаях $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$

Формулы приведения полезно иллюстрировать графиками тригонометрических функций[1]). Например, рассматривая чертежи 103 и 104, мы видим, что график $\sin x$, сдвинутый влево на $\frac{\pi}{2}$, даст график $\cos x$. Следовательно,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x.$$

Если же график $\cos x$ сдвинуть влево на $\frac{\pi}{2}$, то получится кривая, являющаяся зеркальным отражением в оси X графика $\sin x$. Следовательно,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x.$$

Необходимо при этом понимать, что рассмотрение графиков может служить иллюстрацией, но не доказательством формул приведения, так как только на основании этих формул можно утверждать, что косинусоида — это сдвинутая синусоида.

---

[1] Методическая техника этого вопроса изложена в статье И. Польского „Иллюстрация формул приведения тригонометрии при помощи синусоиды и косинусоиды" („Математика в школе", 1937, № 2). Автор рассматривает только формулы для синуса и косинуса; для остальных функций рассуждения аналогичны. Приведенные в статье чертежи имеют обычный недостаток (неправильное соотношение горизонтальных и вертикальных масштабов), что, впрочем, в данном вопросе не имеет значения.

§ 3. Формулы сложения и следствия из них

Элементы теории проекций

Мы уже говорили, что в начале курса тригонометрии должны быть даны некоторые сведения о проекциях. Эти сведения используются при выводе формул сложения. Обычно употребляемый в школе вывод формул сложения является неудовлетворительным. Он основан на рассмотрении чертежа для случая

$$0<\alpha<90^\circ,\ 0<\beta<90^\circ,\ 0<\alpha+\beta<90^\circ.$$

Затем требуется доказать, что выведенные формулы справедливы независимо от этих условий. Это доказательство требует рассмотрения разных комбинаций. В школе оно часто опускается, что совершенно недопустимо, так как применение каких-либо теорем вне условий, при которых они выведены, приучает к логической неряшливости. Теория проекций позволяет сразу дать общий вывод формул сложения, не связанный с определенным чертежом.

Возможно, что проходить теорию проекции только для вывода формул сложения не стоило бы. Однако теория проекций вообще весьма важна и часто используется в аналитической геометрии, механике, векторном исчислении. Поэтому целесообразно использовать подходящий случай для ознакомления учеников с элементами этой теории.

Не вдаваясь в подробное изложение, которое читатель может найти, например, в книге Э. Бореля „Тригонометрия" (Москва, 1909), гл. III, §§ 38—44, или в уже упоминавшейся книге А. Ф. Берманта и Л. А. Люстерника, § 34, перечислим основные положения, с которыми следует ознакомить учеников.

1. Ось (прямая, на которой различаются положительное и отрицательное направления). Первый и второй диаметры и первая и вторая касательные рассматриваются как оси.

2. Направленный отрезок. Линии синуса, косинуса и т. д. рассматриваются как направленные отрезки.

3. Понятие о векторе. Понятие о проекции вектора на ось. Подвижной радиус рассматривается как вектор.

4. Угол между осями или вектором и осью. Теорема: проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженной на косинус его угла с осью.

5. Теорема: проекция направленного отрезка на ось равна этому отрезку [1]), умноженному на косинус угла между осями (т. е. между осью, на которой расположен проектируемый направленный отрезок, и осью проекций).

6. Проекция ломаной линии на ось. Звенья ломаной рассматриваются как направленные отрезки. Проекция ломаной на ось равна

[1]) В предыдущей теореме фигурировала „длина вектора", т. е. величина существенно положительная. Здесь же речь идет о самом направленном отрезке, который выражается относительным числом.

проекции на ту же ось ее замыкающего вектора, т. е. вектора, идущего из начала ломаной в ее конец.

7. Выше уже говорилось о правиле цепи для углов. Из этого правила, между прочим, следует

$$(OA,\ l)+(l,\ OB)=90^\circ,$$

где l — любая ось, OA — неподвижный радиус, а OB — радиус, служащий границей между первой и второй четвертью.

Вывод формул сложения

Самый вывод формул сложения заключается в следующем. Пусть OM и OM_1 — два подвижные радиуса, причем.

$$\widehat{AOM}=\alpha,\quad \widehat{MOM_1}=\beta,\quad \widehat{AOM_1}=\alpha+\beta.$$

Для угла β первым (неподвижным) радиусом служит OM, а вторым радиусом ON, где N — точка на окружности, определяемая равенством: $MN=+90^\circ$. Мы не сопровождаем вывода чертежом. Учитель тоже может не делать чертежа на доске, а предложить ученикам взять углы α и β любой величины. Все ученики, имея у себя в тетрадях различные чертежи (углы в разных четвертях), могут одновременно следить за словесным объяснением учителя, и это подчеркивает общность вывода, т. е. его независимость от определенного расположения углов на чертеже.

Пусть P_1 есть проекция точки M_1 на OM (разумеется, точка P_1 может оказаться и на продолжении OM в отрицательную сторону). Вектор $\overline{OM_1}$ служит замыкающим вектором для ломаной линии OP_1M_1. Спроектируем ломаную OP_1M_1 на первый диаметр и запишем (на основании положения 6), что ее проекция равна проекции вектора $\overline{OM_1}$ на тот же диаметр:

$$\text{пр } OP_1M_1=\text{пр } \overline{OM_1}$$

или

$$\text{пр } OP_1+\text{пр } P_1M_1=\text{пр } \overline{OM_1}. \qquad (*)$$

Для выражения отдельных членов равенства (*) заметим, что OP_1 и P_1M_1 суть соответственно линии косинуса и синуса угла β, т. е.

$$OP_1=R\cos\beta,$$
$$P_1M_1=R\sin\beta.$$

Далее заметим, что OP_1 есть направленный отрезок, принадлежащий оси, идущей из O в M и образующей с первым диаметром угол α, а P_1M_1 есть направленный отрезок, принадлежащий оси, идущей из O в N (то обстоятельство, что P_1M_1 не лежит на этой оси, а параллелен ей, не играет никакой роли) и образующей с первым диаметром угол $90^\circ+\alpha$. В самом деле, согласно правилу цепи:

$$(\widehat{OA,\ ON})=(\widehat{OA,\ OM})+(\widehat{OM,\ ON})=\alpha+90^\circ.$$

Теперь ясно, что равенство (*) можно переписать так:

$$R\cos\beta\cos\alpha + R\sin\beta\cos(90^\circ+\alpha) = R\cos(\alpha+\beta)$$

или, после очевидных упрощений,

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \qquad (10)$$

Для вывода формулы для синуса суммы можно проектировать те же элементы не на первый, а на второй диаметр. Согласно положению 7, углы любой оси с первым и вторым диаметром дополняют друг друга до 90°. При этом мы не делаем различия между углом (l, OA) или (OA, l), так как при проектировании мы рассматриваем только косинусы этих углов, а $\cos(-x) = \cos x$. Таким образом, ось OM образует со вторым диаметром угол $90^\circ - \alpha$, а ось ON — угол $90^\circ - (90^\circ + \alpha) = -\alpha$. Вектор $\overline{OM_1}$ образует со вторым диаметром угол $90^\circ - (\alpha+\beta)$. Равенство (*), если его члены рассматривать как проекции на второй диаметр, примет вид:

$$R\cos\beta\cdot\cos(90^\circ-\alpha) + R\sin\beta\cdot\cos(-\alpha) = R\cos[90^\circ-(\alpha+\beta)]$$

или, после очевидных упрощений,

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \qquad (11)$$

Формулу (11) можно получить и без чертежа. Для этого достаточно в формуле (10) заменить α на $90^\circ + \alpha$.

$$\cos(90^\circ+\alpha+\beta) = \cos(90^\circ+\alpha)\cos\beta - \sin(90^\circ+\alpha)\sin\beta,$$

и после упрощений получится формула (11).

Формулы для косинуса и синуса разности получаются из формул (10) и (11) заменой β на $-\beta$, а формулы для тангенса суммы или разности — делением соответствующих формул для синуса и косинуса.

Преобразование сумм в произведения и обратно

Из формул сложения вытекает ряд следствий, и прежде всего — преобразование сумм в произведения и обратно. В средней школе чрезмерно увлекаются приведением тригонометрических выражений к логарифмическому виду, совершенно упуская из виду обратную задачу — преобразование произведения в сумму. Естественно задать вопрос: почему полагается ответ в любой тригонометрически-геометрической задаче приводить к логарифмическому виду? Причина такого обычая заключается в том, что предполагается, что ответ обязательно будет вычисляться при помощи логарифмов. Но на это следует сделать два возражения:

1. В настоящее время, благодаря распространению разнообразных таблиц и механических средств вычисления, значение логарифмов для вычислений гораздо меньше, чем несколько десятков лет назад. Предположение, что всякое вычисление должно производиться при помощи логарифмов, является анахронизмом. К тому же учителя увлекаются приведением к логарифмическому виду, превращая его

в самоцель. Например, если в какой-нибудь задаче получился ответ

$$x = \sin 43°15' + \sin 25°45',$$

то обязательно требуют представления его в виде

$$x = 2 \sin 24°30' \cos 17°30',$$

хотя гораздо проще вычислить первое выражение по натуральным тригонометрическим таблицам, чем логарифмировать второе выражение и затем находить значение по его логарифму.

2. Тригонометрические выражения используются не только для вычислений. Всякое математическое тождество может иметь различное употребление. В одних вопросах полезно преобразовать сумму тригонометрических функций в произведение, а в других — наоборот. Поэтому необходимо приучать учеников к преобразованиям в обоих направлениях.

Основными формулами для преобразования произведений в сумму являются следующие:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha \cdot \cos\beta &= \frac{1}{2}\Big[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\Big], \\ \sin\alpha \cdot \sin\beta &= \frac{1}{2}\Big[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\Big], \\ \sin\alpha \cdot \cos\beta &= \frac{1}{2}\Big[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\Big]. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Например, при вычислении интеграла $\int \sin x \cdot \sin 3x \cdot dx$ следует поступать так:

$$\int \sin x \cdot \sin 3x \cdot dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 4x)\,dx = \\ = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C.$$

При решении же тригонометрического уравнения $\sin 5x - \sin x = 0$, наоборот, следует преобразовать разность в произведение.

Формулы (12) при $\beta = \alpha$ принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\alpha &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \\ \sin^2\alpha &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \\ \sin\alpha \cdot \cos\alpha &= \frac{1}{2}\sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Связь между кратностью аргумента и степенью синуса и косинуса

Рассматривая различные формулы, где фигурируют кратные аргументы, можно сделать весьма важное наблюдение: повышение кратности аргумента приводит к понижению степени синуса и косинуса и наоборот. Например, в формулах

$$\left.\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha,\\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\\ \sin 3\alpha &= 3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,\\ \cos 3\alpha &= 4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

синус и косинус двойного аргумента выражаются через синус и косинус простого аргумента выражениями второй степени, тройного — третьей степени и т. д. Наоборот, в формулах

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\alpha &= \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),\\ \cos^2\alpha &= \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),\\ \sin^3\alpha &= \frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha),\\ \cos^3\alpha &= \frac{1}{4}(\cos 3\alpha+3\cos\alpha)\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

вторая и третья степени синуса и косинуса выражаются через синусы и косинусы первой степени, но зато — соответственно двойного и тройного аргумента.

Эта идея имеет применение в различных выкладках. К сожалению, в школе подчеркивается только одна сторона дела (формулы для кратных аргументов) и оставляется без внимания другая.

Роль комплексных чисел в тригонометрии

Все рассмотренные выше типы формул проще всего получаются применением комплексных чисел и особенно формул Моавра и Эйлера. Комплексные числа и формула Моавра входят в программу средней школы, и, следовательно, надо учить пользоваться ими там, где это целесообразно. Для многих учеников комплексные числа являются мертвым грузом вместо того, чтобы служить полезным инструментом.

В этой книге мы не можем вдаваться в подробности использования комплексных чисел в тригонометрии и отсылаем читателя к соответствующим учебникам[1]).

---

[1]) П. К. Шмулевич, Курс прямолинейной тригонометрии (Энциклопедия тригонометрии), СПБ 1907.

А. Ф. Бермант и Л. А. Люстерник, Тригонометрия, М. 1940.

§ 4. Обратные тригонометрические функции

Определение обратных тригонометрических функций

Обычное изложение теории обратных тригонометрических функций в курсе тригонометрии имеет тот недостаток, что в нем отодвигается на второй план вопрос об однозначности или многозначности этих функций, который является важнейшим для математического анализа. Ученики часто рассуждают об арксинусе, не думая о том, в каком смысле он понимается в данной задаче. Вследствие этого часто доказываются различные тождества, относящиеся к обратным тригонометрическим функциям, без исследования условий, при которых эти тождества справедливы.

Изучение обратных тригонометрических функций, разумеется, должно начинаться с их определения. Мы пишем:

$$y = \mathrm{Arc}\sin x, \tag{16}$$

если

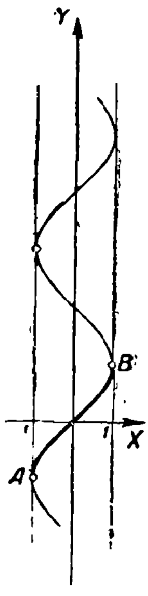
$$\sin y = x. \tag{17}$$

Таким образом, равенство (16) по определению равносильно равенству (17). Обозначение $\mathrm{Arc}\sin x$, читающееся „дуга, синус которой равен x“, сохраняется по традиции, хотя лучше было бы говорить „число, синус которого равен x“.

Равенство (17) определяет бесконечное множество значений y. Таким образом, согласно определению, символ $\mathrm{Arc}\sin x$ не однозначен, а имеет бесконечное множество значений. Аналогично определяются другие обратные тригонометрические функции. Например:

$$\mathrm{Arc}\sin\frac{1}{2} = \pi n + (-1)^n\frac{\pi}{6},$$

$$\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\,0 = \pi n.$$

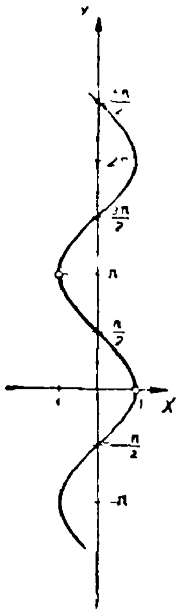


Черт. 111. $y = \mathrm{Arc}\sin x$ (жирная дуга — главное значение).

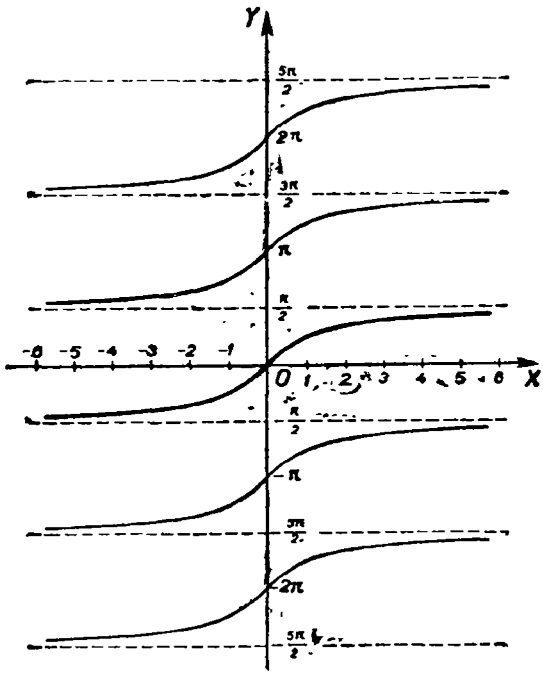
Графики обратных тригонометрических функций

Полезно построить графики обратных тригонометрических функций. Мы уже построили график $y = \sin x$ (черт. 103). Уравнение (17) или равносильное ему уравнение (16) получится из уравнения $y = \sin x$ перестановкой букв x и y. Следовательно, график $y = \mathrm{Arc}\sin x$ есть та же кривая, что и график $y = \sin x$, но с переменой ролей координатных осей. Эта перемена ролей может быть осуществлена переворачиванием чертежа (кроме координатных осей, которые остаются на месте) вокруг биссектрисы координатного угла I и III четвертей. График $y = \mathrm{Arc}\sin x$ изображен на черт. 111.

Все эти рассуждения не связаны со специфическими свойствами $\mathrm{arc}\sin x$, но имеют общий характер, относящийся ко всем обратным функциям. Если $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ суть две взаимно обратные функции, то их графики симметричны относительно биссектрисы $y=x$ [1]). Учитель, исходя из уровня математического развития класса, может дать либо общее понятие об обратных функциях и их графиках, либо ограничиться рассмотрением обратных тригонометрических функций.



Черт. 112. $y=\mathrm{Arc}\cos\, x$ (жирная дуга — главное значение).

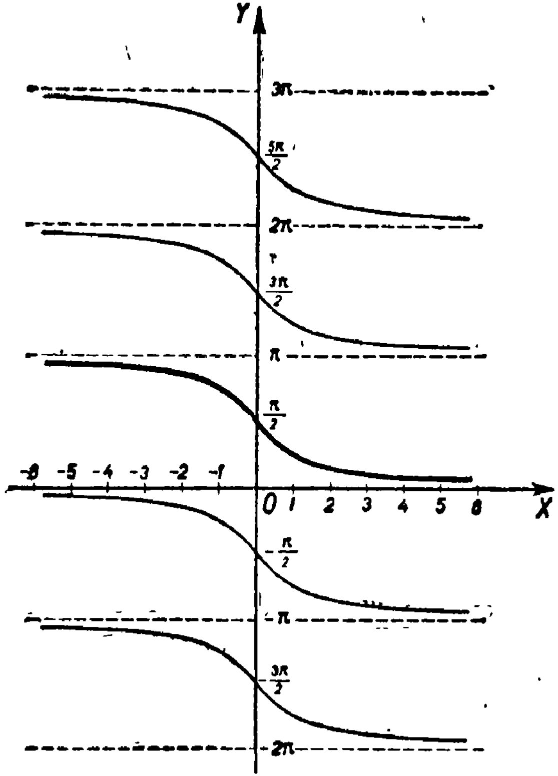


Черт. 113. $y=\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\, x$ (жирная ветвь — главное значение).

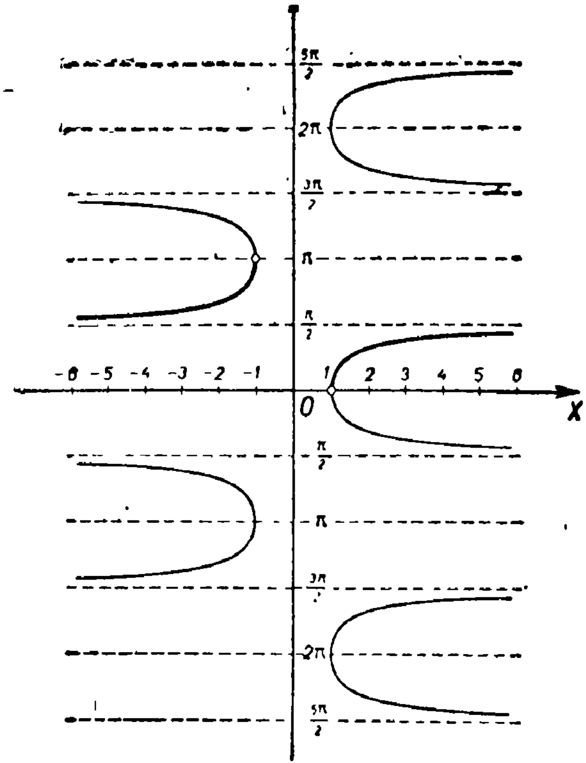
Аналогичным методом получаются графики остальных обратных тригонометрических функций. Эти графики изображены на чертежах 112—116.

Главные значения обратных тригонометрических функций Графики обратных тригонометрических функций позволяют весьма наглядно изложить вопрос о главных значениях этих функций. Вопрос заключается в том, чтобы определить арксинус как однозначную непрерывную функцию для всех значений x, заключенных между -1 и $+1$. График однозначной функции характеризуется тем, что всякий перпендикуляр к оси x

[1]) Подробности о графиках обратных функций см. в книге: Н. М. Бескин, Курс аналитической геометрии для втузов, ч. I, М. — Л. 1933, гл. VII, § 5, стр. 395.



Черт. 114. $y = \mathrm{Arc\,ctg}\ x$
(жирная ветвь—главное значение).



Черт. 115. $y = \mathrm{Arc\,sec}\ x$
(жирная часть — главное значение).

пересекает этот график один раз[1]). Поэтому, желая определить арксинус как однозначную функцию, мы должны выделить из графика $y = \mathrm{Arc}\sin x$ максимально „широкую“ дугу (т. е. такую дугу, проекция которой на ось X покрывает всю область существования функции), пересекающую всякий перпендикуляр к оси X один раз. Такой дугой является, например, дуга AB, изображенная жирной линией на черт. 111. Эта дуга определяет однозначную функцию, которая называется **главным значением** арксинуса и обозначается так:

$$y = \arc\sin x. \tag{18}$$

Как видно из черт. 111, $\arcsin x$ характеризуется неравенствами:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{19}$$

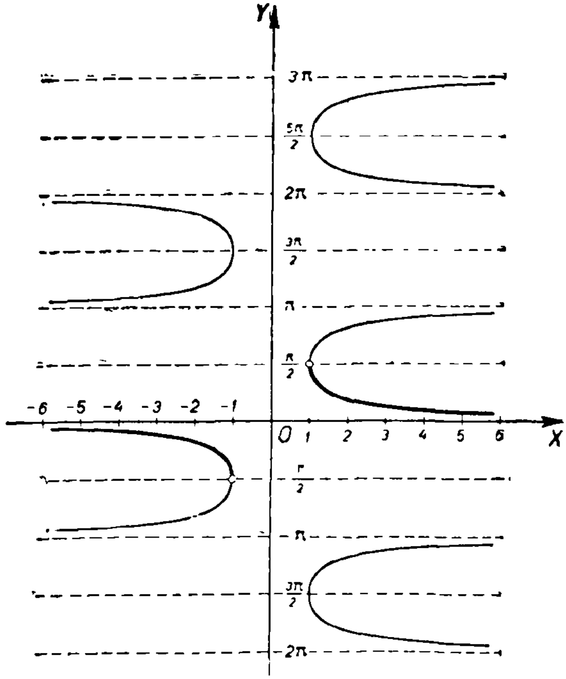
Итак, главным значением арксинуса x называется число (или угол), синус которого равен x и которое заключено между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ (или между $-90°$ и $90°$). Например,

$$\arcsin \frac{1}{2} = 30°,$$

$$\arcsin(-1) = -90° \text{ (но не } 270°).$$

Очевидно,

$$\mathrm{Arc}\sin x = \pi n + (-1)^n \arcsin x. \tag{20}$$



Черт. 116. $y = \mathrm{Arc}\csc x$ (жирная часть — главное значение).

Аналогичные рассуждения можно провести и для других обратных тригонометрических функций. На каждом из чертежей 112—116 изображена жирной линией дуга, соответствующая главному значению рассматриваемой функ-

[1]) Разумеется, если он восставлен из точки, принадлежащей области существования функции. В противном случае он вовсе не пересечет кривую.

ции. Аналитически эти главные значения характеризуются следующими неравенствами:

$$0 \leqslant \operatorname{arc}\cos x \leqslant \pi,$$
$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc}\operatorname{tg} x < \frac{\pi}{2},$$
$$0 < \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x < \pi,$$
$$0 \leqslant \operatorname{arc}\sec x \leqslant \pi,$$
$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arc}\csc x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Выбор главных значений можно объяснить и не прибегая к графикам, хотя это будет менее наглядно. Начнем с арккосинуса x. Мы хотим определить

$$y = \operatorname{arc}\cos x$$

как однозначную функцию. Для этого надо ограничить выбор y некоторыми четвертями. При этом, во-первых, нельзя брать две четверти, в которых косинус принимает одинаковые значения. Например, если условиться выбирать y во второй и третьей четверти, т. е. от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, то, например, $\operatorname{arc}\cos\left(-\frac{1}{2}\right)$ будет иметь два значения: $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$. Во-вторых, надо взять такие четверти, чтобы в них косинус принимал все возможные значения. Например, если условиться выбирать y только в первой четверти, т. е. от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{arc}\cos\left(-\frac{1}{2}\right)$ вообще не будет иметь смысла. Условие

$$0 \leqslant \operatorname{arc}\cos x \leqslant \pi$$

является пригодным потому, что в первой и второй четвертях косинус принимает все возможные значения и притом каждое — по одному разу.

Для $\operatorname{arc}\sin x$ такое условие непригодно, потому что в первой и второй четвертях синус каждое положительное значение принимает два раза, а отрицательное — ни одного. Таким образом, условие $0 \leqslant \operatorname{arc}\sin x \leqslant \pi$ привело бы к тому, что при $x > 0$ $\operatorname{arc}\sin x$ был бы двузначен, а при $x < 0$ не имел бы смысла. Поэтому главное значение арксинуса ищут в минус первой (это — не то же самое, что четвертая) и первой четвертях.

Формальные свойства обратных тригонометрических функций

Мы дали здесь очень краткий очерк тех сведений, которые необходимо излагать в школе, чтобы ознакомить учеников с идеями, важными для математического анализа, а не превращать этот раздел лишь в повод для тренировки в формальных выкладках (к тому же иногда небрежно проводимых). Дело учителя — развить все эти вопросы значительно подробнее. Переходим теперь к рассмотрению формальных свойств обратных тригонометрических функций, приводимых обычно в учебниках и задачниках.

Важнейшими являются следующие свойства:

$$\left.\begin{aligned}&\sin(\operatorname{arc}\sin x)=x,\\&\operatorname{arc}\sin(\sin x)=x+(-1)^n\pi n,\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

где n — вполне определенное целое число, удовлетворяющее неравенствам

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant x+(-1)^n\pi n\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Аналогичные формулы имеют место и для других функций. Часто используются тождества

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{arc}\sin x+\operatorname{arc}\cos x&=\frac{\pi}{2},\\\operatorname{arc}\operatorname{tg} x+\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x&=\frac{\pi}{2},\\\operatorname{arc}\sec x+\operatorname{arc}\csc x&=\frac{\pi}{2},\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

справедливые для всех значений x, принадлежащих к области существования соответствующих функций. У Рыбкина этих тождеств нет ни в учебнике, ни в задачнике.

Тождество

$$\operatorname{arc}\sin x=\operatorname{arc}\cos\sqrt{1-x^2}$$

справедливо при $0\leqslant x\leqslant 1$, а при $-1\leqslant x<0$ имеем

$$\operatorname{arc}\sin x=-\operatorname{arc}\cos\sqrt{1-x^2}.$$

Вообще полезно выражать любую из обратных тригонометрических функций при помощи других, например:

$$\operatorname{arc}\sin x=\operatorname{arc}\cos\sqrt{1-x^2}=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arc}\operatorname{ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=$$

$$=\operatorname{arc}\sec\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arc}\csc\frac{1}{x}$$

и исследовать, при каких условиях справедливы эти тождества.

Интересной задачей является исследование выражения

$$\cos(n\cdot\operatorname{arc}\cos x).$$

Придавая n значения 1, 2, 3, 4, ..., найдем

$$\begin{aligned}&\cos(\operatorname{arc}\cos x)=x,\\&\cos(2\operatorname{arc}\cos x)=2x^2-1,\\&\cos(3\operatorname{arc}\cos x)=4x^3-3x,\\&\cos(4\operatorname{arc}\cos x)=8x^4-8x^2+1,\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Более трудной задачей, впрочем доступной для сильных учеников, является доказательство того, что $\cos(n\cdot\operatorname{arc}\cos x)$ при любом x

является многочленом от x. Эти многочлены, называемые полиномами Чебышева, играют важную роль во многих областях чистой и прикладной математики.

Рассматривая учебник и задачник Рыбкина, мы находим, что в учебнике обратным круговым функциям уделено очень мало места (около 3 страниц). Этот отдел можно значительно расширить за счет решения треугольников. В задачнике непропорционально мало задач на общие свойства обратных круговых функций (этих задач почти совсем нет) по сравнению с числовыми примерами.

§ 5. Решение треугольников

Что́ следует проходить о решении треугольников

В этом параграфе речь будет идти главным образом о том, чего не следует проходить в разделе о решении треугольников. Подавляющему большинству учеников никогда не придется сталкиваться с численным решением косоугольных треугольников. Однако тот факт, что можно вычислить все элементы треугольника, если известны три его независимые элемента, чрезвычайно важен. На этом факте должно быть сосредоточено главное внимание, а вычислительная техника, ненормально разросшаяся, должна быть сокращена до разумных размеров.

Если рассматривать основные элементы треугольника, т. е. стороны и углы, то независимых соотношений между ними должно быть три. Таковыми являются:

$$A+B+C=180^\circ, \tag{24}$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}. \tag{25}$$

Из этих соотношений выводится теорема косинусов[1]):

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A. \tag{26}$$

Формулы (24) и (25) и вытекающая из них формула (26) не только теоретически достаточны для решения треугольников, но и практически достаточно удобны. Мы полагаем, что это — все, что́ должны знать ученики для решения треугольников. В самом деле, очевидно, могут быть пять основных случаев решения треугольников, а именно (перечисляем данные элементы):

1) A, B, c,
2) A, B, a,
3) a, b, C,
4) a, b, A,
5) a, b, c.

Легко убедиться, что в каждом из этих пяти случаев треугольник весьма просто решается по приведенным формулам.

---

[1]) Учебник Рыбкина, § 105.

Чего не следует проходить о решении треугольников

Зачем же давать еще формулы Мольвейде и формулы для тангенса половины угла треугольника? Эти формулы иногда дают некоторую экономию времени при вычислениях, но еще большую экономию дает пользование арифмометром и натуральными таблицами. Если еще учесть, что большинству людей, применяющих математику, никогда не приходится иметь дело с численным решением косоугольных треугольников, то станет понятным, что эти формулы и вообще логарифмически-тригонометрические вычисления не имеют никакого общеобразовательного значения. Мы считаем недопустимым проходить эти вещи в средней школе (а тем более тратить на них много времени), потому что в элементарной математике есть несравненно более важные и идейные вопросы, оставшиеся за бортом школьного курса. Нельзя оправдать то положение, что решение треугольников проходится так подробно, в то время как комплексным числам уделяется ничтожно малое внимание, а способы вычисления тригонометрических функций не проходятся вовсе.

Кроме того, и в области вычислений есть очень важные и общеобразовательные вещи, которые не проходятся в школе (например, логарифмическая линейка или элементы теории приближенных вычислений). Ученики тщательно тренируются в вычислениях по логарифмическим и логарифмически-тригонометрическим таблицам и в то же время не имеют понятия о том, как судить о степени точности вычислений. Это обстоятельство делает непригодными для практики все те сведения о решении треугольников, которые входят в школьный курс.

Поясним это примером. Пусть требуется решить треугольник по данным: $a = 15{,}37$, $b = 21{,}42$, $c = 13{,}83$. В учебнике Рыбкина, откуда заимствован этот пример, для угла A дан ответ: $A = 45°42'$. При этом автор не обращает внимания на то, что указанные данные не позволяют вычислить угол A с точностью до минуты. Если даже допустить, что данные числа (которые, разумеется, надо считать приближенными) содержат ошибки не более $\frac{1}{2} \cdot 0{,}01$, то запись $a = 15{,}37$ обозначает следующее:

$$15{,}365 < a < 15{,}375.$$

Читатель может проверить, проделывая вычисления, как указано у Рыбкина, но с применением семизначных таблиц, что в случае

$$a = 15{,}375,\ b = 21{,}415,\ c = 13{,}835$$

для угла A получается значение $A = 45°45'26''$, а в случае

$$a = 15{,}365,\ b = 21{,}425,\ c = 13{,}825$$

получается значение $A = 45°39'16''$. Разность этих значений составляет более $6'$, поэтому ответ, приведенный у Рыбкина, дан с фиктивной точностью. Учить учеников всегда пользоваться одними и теми же таблицами и вычислять углы всегда с точностью до минут, независимо от точности условия, это значит — учить именно тому, что не годится для практики. Это обстоятельство делает теорию решения треугольников, проходимую в школе, окончательно неприменимой.

Некоторые учителя считают, что решение треугольников (неосновные случаи), требуя искусственных методов и изобретательности, является полезным упражнением для развития комбинационных способностей. Однако комбинационные способности можно развивать и в других, более идейных, разделах математики. Нельзя одобрить прохождение бесполезного раздела только потому, что он дает повод для решения трудных задач, наподобие шахматной игры.

ГЛАВА XIII

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ НАГЛЯДНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Краткие сведения о курсе наглядной геометрии

Психологические предпосылки преподавания наглядной геометрии

В соответствующем месте этой книги (гл. I, § 4) была обоснована необходимость преподавания наглядной геометрии для разрядки трудностей, возникающих в начале систематического курса. Рассмотрим теперь этот вопрос с психологической точки зрения.

Все наши геометрические понятия представляют результат абстрагирования существенных признаков конкретных объектов. Однако, являясь отображениями объективного мира, все эти понятия суть понятия отвлеченные.

Характерной особенностью этих понятий является их общность. Возникновение геометрических понятий, связанное с обобщением фактов, приобретенных путем живого созерцания (при помощи восприятий и представлений) реальной действительности, сопровождается, с одной стороны, расчленением этих фактов на отдельные элементы (анализ), а с другой стороны — объединением этих разъединенных элементов и качеств во что-то единое, целое (синтез).

В течение долгого времени предполагалось, что эти три этапа изучения свойств объектов реального мира (восприятие, представление и понятие) идут в строгой последовательности, изолированно, одно за одним. Так, например, даже еще в XIX в. Дистервег строил свои педагогические указания, исходя из таких идущих, по его мнению, одна за другой трех ступеней.

Однако последние исследования психологии доказали со всей непреложностью, что эти три этапа психологического развития не существуют изолированно. Так, например, непосредственное восприятие, являющееся отображением реального объекта в нашем сознании при помощи ощущений, получаемых от органов чувств, одновременно с этим дополняется в той или иной мере и нашими представлениями, воспоминаниями и мыслями, связанными с этим предметом, как результатом прежнего опытного знакомства с ним. Одновременно с этим восприятием нашего предмета в целом мы обладаем способностью и расчленять этот объект, выделяя в нем его отдельные части.

Итак, при изучении геометрии надо учитывать то, что в каждой из вышеуказанных трех психологических ступеней изучения геометрических форм и их свойств участвует и непосредственное восприятие их, и представление некоторых свойств их по памяти, и известная доля логического мышления. Все дело только в различной степени соотношения между тремя элементами, из которых складывается весь психологический процесс изучения геометрии.

Так, дети дошкольного возраста (до 6—7 лет) знакомятся с геометрическими формами и соотношениями, прибегая главным образом к созерцанию и восприятию конкретных предметов. Дети школьного возраста, *от 7 до 12—13 лет (т. е. учащиеся* I — V классов), изучают геометрические формы и величины, связанные с ними, главным образом, прибегая к восприятию конкретных объектов и к представлению их свойств, вспоминая по памяти впечатления от фактов, ранее конкретно наблюдаемых. Что касается учащихся старшего школьного возраста от 13 до 17 лет (т. е. VI — X классов), то у них при изучении геометрии начинает преобладать стремление мыслить обобщенными геометрическими понятиями и более строгими процессами доказательств.

Чтó такое „наглядная геометрия“

Можно построить два существенно отличных друг от друга школьных курса геометрии.

В основу одного курса можно положить: во-первых, исследование свойств геометрических форм и величин в их самом общем виде, имея дело с отвлеченными общими понятиями о геометрических линиях, фигурах, телах, их площадях, объемах, поверхностях, и, во-вторых, можно в этом курсе обосновывать справедливость находимых свойств геометрических понятий при помощи дедуктивного метода доказательства. Такой курс геометрии мы называем систематическим курсом. Он является основным курсом изучения геометрии в нашей школе и преподается в VI — X классах.

Но можно построить и совершенно иной курс геометрии. А именно: во-первых, можно изучать свойства геометрических форм только на отдельных геометрических объектах, положив в основу непосредственное их восприятие и представление, не прибегая к общим отвлеченным понятиям о них, и, во-вторых, для обоснования справедливости находимых свойств можно широко пользоваться индуктивным методом.

Построенный по второму образцу курс называется „наглядным курсом геометрии“ или „курсом наглядной геометрии“.

Иногда (менее удачно) такой курс называют „курсом опытной геометрии“.

Если этот курс является только введением к основному, систематическому курсу геометрии, то его называют еще „подготовительным курсом" или „пропедевтическим курсом". Мы в дальнейшем будем называть его курсом „наглядной геометрии".

Краткие исторические сведения о преподавании „наглядной геометрии"

За необходимость применения наглядных методов обучения, которые могли бы оживить гнетущую скуку схоластического обучения, господствовавшего в школах, энергично ратовали гуманисты еще в XVI столетии (Рабле во Франции, Томас Мор в Англии и др.).

В XVII столетии чешский педагог Ян Амос Коменский (1592—1670) детально разработал принцип наглядности как основной принцип обучения [1]). Однако в то время эти идеи не оказали влияния на характер преподавания, остававшегося чисто вербальным.

Не останавливаясь на истории этого вопроса за границей, приведем некоторые данные о преподавании наглядной геометрии в России.

В России в течение долгого времени начальные сведения по геометрии сообщались не в виде самостоятельного курса, а вместе с изучением арифметики.

В одном из первых наших учебников по арифметике—в известном руководстве [2]) Леонтия Магницкого, изданном еще в 1703 г., дается вместе с задачами арифметическими и ряд задач чисто геометрического, прикладного характера (вычисление высот зданий, расстояний и т. д.), даже с применением теоремы Пифагора. Кроме того, отдельная глава этого учебника арифметики посвящена правилам вычисления длины окружности („циркумференции"), площадей („суперференций") плоских фигур, в том числе круга, объемов („корпуленций") тел. Применение каждого из этих правил поясняется у Магницкого конкретным численным примером.

Однако все эти геометрические сведения даются Магницким в догматической форме, без всякого доказательства и пояснения самого вывода.

Такую же картину мы наблюдаем и в течение всего XVIII в. и в первой половине XIX.

Отдельные руководства по наглядной геометрии появились у нас только в шестидесятых годах XIX в., в эпоху крупного общественного подъема, в котором педагогические вопросы занимали очень видное место [3]).

Первыми отдельными книгами по наглядной геометрии у нас были переводные книги с французского языка. Так, еще в 1847 г. переведена была с французского языка небольшая книга Ламе-Флери—

---

[1]) Я. А. Коменский, Великая дидактика, Учпедгиз, 1939, гл. XX, §§ 6—7.

[2]) Л. Магницкий, Арифметика, сиречь наука числительная. С разных диалектов на славянский язык переведенная и воедино собрана, 1703.

[3]) Достаточно вспомнить открытие в эти годы земских школ и школ воскресных, организацию Петербургского педагогического общества, издание ряда педагогических журналов, высказывания по принципиальным педагогическим вопросам не только таких корифеев-педагогов, как Ушинский, но и целой плеяды публицистов-просветителей во главе с Чернышевским, Добролюбовым, Писаревым.

„Краткая геометрия для детей, изложенная по вопросам и ответам, в 22 уроках". А в 1867 г. выходит у нас перевод Клеро — „Элементы геометрии". В том же 1867 г. печатается в Петербурге самостоятельная работа Фан-дер-Флита — „Курс элементарной геометрии", в основу которой положено, так же, как и у Клеро, землемерие.

В 1871 г. под непосредственным руководством К. Д. Ушинского известный в то время педагог М. Косинский, заменивший Ушинского в Смольном институте, составляет свое руководство по „Наглядной геометрии", в предисловии к которому он подробно и очень убедительно поясняет цель и необходимость наглядных курсов геометрии [1]).

К сожалению, Косинский (по примеру Песталоцци) широко использовал в своем руководстве катехизическую форму изложения с ее бесконечными вопросами и ответами, что́ сделало учебник слишком вербальным и сухим.

Вскоре после этого печатаются у нас еще несколько учебников по наглядной геометрии („Курс элементарной геометрии с практическими задачами" Боришкевича, „Наглядная геометрия" Волкова). Эти учебники для изучения свойств геометрических форм вместо „созерцания" геометрических фигур (как это делали Песталоцци, Косинский) и вместо землемерных работ (как это делали Клеро, Фан-дер-Флит) выдвинули третий принцип изучения фигур: идею построения изучаемой геометрической фигуры самими учениками [2]) и выявления в связи с этим построением тех или иных свойств этой фигуры.

В 1872—1873 гг. появляются работы З. Б. Вулиха [3]).

В продолжение 1872 и 1873 гг. в Петербургском педагогическом обществе ведется горячая дискуссия между защитниками пропедевтических курсов геометрии типа наглядной геометрии и сторонниками замены их сокращенными учебниками евклидовского дедуктивного курса геометрии [4]).

Несмотря на то, что в защиту наглядных курсов геометрии выступили такие крупные методисты того времени, как Волков, Косинский, Страннолюбский, Евтушевский [5]), Рашевский, вопрос о необхо-

---

[1]) Мрочек и Филиппович, Педагогика математики, ч. I, стр. 167—169.

[2]) См. также американский учебник Hornbrook'a „Concrete Geometry", Chicago, 1894.

[3]) З. Б. Вулих, Подготовительный курс геометрии. Для IV отд. женских уч. зав., для III кл. военных гимназий, СПБ 1872, изд. журнала „Семья и школа" (пособие для учителей). З. Б. Вулих, Краткий курс геометрии и собрание геометрических задач. Руководство для городских и уездных училищ, СПБ 1873.

[4]) Протоколы об этой дискуссии напечатаны в журнале „Семья и школа" за 1873 г.

[5]) Евтушевский, например, высказывал мнение о необходимости составить учебники по наглядной геометрии трех видов: во-первых, самостоятельные, законченные курсы наглядной геометрии для начальных школ, во-вторых, курсы узко практического характера для практической жизни и, наконец, в-третьих, пропедевтические курсы по наглядной геометрии, как подготовка к дальнейшему слушанию научно построенных систематических курсов евклидовского типа.

димости введения в школах наглядных курсов геометрии остался открытым.

К этому времени в русских школах наступает длительный период реакции. Новый министр просвещения Дмитрий Толстой заменяет более или менее либеральный школьный устав 1864 г. По новому уставу 41% всего времени тратится на изучение древних языков, резко сокращается число часов на преподавание естественных наук, сокращается число часов и на изучение математики. Из учебного плана исключается пропедевтический курс геометрии.

Такое пренебрежительное отношение к наглядным курсам геометрии продолжалось у нас до начала XX столетия. Революция 1905 года снова оживила в широких общественных кругах у нас большой интерес к реформе школьного дела. Возобновляется в связи с этим и интерес к преподаванию наглядного курса геометрии.

На первом (1911—1912) и втором (1913—1914) Всероссийских съездах преподавателей математики ряд делегатов защищает принципы построения курсов наглядной геометрии[1]).

С 1917 г. началось строительство нашей советской школы. С первых же годов ее существования, особенно в период созидания единой трудовой школы, у нас было обращено серьезное внимание на широкое применение наглядных методов обучения в ней. В противовес старому вербальному преподаванию, трудовая школа выдвинула принцип наглядного преподавания всех дисциплин вообще и геометрии в частности. В нашей трудовой школе курс наглядной геометрии занял одно из руководящих мест. Наглядная геометрия начала преподаваться с первого же года обучения и заканчивалась в последней, 7-й группе (нашем VII классе). В продолжение всех семи лет обучение геометрии у нас строилось тогда исключительно на опытной, наглядной базе. Каждое геометрическое свойство прежде всего наблюдалось учениками и исследовалось „опытным" путем и только потом доказывалось.

Здесь нами, особенно в период увлечения комплексно-лабораторной системой, допущена была крупная ошибка. Дело в том, что курс наглядной геометрии, изучаемый детьми в трудовой школе 1-й ступени, прививая ученикам целый ряд полезных и нужных для жизни практических навыков, должен был одновременно с этим подготовлять учеников и к сознанию необходимости в трудовой школе 2-й ступени изучения систематического, теоретического курса геометрии как основного. Вместо этого курс наглядной геометрии в трудовой

---

[1]) На этих съездах заслушан был обстоятельный доклад А. Р. Кулишера о целях и особенностях пропедевтического курса геометрии. Много внимания уделили принципам построения этого курса в своих докладах и проф. С. А. Богомолов, и Н. Н. Володкевич, и К. Ф. Лебединцев. В обсуждении этих докладов живое участие приняли очень многие делегаты. Все они высказались за необходимость введения таких курсов. Подробнее см. „Труды I съезда преподавателей математики", СПБ 1913 и 1915 гг. и „Сборник докладов, читанных на I Всероссийском съезде преподавателей математики", Москва 1915.

школе был противопоставлен систематическому курсу, обесценивая в глазах учащихся все огромное значение теоретического изучения геометрических свойств в *систематическом курсе. Геометрия в трудовой* школе превратилась в какую-то чисто „опытную" дисциплину, в которой каждому теоретическому доказательству теоремы предшествует обязательно опытное „доказательство" этого свойства на модели. У учащихся, вместо осознавания необходимости теоретического доказательства теоремы, постепенно при изучении курса „опытной геометрии" атрофировался интерес к теоретическому, дедуктивному доказательству.

Исторические постановления ЦК ВКП(б) и правительства в 1931—1932 гг. [1]) своевременно обратили внимание работников школы на это вредное увлечение эмпиризмом и помогли методистам быстро осознать сделанную ошибку. Начиная с 1934 г., в наших начальных, неполных средних и средних школах курс наглядной геометрии занимает уже свое надлежащее место как курс, преследующий две основные цели: во-первых, привитие ученикам практических навыков в области геометрических знаний и, во-вторых, подготовку учащихся к сознательному изучению в последующих классах основного систематического курса геометрии.

Две цели преподавания наглядной геометрии в советской школе

Преподавание наглядной геометрии в советской школе преследует две основные цели.

Во-первых, этот курс, являясь подготовительным к изучению систематического курса, ставит своею целью конкретизировать в младших классах в сознании учащихся все те важнейшие геометрические понятия, которые в последующих классах эти ученики будут изучать в отвлеченном виде в систематическом курсе. Ибо нельзя сразу бросать ученика в мир абстракций. Надо так направлять его работу, чтобы все эти отвлеченные геометрические понятия постепенно нарождались и углублялись, сделавшись потом твердой, содержательной основой для всех математических обобщений ученика, а не скользили бы поверхностно в его сознании в виде одних только словесных утверждений [2]).

Вторая цель изучения наглядной геометрии связана с необходимостью своевременно вооружить учеников теми практическими знаниями геометрии, которые требуются учащимся при изучении ими таких дисциплин, как география (представления о разного вида углах, о плане и масштабе), природоведение и физика (измерение площадей, объемов), рисование (знакомство с соответствующими геометрическими формами), военное дело (измерение расстояний до недоступ-

---

[1]) Постановления о школе от 5 сентября 1931 г. и от 25 августа 1932 г. „О программах и режиме в начальной и средней школе" требовали обеспечить преподавание основ наук и правильное сочетание теории с практикой.

[2]) Интересное обоснование цели преподавания наглядной геометрии дает проф. Богомолов в своем выступлении на I съезде преподавателей математики. См. „Труды съезда", т. I, 1912

ных объектов). Все эти геометрические сведения необходимы будут ученику непосредственно и в его практической жизни. Особенно если он ограничит свое школьное образование только начальной или неполной средней школой, ибо в систематическом курсе геометрии с такими геометрическими понятиями, как съемка плана, масштаб, измерение длины окружности, площади круга, объема тел, ученики знакомятся слишком поздно (в VIII—X классах).

Таким образом, курс наглядной геометрии в нашей школе является одновременно и пропедевтическим (подготовительным) и курсом „практической геометрии".

§ 2. Особенности преподавания наглядной геометрии в нашей школе

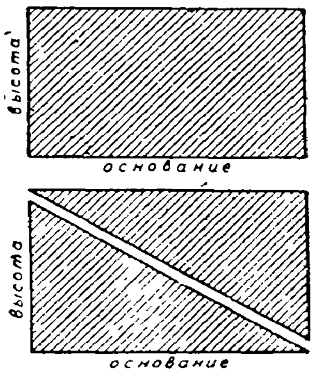
Преподавание наглядной геометрии должно быть конкретным

При преподавании наглядной геометрии надо все время учитывать психологические особенности детей 8—12 лет. А посему этот курс должен быть максимально конкретным, „созерцательным". При прохождении этого курса ученики должны пользоваться не только своими глазами, но и такими органами чувств, как осязание, мускульное чувство.

Использование моделей

В наглядном курсе геометрии необходимо всемерно пользоваться разнообразными наглядными иллюстрациями, моделями, приборами, предметами, взятыми из домашнего обихода, объектами, находящимися в классе, и т. д.

Например, при выяснении правила для измерения площади прямоугольного треугольника надо непосредственно показать на картонной модели, как можно разбить прямоугольник на два треугольника, продемонстрировав при этом непосредственным наложением, что полученные два треугольника равны между собой, а потому площадь каждого из них составляет половину площади данного прямоугольника (черт. 117).



Черт. 117.
Сравнение площадей прямоугольника и прямоугольного треугольника.

При знакомстве детей с геометрическими телами, например, с шаром, надо продемонстрировать на уроке несколько предметов, имеющих форму шара, хотя бы геометрический деревянный шар, классный глобус, мяч и т. д.

Однако все эти модели ни в коем случае не должны затемнять математического содержания изучаемого вопроса, не должны отвлекать своей сложной внешней конструкцией внимания детей от главной математической цели, ради которой демонстрируется эта модель. Они должны быть по возможности простой, несложной конструкции. Большинство этих приборов может быть изготовлено в самой школе, при активном участии учеников.

Что касается количества демонстрируемых на уроке наглядных моделей, то не надо увлекаться их изобилием. Слишком большое количество наглядных приборов на одном и том же уроке только рассеивает внимание детей, приучает их к одному только поверхностному восприятию модели.

Изучение наглядной геометрии должно быть активным

Преподавая наглядную геометрию, надо избегать догматического метода изложения. Надо все время стремиться воспитывать у учеников творческое воображение, приучать их к самодеятельности, к самостоятельному приготовлению простейших приборов, к самостоятельному измерению необходимых величин, к самостоятельному исследованию полученных результатов. Надо, чтобы ученики не только чисто внешне созерцали готовую форму демонстрируемой модели, но умели бы сами, пользуясь линейкой, наугольником и циркулем, нарисовать эту геометрическую фигуру, умели бы сами приготовить для простейшего геометрического тела его развертку („выкройку“) и по ней склеить изучаемое тело. Ученики должны приучаться не только смотреть на изучаемую геометрическую форму, но и уметь сознательно анализировать ее, подмечать сходство и различие ее элементов по сравнению с элементами других форм.

Курс наглядной геометрии должен быть небольшим, но строго последовательным и содержательным

Не надо увлекаться стремлением дать ученикам как можно больше сведений из геометрии в этом начальном курсе. Это приведет только к накоплению учениками легко забываемых, не связанных логически между собой фактов и принесет больше вреда, чем пользы. Объем сведений по геометрии в ее пропедевтическом курсе должен быть небольшим, но каждое изучаемое детьми геометрическое понятие надо изучать содержательно и достаточно обстоятельно, с ясной для учеников взаимной связью с раньше изученными материалами, подавать весь материал в четкой и понятной ученику логической последовательности. Например, при изучении измерения площадей разных фигур мы прежде всего останавливаемся подробно и обстоятельно на способе измерения площади прямоугольника, а потом, шаг за шагом, знакомим детей с все новой и новой фигурой и выясняем способ измерения ее площади, преобразовывая ее в прямоугольник. Именно — прежде всего мы, рассматривая квадрат как прямоугольник, у которого основание и высота одинаковы, находим упрощенный способ для измерения площади квадрата (III класс). Деформируя прямоугольник, составленный из четырех планок, скрепленных шарнирами, мы знакомим детей с новым видом четырехугольника — с параллелограмом. Разрезав параллелограм (сделанный из картона) вдоль высоты, ученики преобразовывают его в равновеликий ему прямоугольник (черт. 124) и без труда выясняют правило для измерения площади этого параллелограма. Далее переходим к измерению площади треугольника. Разрезав прямоугольник по диагонали на два равных между собой прямоугольных треугольника, мы выясняем правило для измерения площади прямоугольного треугольника. А разрезывая любой треугольник вдоль его высоты (проведенной на бо́льшую сторону) на два прямоугольных треугольника, мы получаем возможность распространить вышенайденное правило на измерение площади всех видов треугольников (IV класс).

Измерение площади многоугольника мы связываем с найденным выше способом вычисления площадей треугольников, на которые мы можем разбить любой многоугольник (V класс). Наконец, переходим к измерению площади круга, разбивая его на равные секторы (черт. 126) и образуя из них фигуру, напоминающую нам параллелограм (V класс).

Курс наглядной геометрии должен вооружить учеников практическими знаниями

Изучая наглядную геометрию, ученики должны приобрести уменье, ряд сведений и навыков, необходимых им в практической жизни. Так, процесс измерения геометрических величин ученики должны усвоить не только описательно, но и чисто практически. Прежде всего они должны вполне конкретно представлять себе размеры всех единиц измерения, связывая, например, размер метра с длиной руки и длиной своего шага, размеры квадратного сантиметра с площадью ногтя на пальце, литр с емкостью чайного стакана и т. д.

При помощи непосредственных практических измерений ученики должны знать размер своего указательного пальца (около 6—8 *см*), расстояние между концами большого пальца и мизинца (около дециметра), длину вытянутой руки (около 50—60 *см*), свой рост (около 1,5 *м*), должны научиться измерять расстояние в метрах при помощи своих шагов (убедившись предварительно, что, например, каждые 4 шага соответствуют 3 *м*).

При измерении тех или других расстояний, площадей и объемов надо приучать учеников к глазомеру: определять *сначала „на глаз“* размеры искомой величины, а потом проверять ответ непосредственным измерением. Знакомясь с геометрическими формами, дети должны *приучаться тщательно и аккуратно чертить их*, привыкая технически правильно пользоваться линейкой, наугольником, циркулем. Приобретенные сведения о способах измерения геометрических величин ученики должны немедленно применять к решению разнообразных практических задач; например вычислению яркости освещения класса отыскиванием отношения между площадью окон и площадью пола, определением кубатуры комнаты, составлением несложного плана квартиры и т. д. Большое значение для практической жизни имеют приобретенные здесь детьми навыки производить простейшие землемерные работы: провешивать, измерять расстояние между двумя точками на земле, а потом чертить их на бумаге в известном масштабе.

Наглядная геометрия должна развивать у учеников пространственные представления

И для практической жизни, и для сознательного изучения в будущем систематического курса геометрии крайне необходимо развить и углубить у учеников их пространственные представления. Большую помощь здесь может оказать наглядная геометрия. Курс наглядной геометрии должен прежде всего упорядочить уже́ имеющиеся у учащихся пространственные представления и способствовать возникновению у них новых пространственных образов на базе старых. Особенно важно здесь обеспечить развитие у учеников представлений о пространственных формах трех измерений, ибо и с психологической точки зрения этот процесс очень сложный. В старших классах, изучая систематический курс геометрии, ученики принуждены очень долго ограничиваться плоскими фигурами.

Поэтому, приступая в IX классе к изучению стереометрии, они оказываются мало подготовленными к восприятию и анализу взаимных положений геометрических элементов в пространстве. А живем-то мы в пространстве трех измерений!

В связи с этим ряд методистов считал необходимым курс наглядной геометрии сразу начинать с изучения форм пространственных тел (куба, прямоугольной призмы и т. д.), попутно выделяя из них и знакомя детей и с плоскими фигурами (квадратом, прямоугольником, кругом), и с разного вида углами (прямым, острым, тупым), и с линиями (прямой, окружностью) [1]. Однако такое построение курса наглядной геометрии по принципу фузионизма (слияния планиметрии со стереометрией) выявило на практике ряд существенных неудобств: одновременное изучение свойств плоских фигур и более сложных для восприятия пространственных объектов рассеивало внимание детей, лишало их возможности сосредоточивать все свое внимание на изучении какого-либо одного геометрического объекта. Оказалось более целесообразным начинать изучение наглядной геометрии с простейших плоских фигур (прямой линии, прямого угла, прямоугольника), *постепенно переходя к изучению более сложных* пространственных тел (как делал это еще Песталоцци [2]): куба, прямоугольной призмы и т. д.

Наглядное изучение функциональной зависимости между геометрическими величинами

Каждое правило вычисления какой-нибудь геометрической величины при помощи определенных действий над числовыми значениями других величин, входящих в состав данной геометрической фигуры, представляет собой не что иное, как функциональную зависимость, связывающую между собой все эти величины. Наглядная геометрия должна дать возможность ученикам научиться конкретно осознавать простейшие виды всех тех функциональных зависимостей, которые

---

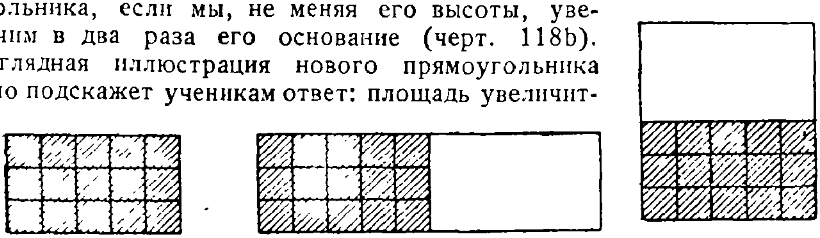
[1]) См. наглядную геометрию Кемпбеля, Кулишера, Кавуна, Астряба.

[2]) Так строили свои курсы наглядной геометрии Песталоцци, Герберт, а у нас Волков, Шохор-Троцкий, Извольский.

более детально и более глубокими приемами изучаются в систематических курсах.

Вот несколько примеров наглядного изучения этой функциональной зависимости между геометрическими величинами.

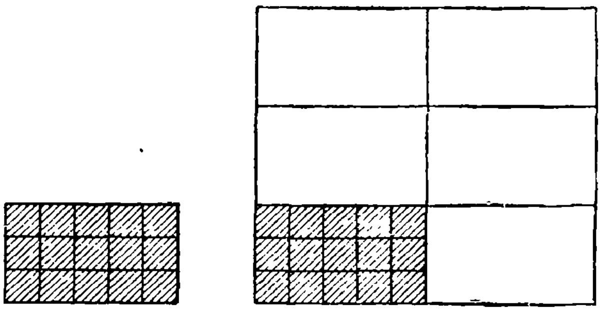
Пример первый. Когда ученики уже усвоили (в III классе) правило для измерения площади прямоугольника на таком, например, конкретном прямоугольнике (черт. 118а), мы предлагаем ученикам IV класса) обдумать, как изменится размер площади этого прямоугольника, если мы, не меняя его высоты, увеличим в два раза его основание (черт. 118b). Наглядная иллюстрация нового прямоугольника ясно подскажет ученикам ответ: площадь увеличится вдвое, ибо к прежнему прямоугольнику прибавился еще один такой же прямоугольник. Так же можно наглядно продемонстрировать влияние на размер площади прямоугольника и увеличения в два раза его высоты (черт. 118с), или, наконец, одновременное увеличение и основания (например, в 2 раза) и его высоты (в 3 раза — черт. 119)[1].



a b c

Черт. 118. Изменение площади прямоугольника при увеличении одной стороны.

Пример второй. Измерив диаметры и длину различных окружностей, мы составляем из полученных значений числовую таблицу (см. стр. 269). Исследуя ее, мы прежде всего устанавливаем такой факт: с изменением диаметра окружности изменяется и ее длина, а именно при увеличении диаметра она увеличивается. Уточняя этот факт, находим, что во сколько раз увеличивается диаметр, во столько же раз увеличивается и длина окружности. Другими словами,



Черт. 119. Изменение площади прямоугольника при увеличении двух сторон.

---

[1]) Очень уместно использовать все эти иллюстрации функциональной зависимости между геометрическими величинами в прямоугольнике для наглядного осознания учениками IV—V классов на уроках арифметики влияния изменения сомножителей на величину произведения.

устанавливаем новый факт: длина окружности пропорциональна ее диаметру (V класс). Наконец, дальнейшее исследование нашей числовой таблицы дает возможность еще более уточнить найденный факт, а именно установить, что любая окружность больше своего диаметра всегда приблизительно в 3,1 раза.

Курс наглядной геометрии должен способствовать развитию логического мышления учеников

В наглядном курсе геометрии при изучении того или другого свойства геометрической фигуры нельзя ограничиваться одним только интуитивным восприятием этого свойства нашими органами чувств или ограничиваться одним только заучиванием готового правила. Необходимо, исследуя какое-нибудь геометрическое свойство на конкретном объекте, каждый раз обосновывать причину существования этого свойства определенными логическими доводами. Ученики должны не только созерцать, но и мыслить, облекая свои мысли в словесную форму. Эти свои суждения, логически обоснованные высказывания о свойствах изучаемой пространственной формы ученики строят, пользуясь не дедуктивным методом, который мы так широко применяем в систематическом курсе геометрии, идя от общих утверждений и определений к отдельным случаям, а методом индуктивным. При этом методе мы убеждаемся в справедливости определенного свойства при помощи логических рассуждений, исследуя не общий случай, а только какой-нибудь один, отдельный. Например, при индуктивном методе мы устанавливаем правило для измерения площадей любых прямоугольников, исследуя один только конкретный прямоугольник (хотя бы со сторонами в 8 *см* и 3 *см*), т. е. идя от отдельного случая к общему.

Однако, строя свои суждения и логические высказывания о свойствах пространственных форм по индуктивному методу, надо постепенно приучать учеников к все более и более точной формулировке своих высказываний, подготовлять их к осознанию необходимости более убедительного обоснования правильности своих выводов в самом общем случае.

Проф. С. А. Богомолов еще на I съезде преподавателей математики в 1911—1912 гг. обосновывал это положение следующим образом [1]). Для успешного усвоения материала преподавание должно быть интересным, но этот интерес должен быть серьезным, направленным на существо предмета. Причем надо иметь в виду, что характер этого интереса меняется с возрастом ученика. Чем можно заинтересовать учеников одного возраста, тем самым можно безнадежно оттолкнуть умы их более юных товарищей. Учащиеся юного возраста, приступая к изучению геометрии, полны жаждой знания, но при непременном условии, чтобы эти знания преподносились им в живой, наглядной форме. Для учеников этого юного возраста преподаватель должен

---

[1]) См. доклад проф. С. А. Богомолова на I съезде преподавателей математики 27 декабря 1911 г. „Обоснование геометрии в связи с постановкой ее преподавания“ (Труды съезда), т. I, стр. 46—50.

сделать свой предмет максимально наглядным, оставив в стороне все, что может оценить ученик только старшего возраста. Когда же общее развитие ученика с возрастом повысится, когда у него накопится достаточный запас сведений из области геометрии, тогда жажда знаний, удовлетворенная только отчасти, естественно вызовет у него — не без влияния, конечно, преподавателя — желание разобраться в усвоенном материале. Вот тогда-то ученик и будет способен к серьезному изучению такого систематического курса геометрии, который построен на основных положениях аксиоматики.

Учитель математики должен мало-помалу привести учеников к мысли, что нельзя удовлетвориться теми приемами доказательства, которые применялись в наглядной геометрии.

Постепенно выясняется учениками, что в геометрии вовсе не нужно постоянно прибегать к опыту для обоснования своих предложений: можно, исходя из некоторых фактов, прийти к другим фактам при помощи одних только рассуждений, причем выводы наши будут иметь такую же достоверность, как и наши предпосылки. На отдельных примерах ученики могут оценить силу дедукции. А это даст возможность перейти впоследствии (в VI классе) к более сознательному усвоению систематического курса геометрии, построенного на изучении общих свойств отвлеченных геометрических понятий при помощи дедуктивного метода доказательства.

§ 3. Методические указания к преподаванию некоторых тем

Прямая линия (III класс)

Понятие „прямая линия" принадлежит к понятиям основным, а потому давать словесное определение „что такое прямая линия" не надо. Достаточно напомнить детям те конкретные предметы, которые дают нам представление о прямой линии: туго натянутая нить, ребро стола, ребро линейки и т. д. Меняя положение туго натянутой нити, показываем, что прямая линия может принять положение горизонтальное, вертикальное, может быть наклонной, оставаясь, однако, все время линией прямой, а не кривой.

Обратив внимание учеников на то, что ребро линейки представляет собой прямую линию, предлагаем детям при помощи линейки нарисовать в тетрадях это ребро [1]. Получаем прямую линию. Приступаем к исследованию некоторых ее свойств. Прежде всего подчеркиваем детям, что в начерченной прямой линии нас в геометрии не интересует ни тот материал, каким она нарисована, ни ее цвет, ни ее толщина, а только ее направление и длина.

Во-вторых, чтобы пояснить ученикам, что прямая продолжается неограниченно, предлагаем им приложить к нарисованному отрезку прямой ребро линейки так, чтобы только часть этого ребра была бы на прямой. Тогда часть ребра линейки, лежащая вне нарисованного отрезка, и покажет ученикам, в каком направлении продолжается

---

[1] Если нет линейки, то ее легко заменить обыкновенным куском толстой бумаги, согнутым пополам по прямой линии.

наша прямая. Ученики делают вывод: прямая продолжается в противоположных направлениях без конца. Предлагаем ученикам взять на нашей неограниченной прямой какую-нибудь точку. Выясняется, что тогда наша прямая поделится на две отдельные полупрямые (или лучи), которые тоже можно неограниченно удлинять, но только в одну сторону. Берем теперь на нашей прямой две точки. Тогда этими двумя точками мы отрезываем от всей нашей прямой часть ее определенной длины.

Наконец, желательно на конкретных упражнениях выяснить ученикам, что через одну точку можно провести любое число прямых. А если мы попытаемся начертить несколько прямых, проходящих через 2 данные точки, то все эти прямые сольются.

После того как ученики познакомятся со всеми этими свойствами прямой, нужно уделить надлежащее внимание процессу измерения длины определенного отрезка прямой. Обращаем внимание детей, что этот процесс состоит из таких трех частей: во-первых, из выбора определенной постоянной единицы измерения длины, во-вторых, из разделения нашего отрезка на эти единицы и, в-третьих, на подсчете числа полученных единиц. Тут же надо подчеркнуть ученикам роль измерительной линейки, которая сама делит наш отрезок на соответствующие единицы, а цифра, что стоит на линейке у конца отрезка, освобождает нас от необходимости считать непосредственно число полученных единиц измерения. Ученики проделывают тут два таких основных упражнения: 1) узнают числовое значение данного отрезка и 2) строят по данному им числовому значению самый отрезок.

Окружность и ее длина (V класс)

Свойства окружности. Предлагаем ученикам нарисовать при помощи циркуля замкнутую кривую линию. Название этой линии ученики V класса сразу сами дадут: это — окружность. Линия эта замкнутая, т. е. если начать двигаться по этой линии из любой ее точки, то мы придем в конце концов в ту же точку.

Из способа вычерчивания окружности видно, что все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от некоторой неподвижной точки, называемой центром. Все эти свойства дают возможность сформулировать определение окружности [1]). Тут же даются определения центра и радиуса, причем подчеркивается важное свойство радиуса: у одной и той же окружности все радиусы одинаковой длины. Далее предлагается ученикам соединить отрезком прямой линии две точки окружности так, чтобы этот отрезок прошел через центр окружности. Это упражнение даст возможность познакомить учеников с новым элементом окружности — с ее диаметром и выяснить, что он состоит из двух радиусов [2]).

---

[1]) Необходимо подчеркивать детям различие между понятием окружности и круга (как части плоскости, ограниченной окружностью).

[2]) Понятие о диаметре можно еще дать иначе, сгибая круг пополам и обращая внимание детей на то, что линия сгиба проходит через центр.

Измерение длины окружности

После того как ученики исследовали вышеуказанные свойства окружности, надо их познакомить (V класс) с измерением длины этой кривой линии.

Ученики с помощью учителя вспоминают, что процесс непосредственного измерения длины линии состоит в том, что мы, укладывая определенную единицу измерения на нашей линии, должны узнать, сколько раз эта единица уложилась на ней. Пробуя укладывать на нашей окружности известные нам единицы измерения (сантиметр или дециметр), ученики выясняют, что прямолинейный отрезок не может совместиться всеми своими точками с какой-либо частью окружности. Тогда учитель предлагает ученикам применить новый способ. Ученикам раздается несколько деревянных кружков (или цилиндриков) разного диаметра (от 3 до 6 *см*) и предлагается, охвативши бумажной лентой окружность каждого кружка, выпрямить полоску и, измеривши ее длину, узнать длину окружности. Диаметр ученики измеряют обыкновенной измерительной линейкой. Все эти измерения ученики делают с точностью до 1 *мм*. Полученные после измерения числа ученики записывают в такую таблицу:

	Длина окружности	Длина диаметра	Во сколько раз окружность длиннее своего диаметра
Первое измерение	100 *мм*	32 *мм*	3,13 . . .
Второе „	201 „	64 „	3,14 . . .
Третье „	152 „	48 „	3,17 . . .
. . . .	. . .	. . .	. . .

Преподаватель обращает внимание учеников на то, что с увеличением диаметра увеличивается и длина окружности, и предлагает ученикам вычислить отношение длины каждой окружности к ее диаметру (с точностью до 0,1) и сравнить полученные результаты. Ученики сами сделают важный вывод: длина любой окружности больше своего диаметра приблизительно в 3,1 раза, и обсудят способ применения этого свойства для измерения длины окружности.

Преподаватель подчеркивает ученикам, что наши выводы только приблизительные. Позднее, в систематическом курсе геометрии, мы сможем найти число, которое показывает нам, во сколько раз длина окружности больше своего диаметра, хотя тоже приближенно, но с любой точностью. Сообщаем, что это число можно назвать отношением длины окружности к диаметру и что более точное значение его будет приблизительно 3,14[1]).

Углы (III класс)

Показываем ученикам циферблат часов с подвижными стрелками. Предлагаем нарисовать положение на этом циферблате обеих стрелок. Исследуем полученную фигуру (черт. 120, а, б, с). Она образуется двумя полупрямыми, исходящими из одной точки. Даем название этой фигуре — угол [2]). Иссле-

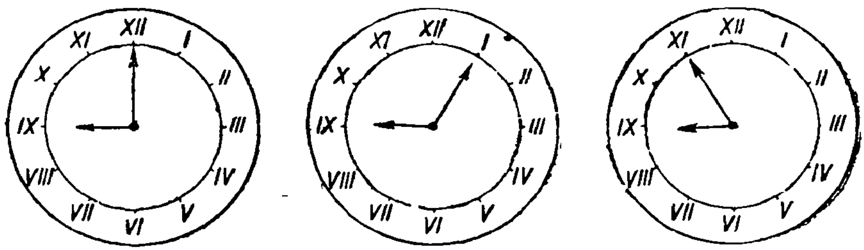
[1]) При желании можно даже сказать, что это отношение обозначают греческой буквой π.

[2]) Вместо стрелок часов можно взять две толстые проволоки, скрепленные на шарнире.

дуем отдельные его элементы. Дети обводят пальцем те полупрямые, которые образуют наш угол. Это — стороны угла (надо приучать детей показывать стороны, идя от вершины). Предлагаем показать ту точку, в которой пересекаются эти стороны. Называем ее вершиной угла. Отыскиваем разного вида углы в классной обстановке.

Переходим к выяснению понятия о величине угла. Прежде всего выясняем, что величина угла не зависит от длины стрелок часов. Для этого, поставив стрелки классного циферблата на какой-либо час, обращаем внимание детей, что если взять часы иных размеров или ускорить стрелки нашего циферблата, не двигая их, то в один и тот же час наклон стрелок будет оставаться одинаковым. На основании этих рассуждений делаем вывод: от длины сторон величина угла не зависит [1]). Возникает вопрос, что́ же влияет на изменение величины угла? Предлагаем детям вращать стрелки циферблата так, чтобы они показывали тот или другой час. Выясняем, что при этом каждый раз меняется наклон между стрелками. Итак, величина угла меняется, если меняется наклон одной стороны угла по отношению к другой при вращении их вокруг вершины угла.

Прямой угол Предлагаем ученикам поставить стрелки циферблата ровно на 9 часов и нарисовать у себя в тетрадях тот угол, который в 9 часов образуют наши стрелки. Чтобы точнее нарисовать этот угол, сгибаем лист толстой бумаги



a) b) c)

Черт. 120. Показ прямых, тупых и острых углов на часовом циферблате.

по прямым линиям дважды, чтобы образовался прямой угол. Показываем его вершину и стороны. Накладывая этот угол на циферблат, убеждаемся, что размеры углов „бумажного“ и на циферблате одинаковы. Берем несколько разных размеров наугольников, находим на них прямые углы. Накладывая их друг на друга, видим, что и они все равные. Наконец, разворачиваем наш лист бумаги с прямым углом и убеждаемся (при помощи наугольника), что у его вершины образовалось 4 прямых угла, равных между собой. Все это дает

[1]) Точнее говоря, вообще не имеет смысла говорить о „длине сторон“. Речь идет о тех отрезках, которыми мы вынуждены изображать стороны на чертеже.

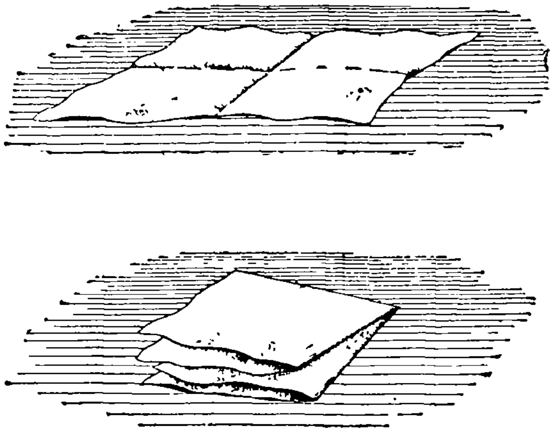
основание сделать такой вывод: все прямые углы равны между собой (черт. 121).

Предлагаем детям сделать такие два упражнения.

Упражнение первое. Нарисовать прямую и точку на ней. Построить при помощи наугольника новую прямую так, чтобы она проходила через взятую нами точку и образовала бы прямой угол с данной прямой.

Упражнение второе. Рисуем прямую и точку вне ее. Требуется сделать построение, аналогичное предыдущему. Черт. 122 показывает, как удобнее всего делать это построение.

Знакомим далее учеников с простейшего вида эккером (черт. 123), дающим возможность строить аналогично прямые углы на земле.



Черт. 121. Образование прямого угла перегибанием листа бумаги.

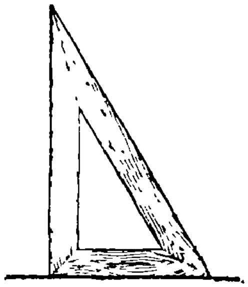
Углы острый и тупой

Предлагаем ученикам передвинуть минутную стрелку на циферблате так, чтобы она показывала время, немного меньшее, чем 9 часов, например, 8 час. 55 мин. Накладывая наугольник, выясняем, что тогда эта стрелка будет идти внутри прямого угла. Условливаемся новый угол, который образовали наши стрелки и который меньше прямого угла, называть углом острым. Предложивши ученикам поставить стрелки циферблата на 9 час. 5 мин., мы таким же точным путем знакомим учеников с тупым углом, который должен быть больше прямого.

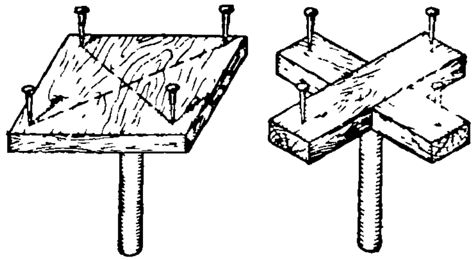
Измерение площади прямоугольника (III класс)

Измерение площадей всех фигур, изучаемых в наглядной геометрии, мы объединяем вокруг такой центральной методической идеи. Давши подробное пояснение и вывод правила для измерения площади прямоугольника (ограничивая себя только тем случаем, когда стороны его измеряются в целых числах), мы, постепенно переходя к все более и более сложным фигурам, ставим своей целью свести измерение их площадей к площади соответствующего прямоугольника.

Сделать это можно, например, в такой последовательности. Знакомим детей с самой фигурой прямоугольника. Предлагаем им нарисовать какой-нибудь отрезок прямой (например, 8 *см*), у обоих его концов при помощи наугольника нарисовать по прямому углу, на построенных сторонах этих двух углов отложить по одинаковому отрезку (*хотя бы по 6 см*) и, наконец, соединить прямой линией концы обеих сторон. Исследуя полученную фигуру, выясняем, что, во-первых, фигура имеет 4 угла (это дает нам право назвать ее четырехугольником), во-вторых, при помощи наугольника узнаем, что все 4 угла прямые. Это дает право назвать эту фигуру прямоугольником. Непосредственным измерением убеждаемся, что у нашего прямоугольника противоположные стороны — одинаковой длины, а соседние пересекаются под прямым углом. Это дает повод назвать одну из сторон основанием, а соседнюю ей — высотой [1]).



Черт. 122. Угольник.



Черт. 123. Эккеры.

Нарисовав прямоугольник с равными соседними сторонами, знакомим учеников с квадратом. После того как ученики хорошо изучили обе эти фигуры, научились отыскивать их в окружающей обстановке и рисовать их, переходим к основной задаче — к изучению способов измерения площади прямоугольника. Прежде всего дети должны конкретно и глубоко познакомиться с теми квадратными единицами, которыми они будут измерять площади прямоугольников. Надо, чтобы в тетради каждого ученика был нарисованный им образец квадратного [2]) дециметра, сантиметра и миллиметра, а на стене в классе висел бы образец квадратного метра. В V классе можно уже требовать от учеников и словесной формулировки: „квадратная единица — это площадь квадрата, сторона которого равна соответствующей линейной единице".

Самый вывод правила для нахождения площади прямоугольника хорошо известен, и мы на нем не останавливаемся.

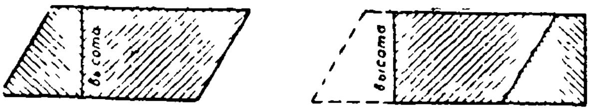
---

[1]) В начальной школе их можно называть шириной и длиной, но начиная с V класса, лучше употреблять термины: основание, высота

[2]) Полезно при этом возле каждой квадратной единицы нарисовать и размеры соответствующей ей линейной единицы.

Площадь параллелограма (V класс)

Ученики, вырезавши из толстой бумаги параллелограм (черт. 124), строят в нем при помощи наугольника у точки, взятой на его бо́льшей стороне (основании), прямую, образующую с этим основанием прямой угол. Разрезав параллелограм вдоль проведенной линии на две части и обменяв полученные две части местами, уче-



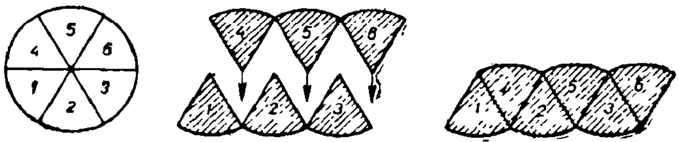
Черт. 124. Перекраивание параллелограма в прямоугольник.

ники, исследовав полученную фигуру, убедятся, что им удалось перекроить параллелограм в прямоугольник. После этого легко будет ввести и понятие о высоте параллелограма и правило нахождения его площади.

Площадь круга

Предварительно полезно предложить ученикам вычислить площадь такого правильного многоугольника (шестиугольника — черт. 125), разбив его на треугольники; потом, составив из этих треугольников параллелограмы, найти более

Черт. 125. Площадь правильного многоугольника.

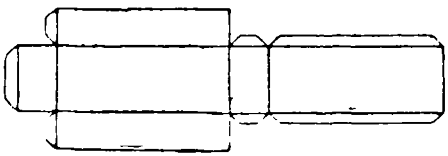


Черт. 126. Площадь круга.

короткий прием для вычисления площади всего многоугольника. Аналогичное упражнение проделываем с картонным (или деревянным) кружком (черт. 126). Если полученную фигуру условно принять за параллелограм, то получим такое правило для измерения площади круга: „чтобы вычислить площадь круга, надо половину длины его окружности умножить на радиус".

Знакомство с прямоугольным параллелепипедом

Показываем ученикам IV класса несколько предметов, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда (картонную коробку, шкатулку из дикта, деревянный брусок). Предлагаем детям исследовать, что́ у них есть общего. Выясняем, что, несмотря на то, что они сделаны из разного материала и что все они разных размеров, форма у них очень похожа одна на другую. А именно, во-первых, у них по 6 плоских стенок, причем все они имеют форму прямоугольника. Называем их гранями. Во-вторых, эти грани пересекаются по прямым линиям. Показываем их пальцем и условливаемся называть их ребрами. Считаем их число: вертикальных ребер — четыре, внизу их тоже четыре, наверху еще четыре. Итак, у нашего тела всего 12 ребер. В-третьих, все эти ребра пересекаются по три в одной точке. Показываем их и даем им название „вершины". Их оказывается 8. Условливаемся про все такие предметы говорить, что они имеют форму прямоугольной призмы или иначе прямоугольного параллелепипеда. Ученики вспоминают, какие еще знакомые предметы имеют такую форму. В частности, обращают внимание и на форму класса. Выясняем, что у прямоугольного параллелепипеда каждые две противоположные грани равны друг другу. Условливаемся пару граней, лежащих сверху и снизу, называть основаниями нашего параллелепипеда, а остальные — боковыми гранями.



Черт. 127. Развертка прямоугольного параллелепипеда.

Выясняем, что из 12 ребер найдется по 4 ребра, равных между собой и при продолжении не пересекающихся. Далее обращаем внимание, что у каждой вершины нашего прямоугольного параллелепипеда сходятся по три ребра, вообще говоря, неравных между собой. Называем одно из них высотой, другое длиной, третье шириной прямоугольного параллелепипеда. Ученики показывают их на модели и на других окружающих их предметах, в частности, находят их в классной комнате. Полезно предварительное исследование формы нашего параллелепипеда связать с приготовлением из бумаги такой развертки, из которой можно будет склеить этот прямоугольный параллелепипед. После определения рассуждений ученики выяснят, что эта развертка должна иметь такую форму (черт. 127).

Приготовление этой развертки будет поводом к вычислению поверхности параллелепипеда.

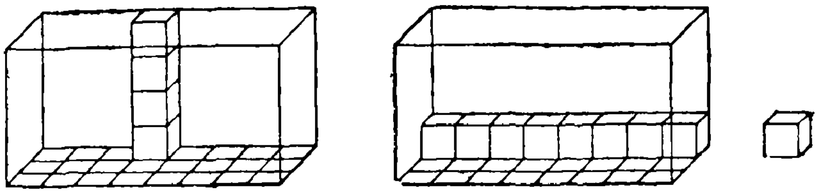
Аналогично знакомимся с частным случаем прямоугольного параллелепипеда — кубом.

Объем прямоугольного параллелепипеда

Прежде всего знакомим учеников наглядно с теми кубическими единицами, которыми мы измеряем объемы: с кубическим сантиметром, кубическим дециметром, кубическим метром (последний можно сделать из 12 палочек длиной в один метр).

Чтобы не приходилось каждый раз заполнять данное тело этими кубическими единицами и пересчитывать их, мы ищем косвенных единиц, которыми можно заполнить объем нашего прямоугольного параллелепипеда при помощи измерения соответствующими линейными единицами трех ребер: длины, ширины и высоты. Исследуем это на параллелепипеде в виде пустой коробки без передней стенки.

Это исследование можно провести на такой задаче: подсчитаем, сколько кубических ящиков, объемом в один кубический метр, можно поместить в товарный вагон длиной в 8 *м*, шириной 3 *м* и высотой 4 *м* (черт. 128). Решаем сначала укладывать наши кубические метры вдоль вагона. Их уложится 8. Потом начинаем укладывать наши ящики (кубические метры) этими рядами вдоль ширины. На всем



Черт. 128. Объем прямоугольного параллелепипеда.

полу уложится таких 3 ряда, т. е. 8×3 ящиков. Остается подсчитать, сколько таких слоев надо положить один на один вдоль высоты, чтобы заполнить ими весь вагон до потолка. Таких слоев будет всего 4. Теперь нетрудно будет ученикам подсчитать общее число ящиков, заполняющих весь вагон. Их будет

$$8 \times 3 \times 4 = 96.$$

В результате этих пояснений ученики сформулируют известное правило: чтобы узнать число кубических единиц, которое вмещает объем прямоугольного параллелепипеда, нужно измерить соответствующими линейными единицами его длину, ширину и высоту и полученные числа перемножить. Произведение покажет, сколько кубических единиц содержит объем этого параллелепипеда. Несколько позже ученикам дается более сокращенная формулировка этого правила: „объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его длины, ширины и высоты".

После того как ученики хорошо осознают правило измерения объема прямоугольного параллелепипеда, применивши его к физическому измерению объема какой-нибудь коробки, измерению кубатуры комнаты и т. д., можно вывести с детьми IV класса правило для измерения объема куба. А это правило ученики сумеют использовать, между прочим, и для составления таблицы кубических мер.

Некоторые другие объемы

В том же духе можно познакомить учеников с объемом произвольной прямой призмы и прямого цилиндра (используя накопленные сведения об измерении площадей). Здесь предпочтительно укладывать кубы вертикальными столбиками на каждой квадратной единице, заключенной в площади основания.

Что касается измерения объемов пирамиды, конуса и шара, то, чтобы не перегружать программы наглядной геометрии, можно ограничиться указанием готовых правил, иллюстрируя эти правила примерами и наглядными моделями.

ОГЛАВЛЕНИЕ