К.С. БАРЫБИН

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРЫ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ
ВОСЬМИЛЕТНЕЙ
ШКОЛЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „ПРОСВЕЩЕНИЕ"

МОСКВА — 1965

Книга рекомендована к изданию
Учебно-методическим Советом Министерства просвещения РСФСР.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В предлагаемом пособии сделана попытка дать представление о способах преподавания алгебры в восьмилетней школе. Книга предназначена для начинающих учителей и студентов педвузов. В ней во многих случаях материал изложен так, что его можно использовать при подготовке к уроку. Часто приводятся наводящие вопросы, чтобы помочь учителю вести урок эвристически. Но необходимо помнить, что эти вопросы примерные и, чем больше ученики при изучении нового материала проявят инициативы, тем меньше понадобится давать им таких вопросов. В книге приводятся образцы решения типовых упражнений, что может помочь начинающему учителю установить систему записи.

Современная математика непрерывно развивается, поэтому меняются и требования к школьному преподаванию математики. Учитель может, не изменяя программы школы, повысить теоретический уровень преподавания. В частности, он может познакомить учеников с понятием множества, ввести соответствующую символику, более

...рность доцен-
...ечаеву, А. Я. Маргулису, учителям Е. М. Больсену, А. В. Кузнецовой, А. И. Новоселовой, давшим много ценных указаний.

Все критические замечания и пожелания автор просит направлять по адресу: Москва, И-18, 3-й проезд Марьиной рощи, д. 41, издательство «Просвещение», редакция математики.

Автор

ГЛАВА I
ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. КУРС АЛГЕБРЫ ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ

Программа восьмилетней школы по алгебре охватывает следующие вопросы.

1. Развитие понятия числа. Ученики в V классе получают понятие о множестве целых и дробных положительных чисел. В VI классе множество положительных чисел расширяется до множества рациональных чисел. А в VII классе в связи с необходимостью решать квадратные уравнения вида $x^2 = a$, где $a \geqslant 0$, учащиеся знакомятся с квадратным корнем и приближенным вычислением квадратных корней из чисел (понятие иррационального числа не дается).

2. Тождественные преобразования. Учащиеся должны овладеть навыком действий с рациональными числами, многочленами и алгебраическими дробями. Действия с квадратными корнями ограничиваются только простейшими, которые могут встретиться при решении квадратных уравнений и геометрических задач.

3. Уравнения. В восьмилетней школе ученики должны усвоить составление уравнений по тексту задачи и решение уравнений первой, второй степени и систем уравнений. В программе уделено большое внимание приближенному решению уравнений, в основном графическим способом.

4. Функции. В VI—VIII классах изучают прямоугольную систему координат, простейшие функции, основные свойства их и построение графиков. Графики функций ученики должны уметь не только строить, но и читать, применять к решению практических вопросов и использовать как иллюстрацию при решении уравнений, а также систем уравнений.

По действующей программе изучение алгебры начинается [illegible]
класса. В последнее время наметилась тен[illegible]
му введению алгебры в [illegible]

пробуют вводить элементы алгебры даже в I классе (сравнение величин; символы $>$, $=$, $<$; буквенная символика; решение простейших уравнений и применение их к решению задач, последнее время — элементы множеств и логики). Проводится эксперимент изучения в IV классе таких элементов алгебры, как линейные уравнения и их решение, решение задач с буквенными данными, вычисление значений буквенных выражений, отрицательные числа и действия с ними (учебник математики для IV класса К. И. Нешкова).

Большие изменения произошли в преподавании алгебры за рубежом под влиянием идей группы французских математиков, объединившихся под псевдонимом Н. Бурбаки. Фундаментальная роль в этих работах отводится понятию математической структуры. К этому понятию относят множество элементов, в том числе и таких, природа которых не определена. Чтобы определить структуру множества, задают отношения, в которых находятся его элементы, подмножества или сами множества.

Во Франции алгебру начинают изучать в IV классе (7-й год обучения), параллельно проходят арифметику и геометрию. В учебнике B r e a r d' а курс V французского класса (6-й год обучения) начинается с изучения множеств: понятие множества, подмножества, суммы и пересечения множеств.

Этот материал закрепляется на легких упражнениях, и затем множества используются в геометрии и арифметике. Благодаря применению символов, материал изложен компактно, кратко и наглядно.

Например, вместо формулировки, что два равенства можно сложить почленно, дается запись $a = b,\ c = d \Rightarrow a + c = b + d$.

Для рациональных чисел применяют термин «относительные числа», а правила действий интерпретируются с помощью векторов (знакомство с векторами проводится раньше в геометрии).

В IV французском классе (7-й год обучения) дается понятие функции на множестве рациональных чисел, вводятся символы $x \to y,\ y = f(x)$.

Символ $f(x)$ используется и в уравнениях. Например, краткая запись $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ означает: если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же выражение $h(x)$, то получим уравнение, равносильное данному.

Последние годы в США идет пересмотр программ школьного курса математики, цель которого — приблизить их к современным требованиям жизни, отразить в программе современные научные идеи. В основном это коснулось курса алгебры. Появилось несколько типов программ, по которым начали работать экспериментальные классы. Наибольший интерес представляет программа *SMSG* (*исследовательская группа школьной математики*). По этой программе в 1959/60 учебном году начали работу в V—XII классах более 400 учителей и 42 000 учеников.

Программа *SMSG* значительно повышает теоретический уровень преподавания, уделяет большое внимание логической структуре математики. Появились в программе новые темы: в VII классе «Статистика и графики», в VIII — «Вероятность», в IX — «Множества и числовая ось», «Суждения и свойства операций», «Открытые и закрытые суждения», в XI — «Алгебраические структуры», в XII — «Матричные операции», «Алгебра 2× 2 матриц», «Матрицы и линейные системы».

В сборнике статей «Революция в школьной математике», Вашингтон, 1961, в статье В. Е. Фергюсона говорится, что по новой программе сильные и средние ученики работают с увлечением, интерес к математике поднялся. От слабых учеников не требуют усвоения тонкостей логических рассуждений, считается достаточным, если такой ученик справляется с традиционным курсом.

§ 2. ИНДУКЦИЯ И ДЕДУКЦИЯ. АНАЛОГИЯ. АНАЛИЗ И СИНТЕЗ

Индукция и дедукция, анализ и синтез — это логические основания *познания*, и в частности обучения. Индукция (буквальный перевод с латинского языка — наведение) состоит в том, что на основании частных наблюдений делается общее заключение. Различают полную и неполную индукцию. В первом случае рассматривают все частные случаи и делают обобщение. Во втором — не все и тоже делают обобщение, которое распространяют и на нерассмотренные случаи. Поэтому выводы, полученные с помощью неполной индукции, вероятностны.

Дедукция (выведение) состоит в том, что заключение делается от общего к частному на основании известного, ранее изученного.

В противоположность индукции выводы, полученные с помощью дедукции, строго обоснованные. Они примерно строятся так. Пусть известно, что «Люберцы находятся в Московской области» (1) и «Иванов живет в Люберцах» (2). Из (1) и (2) дедуктивно следует логическое заключение: «Иванов живет в Московской области».

В процессе обучения применяется и индукция и дедукция. При изложении теоретического материала в восьмилетней школе используется в основном неполная индукция. Ученики подводятся к правилам, определениям путем рассмотрения частных, конкретных примеров. С помощью неполной индукции ученики находят, открывают то, что уже известно, утверждено, поэтому эти выводы не вызывают сомнений. Но обоснование выводов дается по возможности дедуктивно. По мере продвижения вперед дедуктивный метод в изложении усиливается. Упражнения выполняются на основании полученных правил, теорем, то есть дедуктивно.

При выводе новых положений дедуктивный метод мало применяется, так как ученики не подготовлены к нему и учителю трудно возбудить у них интерес при таком изложении. Чрезмерное усиление дедукции на первых этапах обучения может быть даже вредным. П. Л. Чебышев говорил, что строгость логического обоснования, примененная преждевременно в большой дозе, поведет к «умственной трусости».

Обычно в преподавании алгебры в восьмилетней школе сочетаются оба метода.

В школьном курсе алгебры используется и аналогия, при которой заключение делается по сходству. При аналогии рассматриваются не все причины, обусловливающие явление, а только часть их, поэтому аналогию нельзя считать средством доказательства.

При изложении алгебры в VI– VIII классах часто используется аналогия. Особенно на первых порах проводится аналогия алгебраических выводов с выводами в арифметике. С помощью аналогии ученики легко усваивают и некоторые понятия. Например, на доске написано $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, а ученику надо вычислить 5^3. По аналогии он пишет $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Сделав несколько таких примеров с различными показателями, ученик усваивает смысл символа степени. Особенно возрастает роль аналогии при самостоятельной работе ученика дома. Домашняя работа должна содержать задание, часть которого можно сделать по аналогии с тем, что было на уроке. Аналогия помогает учащимся разобраться и как решать упражнения нового типа.

При решении задач и упражнений в алгебре применяют аналитический и синтетический методы. При аналитическом методе решение выполняется от неизвестного к известному, при синтетическом от известного к неизвестному.

В арифметике анализ задачи дает возможность найти план решения, но решается она синтетически, то есть от известного к неизвестному. В алгебре анализ — средство решения задач. Например, при составлении уравнения по условию задачи выбирают и обозначают неизвестное; связывая неизвестное с данными условия, получают уравнение. При этом идут от неизвестного к известному, то есть аналитическим путем. Затем, решая уравнение, находят неизвестное, причем идут от известного к неизвестному, то есть решают синтетически.

Анализ полезен и при доказательстве теорем, которые в учебниках обычно доказываются синтетически.

Перед доказательством теоремы учитель может провести анализ ее заключения. Анализ при доказательстве теорем приучает учащихся находить доказательство самим и превращает доказательство в целенаправленный процесс.

В качестве примера рассмотрим теорему Виета.

Дано: x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Доказать:

$$1)\ x_1 + x_2 = -p,$$

$$2)\ x_1 x_2 = q.$$

Анализ. Из записи видно, что надо найти зависимость между корнями x_1 и x_2 и коэффициентами уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Корни x_1 и x_2 связаны с коэффициентами p и q равенствами:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ x_2 &= -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned} \qquad (1).$$

Далее ученики сами могут сказать, что надо сделать.

Если они не смогут самостоятельно провести анализ, то можно помочь им и дать наводящие вопросы:

Между чем надо установить зависимость в теореме Виета?

Какая зависимость известна между x_1, x_2 и коэффициентами p и q уравнения $x^2 + px + q = 0$?

После этих вопросов на доске появится запись (1) и последует вопрос.

Что надо сделать с равенствами (1), чтобы доказать теорему Виета?

Чтобы приучить учащихся к анализу, многие учителя требуют от них при решении упражнений и задач предварительного плана решения.

§ 3. АЛГОРИТМЫ В АЛГЕБРЕ

Само понятие алгоритма появилось значительно раньше употребляемого ныне термина. Одним из первых дал правила для решения уравнений в начале IX в. математик Мухаммед аль-Хорезми. По его имени совокупность этих правил в средние века начали называть Альхваризми. Впоследствии в результате смешения этого названия с греческим словом aritmos — число — появился термин «алгоритм».

В современной математике алгоритмом называется всякий математический процесс, который выполняется по строго определенным правилам. Например, алгоритм Евклида заключается в последовательном делении двух чисел, в результате чего находят общий делитель этих чисел.

Путь решения задачи данного типа найден, если для ее решения установлен определенный алгоритм.

Для тождественных преобразований, решения уравнений в алгебре даются правила, которые надо рассматривать как алгоритмы. От знания их зависит усвоение курса алгебры.

Учителя часто спрашивают учащихся правило и решение примеров раздельно. Например, ученик сперва говорит правило, потом решает или наоборот. Для более сознательного усвоения алгоритмов в алгебре полезно требовать от ученика рассказывать словами правила, что он делает, соединяя правило с решением в органическсе целое.

Например, ученик выполняет умножение многочленов $(3a + 5) \cdot (8a - 7)$. Он свои действия сопровождает пояснением: «Умножаем все члены первого многочлена на $8a$, получаем $24a^2 + 40a$ (пишет); затем умножаем на -7, получаем $-21a - 35$» и т. д.

Другой пример: $(-7) + (-5)$.

Ученик рассказывает: «Складываем два числа с одинаковыми знаками, общий знак минус; сумма абсолютных величин 12; получили -12».

От учеников требуют такое применение алгоритма, пока он недостаточно усвоен. В дальнейшем, когда навык выработан, надсбность в подробном объяснении возникает только в случае ошибки.

Алгоритм задается или описанием, или формулой, или совокупностью их. Например, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — формула, дающая алгоритм возведения в квадрат двучлена. Словесное правило возведения в квадрат полностью совпадает с алгоритмом, выраженным формулой. В этом случае правило помогает при работе.

Напротив, формула $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ передает алгоритм деления дробей лучше, чем традиционное правило: «Чтобы разделить дробь на дробь, надо числитель первой дроби умножить на знаменатель второй, а знаменатель первой дроби на числитель второй и первое произведение сделать числителем, а второе знаменателем дроби».

В приведенном правиле неверно указан порядок операций: только после того как получены оба произведения, сказано, что их надо написать в числителе и знаменателе полученной дроби. В алгебре это незаметно, так как навык действий с дробями уже приобретен в арифметике и учащиеся практически правилом не пользуются.

По-видимому, требовать от учеников заучивать правила следует только в тех случаях, когда они точно выражают алгоритм.

§ 4. ФОРМИРОВАНИЕ НОВЫХ ПОНЯТИЙ, УМЕНИЙ, НАВЫКОВ

Требования к школьным определениям:

1) определение должно содержать все необходимые признаки понятия; 2) совокупность всех признаков должна быть достаточной; 3) определение должно быть последовательным и кратким; 4) определение должно быть доступным пониманию школьников.

На уроке, подводя учеников к определению, учитель ставит задачу найти признаки нового понятия. С помощью учителя они устанавливают один за другим признаки, отбрасывая случайные. Учитель сообщает термин, ученики формулируют определение нового понятия, если надо, учитель его уточняет.

В алгебре обычно дают несколько примеров, которые должны подвести к понятию. Так, чтобы подвести шестиклассников к понятию «одночлен», на доске пишут несколько выражений, например $2a^2$, $-3ab^4$, $\frac{2}{3}a^3b^2c$, a^2b. Затем путем вопросов к ученикам помогают им установить, что каждое из них — произведение числа и букв, возведенных в степень. Это существенный признак. Кроме того, следует выделить случайные признаки: коэффициент может быть целый и дробный, положительный и отрицательный; показатели степени 1; 2; 3; 4. После этого выделяется существенный признак и дается определение.

В дальнейшем в случае ошибки в ответе ученика всегда следует привести пример, опровергающий неверный ответ. Например, ученик сказал, что $c(a+b)$ — одночлен, тогда учитель спрашивает ученика: «Что называется одночленом?» Затем ставит вопрос: «Какие содержатся действия в первом выражении?» Тогда ученик легко заметит и поймет свою ошибку.

Усвоение понятия происходит не в процессе заучивания, а в процессе самостоятельных поисков учащимся существенных признаков этого понятия. При этом следует давать больше примеров, на основании которых делается обобщение. Обобщение из одного примера выводить нельзя.

Способность абстрагировать у детей одного и то же возраста весьма различна. Поэтому часть учеников схватывает новое понятие сразу, а для других его приходится повторять на протяжении нескольких уроков (принцип повторяемости). *Умение* — применение знаний на практике; в частности, в алгебре умение — применение знаний к решению задач и других упражнений.

Навык — умение, которое под влиянием упражнений становится почти автоматическим.

Рассмотрим этапы формирования умения на уроке. Сперва устанавливается правило (алгоритм). Учитель дает пример, решает его сам или ученик и разъясняет каждый шаг, потом 2—3 школьника решают на доске упражнения на новое правило, рассказывая, что делают. В этой части все ученики осваивают новые термины и алгоритм. После этого ученикам дается работа, которую последние выполняют самостоятельно, а после каждого шага на доске появляется контрольная запись решения.

На решение первого примера учитель всегда должен обращать особое внимание, каким бы простым ни был материал, так как из психологии известно, что первое впечатление — самое сильное. Поэтому следует четко продумать, какой пример взять первым, как провести объяснение, какие термины применить и при этом дать образец записи.

Упражнения, следующие за первым, должны идти под контролем учителя. Дело в том, что в этот момент в мозгу ученика происходит «замыкание», то есть образование новых нервных путей в коре головного мозга. Если ученик неправильно решает первые упражнения по новой теме, делает в них ошибки, и ошибки остаются невыправленными, то у него прокладываются неправильные нервные пути. Ученика придется переучивать, а это труднее, чем учить. Поэтому в стадии формирования понятий и навыков очень важно, чтобы ошибки не остались незамеченными и невыправленными. Учитель на этом этапе должен тщательно следить и контролировать работу учащихся, чаще просматривать работы учеников с неустойчивыми умениями. Своевременное контролирование и исправление каждого ошибочного шага в работе производится автоматически при программированном обучении. Ту же цель преследуют и комментированные упражнения, о чем будет речь в следующих параграфах.

В этой стадии работы над умением важно, чтобы каждая ошибка учащихся не только исправлялась, но и опровергалась учителем, что легко сделать при выполнении комментированных упражнений и сложно предусмотреть все возможные ошибки в программированном учебнике.

Скорость формирований понятий и умений у разных учеников класса различна. Это создает определенные затруднения в работе учителя. Он должен следить за работой каждого ученика в классе, и для тех, кто быстро схватывает новое, учителю нужно иметь дополнительный, рассчитанный на их силы материал.

Умение переходит в навык после ряда упражнений нарастающей сложности, в этом случае количество переходит в качество.

Большое значение имеет система упражнений в задачнике. Первые упражнения должны быть простыми, на которых усваивается механизм нового алгоритма. Затем даются упражнения, в которых новый алгоритм переплетается с ранее известными. На этом этапе большая группа учащихся вновь будет испытывать затруднения. Такие упражнения надо вести, сочетая все более и более глубокое усвоение нового с повторением старого материала.

Неравный темп работы и усвоения у отдельных групп учащихся усложняет работу учителя. Есть попытки делить учащихся класса на группы (примерно три и больше) и вести урок так, чтобы часть урока учитель работал с одной группой, в то время как другие группы работают самостоятельно по заданию. При введении программированных учебников темп работы ученика зависит от него самого и эта сложность снимается сама собой.

§ 5. ОСНОВЫ ПРОГРАММИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ

В последние годы происходит бурное развитие кибернетики, она проникает во все области науки и техники. Кибернетика касается всех самоуправляющихся систем, независимо от того, что это станок-автомат, завод, класс, живой организм и пр. Схематически принцип самоуправляющейся системы следующий (рис. 1). Имеются управляющие и управляемые устройства. Например, управляющим устройством будет администрация цеха, управляемое — цех, рабочие, станки. От управляющего устройства поступает в цех *информация* (план, чертежи, наряды на работу и т. д.), управляемое устройство

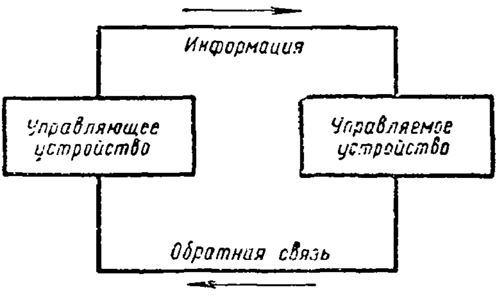


Рис. 1

перерабатывает эту информацию и, обратно, к администрации поступает сообщение о выполнении задания (*обратная связь*). Обратная связь дает возможность правильно работать всей системе, вести учет и вносить своевременно коррективы.

На уроке ученики получают некоторую информацию: новое понятие, новое свойство, прием решения и т. д. Они перерабатывают ее, затем дают ответы на какие-то вопросы (теория, упражнения) и т. д. По ответам учитель судит, верно ли понято, сделано. Это обратная связь. Будем различать два вида ее.

1) Обратная связь первого рода, когда ученик проверяет себя, узнает, верно ли он понимает, верно ли решил, то есть ведет самоконтроль (назовем условно «обратная связь типа *самоконтроль*»).

2) Обратная связь второго рода, когда учитель по ответам учеников (устным или письменным) узнает, как ученики понимают, то есть ведет внешний контроль (назовем условно «обратная связь типа *внешний контроль*»).

По принципу самоуправляющейся системы строится программированное обучение. Оно получило распространение в США, где в некоторых школах введены специальные программированные учебники.

Принцип их составления следующий. Отбирается материал по теме, устанавливается, какие понятия и умения должны быть усвоены учащимися. Каждое понятие, каждое умение разбивается на небольшие части (шаги или кадры), соответствующие не целому понятию, а его элементу, например в определении степени шаг (кадр) — что такое показатель степени. Продумав кадр, ученик рассмотрит какой-нибудь отдельный факт и в том же кадре получит маленькое контрольное упражнение.

При программированном обучении ученик после разбора каждого кадра должен проверить, верно ли он понял, сверив свой ответ на контрольный вопрос с ответом в учебнике. В зависимости от формы проверки ответа разработаны два типа учебников. Система учебников первого типа называется линейной. В них на странице две колонки: в одной—текст, в другой—ответы. Колонку ответов прикрывают листом бумаги. Ученик читает текст одного кадра, вдумывается и отвечает на контрольный вопрос. По ответу в колонке ответов он сразу узнает, верно ли он понял кадр. Здесь осуществляется обратная связь первого типа (типа непрерывный самоконтроль). Это один из основных моментов программированного обучения, ученик должен воспринимать правильно каждый факт. Если он обнаружит ошибку в своем представлении позднее, то ему придется затратить время на переучивание. В программированном учебнике используется и момент повторяемости. Система вопросов подобрана в нем так, что вопрос на основное понятие встретится еще раз через несколько кадров. Таким образом ученик закрепит это понятие и вновь проверит себя.

В учебниках второго типа на контролирующий вопрос дано несколько ответов (разветвленная система). Ученик выбирает из них верный ответ; в случае ошибки учебник отсылает его к определенной странице, где разъяснена сделанная ошибка.

В обоих типах учебников, помимо контрольных вопросов к кадрам, применяются и контрольные работы.

Приведем отрывок из такого учебника, в котором рассматривается тема «Степень» (автор Бернард Базеску. Издание центра программированного обучения США).

	1. $6 \times 6 = 36$ $4 \times 4 = \square$
1. 16	2. Другой способ записи 4×4 есть 4^2 7×7 можно записать 7^2 $7^2 = \square$
2. 7×7 или 49	3. $6^2 = \square \times \square = 36$
3. 6 6	4. $A = 9^2 = 9 \times 9 = 81$ $B = 9^2 = 9 + 9 = 18$ Что верно: A или B?
4. A	5. $7^2 = 7 \times 7$ $7^3 = 7 \times 7 \times 7$ $7^5 = \square$
5. $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$	6. Что верно: A, B или C? $A = 5^3 = 5 \times 5$ $B = 5^3 = 5 \times 5 \times 5$ $C = 5^3 = 5 + 5 + 5$
6. B	7. Малая цифра, написанная справа от цифры 4 в 4^2, называется показателем степени. В 5^2 показатель степени $\square$
7. 2	8. В 10^5 показатель степени $\square$
8. 5	9. В 6^3 $\square$ есть 3
9. Показатель степени	10. 5^8 называется «восьмая степень пяти» 5^7 называется « $\square$ степень пяти» 5^4 называется « $\square$ степень пяти»

Продолжение

10. Четвертая степень	11. Мы называем 5^3 «$\square$ пяти» 3 есть $\square$
11. Третья степень. Показатель степени	12. 4^2 (или 4×4) называется «квадрат четырех» 5^2 называется «квадрат $\square$»
12. Пяти	13. 9^2 называется «квадратом девяти» 3^2 называется $\square$
13. Квадрат трех	14. $3^2 = 3 \times 3$ (квадрат трех) $3^3 = 3 \times 3 \times 3$ (третья степень трех) $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$ (четвертая степень трех) $3^5 = \square$ ($\square$)
14. $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ пятая степень трех	15. $6^2 = 6 \times 6 = 36$ (квадрат шести) $5^2 = \square$
15. 5×5 25	16. 5^2 называется «квадрат пяти» В 5^2 2 есть $\square$
16. Показатель степени	17. $8 \times 8 = 8^2$ (квадрат восьми) $8 \times 8 \times 8 = \square$ (третья степень восьми) $8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 = \square$ ($\square$ степень восьми)
17. 8^3 8^6 шестая	18. $4 \times 4 = 4^2$ $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$ $4 \times 4 \times 4 = 4^{\square}$
18. 3	19. $1^2 = 1$ $1^3 = \square$ $1^{103} = \square$
19. 1 1	20. Проще записать $6+6+6+6+6+6+6+6$ есть 6×8 Проще записать $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$ есть $\square$
20. 6^8	21. В 10^4 показатель степени есть $\square$ Мы называем 10 основанием степени

В учебниках второго типа на контролирующий вопрос дано несколько ответов (разветвленная система). Ученик выбирает из них верный ответ; в случае ошибки учебник отсылает его к определенной странице, где разъяснена сделанная ошибка.

В обоих типах учебников, помимо контрольных вопросов к кадрам, применяются и контрольные работы.

Приведем отрывок из такого учебника, в котором рассматривается тема «Степень» (автор Бернард Базеску. Издание центра программированного обучения США).

	1. $6 \times 6 = 36$ $4 \times 4 = \square$
1. 16	2. Другой способ записи 4×4 есть 4^2 7×7 можно записать 7^2 $7^2 = \square$
2. 7×7 или 49	3. $6^2 = \square \times \square = 36$
3. 6 6	4. $A = 9^2 = 9 \times 9 = 81$ $B = 9^2 = 9 + 9 = 18$ Что верно: A или B?
4. A	5. $7^2 = 7 \times 7$ $7^3 = 7 \times 7 \times 7$ $7^5 = \square$
5. $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$	6. Что верно: A, B или C? $A = 5^3 = 5 \times 5$ $B = 5^3 = 5 \times 5 \times 5$ $C = 5^3 = 5 + 5 + 5$
6. B	7. Малая цифра, написанная справа от цифры 4 в 4^2, называется показателем степени. В 5^2 показатель степени $\square$
7. 2	8. В 10^5 показатель степени $\square$
8. 5	9. В 6^3 $\square$ есть 3
9. Показатель степени	10. 5^8 называется «восьмая степень пяти» 5^7 называется « $\square$ степень пяти» 5^4 называется « $\square$ степень пяти»

10. Четвертая степень	11. Мы называем 5^3 «$\square$ пяти» 3 есть $\square$
11. Третья степень. Показатель степени	12. 4^2 (или 4×4) называется «квадрат четырех» 5^2 называется «квадрат $\square$ »
12. Пяти	13. 9^2 называется «квадратом девяти» 3^2 называется $\square$
13. Квадрат трех	14. $3^2 = 3 \times 3$ (квадрат трех) $3^3 = 3 \times 3 \times 3$ (третья степень трех) $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$ (четвертая степень трех) $3^5 = \square$ ($\square$)
14. $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ пятая степень трех	15. $6^2 = 6 \times 6 = 36$ (квадрат шести) $5^2 = \square$
15. 5×5 25	16. 5^2 называется «квадрат пяти» В 5^2 2 есть $\square$
16. Показатель степени	17. $8 \times 8 = 8^2$ (квадрат восьми) $8 \times 8 \times 8 = \square$ (третья степень восьми) $8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 = \square$ ($\square$ степень восьми)
17. 8^3 8^6 шестая	18. $4 \times 4 = 4^2$ $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$ $4 \times 4 \times 4 = 4^{\square}$
18. 3	19. $1^2 = 1$ $1^3 = \square$ $1^{103} = \square$
19. 1 1	20. Проще записать $6+6+6+6+6+6+6+6$ есть 6×8 Проще записать $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$ есть $\square$
20. 6^8	21. В 10^4 показатель степени есть $\square$ Мы называем 10 основанием степени

Продолжение

21. 4	22. У 2^5 показатель степени есть $\square$ Основание степени $\square$
22. 5 2	23. $15^3 = 15 \times 15 \times 15$ Показатель степени есть 3 $\square$ степени есть 15
23. Основание	24. $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ основание степени $\square$ показатель степени $\square$ мы берем $\square$ $\dfrac{\text{сомножителем}}{\text{слагаемым}}$ три раза
24. 2 4 сомножителем основание	25. $(0{,}25)^1$ $\square$ — основание степени

Всего 207 кадров

Последние кадры на действия со степенями

204.	205. $\dfrac{10^5 \times 10^{-2}}{10^{-4}} = \dfrac{10^A}{10^B} = 10^C$ $A = \square$ $B = \square$ $C = \square$
205. $A = 3$ $B = -4$ $C = 7$	206. $\dfrac{10^{-2} \times (10^2)^3}{10^4} = \dfrac{\square \times \square}{10^4} = \dfrac{10^{\square}}{10^4} = 10^{\square}$
206. 10^{-2} 10^6 4 0	207. (пример несколько сложнее, чем в 206)

Учебник построен по линейной системе. Отдельные пункты 1, 2 3 и т. д. представляют шаги или кадры.

Возьмем кадр 1. Ученик получает информацию о записи $6 \cdot 6 = 36$. По аналогии должен написать $4 \cdot 4 = 16$. В этой части он перерабатывает информации, но он может сделать верно или неверно, это устанавливается с помощью обратной связи (ответ 16).

Первое своеобразие. Учащийся работает по учебнику *молча*. Проделывая упражнения по аналогии, он устанавливает признаки нового понятия, смысл символов. Он усваивает в первых кадрах не терминологию, а символику. В дальнейшем дается минимум терминов без определения их. Упор сделан на работу над символами. Отсутствие пространных определений не случайно. Например, по мнению Ж. Адамара, «родной язык мешает языку математическому». Под последним он понимает не математическую терминологию и умение рассказать о математическом факте, а символику, умение ее понимать и применять.

Программированное обучение в значительной степени автоматизирует процесс преподавания. Какое место займет программированное обучение в школе, сейчас еще сказать нельзя. Например, сотрудник Центра программированного обучения США Д. Макклелан говорит: «Все, чему можно научить, можно запрограммировать, можно автоматизировать». А другой сотрудник того же центра Комоский считает, что оно пригодно для изложения некоторых фактов, но последнее слово остается за учителем, кроме того, учитель определяет материал для программированного обучения.

При работе по программированным учебникам упражнений делают мало, степень их трудности не выше средней. Формируются в основном понятия и первоначальные умения.

Принципы программированного обучения не определяются формой учебника. Частично они могут быть осуществлены учителем без учебника, что практически и делается у нас в большей или меньшей степени. В значительной степени этот принцип используется в новых приемах работы учителей наших школ.

Последнее время появились обучающие машины. В машину закладывают карточки, содержащие информацию по теме, разбитую на шаги. В карточке имеется контрольный вопрос. Усвоив содержание карточки, ученик дает ответ на контрольный вопрос. Для этого на обучающей машине имеется 3—4 кнопки, над каждой из которых помещен ответ, один из них верный, другие обычно содержат ответы, предусматривающие возможные ошибки. Если ученик нажал кнопку с верным ответом, то карточка опускается и вместо нее появляется вторая карточка, одновременно меняются и ответы над кнопками. Так ученик перебирает все карточки по теме. Если же ученик нажимает кнопку, над которой расположен неверный ответ, то машина дает дополнительную информацию, в чем состоит ошибка и что надо еще прочесть (нажатие кнопки или включает магнитофон, или механизм, выдающий карточку с дополнительной информацией). В случае несовпадения ответа ученика ни с одним из приведенных он еще раз прочитывает материал в карточке, решает и дает новый ответ.

§ 6. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОБУЧЕНИЯ НА УРОКЕ

Рассмотрим методы и приемы, применяемые при формировании понятий и выработке умений.

При первичном объяснении нового следует соблюдать следующие принципы дидактики:

1) на одном уроке не давать больше одной трудности;

2) новые понятия (алгоритмы) разбивать на шаги (кадрирование);

3) проверять понимание каждого кадра или шага (обратная связь);

4) понятие (алгоритм), данное на уроке, на нескольких последующих уроках повторяют еще.

В основном различают два приема объяснения нового: лекционный и эвристический. Лекционный состоит в последовательном изложении учителем фактов без привлечения учеников к разбору положений. Для учащихся восьмилетней школы этот метод непригоден. Из психологии известно, что у школьников пробуждается интерес к новому только тогда, когда они сами делают усилие найти новое, сами его открывают.

Эту цель и преследует эвристический метод, при котором учащиеся из приведенных примеров делают заключения, подводятся учителем к открытию нового и сами делают выводы. Отсюда и название метода (от греческого «эврика» — нашел).

Метод состоит в следующем. Учитель ставит перед классом вопрос, например: «Как выполнить умножение $a^2 \cdot a^3$?» Возможно, кто-нибудь из учащихся догадается, что можно использовать определение степени. Если нет, то учитель дает наводящий вопрос:» Что такое a^2, a^3? как их записать?» Возможно, что после вопроса они найдут, что $a^2 \cdot a^3 = aa \cdot aaa = aaaaa = a^5$. Если нет, то даются опять наводящие вопросы, пока не получат нужный результат. Затем внимание учеников обращают на связь между показателями, возможно, они заметят, что $2 + 3 = 5$. Делают еще один-два однотипных примера, опять выясняют связь между показателями. В заключение формулируют правило умножения и переходят к решению упражнений на основании установленного алгоритма.

Эффективность эвристического метода зависит от того, сколько учеников активно участвует в работе. Это число возрастает, если вопросы ставятся ясно, четко, понятно, подбираются характерные, но не сложные примеры. Полезно при ответе одного ученика спросить другого, верно ли это, почему это так и т. п. Такие вопросы усиливают внимание учащихся и дают возможность судить о понимании ими изложения.

Наводящими вопросами злоупотреблять не следует; чем их меньше, тем усиленнее работает ученик. Идеальным будет случай, когда учитель только ставит вопрос (задачу), а учащиеся его разбирают, учитель же (если надо) вносит коррективы.

По алгебре большая часть времени расходуется на решение примеров и задач с целью развития умений, при этом необходимо, чтобы число ошибок у школьников было как можно меньше, а невыправленных ошибок на уроке не оставлять.

В процессе обучения огромное значение имеет контролирование и регулирование его. В первую очередь учителю необходимо иметь представление об усвоении учащимися материала, изучаемого на уроке. Оно создается на основании ответов учащихся, просмотра тетрадей, наблюдения за работой учеников и т. д. (обратная связь типа *внешний контроль*).

Но не меньшее значение имеет и самоконтроль учащимися каждого шага своей работы в классе (обратная связь типа *самоконтроль*).

Рассмотрим различные приемы формирования умений.

1. Работа на доске. Ученик вызывается к доске, получает задание решить упражнение и решает его, сопровождая необходимыми пояснениями. Если он затрудняется решить, то учитель вызывает кого-либо из других учеников, который и говорит, что делать, и ученик у доски начинает работать.

Если и другие ученики затрудняются выполнить задание, то учитель задает вопросы, которые помогают отыскать путь решения примера или задачи. В редких случаях, например, когда учитель хочет ввести определенную форму записи, он решает задачу на доске сам.

В этом приеме работы преобладает информация. Каждый ученик в любой момент может взглянуть на доску и сличить свою работу с работой на доске или просто списать.

Чтобы усилить обратную связь второго типа (*внешний контроль*), учитель задает отдельным ученикам вопросы и по их ответам проверяет понимание ими хода решения.

Имеется и обратная связь первого типа *непрерывный самоконтроль*, если ученики класса приучены учителем работать самостоятельно.

Обилие информации при таком виде обучения снижает ее ценность и тем самым понижает напряжение учащихся, при такой работе их внимание недостаточно сосредоточено. Не проверяя себя, многие ученики убеждены в том, что они все понимают.

2. Самостоятельная работа. Учащиеся получают задание и в определенное время должны его выполнить. Информация в этом виде работы или совершенно отсутствует, или сведена к минимуму (когда при работе в один вариант предварительно проведен анализ). Задание составляют обычно так, чтобы в нем содержалась часть, с которой справится средний ученик. Кроме того, добавляется еще вопрос, задача или пример для тех, кто быстро сделает основную часть работы. Таким образом, во время, отведенное на работу, все ученики будут напряженно работать.

Такие задания можно давать в начале или в середине урока, но чаще их предлагают во второй половине урока. Если остается время, то следует проверить основную часть работы. Обычно учитель вызывает к доске ученика и тот записывает решение на доске (если даны два варианта, то вызывают двух учеников). Остальные сверяют свое решение. Таким образом вступает в действие обратная связь первого типа (*непрерывный самоконтроль*). Но она часто запаздывает. Пусть решали пример, содержащий три шага. Ученик проверяет свое решение только после выполнения всех трех шагов. Если он сделал ошибку в первом шаге, то обратная связь для него запоздала и он наспех по записи на доске иногда неосознанно сделает исправление.

Часто самостоятельную работу, предложенную в конце урока, в классе не успевают рассмотреть и учитель берет тетради на проверку (целиком или выборочно). В этом случае преобладает обратния связь второго типа (*внешний контроль*).

Чтобы предупредить возможность ошибок в самостоятельной работе, учитель следит за работой отдельных учащихся, оказывает им помощь, например, напоминает им, что делать дальше, указывает нужное правило, подчеркивает ошибку и т. д.

3. Промежуточные формы работы. В рассмотренных формах работы мало используется обратная связь первого типа. Поэтому в последнее время распространились приемы работы, занимающие промежуточное положение между двумя описанными, а именно:

а) комментированные упражнения, применяемые учителями в школах Липецка и Липецкой области (В. Н. Проваторова, Е. С. Тихомирова, Э. Р. Лахина и др.);

б) методы решения упражнений, применяемые учителями школ Ростова и Ростовской области (О. С. Шрамко, А. И. Лабинцева и др.).

Для этих приемов характерно разбиение решения примера на шаги (кадрирование), самостоятельный разбор кадра и запись ответа, наличие обратной связи (самоконтроля) после каждого шага или нескольких кадров, что дает возможность проверять ученику свою работу и понимание им материала.

Рассмотрим, как ведется комментирование.

Пример 1. Выполнить действия:

1) $3a^2b\cdot(-5ab^3)$; 2) $-4a^3b^2c\cdot 8ab$; 3) $-7{,}2a^4b^6c\cdot(-5abc^5)$.

Упражнения записаны одно под другим на доске слева. Учитель спрашивает с места одного ученика, что надо сделать, тот отвечает. Затем все учащиеся приступают к решению. Когда учитель убедился, что большинство учеников решило первое упражнение, он спрашивает ученика и тот с места рассказывает (комментирует): «Умножаем 3 на —5, получаем —15; a^2 на a, получаем a^3; b на b^3, получаем b^4. Получили — $15a^3b^4$».

Все сказанное учеником учитель записывает на доске. Таким образом, в первой стадии решения ученики работают самостоятельно, записи на доске нет. В этом случае тот ученик, который еще не усвоил этот материал и убедился в этом, внимательней отнесется к объяснению решения и часто со следующего примера начнет решать самостоятельно. Контрольная запись — это обратная связь, по которой решившие проверяют свое решение, а не решившие получают информацию, как решить.

Аналогично проводится решение второго и третьего упражнений. Если пример сложнее, то объяснение дробится на части—шаги.

Пример 2. Выполнить действия:

$$(3a^2 - 15a + 7) - (2a^2 - 8a - 6).$$

Решение разбивается на два шага. В первом из серии таких однотипных примеров сперва делается краткий анализ. Ученик с места говорит, что надо раскрыть скобки и результат упростить. Приступают к решению. Когда учитель увидел, что большинство раскрыло скобки, он спрашивает одного ученика и тот рассказывает (комментирует), что он сделал: «Перед первой скобкой подразумевается $+$, поэтому пишем все члены первого многочлена со своими знаками, получаем $3a^2—15a + 7$; перед второй скобкой стоит —, поэтому приписываем все члены второго многочлена с противоположными знаками, получаем $—2a^2 + 8a + 6$».

Одновременно учитель все записывает за учеником на доске. Затем дается время на упрощение и опять с места ученик комментирует, что сделал, а учитель за ним записывает. В заключение на доске появится примерно такая запись:

$$(3a^2 - 15a + 7) - (2a^2 - 8a - 6) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(здесь пауза)}}}{=} 3a^2 - 15a + 7 - 2a^2 + 8a + 6 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(здесь пауза)}}}{=}$$

$$= a^2 - 7a + 13.$$

Пример 3. Выполнить действия:

$$\frac{a-1}{4a+4} - \frac{a}{a-1} - \frac{3a^2+5}{4-4a^2}.$$

Решение делится на шаги: 1) подготовка к сложению (разложение на множители, смена знаков); отыскание общего знаменателя; 2) сложение дробей; 3) упрощение.

Больше всего возникнет затруднений у недостаточно подготовленного ученика на первом этапе решения. Поэтому перед решением одним учеником проводится анализ того, что надо сделать (разложить на множители, сменить знак в знаменателе третьей дроби). После анализа к решению приступит больше учащихся, чем тогда, когда они делают работу целиком самостоятельно. Через 2—3 минуты будет кто-то спрошен и учитель запишет сказанное на доске. После этого еще больше учащихся включится в решение примера.

Те же, кто сделал ошибку, исправят ее. Так по шагам появится запись:

$$\frac{a-1}{4a+4}-\frac{a}{a-1}-\frac{3a^2+5}{4-4a^2}\underset{\text{(пауза)}}{\overset{}{=}}\underset{\text{(I шаг)}}{\frac{a-1}{4(a+1)}-\frac{a}{a-1}+\frac{3a^2+5}{4(a^2-1)}}\underset{\text{(пауза)}}{=}$$

$$\underset{\text{(II шаг)}}{=\frac{(a-1)^2-4a(a+1)+(3a^2+5)}{4(a+1)(a-1)}}\underset{\text{(пауза)}}{=}\underset{\text{(III шаг)}}{\frac{a^2-2a+1-4a^2-4a+3a^2+5}{4(a+1)(a-1)}}\underset{\text{(пауза)}}{=}$$

$$=\frac{-6a+6}{4(a+1)(a-1)}=\underset{\text{(IV шаг)}}{\frac{-6(a-1)}{4(a+1)(a-1)}}=-\frac{3}{2(a+1)}.$$

При комментировании целесообразно соблюдать несколько правил.

1) Каждое упражнение разбивают на шаги (кадрирование).

В примере 1 решение каждого упражнения содержит только один шаг, в примере 2 решение разбито на два шага: в примере 3 — на четыре шага.

2) Учащиеся по возможности делают каждый шаг решения самостоятельно; на каждый шаг учитель дает им необходимое время (пауза).

3) Вызванный ученик комментирует этот шаг, то есть рассказывает, что он сделал. Учитель записывает сказанное на доске; учащиеся могут проверить свою работу, исправить ошибки. Кто не справился, получит при этом указание (информацию), как делать. Постоянно действует обратная связь обоих типов.

4) Подробно комментируется только шаг, содержащий новое. То, что уже усвоено, комментируется кратко — ученики сообщают только результат. Но в случае ошибки или разногласий в каком-либо кадре и старый материал комментируют подробно, опираясь на правило.

5) Начинать комментирование очередного шага надо тогда, когда большая часть учащихся его выполнила и перешла к следующему шагу. Одна из основных ошибок — преждевременное комментирование, что ведет к уменьшению числа учащихся, самостоятельно делающих работу.

6) Начинать комментировать должен ученик, уже выполнивший нужный шаг, лучше, если средний или слабый; если ученик не ответит сразу, вызывается другой.

7) Сильные ученики быстро усваивают материал и перестают слушать комментирование. Для них учитель должен иметь дополнительный материал: упражнения повышенной трудности, материал на повторение и т. д.

Иногда приходится комментировать одновременно два способа решения. Например, при составлении уравнения по тексту задачи ученики по-разному выбрали неизвестное. Тогда учитель делит доску на две части и ведет запись параллельно.

Указанный метод эффективен, если учитель им овладел, правильно кадрирует решение упражнений и правильно дозирует время на выполнение каждого кадра.

Помимо рассмотренного, имеется еще второй способ комментирования, когда один ученик работает и одновременно рассказывает, что делает. Записи на доске нет.

Такой способ успешно применяют на уроках русского языка и на уроках арифметики в начальных классах. На уроках алгебры решать, говорить и слушать одновременно затруднительно, поэтому в VI—VIII классах применяется первый способ.

В Ростовской области учителя применяют метод, преследующий аналогичные с комментированием цели.

При формировании умений и навыков, как и при комментировании, решение упражнения разбивают на шаги. Большинство учащихся решают это упражнение в тетрадях, а несколько учеников вызываются на первую парту и выполняют это упражнение на небольших досках (примерно, 0,5 $\times$ 0,8 *м*). Когда учитель сочтет нужным дать для учащихся класса контрольную запись, то вешается перед классом вспомогательная доска с решением, которое выполнил ученик, сидевший на первой парте. Остальные ученики могут проверить часть своего решения. В случае надобности учитель рассматривает детали решения, уточняет способ и т. д. Затем через некоторое время, когда большинство учеников сделают следующие шаги решения, к доске выходит второй ученик (третий и т. д.), решавший на маленькой доске. На этой доске уже рассмотренную часть решения стирают и оставляют только те шаги решения, которые ученики должны сверить.

Как и при комментировании, решение разбивают на шаги и после каждого шага дается контрольная запись, сделанная учениками, решавшими на вспомогательных досках. Поэтому во время упражнений в классе соблюдается полная тишина, что помогает ученикам работать сосредоточенно. Чтобы не потерять напрасно времени, учитель вызывает для работы на вспомогательных досках надежных учеников.

При первичном формировании навыка решение упражнения разбивают на шаги (кадры). По мере развития умения шаги укрупняются. Так, в начале при раскрытии скобок (пример 2) решение будет разбито на 2 шага и появятся две контрольные записи, а когда большинство учеников усвоит алгоритм, контрольная запись будет одна.

Каждый, отдельно взятый из этих приемов не даст должного результата. Искусство преподавателя состоит в умелом применении всего комплекса способов в зависимости от цели урока, от состава класса, от темы и т. д.

В классах с хорошо подготовленными учениками, приученными решать самостоятельно, достаточно применять работу на доске в сочетании с самостоятельными работами. В классах, где много слабых и средних учеников, приходится применять все формы работы.

Но какие бы приемы не предпочитал применять учитель, работа на доске будет основным приемом решения первых установочных упражнений по теме.

Переходить от решения упражнений на доске сразу к самостоятельной работе нецелесообразно. Для уяснения алгоритма полезно сперва применить промежуточные приемы (комментирование или метод ростовских учителей). При этом многие ученики проверят свое понимание, что-то уточнят, их умение окрепнет, а у некоторых может перейти в навык.

После этого выполняется самостоятельная работа в классе (если не хватит времени на уроке, то дома).

И комментирование и метод ростовских учителей в какой-то степени автоматизирует формирование умений. Это облегчает работу учителя. Но автоматизация не подавляет инициативу учителя. Прием есть только средство обучения, а применение его — дело умения или искусство учителя.

По-видимому, возможно сочетать оба приема. Так, в начальной стадии формирования умения лучше применять комментирование. Когда же умение окрепнет, то удобнее применять метод учителей ростовских школ.

§ 7. УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Одним из средств поднятия эффективности урока являются устные упражнения. Они дают возможность быстро проверить понимание теории, простейшие навыки и помогают формировать их.

Эти упражнения можно разделить на:

1) вопросы, проверяющие знание теории, например: «Как умножить многочлен на одночлен? Дайте пример», «Что называется коэффициентом?», «Какой вид имеет график функции $y = x^2$?», «Почему график функции $y = x^2$ симметричен относительно оси OY?» и т. д.;

2) легкие упражнения на тождественные преобразования, решение уравнений. Эти упражнения соответствуют устному счету в арифметике, например: «Чему равняется $\frac{a^2-1}{2a+2}$?», «Решить уравнение $2x - 3 = 5$» и т. д.;

3) вопросы, связанные с исследованием, например: «Показать на числовой оси числа, абсолютная величина которых больше 3», «Имеет ли корень уравнение $\frac{1}{x} = 0$?», «Что больше: a или $3a$?».

Последние вопросы очень полезны, они развивают мышление учащихся, приучают к сравнению величин. Но к ним надо приучать, постепенно усложняя форму вопроса. Например, форма вопроса «Что больше: a или $3a$?» учащимся будет на первых порах трудной, так как для ответа надо продумать три случая, когда $a > 0$, $a < 0$ и, наконец, $a = 0$.

Этот вопрос можно задать первый раз так, что ученику не придется думать о значениях a, а именно спросить: «Что больше: a или $3a$, если $a > 0$?», «Что больше: a или $3a$, если $a < 0$?», «Сравнить значения a и $3a$ при $a = 0$». В этом случае рассуждение идет непосредственно: $a > 0$, следовательно, $3a > a$.

Тот же вопрос через некоторое время можно несколько усложнить, например: «Может ли a быть больше $3a$?, «Может ли a равняться $3a$?»

Только, когда учащимся будет посильна такая форма вопроса, можно спустя некоторое время поставить вопрос в общем виде: «Сравнить a и $3a$», «Что можно сказать о соотношении между a и $3a$?»

Таких вопросов на сравнение очень много, например, сравнить $a + b$ и b, a^2 и a^3, $a - b$ и $a + b$ и т. д.

Также и другой приведенный вопрос о корне уравнения $\frac{1}{x} = 0$ допускает различную постановку, например (в порядке трудности): «Почему уравнение $\frac{1}{x} = 0$ не имеет корня?», «Имеет ли корень уравнение $\frac{1}{x} = 0$?», «Решить уравнение $\frac{1}{x} = 0$».

Такие упражнения развивают у учащихся сообразительность, интуицию, умение использовать индукцию. Впоследствии этот прием останется как средство прикидки.

В процессе обучения выявляются ошибки учеников. Учителю следует вести учет ошибок и давать устные упражнения, помогающие устранить их.

На устные упражнения можно отводить несколько минут в начале урока, можно заполнить ими паузу между отдельными частями урока или провести их в конце урока.

Устные упражнения по алгебре только выполняются устно, но задавать их приходится *письменно*. Если задать устно даже простой пример на сокращение дроби $\frac{4}{2a+2}$, то многие ученики его не представят и не запомнят, а следовательно, не смогут и решить. Поэтому примеры для устных упражнений должны быть написаны на доске и учитель должен сказать, что надо сделать.

Если учитель наметит провести устный фронтальный опрос, то он записывает упражнения на классной доске до урока; если учитель имеет несколько классов одной параллели, то лучше упражнения написать на переносной доске или заготовить таблицы для устных упражнений, которые могут быть использованы многократно. Возьмем пример таблицы для действий с рациональными числами.

Таблица 1

— 3	5	— 9	7	75
12	— 37	29	45	— 80
— 180	— 215	130	— 120	350

Учитель показывает пару чисел и говорит, что с ними сделать (сложить, вычесть, умножить). Затем указывает столбец или строку и говорит, что сделать с числами столбца, строки.

Устно можно задавать только самые простые вопросы, как например при «круговом счете». Например, учитель говорит: «+8 да—10». Ученик дает ответ: «—2» — и добавляет: «—7». Второй отвечает: «—9» — и вновь добавляет и т. д.

Устные вопросы хорошо задавать при опросе для уточнения знаний ученика. Вопрос может быть и по данной теме и по ранее пройденному материалу.

Интересный прием применяет О. С. Шрамко. Каждый из ее учеников имеет книжечку, в ней на каждой странице имеется один из следующих знаков: $+, -, \times, :, =, >, <$. Кроме того, ученик имеет набор цифр. Во всех случаях, когда следует дать ответ, набирают его, например 15, или открывают книжечку с нужным символом и показывают его учителю. Таким образом учитель устанавливает обратную связь, сразу ориентируется, кто из учеников решает верно и кто ошибается. Книжечку можно использовать и в других упражнениях. Например, вычислив устно значение выражения $2a^2 - 3a + 5$ при $a = 4$, ученики получили ответ 23, и все показывают учителю две цифры 2 и 3, причем никто из учеников не видит ответа у другого ученика.

§ 8. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ. ПРОВЕРКА ЕГО

Большая часть учеников решает упражнения по новой теме сперва по аналогии, а затем начинает решать и более трудные упражнения на основании усвоенного алгоритма. Домашние задания обычно составляют так, чтобы часть задания мало отличалась от упражнений, выполненных в классе (объем этой части определяет учитель). Это приучит учеников к тому, что дома они будут сначала просматривать сделанное в классе, что поможет многим из них самостоятельно сделать часть домашнего задания хотя бы по аналогии.

В другую часть домашнего задания полезно включить упражнения на тот же материал, в которых придется углубить изученное в классе. В частности, сильным ученикам рекомендуется давать индивидуальные домашние задания.

Проверка домашнего задания может быть двоякой: 1) формальная проверка наличия домашней работы в тетради; 2) проверка умения выполнить работу; проверка умения разобрать теоретический материал, доказать теоремы, свойства.

Первый вид проверки проводится учителем или при обходе учащихся во время урока, или при просмотре тетрадей после урока.

При втором виде проверки учащихся вызывают к доске или дают им задание письменно решить домашние задачи, доказать теорему. Для проверки усвоения домашнего задания всем учащимся можно дать в начале урока самостоятельную работу, содержащую упражнения, аналогичные заданным на дом, или доказать теорему, вывести формулу и т. д.

При проверке любой домашней работы необходимо следить, чтобы она не заняла много времени.

Очень важно уметь сочетать включение всего класса в работу с проверкой домашней работы. Для этого имеется несколько схем начала урока:

1) Дается минут на 6—10 небольшая самостоятельная работа в нескольких вариантах по материалу предыдущего урока, упражнения в ней аналогичны заданным на дом. Работу после проверки можно оценить. Во время такой работы учитель может пройти по классу и просмотреть, как сделано домашнее задание.

2) Классную доску делят на три части; вызывают к доске ученика и задают ему и классу упражнение, аналогичное домашнему. Когда класс включился в работу, вызывают еще двух учеников, которым дается выполнить упражнения, заданные на дом. Пока большинство учеников выполняют первое задание, эти два ученика готовятся к ответу. Когда первое (основное) задание закончено, учитель переходит к опросу второго и третьего ученика по домашнему заданию, а остальные ученики слушают и контролируют их ответы. Этот опрос ведется быстро, причем выясняются и уточняются только основные моменты решения.

Можно, не вызывая ученика к доске, дать классу самостоятельную работу, устные комментированные упражнения, а двух-трех учеников вызвать к доске выполнить домашние задания.

Такое выключение двух-трех учащихся из работы класса не опасно, так как они и класс работают по одному и тому же материалу.

3) Из домашнего задания учитель выделяет узловые моменты, и учащиеся с места рассказывают по тетради, что они сделали. Если остальным ученикам трудно воспринять объяснение на слух, учитель фиксирует сказанное на доске.

4) Домашнее задание на уроке не проверяют, но учитель берет тетради и проверяет домашнюю работу после уроков. Так поступают тогда, когда хотят выделить больше времени на изложение нового материала, а домашняя работа не содержала упражнений, которые могли быть не сделаны.

5) Класс начинает работать, например, делает комментированные упражнения, а пока учащиеся решают, учитель до начала комментирования обходит класс и смотрит, как выполнена домашняя работа.

6) В случае, если большая группа учеников не справилась с домашней работой, можно дать самостоятельную работу тем, кто выполнил домашнее задание, а с остальными разобрать те места, которые затруднили работу.

В случае 1, 2 и отчасти 3 производится проверка понимания учащимися домашней работы. В случае 4 и 5 имеем формальную проверку наличия домашней работы. Но в случае 4 она может оказаться и не формальной, если учитель после просмотра тетрадей учащихся проанализирует, что сделали учащиеся, что ими не усвоено, какие допущены в работах ошибки.

§ 9. НАГЛЯДНОСТЬ ПРЕПОДАВАНИЯ

Наглядность в алгебре имеет не меньшее значение, чем в геометрии, но носит несколько иной характер. В геометрии можно изготовить модель изучаемого объекта. В алгебре в первую очередь изучают операции, поэтому наглядность в основном достигается с помощью записей. Рассмотрим, как это делают.

Например, на уроке алгебры учитель хочет от распределительного закона умножения в арифметике перейти к такому же закону в алгебре. Он может эту связь показать на таблице.

Таблица 2

Распределительный закон умножения	
в арифметике	в алгебре
$3 \cdot (2+5) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 6 + 15 = 21$	$a(b+c) = ab + ac$

При демонстрации этой таблицы зрение помогает восприятию, следовательно, способ нагляден.

Устные упражнения в алгебре вызывают затруднения, в частности, потому, что в них труднее запомнить условие, чем в арифметике. В этом случае целесообразно писать условие на доске или заготавливать таблицы для устных упражнений; это тоже элемент наглядности. Приведем пример таблицы для устных упражнений на сокращение дробей.

Таблица 3

$\frac{6a^2}{15ab}$	$\frac{14a^3b^2c}{21a^2b}$	$\frac{15ab}{20a^2c}$	$\frac{8abc^4}{24a^2b^3c}$
$\frac{ma}{mb+mc}$	$\frac{3a}{3a+3b}$	$\frac{6}{2a-2b}$	$\frac{3a-3b}{15c}$
$\frac{2a+2b}{a^2-b^2}$	$\frac{a^2-b^2}{2a-2b}$	$\frac{a^2-b^2}{2b-2a}$	$\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$
$\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3}$	$\frac{8a^3-1}{4a^2-1}$	$\frac{4a^2-1}{8a^3+1}$	$\frac{2a^2-2b^2}{a^3+b^3}$

В других случаях может оказаться наглядной сама запись. Например, запишем решение уравнений так:

$$\frac{x^2}{x-3}=\frac{9}{x-3}\;\Big|\;x-3$$

$$x^2=9;\qquad x_{1,2}=\pm 3.$$

Проверка 1) $x_1=3$: $\frac{3^2}{3-3}=\frac{9}{3-3}$ не имеет смысла; $x_1=3$ — посторонний корень.

2) $x_2=-3$: $\frac{(-3)^2}{-3-3}=\frac{9}{-3-3}$ — равенство верное.

Ответ. $x=-3$.

Обратим внимание на первую строчку решения этого примера. Вертикальная черта и написанный справа общий знаменатель показывают, что обе части уравнения умножили на $x-3$.

В алгебре приходится выполнять действия с приближенными числами. Для учеников полезно дать таблицу, которая наглядно иллюстрирует алгоритм.

1. Сложение приближенных чисел.

До округления — После округления

$$\begin{array}{r|l} 0{,}3 & 7 \\ +\boxed{1{,}8} & \\ 3{,}6 & 4\,8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 0{,}3 & 7 \\ +\boxed{1{,}8} & \quad \text{Запасная цифра} \\ 3{,}6 & 5 \\ \hline 5{,}8 & \underline{2} \approx 5{,}8 \end{array}$$

$\square$ — обведен компонент, содержащий наименьшее число десятичных знаков.

2. Умножение приближенных чисел.

До округления

$$\times\begin{array}{r}1{,}342\\ \hline \boxed{2{,}6}\end{array}$$

После округления

$$\times\begin{array}{r}1{,}34\\ \hline \boxed{2{,}6}\end{array} \leftarrow \text{Запасная цифра}$$

$$+\begin{array}{r}804\\ 268\\ \hline \boxed{3{,}4}\,\underline{84}\approx 3{,}5\end{array}$$

$\square$ — обведен компонент, содержащий наименьшее число значащих цифр.

В заключение несколько слов о кратких правилах. Последнее время краткие правила исчезли из практики учителя. А они были очень наглядны, понятны и удобны для работы.

Для примера рассмотрим правило умножения двух рациональных чисел:

«Произведение двух чисел равно произведению их абсолютных величин, взятому со знаком плюс, если оба сомножителя имеют одинаковые знаки, и со знаком минус, если сомножители имеют противоположные знаки».

Точно сформулировать и запомнить это правило ученику трудно. Кроме того, при умножении сперва надо написать знак, потом произведение абсолютных величин; это правило плохо описывает алгоритм: нарушен порядок операций, что приводит к частым ошибкам в знаке.

Гораздо легче и лучше запомнить краткое правило «минус на минус — плюс», «минус на плюс — минус». Это как раз то, о чем думает ученик в момент умножения чисел. Ведь речь идет о знаке при умножении рациональных чисел, а умножение абсолютных величин не вызывает никаких сомнений даже у слабого ученика.

В математическом анализе довольно часто применяют рабочие формулировки, например: «Предел произведения переменных равен произведению их пределов» или «Производная суммы равна сумме производных» и т. д. Такие краткие правила удобны для работы.

Одно из средств наглядности — использование учебных кинофильмов. Цель их — показать такие процессы и изменения, которые трудно представить абстрактно. Например, когда учитель говорит, что уравнение с двумя неизвестными имеет бесконечное множество решений, то сразу создать нужное представление ученику затруднительно, даже если учитель приведет графическую иллюстрацию. Средства кино дают возможность подать это наглядно в доступной форме. По алгебре имеется фильм о координатах точки и графиках функций. Его можно разбить на фрагменты и продемонстрировать их на уроках при изучении материала или использовать на заключительном уроке как материал для повторения. Кроме того, имеются два фрагмента о решении одного линейного уравнения с двумя неизвестными и о системе двух таких уравнений. Эти небольшие фрагменты предназначены для демонстрации на уроках в процессе изучения темы.

Фрагменты имеют преимущества перед кинофильмами:

1) Фрагмент короче, он рассчитан на 3—5 минут демонстрации и содержит не больше одной трудности.

2) Школа может приобрести фрагменты кинофильмов, значит, всегда можно обеспечить демонстрацию их при изучении соответствующей темы; при большом числе нуждающихся в кинофильме школ получить из фильмотеки нужный фильм своевременно не всегда удается.

§ 10. ПОУРОЧНАЯ ОЦЕНКА

Помимо обычной оценки за решение примеров и задач, за ответ по теории, учителя применяют поурочную оценку, что стимулирует работу учеников.

Учитель заранее определяет, какие элементы существенны в очередном уроке, а в процессе урока следит, как несколько намеченных им учеников работают на уроке. Например, Иванов домашнее задание сделал хорошо, комментировал два упражнения один раз удовлетворительно и второй — хорошо, самостоятельную работу выполнил удовлетворительно. Итоговая оценка за урок — 3. Некоторые из учителей держат эти оценки в памяти, другие записывают на листке. Например:

Таблица 4

Фамилия	Домашняя работа	Комментирование	Самостоятельная работа	Устные упражнения	Итог
1. Иванов	4	4; 3	3	—	3
2. Петров	4	4; 3	4	4	4
3. Сидоров	3	2; 3	2	2	2
4.	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Отрицательная оценка не всегда сообщается ученикам. Учитель обычно указывает ученику его ошибки в работе и подбирает для него индивидуальное задание, которое поможет устранить обнаруженные недочеты.

Поурочная оценка работы учащихся повышает их активность на уроке.

§ 11. ЭФФЕКТИВНОСТЬ УРОКА. АКТИВИЗАЦИЯ МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ

Всеобщее обучение, введенное в нашей стране, обязывает каждого учителя вовлечь в работу всех учащихся в классе, и добиться усвоения необходимого объема знаний каждым учеником.

Поэтому перед школой встал вопрос, как усилить эффективность урока. Эффективность урока зависит от многих причин, только часть которых зависит от учителя: качество учебников, система упражнений в задачниках, доступность теории и упражнений и пр.

Особенно трудно формировать умения и навыки при обучении алгебре. В условиях, когда число учеников в классе доходит до 45 человек, огромное значение приобрели методы, повышающие самоконтроль учащимися своей работы.

Некоторые учителя, равняясь на слабых учащихся, замедляют темп урока, повторяют объяснение нового материала два-три раза, а число упражнений сокращают. Стараясь сделать изложение нового более доступным, такие учителя больше разъясняют на уроке, причем все, что можно, записывают на классной доске, поэтому ученик в любой момент урока может сопоставить свою работу с записью на доске. Опыт показывает, что в этом случае многие ученики, не думая, переписывают с доски в тетрадь готовый результат.

Чтобы повысить производительность работы учащихся, многие учителя стали проводить на уроках самостоятельные работы. Такие работы приносят большую пользу учащимся, которые с нею в состоянии справиться, для остальных они не всегда носят обучающий характер.

При формировании умений переход от решения на доске сразу к самостоятельной работе не должен быть слишком резким. Для этого после решения на доске выполняются комментированные упражнения или работают по методу ростовских учителей (см. стр. 20), при этом каждый ученик имеет возможность проверить свое понимание отдельных этапов решения, а это увеличивает число учеников, для которых самостоятельная работа будет посильной.

Этот прием психологически наиболее подходит для основной массы учащихся. Если ученик не знает материала, то уже в начальной стадии он убеждается в этом, у него возникает желание понять, что надо сделать. Эффективна и разбивка решения упражнения на шаги и комментирование каждого шага с записью на доске. Особенно это полезно в примерах, в которых возникают затруднения в начале решения.

Такая форма работы значительно увеличивает число учеников, решающих примеры сознательно, а учащимся, не уверенным в своих знаниях, придает веру в свои силы.

Стремление к более рациональному использованию каждого этапа урока вызвало пересмотр структуры его. В основном стремятся: 1) использовать на работу все 45 минут урока; 2) сократить пассивные формы работы; 3) увеличить самостоятельность работы учащихся и тем самым поднять их активность; 4) усилить на уроке обратную связь обоих типов.

В начале урока очень важно сразу включить весь класс в работу. Для этого учитель может:

1) дать самостоятельную работу;

2) дать короткую контрольную работу по материалу домашнего задания;

3) начать объяснение нового;

4) продолжить упражнения на закрепление изученного на предыдущем уроке;

5) дать устные упражнения.

Урок может быть в основном объяснительным или тренировочным. Уроков, на которых все 45 минут дается только изложение теории, в восьмилетней школе не должно быть. В дальнейшем под объяснительным уроком будет пониматься урок, на котором дается объяснение нового и проводится закрепление его.

Цель объяснительного урока в том, чтобы ученики поняли новый материал (хотя бы в основном) и закрепили его при решении упражнений. Последнее имеет большое значение: «Пример учит не меньше, чем правило» (И. Ньютон).

На объяснительном уроке учитель старается сократить начальную стадию его, чтобы скорее приступить к объяснению. Само объяснение ведется обычно эвристически: ученики путем наводящих вопросов подводятся к выводу нового. При объяснении нового нет смысла останавливаться на деталях, пока не понято главное. После объяснения в VI и VII классах принято, чтобы его повторил один из учащихся. Повторное объяснение материала самим учителем нецелесообразно, так как учащиеся могут отвыкнуть внимательно относиться к объяснению, надеясь что оно будет повторено несколько раз.

Некоторые детали в новом материале становятся ясными для учеников после решения примеров. Поэтому новое должно быть закреплено достаточным числом последовательно усложняющихся упражнений, причем существенно, чтобы каждый ученик решал их по возможности самостоятельно. Обычно после объяснения нового материала учащиеся решают несколько упражнений на доске, причем к работе привлекается весь класс. Затем решаются упражнения с применением комментирования. Комментированное решение примеров служит переходным этапом от упражнений, сделанных на доске (методом показа) к самостоятельной работе.

Такая форма работы эффективна при условии, если учащиеся в основном поняли объяснение и могут рассказать, что они делают. Поэтому, приступая к новым упражнениям, надо решить установочные упражнения на доске с объяснением нового алгоритма и новых терминов. Так, при объяснении раскрытия скобок на доске решается с объяснением каждого шага 2—3 таких примера, пока ученики не освоят новую терминологию (хотя бы в основном). После этого класс переходит к решению упражнений с комментированием или по методу ростовских учителей.

В заключение можно дать в нескольких вариантах самостоятельную работу и проверить ее в классе у доски или собрать тетради и проверить работу после урока. При отсутствии времени ее можно заменить домашней работой.

Так ведется объяснительный урок. Тренировочный урок отличается тем, что на нем больше времени отводится комментированным упражнениям и самостоятельным работам.

Рассмотрим два тренировочных урока, данных учителями Москвы и Липецка.

I. Урок алгебры в VI классе (учительница Московской школы № 234 Г. П. Копылова).

Тема урока: *Упражнения на раскрытие скобок.*

К началу урока на доске написано первое задание (подготовлено на перемене).

I

1) $x+(x-3)+(x-5)=27.$
2) $(5a^4+3a^3b-2a^2b^2-4ab^3)+$
$+(3a^4-8a^3b+9a^2b^2+ab^3)+$
$+(-6a^4+a^3b+5a^2b^2+9ab^3)=$

II

1) $a-b=5.$
Чему равно $b-a$?
2) При каком условии $ab=a$?
3) Когда $a^2=a^3$? $a-b=b-a$?
4) $|x|>1.$

Проверки домашнего задания не потребовалось, оно затруднения не вызвало. Урок начали с решения примера, учительница сказала, что в № 1 надо решить уравнение.

Через 2 минуты один ученик по требованию учительницы рассказал, как он раскрыл скобки, учительница записала сделанное им на доске; через 3 минуты другой вызванный ученик пояснил, как он привел подобные члены, учительница вновь записала, так решили упражнение до конца.

Затем прокомментировали решение примера 2. Решение было разбито на два шага (раскрытие скобок, приведение подобных членов). Так же как и в первом примере, когда большая часть учеников заканчивала очередной шаг, вызванный ученик рассказывал с места, что он сделал, а учительница записывала за ним на доске.

На эти упражнения ушло 15 минут. Затем последовало устное решение упражнений II (написанных на доске справа).

Вызванные ученики легко ответили на вопрос 1. Быстро нашли одно решение в примере 2 ($b=1$) и с некоторой задержкой дали второе решение ($a=0$). Затем ученики ответили на вопрос 3.

К вопросу 4 учительница дала устное уточнение, что надо на числовой оси показать точки, удовлетворяющие неравенству.

На вопрос 4 ответило только несколько человек. Один из них на доске начертил числовую ось и указал интервалы $x < -1$, $x > 1$.

Вслед за тем начался устный счет (круговой). Учительница дала задание сложить (+6) и (—8), вызванный ученик дал ответ (—2) и назвал новое слагаемое (—16), второй ученик также дал ответ (—18) и назвал слагаемое и т. д. На это ушло 4 минуты.

После этого ученикам было предложено подобрать задачу, решение которой имеет вид $a(m + n)$.

Учащимися было составлено несколько задач: 1) «Два поезда вышли навстречу и проходят в час m *км* и n *км*. Сколько *км* пройдут они за a часов?»; 2) «Цена яблок a руб. за 1 *кг*. Купили m *кг* яблок, потом еще n *кг* тех же яблок. Сколько заплатили?»

Были составлены еще две задачи.

В каникулы в нескольких классах перестилали паркет. Учительница дала задачу:

«Размеры класса a и b *м*, а паркетных плиток — c и d *м*. Сколько надо плиток для настила пола в классе?»

После решения этой задачи ученики сделали измерения и нашли, что $a \approx 9{,}8$ *м*, $b \approx 6{,}2$ *м*, $c \approx 0{,}25$ *м*, $d \approx 0{,}062$ *м*. Число плиток нашли по правилам приближенных вычислений.

В заключение на 12 минут была дана самостоятельная работа, и в последние минуты выставлена поурочная оценка.

Для самостоятельной работы учительница заготовила 6 вариантов задания, причем дифференцированных по трудности. Приведем два из них.

№ 1. 1) $(3x^4 + 4a^3x - 7a^2x^2 - 4ax^3 + a^3) + (4x^4 - 3a^3x - 2a^2x - 2ax^3 + a^3) + (-7x^4 + 2a^3x + 4a^2x^2 + 3ax^3 - 7a^3) =$

2) $(4x + 8) + (2x - 16) = 14; \quad x = ?$

3) Один из смежных углов в 2 раза больше другого. Найти их.

№ 2. 1) $(2x^4 + 5ax^3 - 10a^2x^2 - 3a^3x + 7a^4) + (9x^4 - 12ax^3 + 15a^2x^2 - 4a^3x - a^4) + (x^4 - 4ax^3 - 2a^2x^2 - 6a^3x + 3a^4) =$

2) $(3x + 8) + (2x - 5) = 13; \quad x = ?$

3) Доказать, что сумма любых трех последовательных целых чисел делится на 3.

4) Угол больше своего смежного в 5 раз. Найти оба угла.

II. Урок алгебры в VII классе (учительница Липецкой средней школы № 5 Э. Р. Лахина).

Т е м а: *Упражнения на решение систем уравнений первой степени с двумя неизвестными.*

Домашние задания не вызвали затруднения, и урок сразу начинается с устных упражнений, которые были заранее написаны на переносной доске, разграфленной в клетку.

$$\begin{cases} 4x + y = 3 \\ \ldots = \ldots \end{cases}$$

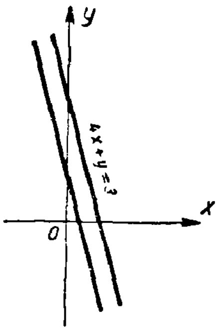


Рис. 2

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

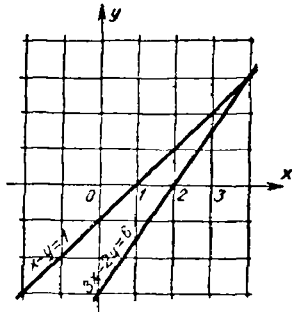


Рис. 3

$$\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 10x - 4y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x + y) = 190 \\ x - y = 150 \end{cases}$$

(Учительница преднамеренно не сделала нумерации упражнений на доске, чтобы ученики не знали, в каком порядке последуют вопросы.)

Предлагается ответить на вопросы:

1. Какое решение имеет система (показывается указкой система в правом верхнем углу доски), если на чертеже дано ее графическое решение.

Несколько учащихся подняли руки. Спрошенная ученица ответила, что решением системы будет пара чисел 4 и 3. Другая объясняет, как получили решение, и говорит, что надо из точки пересечения графиков уравнений опустить перпендикуляр на ось OX, тогда получим абсциссу и ординату точки пересечения.

Затем еще один ученик повторяет сказанное ранее.

2. На чертеже дано графическое решение системы уравнения (показывается система в верхнем левом углу) и одно уравнение системы. Подберите второе уравнение системы.

Ученики отвечают, что система должна иметь бесконечное множество решений и дают второе уравнение (предложили несколько возможных уравнений).

3. Дана система уравнений (показывается система в левом нижнем углу доски). Почему эта система не имеет решения?

Ученики несколько задержались с ответом, затем объяснили, что вопрос поставлен неверно, так как коэффициенты и свободный член второго уравнения пропорциональны коэффициентам и свободному члену второго уравнения, следовательно, такая система имеет решение, но не одно, а бесконечное множество.

4. Дана система уравнений (указывается система в нижнем правом углу доски). Восстановить условие задачи.

Ответ последовал быстро.

На все эти упражнения ушло $6\frac{1}{2}$ минут.

Затем перешли к решению задачи из стабильного задачника: *Если длину прямоугольника увеличить на 6 м, а ширину уменьшить на 3 м, то площадь прямоугольника не изменится. Не изменится площадь данного прямоугольника и в том случае, если первоначальную длину его уменьшить на 3 м, а ширину увеличить на 2,4 м. Определить длину и ширину данного прямоугольника.*

Один ученик прокомментировал, как он получил первое уравнение: «Стороны прямоугольника в метрах обозначим через x м и y м, тогда площадь будет xy $м^2$; увеличенная длина будет $(x + 6)$ м, уменьшенная ширина — $(y - 3)$ м, а площадь нового прямоугольника $(x + 6)(y - 3)$ $м^2$. По условию задачи эти площади равны, следовательно,

$$xy = (x + 6)(y - 3)».$$

Второй ученик рассказывает, как он получил второе уравнение

$$xy = (x - 3)(y + 2{,}4).$$

В то время как ученики объясняют решение, учитель на доске чертит прямоугольники, отмечает на них обозначения x, y, $x - 6$ и т. д. и записывает на доске уравнения. Учащиеся объясняют, почему оба уравнения составляют систему уравнений, и учитель ставит знак системы. Затем ученики решают, а через некоторое время вызванный ученик рассказывает, как он решил систему, а учитель записывает сказанное им на доске.

Затем перешли к решению другой задачи:

Велосипедист движется по пути AB, состоящему из горизонтальной части, подъемов и спусков. На горизонтальной части скорость его равна 12 км/ч, на подъемах 8 км/ч, а на спусках 15 км/ч. На дорогу из A в B велосипедист тратит 5 ч, а на дорогу из B в A 4 ч 39 мин. Зная, что горизонтальная часть пути имеет длину 28 км, узнать общую длину подъемов и спусков в направлении от A к B.

Учителем была подготовлена таблица с изображением профиля пути, но она не понадобилась, ученики поняли условие задачи и приступили к решению. Вызванные ученики дали объяснение, а учитель на доске начертил профиль пути и записал систему уравнений.

В конце урока учащиеся решили пример:

$$\left(\frac{2}{m+n} + \frac{2m}{m^3 - n^3} : \frac{m+n}{m^2 + mn + n^2}\right) \cdot \frac{m^2 - 2mn + n^2}{8m - 4n}.$$

Часть учеников выполнила действия в скобке устно, причем с подробным объяснением:

«Делим дробь $\frac{2m}{m^3 - n^3}$ на дробь $\frac{m+n}{m^2+mn+n^2}$, после деления неполный квадрат суммы сократился и получили

$\frac{2m}{(m+n)(m-n)}$, затем складываем дроби $\frac{2}{m+n}$ и $\frac{2m}{(m+n)(m-n)}$» и т. д.

В заключение была сделана поурочная оценка и задана работа на дом.

Подведем итог. Оба приведенных урока тренировочные. Учащиеся сразу приступили к работе и работали интенсивно, причем в основном самостоятельно. Записи на доске появлялись после того, как ученики продумали решение и когда большая часть их уже выполнила очередной шаг самостоятельно. Таким образом, если не все, то большая часть учеников работала самостоятельно.

Очень важно, что на каждом этапе непрерывно действовала обратная связь обоих типов, особенно типа непрерывного самоконтроля. Каждый может сверить свою работу, получить нужную консультацию и своевременно внести в свою работу поправки.

В заключение отметим особенности работы обоих учителей на этих уроках. Главное в этих уроках не в разнообразии приемов, используемых учителем, а в увеличении самостоятельности работы самих учащихся.

Новые приемы работы изменили и внешний вид урока, особенно тренировочного. Учитель на уроке стал говорить мало, он ставит перед учениками проблему, сообщает новое по теории в решении упражнений. В дальнейшем в основном работают (объясняют, решают) сами ученики. Чаще ученики работают молча. Учитель руководит работой класса и работой отдельных учеников, дает указания, наводящие вопросы, старается оказать помощь слабому, а сильному вовремя дать дополнительный материал. Учителю весь урок приходится напряженно работать и с классом и с отдельными учениками. На таком уроке складывается деловая обстановка, повышается дисциплина, учащиеся лучше работают, а это облегчает работу учителя. Учитель в процессе урока видит, как школьники усваивают новый материал, а заключительная самостоятельная работа дает возможность уточнить усвоение материала отдельными учащимися.

При подготовке к такому уроку и проведении его очень важно помнить следующие правила:

1) Ученики в процессе урока должны быть подготовлены к самостоятельному выполнению упражнений, то есть основная масса учеников должна понять новый вид упражнений еще при решении их на доске.

2) Упражнения для комментирования подбирать так, чтобы при выполнении их у учеников не возникло больших затруднений.

3) Контрольные записи на доске следует проводить после того, как большинство учеников выполнят определенный этап преобразований.

Поэтому переход от объяснения к самостоятельной работе совершается только тогда, когда учитель убедится, что в основном новое понято. Иногда приходится задержаться на решении упражнений на доске и сократить время на комментированные упражнения, а самостоятельной работы не давать. Но всегда надо стараться сократить пассивную часть урока и увеличить активную.

Применяя указанные методы, учитель должен избегать некоторых возможных ошибок. Темп работы на уроке должен быть достаточно быстрым, но таким, чтобы учащиеся успевали выполнять работу самостоятельно. Нельзя увлекаться количеством упражнений, сделанных на уроке, не считаясь с тем, как работает класс; в противном случае работу сделают не все ученики. Также опасно и чрезмерно разнообразить формы работы на одном уроке. Внешне это может казаться эффектным, но когда калейдоскопически меняются формы работы, ученикам трудно сосредоточивать внимание.

Для учащихся, быстро усваивающих материал, полезно дать задание по анализу решения или составить план решения. Когда же установочные упражнения ими усвоены, то необходимо дать дополнительный, более сложный материал из задачника или по карточкам.

Однако активизация обучения не всегда обеспечивает усвоение нового материала всеми учащимися класса. Может случиться, что часть учеников будет отставать, кто-то не будет учить теорию и т. д. Но при активных методах работы таких учеников станет меньше. Учитель, имея больший контакт с учащимися, легко выяснит, в чем отстает ученик, и быстро может помочь ему.

§ 12. ПОДГОТОВКА К УРОКУ

Качество урока в значительной степени зависит от подготовки к нему учителя. При подготовке к урокам в первую очередь должна быть продумана тема в целом и составлен тематический план. Он может быть подробным и кратким. В кратком плане устанавливают, сколько часов отводится на подтемы и какие.

При составлении подробного плана теоретический материал разбивают по урокам и в первую очередь намечают те понятия и умения, которые ученики должны усвоить на уроке. Затем подбирают упражнения, которые должны сформировать эти умения. Начальные упражнения должны быть доступны ученикам, что повышает интерес к работе. Постепенно упражнения усложняют.

Одновременно намечают, что надо повторить. Подбирая материал для повторения, следует учесть связь очередной темы с ранее изученным материалом и ошибки, которые были обнаружены при проверке ученических тетрадей и контрольных работ. Также следует установить, связывается ли данная тема с другими предметами и какие разделы ее используются в практике. Необходимо продумать тематику и виды наглядных пособий, спланировать контрольные работы, математические диктанты, самостоятельные работы и подготовить раздаточный материал. Такой план обычно создается на протяжении нескольких лет работы.

Планируя урок, весьма существенно продумать все его детали и предусмотреть, как начать следующий урок.

Поэтому на данном уроке надо решить достаточно упражнений на закрепление нового, тогда следующий урок не придется начинать с решения упражнений, заданных на дом.

При подготовке к уроку особо тщательно подбираются упражнения для решения, чтобы нарастание степени их трудности было бы постепенным. В противном случае число учеников, решающих самостоятельно, резко сокращается и упражнения не достигают цели. Отдельно следует подобрать материал для учащихся, интересующихся математикой.

Очень важно подобрать устные упражнения к уроку, заготовить таблицы, продумать дополнительные вопросы для отвечающих учеников. В этом отношении много могли бы помочь учителю сборники задач. К сожалению, в них крайне мало материала для устных упражнений и особенно для упражнений на догадку, развивающих сообразительность.

Также необходимо учителю хорошо знать решение как домашних, так и намеченных на урок упражнений, предусмотреть возможные варианты решений и трудности, которые могут возникнуть у школьников. Это облегчит учителю быстро ориентироваться в работе отдельных учеников и даст возможность оказать им помощь.

На перемене перед уроком следует записать весь дополнительный материал на классной доске, а при нескольких параллелях его лучше написать на переносной доске.

§ 13. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Основной вид контрольной работы — письменная работа по теме.

Главное в такой работе — ее содержание. Учитель должен тщательно продумать, какой минимум знаний необходим по теме, и сделать это основным ядром контрольной работы. Затем добавить упражнения, выполнение которых можно оценить более высоким баллом. Упражнения, за которые можно поставить оценки «4» и «5», особенно последнюю, должны качественно отличаться от упражнений, за которые можно поставить оценку «3».

Например, контрольная работа в VII классе по теме «Уравнения первой степени» может быть такой.

1. *В магазине имелись задачники и учебники по алгебре, причем задачников было на 52 больше, чем учебников. В первый день продали 120 задачников и 108 учебников, после чего число оставшихся учебников составило $\frac{1}{3}$ числа оставшихся задачников. Сколько тех и других книг было в магазине?*

2. Решить уравнение:

$$\frac{6x-1}{3}-\left(3-\frac{12x+7}{5}\right)=1.$$

3. Может ли

$$2x+\frac{1}{x-3} \text{ равняться } 6+\frac{1}{x-3}?$$

Минимум, обеспечивающий оценку «3», — решение задачи без проверки. На оценку «4» надо решить задачу и один пример. На оценку «5» надо решить все. Заслуживает внимание и дифференциация контрольных работ по отдельным группам учеников.

Для письменных работ надо установить определенный режим. Большинство учителей считает, что ученик всю работу должен выполнять в тетради для контрольных работ. Если же ему нужно сделать вспомогательные вычисления, найти план решения, то он может отделить в тетради несколько строк (обычно внизу) и там сделать черновую запись. Выполнение всей работы на отдельном черновике приводит к потере времени на бесполезное переписывание, а кроме того, лишает учителя возможности видеть всю работу ученика. Учителя должен интересовать не только конечный результат, но и путь решения. Вся работа выполняется в тетради, в работе допускается зачеркивание, это не считается за дефект; считается, что ученик может ошибиться, тогда он эту строку зачеркивает и пишет правильно.

Такая система приучает учащихся и к самоконтролю. Сделав работу, он ее проверяет, исправляет ошибки, зная, что за это не снизят оценку. В противном случае он пытается скрывать свои ошибки, поиски решения и показывает только результат.

Помимо контрольных работ, рассчитанных на весь урок, даются кратковременные контрольные работы, на 10—20 минут. Цель их — проверить, как усвоили ученики отдельные части изучаемой темы. Такие работы можно давать в начале урока вместо проверки домашней работы. Вот один вариант такой работы, данной учителем И. П. Богуславским («Математика в школе», 1960, № 4).

Сложение и вычитание рациональных чисел.

1. Вычислить:

а) $8{,}3+(+16{,}6)+(-7{,}7)+(+11{,}4)$;

б) $(-10)+(-6{,}8)-(-11{,}8)+(-24{,}3)$.

2. Вычислить при $a = 4$, $b = 3$ значение $4a^2 + 2ab - 6b^2$.

3. Найти абсолютную величину числового значения выражения $+ b + c + d$ при $a = -6$, $b = -4$, $c = 3$, $d = -2$.

Интерес представляют и математические диктанты. Перед первым диктантом учащимся необходимо разъяснить: в алгебре записывают то, что говорится, с помощью знаков, поэтому надо научиться переводить с русского языка на язык математики и наоборот. Р. А. Хабиб («Математика в школе», 1961, № 4) предлагает давать в начале изучения алгебры в диктантах вопросы такого типа: как записать, что:

а) сумма двух слагаемых a и b не изменится от перестановки слагаемых;

б) пятая часть y равна удвоенному произведению чисел a и b;

в) от числа x отняли 5 и получили наименьшее простое число;

г) двузначное число x имеет a десятков и b единиц;

д) квадрат числа равен квадрату противоположного числа. Верно ли это?

Недостаток математических диктантов состоит в том, что все ученики делают одно и то же. Чтобы избежать этого, можно ставить вопросы, например, так:

1. Написать два числа с противоположными знаками. Найти их сумму.

2. Написать два одночлена. Найти квадрат их разности.

При такой форме диктанта одинаковые работы учеников встретятся как исключение.

Причем, сказав условие, например: «...два числа с противоположными знаками», делают маленькую паузу, затем, убедившись, что ученики написали такие числа, продолжают «...найти их сумму».

Помимо письменных работ, существуют устные контрольные работы. Проводят их различно. Можно дать устные упражнения, например, по таблице, учащиеся отвечают, и, учитывая несколько ответов, некоторым ученикам ставится оценка.

Устные контрольные работы можно проводить и по карточкам. Вот один из вариантов:

№ 1

1. Вычислить: $(-8) + (-3) + (+6) + (-3)$.

2. Найти значение выражения $2a + 12$ при $a = -15$.

№ 2

Выполнить действия:

1. $(a + b)^2 - (a - b)^2$.

2. $3(a - b) + 3(a + b)$.

3. $3(2x - 5) - (6x - 17)$.

Учащиеся решают устно и записывают на отдельном листке номер примера и ответ. Чтобы ученики действительно делали вычисления устно, упражнения даются легкие, а все лишнее с парты убирают.

Такие контрольные работы очень полезны, но требуют от учителя времени на подготовку карточек.

Некоторой попыткой автоматизировать учет знаний учащихся является проведение контрольных упражнений на перфорированных карточках (перфокартах). Все ученики в классе делают одинаковые конверты, например, 4×8 *см* или 4×10 *см*, с одной стороны которых делают одинаковое число отверстий. Расстояние между рядами и между отверстиями в ряду одинаковое (рис. 4). В конверт вкладывают лист бумаги. Учитель читает вопрос и после него предлагает учащимся 4 возможных ответа (по числу отверстий в ряду). Ученик выбирает ответ и в соответствующем отверстии конверта ставит на вложенном листе бумаги крестик.

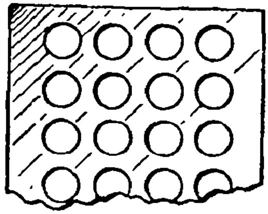


Рис. 4

Приведем пример таких работ.

1) По теме «Степени»: чему равно число 2 в третьей степени? Ответы. 1) 6; 2) 8; 3) 9; 4) не знаю.

2) По теме «Рациональные числа»: чему равно произведение 2 на —6? Ответ. 1) 12; 2) —4; 3) —12; 4) не знаю.

3) По теме «Сложение одночленов»: упростить $4a + 5a + 8a + 9a - 6a$. Ответы. 1) $2a$; 2) $10a$; 3) $12a$; 4) не знаю.

4. По теме «Теорема Виета»: какие знаки имеют корни уравнения $3x^2 - 5x - 6 = 0$? Ответы. 1) положительные; 2) отрицательные; 3) противоположные; 4) не знаю.

Ученик после решения выясняет, какой из предложенных ответов на первый вопрос получен у него и в первом ряду перфокарты в соответствующее отверстие в конверте ставит крестик. Например, если он выбрал на первый вопрос третий ответ, то он ставит крестик в первом ряду, в третьем отверстии. Так заполняется вся перфокарта, по одному ответу в каждом ряду. Два крестика в одном ряду считают за ошибку.

Для проверки работы учитель делает карточку с такими же отверстиями, как и на конверте. Отверстия, соответствующие верным ответам, обводит красным карандашом (рис. 5).

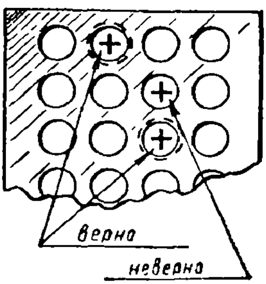


Рис. 5

Эта карточка накладывается на листок ученика, тогда крестики должны оказаться в обведенных отверстиях карточки учителя: если они не совпадут, значит, ответ дан неверно. Это дает возможность быстро подсчитать число неверных ответов и по числу их оценить работу. Оценку, по-видимому, следует ставить в зависимости от степени трудности работы.

В первую очередь такой способ пригоден для проверки несложных упражнений.

Ответы необходимо подбирать так, чтобы они предусматривали возможные ошибки. Например, надо сократить дробь $\frac{4x-4}{8-8x}$.
Возможные ошибки: 1) правильно сокращено на $x - 1$, но при смене знака в знаменателе не сменен знак перед дробью; 2) неверно сменен знак в знаменателе, ученик получил $8x + 8$.

Возможные о т в е т ы. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{x-1}{2(x+1)}$; 3) $-\frac{1}{2}$;

4) не знаю.

Форма учета по перфокартам находится в стадии эксперимента. В данный момент ей можно уделить примерно такое же место, как математическим диктантам.

§ 14. ФОРМЫ И МЕТОДЫ ПОВТОРЕНИЯ НА УРОКАХ АЛГЕБРЫ

Программой в конце учебного года выделено время для повторения. Кроме того, повторение ведется на протяжении всего учебного года, но формы его при этом различны.

В течение года учитель в связи с изучаемой темой или на основании анализа ошибок, допускаемых учащимися, дает последним на дом и на уроках упражнения на пройденный ранее материал.

Кроме того, чтобы освежать в памяти пройденное, учителя часто пользуются следующими приемами: 1) в домашнее задание систематически включают упражнения из ранее изученных тем; 2) учитель выделяет на уроке 3—5 минут на повторение материала, изученного в пройденных темах; 3) после ответа ученику задается дополнительный вопрос на старое.

Таким образом, изучая новый материал, ученики систематически освежают в памяти пройденное ранее. Выбор вопросов для такого повторения может быть бессистемным, но учитель спрашивает из пройденного основное, главное. Если вопрос касается деталей пройденной темы, то предварительно следует предложить ученикам повторить материал дома; если же вопрос касается коренных вопросов по пройденному материалу, то учащихся можно спрашивать без предварительной подготовки.

В конце каждой темы целесообразно отвести урок на фронтальный опрос по теме и в конце его дать кратковременную контрольную работу.

Особое значение для систематизации и закрепления изученного за год имеет повторение в конце года. Оно обычно проводится по темам, то есть 1—2 урока повторяется одна тема, потом другая и т. д. Упражнения даются по пройденному материалу, но более сложные, а иногда комбинированные, содержащие материал нескольких тем. К таким урокам учитель предварительно задает ученикам повторить дома теорию по учебнику и несколько доступных упражнений.

Особенно большое значение имеет повторение в VIII классе в связи с письменным экзаменом по алгебре. Его нельзя откладывать на конец учебного года.

Учитель VIII класса должен составить план повторения. Например, можно во II и III четвертях повторить темы VII класса (алгебраические дроби, арифметические дроби, решение уравнений, систем уравнений первой степени, графики), а во время, отведенное в IV четверти для повторения, провести повторение тем VIII класса.

Одна из частых ошибок в работе учителя — перерасход времени на изучение новых тем, вследствие чего не удается провести тематическое повторение в конце года. Чтобы избежать этого, учитель должен в годовом плане работы выделить время для повторения всего курса.

§ 15. ВОСПИТАНИЕ УЧАЩИХСЯ В СВЯЗИ С ОБУЧЕНИЕМ АЛГЕБРЕ

В процессе обучения учитель должен стремиться достичь не только познавательные цели, но и воспитательные.

В первую очередь надо воспитать у школьников определенную культуру труда. Необходимо привить учащимся стремление к труду и научить их рационально работать; воспитать у них волю, упорство в достижении поставленной цели.

Обучение алгебре помогает решить эти задачи. Ученики с охотой выполняют доступные им упражнения. Соразмеряя степень трудности задаваемой работы с развитием и возможностями отдельных групп учащихся, учитель сможет заинтересовать предметом большинство учащихся. Огромная заслуга учителей школ Липецкой, Ростовской областей и многих других, ищущих новые эффективные методы работы, в том, что они повысили производительность работы учащихся. Применение новых приемов обучения имеет большое воспитательное значение: учащиеся на уроках развивают самостоятельность, учатся работать и думать, непосредственно видят, что их усилия дают результат. Такая система формирует у детей не только навыки по данному предмету, но и вообще приучает рационально работать, а научить думать и работать — одна из важнейших задач школы.

Нельзя забывать и другой стороны подготовки учащихся, а именно формирования материалистического мировоззрения и диалектического мышления. На уроках алгебры учитель имеет большие возможности показать, что алгебра возникла из потребностей жизни. Например, рациональные числа лучше характеризуют некоторые явления, чем положительные, ввести их целесообразно. Учитель подбирает примеры, а ученики сами делают вывод, что алгебра моделирует то, что имеет место в действительности.

Также имеются большие возможности развивать у учащихся и диалектическое мышление. Например, вопросы исследования всегда связаны с выявлением и рассмотрением условий, в зависимости от которых получается тот или другой результат. Особенно много такого материала учитель найдет в теме «Функции и их графики».

Воспитательная ценность таких примеров в их конкретности. Учитель не говорит о материализме, он только дает примеры, которые с необходимостью приводят к материалистическим выводам. Учитель не говорит о диалектике, но дает примеры, развивающие диалектическое мышление.

Воспитательное значение имеет и решение задач, в которых ученик увидит применение алгебры для решения практических вопросов из физики, техники и т. д. Эти примеры убеждают школьников в том, что изучаемый ими материал имеет приложение на практике, он жизненно необходим. На ряде примеров они в активной форме смогут ознакомиться с достижениями народного хозяйства, с огромными достижениями на пути строительства коммунизма.

ГЛАВА II

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

На первых уроках алгебры учащиеся знакомятся с употреблением букв в алгебре и подводятся к понятиям алгебраического выражения и алгебраической формулы. Необходимо, чтобы шестиклассники поняли, что буква в алгебраическом выражении может принимать любое значение, при котором данное выражение имеет смысл (в зависимости от операций, которыми связаны алгебраические выражения, а в задаче и в зависимости от смысла условия). При этом буква рассматривается как число только на первых этапах изучения алгебры. В дальнейшем буква выступает и как число и как комбинация других букв.

В задачах по арифметике в условие всегда входят конкретные числа, над которыми надо выполнить определенные операции и в результате получить конкретный ответ, выраженный числом. В алгебре данные обозначены буквами, операции над ними на первых порах учащимся кажутся незаконченными (например, $a + b$), так же незаконченным кажется и ответ.

Для учеников будет облегчен переход от арифметики к алгебре, если начать еще в V и в IV классах на уроках арифметики постепенно вводить элементы алгебры. В первую очередь в краткой записи условия задачи приучают учеников обозначать неизвестное через x. Это нетрудно и часто улучшает понимание условия.

Например, в контрольной работе *найти вычитаемое, если оно на 3,7 меньше уменьшаемого, а уменьшаемое равно* 18,5. (Задача была дана для учеников V класса в московских школах.) Число учеников, решивших эту задачу неверно, было намного больше в тех школах, где пятиклассников не приучили к краткой записи (краткая запись: $18{,}5 - x = 3{,}7$).

Полезно в арифметике употреблять буквы для записи законов действий, алгоритмов. Например, запись алгоритма умножения:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Выше указывалось, что учащимся действия в алгебре кажутся незаконченными. В некоторых зарубежных учебниках различают два вида суммы в арифметике. Например, $2 + 5$ называют *невычисленной суммой*, а 7 — *вычисленной суммой*. Тогда в алгебре запись суммы $a + b$ совпадет с невычисленной суммой. Аналогичные термины вводят для разности, произведения и частного.

Главная трудность первых уроков алгебры — абстрактность материала. Чтобы устранить эту трудность, надо по возможности конкретизировать все, что излагается на первых уроках; выводы давать исходя из конкретного материала и связывать изучение основ алгебры с арифметикой. Важное правило первых уроков алгебры: *все, что надо делать с буквами, предварительно делать с числами*. Как правило, алгебраические действия следует обосновывать законами арифметических действий; при составлении формул использовать зависимости между величинами, известные из арифметики; при вычислении значений алгебраических выражений повторять вычислительные навыки, полученные в арифметике.

Изложение первой темы будет доступней для учеников, если они в арифметике пользовались понятием *множество*. В виде эксперимента учитель может ввести этот термин и на простых примерах показать, что такое множество, дать понятие об элементах его и показать запись конкретных множеств (см. § 11 этой главы). До введения буквенных обозначений можно, например, обозначить $\{1;\ 6\}$ — множество, состоящее из элементов 1 и 6. В дальнейшем появится запись более полная $A = \{1;\ 6\}$.

Следует помнить, что термин *множество* — неопределимый.

На первых уроках алгебры ученики должны понять, что под буквой надо подразумевать число, поэтому из упражнений следует устранить все, что может исказить это представление (например, ученик может представить, что буква не число, а количество).

§ 2. ТРАДИЦИОННЫЕ СПОСОБЫ ВВЕДЕНИЯ БУКВЕННЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Существует несколько способов введения буквенных обозначений.

1) Составление числовых выражений при решении однотипных задач и обобщение решения с помощью букв.

Этот прием тесно связан с ранее известным из арифметики и поэтому интересует учеников. Трудность здесь в том, что ученикам надо хорошо знать зависимость между нужными для решения задач величинами, а так же в том, что при решении задачи основное внимание учеников направлено на процесс решения, а это отвлекает их от целей, преследуемых уроком. Кроме того, данные в задаче числа ученики часто воспринимают как количества. Поэтому в момент обобщения (переход от числовой формулы решения к буквенной) к представлению «буква — любое число» могут примешаться представления «буква — количество». Создает дополнительную трудность и то, что буква появляется в связи с алгебраическим выражением.

2) Составление алгебраических формул для решения однотипных задач.

Применяя этот способ, приходится преодолевать те же трудности, что и в предыдущем случае, и при этом нужно ввести еще понятие равенства.

3) Запись законов арифметических действий с помощью букв.

Введение буквенных обозначений этим способом сравнительно не трудно для учеников, так как в самой формулировке законов действий речь идет о любых числах. И запись законов действий с помощью букв носит естественный характер. Но такой способ введения для учащихся VI классов формален и скучен, они не видят перспективы его применения.

4) Решение задач с помощью составления уравнения.

При введении буквенных обозначений во время решения задач с помощью составлений уравнений можно использовать конкретный материал, но это познакомит учащихся только с буквой, выражающей конкретное число (говорить, что неизвестное в уравнении — величина переменная, преждевременно). Зато можно с первых же шагов показать, что алгебра дает новые методы решения задач.

5) Способ введения буквенных обозначений с помощью «чистого бланка» (пропуск, место для заполнения) нельзя отнести к традиционным, и поэтому его рассмотрим более подробно в отдельном параграфе.

Каким бы образом не вводилось буквенное обозначение чисел, нужно познакомить учащихся и с другими приемами, проделав соответствующие упражнения. Значит, в основном существенно, какой способ применить первый раз.

В следующих традиционных способах буквы вводятся в связи с алгебраическими выражениями или равенствами. Внимание учащихся при этом направляют вначале на употребление букв, потом на знаки действий и, наконец, на алгебраические выражения.

1) Обобщение решения однотипных задач.

При составлении алгебраических выражений и формул по условию задачи показывают, что для решения данных однотипных задач можно указать общий способ решения и записать его с помощью букв, то есть обобщить.

Перед тем как ввести буквенные обозначения, полезно 1—2 урока потратить на решение арифметических задач с целью повторения зависимостей между величинами, которые могут встретиться при составлении числового выражения решения арифметической задачи.

Первый урок по алгебре можно начать с простых упражнений, в которых введены буквенные обозначения, употреблявшиеся ранее, например.

$$3 : x = 6 : 6; \quad x = ?$$

Решение. $x = \frac{3 \cdot 7}{6} = 3{,}5.$

После решения можно задать вопросы: а) Что обозначено буквой x? б) Чему он равен? После ответов подчеркнуть, что $x = 3{,}5$, то есть число определенное.

Затем обращаются к задачам, в которых под буквой будет подразумеваться не конкретное, а любое число (пригодное по условию задачи). Сначала берут задачи в 1—2 действия, легкие по содержанию.

Задача 1. *В пошивочной мастерской было 120 м трико, из него сшили 25 костюмов одного стандартного размера. Сколько осталось метров трико, если на каждый костюм шло 3 м ?*

Решение. При решении будем действия не выполнять, а только обозначать.

1. Сколько метров трико пошло на 25 костюмов? $3 \cdot 25$ *м*.

2. Сколько метров трико осталось? $(120—3 \cdot 25)$ *м*.

Для решения задачи мы получили числовое выражение $120 — 3 \cdot 25$. Выполнив действия, получим ответ: 45 *м*. Затем дается несколько числовых вариантов решения этой задачи с различными числовыми данными.

Задача 1а. *В пошивочной мастерской было 100 м трико, из него сшили 22 костюма одного стандартного размера. Сколько осталось метров трико, если на каждый костюм шло 3,2 м?*

Решение. 1. Сколько метров трико пошло на 22 костюма? $3{,}2 \cdot 22$ *м*.

2. Сколько метров трико осталось? $(100—3{,}2 \cdot 22)$ *м*.

Для решения задачи мы получили числовое выражение $100—3{,}2 \cdot 22$. Выполнив действия, получим ответ: 29,6 *м*.

Дальше цель урока сводится к тому, чтобы учащиеся увидели общее в решении и отличие и сумели бы в результате сопоставления обобщить и записать решение с помощью букв. Можно учащимся предложить следующие вопросы:

а) Какие величины входят в условия этих задач?[1]

б) Какую величину надо найти?

в) Что общего в условии и вопросе одной и другой задачи?

г) Чем отличаются условия этих задач?

д) Какие действия надо выполнить для решения данных задач?

[1] Эти вопросы приводятся в диссертации О. И. Лихачевой.

Ответы могут быть примерно такими:

а) В условие задач входят величины: число метров материала, число сшитых костюмов, число метров трико, нужного для одного костюма.

б) В этих задачах даны одинаковые величины и вопрос задачи один и тот же.

в) Эти задачи отличаются *только числовыми данными*.

г) Для решения этих задач надо выполнить одни и те же действия, а именно из общего числа метров трико вычесть произведение числа метров трико, использованного на один костюм, на число костюмов, что можно записать более наглядно:

$$\left\{\begin{matrix}\text{число метров трико,}\\ \text{имевшееся в мастерской}\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{число метров трико}\\ \text{в одном костюме}\end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix}\text{число}\\ \text{костюмов}\end{matrix}\right\} (1).$$

Эта запись выражает правило (алгоритм) решения задач данного типа. Пользуясь им, можно решить любую задачу такого же типа.

Такая запись хотя и наглядна, но очень громоздка. Чтобы сделать ее короче, вводят буквенные обозначения. Обозначим число метров трико, имевшегося в мастерской, буквой M[1], число метров трико в одном костюме — m, а число костюмов — K. Тогда запись решения (1) примет вид

$$M - mK \qquad (2).$$

К выражению (2) можно было подвести учащихся, решая следующую задачу.

Задача 16. *В пошивочной мастерской было M м трико, из него сшили K костюмов одного стандартного размера. Сколько осталось метров трико, если на каждый костюм шло m м?*

Решение. 1. Сколько метров трико пошло на K костюмов? mK *м*.

2. Сколько метров трико осталось? $(M - mK)$ *м*.

На первом уроке целесообразно решить еще одну задачу другого характера, чтобы показать, что буквенные выражения, получаемые после решения, будут различными. Например:

Задача 2. *Пароход должен пройти вниз по течению реки 200 км. Сколько часов он будет в пути, если собственная скорость парохода 16 км/ч, а скорость течения реки 4 км/ч?*

Решение. 1) С какой скоростью движется пароход по течению?

$(16 + 4)$ *км/ч*.

---

[1] На первых порах учащимся трудно запоминать, что обозначает буква, поэтому введена буква M, а не A, B, и т. д., чтобы легче помнить, что здесь число метров; аналогично K — числу костюмов.

2) За сколько часов пароход пройдет 200 *км* по течению?

$$\frac{200}{16+4} \text{ ч.}$$

Получим опять числовое выражение. Сделав вычисления, найдем, что пароход будет в пути 10 часов.

З а д а ч а 2 а. *Пароход должен пройти вниз по течению* 480 *км. Сколько часов он будет в пути, если собственная скорость парохода* 15 *км/ч, скорость течения* 3 *км/ч?*

Получим аналогичное решение $\frac{480}{15+3}$ *ч.*

Можно дать еще вариант задачи, изменив числовые данные или изменив и содержание. Например:

З а д а ч а 2 б. *Самолет должен пролететь* 1400 *км, но в том же направлении дует ветер. Сколько часов самолет будет в пути, если собственная скорость его* 650 *км/ч, скорость ветра* 50 *км/ч?*

На вопросы, заданные после решения различных числовых вариантов задачи 2, ответы учащихся могут быть примерно следующими:

а) В условие этих задач входят путь, собственная скорость парохода и скорость течения.

б) В задачах требуется найти время движения.

в) Входят в условия одни и те же величины, вопрос задачи один и тот же.

г) Различие только в числовых данных.

д) Для решения этих задач нужно выполнить одни и те же действия, а именно путь надо разделить на сумму скоростей парохода и течения.

Сделав последнее заключение, можно будет опять записать его более наглядно:

$$\frac{\text{число, выражающее путь в } км}{\left\{\begin{matrix}\text{число, выражающее}\\ \text{скорость парохода в } км/ч\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{число, выражающее}\\ \text{скорость течения в } км/ч\end{matrix}\right\}} \quad (3).$$

Последняя запись выражает правило решения задач на движение парохода по течению. Пользуясь записанным правилом, можно решить любую задачу такого же типа, использовав соответствующие данные.

Следует избегать более простой записи:

$$\frac{\text{путь } км}{(\text{скорость парохода } км/ч) + (\text{скорость течения } км/ч)}$$

так как цель урока — показать употребление букв вместо числа, а в последней записи ученики могут подумать, что буква — простое сокращение названия пути, скорости, а не число.

Как и в задаче 1, введем буквенные обозначения. Обозначим число, выражающее путь в *км*, через S, собственную скорость парохода в *км/ч* через v, скорость течения в *км/ч* через a, тогда для решения получим из записи (3) выражение

$$\frac{S}{v+a} \qquad (4).$$

Подставляя в выражение (4) вместо букв числа из условия задачи, получим решение.

Полученные выражения (2) и (4) дают верное решение для всех подобных задач. Определенный тип задач решается по одному и тому же правилу, следовательно, решение (2) — общее для задач типа 1, а решение (4) — для задач типа 2.

К выражению (4) можно было прийти, решая следующую задачу.

Задача 2 в. *Пароход должен пройти по течению S км. Сколько часов он будет в пути, если собственная скорость парохода v км/ч, скорость течения a км/ч?*

Решение. 1) С какой скоростью движется пароход по течению?

$$(v+a) \text{ км/ч}.$$

2) Сколько часов пароход будет в пути?

$$\frac{S}{v+a} \text{ ч}.$$

После решения этих задач можно указать на удобство введения букв; они дают возможность кратко записать правило решения однотипных задач.

В результате решения указанных задач можно задать ученикам следующие вопросы:

Какая разница в записи: $120-4\cdot25$ и $M-mK$; в записи $\frac{200}{16+4}$ и $\frac{S}{v+a}$? (В первом запись сделана с помощью чисел и знаков действий, в другом — с помощью букв и знаков действий.)

Какое сходство в записи: $120-4\cdot25$ и $M-mK$; в записи $\frac{200}{16+4}$ и $\frac{S}{v+a}$? (Действия и порядок их один и тот же.)

Что понимается под буквами в записи: $M-mK$; в записи $\frac{S}{v+a}$? (Под буквами понимаются числа.) После этого дается определение алгебраического выражения, причем подчеркивается, что, в частности, $120-4\cdot25$, $\frac{200}{16+4}$ и т. д. тоже алгебраические выражения, их иногда называют числовыми выражениями.

В заключение можно объяснить употребление букв вместо чисел: когда речь идет об определенном конкретном числе, то его записывают посредством цифр; когда же хотят сказать о числе вообще, то вместо цифр пишут букву, подобно тому, как говорят: «какой-то человек», «несколько человек», «такое-то расстояние», «город N». Под буквой разумеется любое число из известных учащимся. Например, в задаче 1 ($M — mK$) M и m могут быть целыми, дробными числами, K может быть нулем или натуральным числом. Причем M не может быть меньше $m \cdot K$. Каждое отдельное число, из множества чисел, которые можно подразумевать под буквой, называется *значением* этой буквы. Значение буквы уже конкретно. Разными буквами обозначаются, как правило, разные числа, прописная и строчная буквы (например, M и m) обозначают разные числа.

Для обозначения действий между числами, записанными с помощью букв, употребляются те же знаки действий, что и в арифметике. Вместо знака умножения $\times$ обычно употребляют знак $\cdot$, причем надо указать, что между числами его ставить обязательно, например $3 \cdot 7$, а между буквами его опускают, то есть пишут ab, а не $a \cdot b$. Следует отметить, что в выражении ab не различают множимое и множитель, а говорят a и b множители, или сомножители. Знак деления : в алгебре употребляется редко, обычно пишут $\frac{a}{b}$, но не $a : b$.

Следует подчеркнуть, что в алгебре действия только обозначаются, например, в задаче 2 в выражении $v + a$, сложение только обозначено и в то же время $v + a$ — результат сложения.

При опросе учащихся можно предложить: 1) написать натуральное число, следующее за числом 3, за числом n; 2) написать два натуральных числа, следующих за числом 5, за числом n; 3) написать два натуральных числа, предшествующих числу 9, числу n; 4) написать числа, обратные числам 5, 6, a, $a+b$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{b+c}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a+b}$; 5) написать число, большее a на 9, большее b на 13, меньшее c на 5.

2) Составление алгебраических формул.

Составляют формулу для решения конкретной задачи, например: *Найти периметр P квадрата, сторона которого равна 3 см, 5 см, a см.*

Устанавливают, что в первых случаях в сантиметрах $P = 4 \cdot 3$ и $P = 4 \cdot 5$. По аналогии пишут $P = 4a$ (a и P в одинаковых единицах измерения). Указывается особенность записи в алгебре произведения (знак действия опущен). Следующие вопросы и упражнения такие же, как и в предыдущем способе.

3) Запись законов арифметических действий с помощью букв.

Учитель спрашивает, например, переместительный закон умножения. Затем ученики называют несколько конкретных примеров этого закона и записывают их.

$$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3; \quad \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{11} = \frac{7}{11} \cdot \frac{3}{8}.$$

Далее отмечают, что это только примеры, но закон верен для всех известных ученикам чисел, и поэтому подобных равенств можно написать бесконечно много. Чтобы кратко показать правильность закона для всех чисел, пишутся $ab = ba$. Здесь под a и b подразумеваются любые числа. Последняя запись сделана по аналогии с примерами. Представление о букве при этом способе получается верное и возникает без особого напряжения. Далее переходят к решению задач (аналогично первому способу, разобранному в этом параграфе).

4) Составление уравнений.

Можно начать изложение алгебры с демонстрации решения арифметических задач с помощью уравнений. Дается задача. Ее решают арифметически, затем показывают, как можно ее решить, составив уравнение.

Задача. *В пачке несколько карандашей. Если каждому мальчику дать по* 5, *то останется* 3 *карандаша, если же дать каждому по* 3, *то останется* 7 *карандашей. Сколько мальчиков?*

Решение арифметическое.

1) $7 - 3 = 4$ — на столько больше карандашей останется.

2) $5 - 3 = 2$ — на столько больше карандашей дается каждому.

3) $4 : 2 = 2$ (мальчика).

Объяснение этого решения нелегкое. Связи между разностью в числе карандашей, получаемых мальчиками, и разностью в числе оставшихся карандашей не все ученики чувствуют.

Решение алгебраическое.

Пусть число мальчиков — x. Первый раз каждый мальчик получил по 5 карандашей, следовательно, x мальчиков получили $5x$ карандашей, да осталось 3 карандаша, то есть всего было $(5x + 3)$ карандашей. Аналогично второй раз x мальчиков получили $3x$ карандашей, да осталось 7, следовательно, всего было $(3x + 7)$ карандашей. Но число карандашей то же самое, поэтому

$$\underset{\substack{\text{неизв.}\\\text{слаг.}}}{5x} + \underset{\text{изв.}}{3} = \underset{\text{сумма}}{3x + 7}$$

По свойству суммы $5x = 3x + 7 - 3$, или

$$\underset{\text{сумма}}{5x} = \underset{\text{слаг.}}{3x} + 4$$

По той же причине $4 = 5x - 3x$, или $4 = 2x$.

По свойству произведения

$$x = \frac{4}{2}, \text{ или } x = 2.$$

Затем учащимся говорится, что задача решена новым для них методом. При этом были введены буквенные обозначения и т. д.

С целью показать преимущество алгебраических приемов взята задача, которую трудно решить арифметически. Если учитель считает, что для данного класса она трудна, ее можно заменить другой.

§ 3. ВВЕДЕНИЕ БУКВЕННЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЧИСТОГО БЛАНКА. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Способ введения буквенных обозначений с помощью чистого бланка (пропуск, место для заполнения) ученикам знаком по урокам русского и иностранного языков. Он дает возможность понять наиболее простым путем, что буквой обозначены числа.

Цель первого урока — показать употребление букв в алгебре. Ученики должны усвоить, что: 1) под буквой в алгебре понимаются числа; 2) какие именно — зависит от некоторых условий; это устанавливают на конкретных примерах.

Можно начать заполнение чистого бланка, не связанного с числами.

П р и м е р 1. Заполнить бланк в следующих предложениях:

1) Мое имя — $\square$.

2) $\square$ океан.

В случае 1 каждый учащийся вместо $\square$ ставит свое имя. Например, он получит предложение: «Мое имя — Виктор».

В случае 2 определенный океан написать нельзя, их — четыре. Вместо $\square$ можно поставить: Тихий, Атлантический, Индийский, Северный Ледовитый. Каждый из них возможен.

В ы в о д. Ответ в случае 1 определенный; 2 неопределенный, имеются четыре возможности.

Можно привести примеры использования «бланков» на практике. Так, над кассами довольно часто висят таблички, в которых написано сверху «кассир» и оставлен пустой «бланк». В этот бланк помещается карточка с фамилией работающего кассира. Ученики сами смогут привести другие примеры.

В следующих упражнениях ставится вопрос о заполнении бланка числами. Можно начать с практических примеров. Так, в сберкассах для посетителей вывешивается табличка с бланком, в который вставляют карточку с сегодняшним числом. На стадионах — «бланки» для числа забитых голов на футболе, для счета в баскетболе. Учащиеся сами приведут другие примеры.

П р и м е р 2. Заполнить «бланк»:

1) Карандаш «Пионер» стоит $\square$ коп.

2) Карандаш стоит $\square$ коп.

В случае 1 ученики ставят в бланк число 1 и получают: «Карандаш «Пионер» стоит 1 коп.».

В случае 2 бланк — «носитель» нескольких чисел. Чтобы учащиеся это лучше представили, можно дать наводящие вопросы:

Что надо поставить в бланк? (Числа, выражающие цену.)

Какие именно? (1; 2; 3; 4; 5; 7; 10.)

Чем отличается этот случай от предыдущего? (В первом случае бланк вмещал только одно определенное число, во втором — несколько чисел, каждое из которых возможно.)

Если ученики знакомы с понятием множества, то можно сказать, что в этом примере под бланком подразумевается множество чисел. В первом случае подразумевается множество $\{1\}$, во втором — $\{1; 2; 3; 4; 5; 7; 10\}$.

Подчеркивается, что в бланк ставят числа (числа, выражающие цену, а не цену предметов).

П р и м е р 3. Заполнить «бланк»:

1) Рост ученика нашего класса — ☐ *см*.

2) Длина отрезка равна ☐ *см*.

Если, например, самый низкий ученик в классе имеет рост 148 *см*, 1 самый высокий — 160 *см*, тогда школьники установят, что для случая 1 в бланк возможно поставить столько чисел, сколько учеников имеют различный рост.

Появятся числа 148, ..., 160.

Во втором случае в бланк можно поставить бесконечное множество чисел. Возможно, чтобы прийти к этому выводу, учителю придется задать наводящие вопросы.

Что надо поставить в бланк? Почему? (Числа, так как длина отрезка — число.)

Какие числа поставим в бланк? (Любые.)

Почему? (Отрезков бесконечное множество, а потому и чисел, выражающих их длину, тоже бесконечное множество.)

Выпишем все рассмотренные примеры на доску.

Таблица 5

Вопрос	Результат	Число
1. Карандаш «Пионер» стоит ☐ коп.	1	одно
2. Карандаш стоит ☐ коп.	1; 2; 3; 4; 5; 7; 10	несколько
3. Рост ученика нашего класса ☐ *см*	145; ...; 160	
4. Длина отрезка ☐ *см*	1; 0,74; 17; ...	бесконечно много

Если введена запись для множеств, то можно записать $\{1\}$ и т. д.

В ы в о д. В случае 1 речь идет о конкретном числе, в случаях 2, 3 и 4 под бланком подразумевается неопределенное число (несколько или бесконечное множество чисел).

Учитель обобщает: когда речь идет о конкретном числе, его записывают с помощью цифр, а когда речь идет о неопределенном числе, его записывают с помощью букв.

На этом основании можем заполнить бланки в рассмотренных примерах так:

1. Карандаш «Пионер» стоит 1 коп.
2. Карандаш стоит a коп.
3. Рост ученика нашего класса b *см*.
4. Длина отрезка x *см*.

Теперь можно указать, что: 1) под буквой подразумевается любое число, возможное при заданных условиях; 2) каждое отдельное число из множества чисел, которые можно подразумевать под буквой, называется *значением* буквы. Например, в случае 4 $x = 0{,}74$ — одно из бесконечного *множества значений* x.

Примеров с бланком можно давать на цены товаров, на расстояния между станциями железной дороги, на расписание местных линий автобусов и т. д.

В следующих упражнениях буквы должны выступить вне связи с текстом. Например, можно показать:

1) применение букв для записи законов действий

$3+4=4+3$ $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{5}{7}+\frac{2}{3}$	$a+b=b+a$

(подчеркивается, что в этом случае a и b — любые числа); 2) запись алгоритма действий

$\frac{2}{3}\cdot 5=\frac{2\cdot 5}{3}$ $\frac{3}{7}\cdot 6=\frac{3\cdot 6}{7}$	$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}$

Подчеркивается, что в этом случае a и c — любые натуральные числа и нуль, но $b \neq 0$, то есть только натуральное число.

В обоих случаях учитель сперва устанавливает с учащимися, что значит арифметическая запись. Отмечает, что она выражает зависимость лишь для одного случая данных чисел. После того как вводится буквенная запись (справа), отмечается ее преимущество — она объединяет в себе все возможные частные случаи.

Так, если в записи $a + b = b + a$ возьмем значения $a = 3$, $b = 4$, то получим запись $3 + 4 = 4 + 3$; если $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{5}{7}$, то получим запись $\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{5}{7} + \frac{2}{3}$ *и т. д.*

В последних примерах по аналогии с арифметической записью были обозначены действия. Это воспринимается без труда; ведь под буквой подразумеваются числа, следовательно, действия с буквами надо обозначать так же, как действия с числами.

Сразу следует подчеркнуть, что при умножении знак действия перед буквой не ставится, а перед числом ставить его обязательно, например $4a$, но $a \cdot 4$. Деление можно записывать $a : b$, но в алгебре предпочитают писать $\frac{a}{b}$.

С первых шагов отмечаются особенности записи действий в алгебре — в алгебре действия только обозначаются. Так $a + b$ — сумма, ab — произведение и т. д. Таким образом запись суммы в алгебре совпадает с записью невычисленной суммы в арифметике. Это указывает на целесообразность введения последнего термина (аналогично и для разности, произведения и частного).

На этом заканчивается формирование первоначального представления об употреблении букв и знаков действий с ними.

К понятию алгебраического выражения подводят в процессе решения задач с буквенными данными. Задачи подбираются сперва с одной буквой, выражающей данное число, потом с двумя и т. д. Например:

Задача 1. *Скорость велосипедиста 12 км/ч. Сколько он проедет за 2 часа, 3 часа, а часов?*

Решение. 1) $12 \cdot 2 = 24$ (*км*) 2) $12 \cdot 3 = 36$ (*км*)	$12a$ (*км*)

Последний случай ученики обычно делают легко по аналогии, но если некоторые из них не поймут, что надо делать, то можно дать наводящие вопросы:

Какие величины входят в условие задачи? (Скорость и время.)

Что надо сделать для решения задачи? (Скорость умножить на время.)

После этого появляется запись справа.

Следует показать, что в последней записи $12a$ (*км*) содержатся все частные случаи. Так, при значении $a = 2$ получим первый случай $12 \cdot 2$; при значении $a = 3$ получим второй случай $12 \cdot 3$ и т. д. Запись $12a$ есть общее решение всех задач, в которых надо найти путь, пройденный со скоростью 12 *км/ч*.

Задача 2. *Сколько купили киллограммов товара, если заплатили 6 руб., а цена килограмма — 2 руб.? 7 руб. и 0,5 руб.? а руб. и b руб?*

Решение. 1) $\frac{6}{2} = 3$ (*кг*) 2) $\frac{7}{0{,}5} = 14$ (*кг*)	$\frac{a}{b}$ (*кг*), $b \neq 0$.

И в этой задаче полезно подчеркнуть, что решение $\frac{a}{b}$ содержит в себе все возможные частные случаи.

Первоначально решают задачи с числовыми данными, потом делают обобщение на буквах. Задачи, содержащие только буквенные данные, могут вызвать затруднения. В этом случае можно упростить их, задав частные значения букв, а потом обобщить.

Задача 3. *Расстояние между станциями S км. Из них одновременно навстречу вышли два поезда и встретились через t часов. Скорость одного поезда v км/ч. Найти скорость другого.*

S *км* — общий путь, t *ч* — общее время v *км/ч* — скор. I x *км/ч* — скор. II	$S = 440$ *км* $t = 4$ *ч* $v = 60$ *км/ч*
Решение. 1) $440 : 4 = 110$ (*км/ч*) (сумма скоростей) 2) $110 - 60 = 50$ (*км/ч*) — скорость II	$\frac{S}{t}$ (*км/ч*) — сумма скоростей $\left(\frac{S}{t} - v\right)$ (*км/ч*) — скорость II

Решение алгебраическое ведется по аналогии с арифметическим. Устанавливают, что надо сделать при решении задачи с числовыми данными, выполняют действия. В правой части аналогично невыполненным действиям проводят решение на буквах.

После того когда найдено общее решение, ученикам предлагают придумать несколько аналогичных задач с числовыми данными. Затем решить некоторые из составленных задач, использовав запись решения в общем виде.

В конце урока, решив несколько задач, выписывают полученные решения без наименований. Например, на доске напишут:

$$12a, \frac{a}{b}, \frac{S}{t} - v \text{ и др.}$$

Выясняется, что общего в этих записях: они составлены из чисел и букв, соединенных только знаками действий.

Установив признаки, учитель дает определение алгебраического выражения.

§ 4. ЗНАЧЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ. ДОПУСТИМЫЕ ЗНАЧЕНИЯ БУКВ

С введением алгебраических выражений связаны упражнения на вычисление их значений при определенном значении букв, а также упражнения на чтение простейших алгебраических выражений.

Можно дать определение, что называется числовым значением алгебраического выражения, но оно очень громоздко и не помогает в работе, поэтому требовать от учеников его нецелесообразно, тем более, что учащиеся легко понимают, как находить числовое значение (краткое значение) выражения.

Первое время алгебраические выражения подбирают с небольшим числом входящих букв, сперва с одной буквой, потом больше.

Пример 1. *Найти значение* $\frac{x+1}{x-2}$ при $x=5$.

Обычно пишут $\frac{x+1}{x-2}=\frac{5+1}{5-2}$ *и затем вычисляют.*

Такая запись не выражает выполняемой операции, а главное — это равенство — уравнение 1-й степени с одним неизвестным, корень которого равен 5. Разным понятиям должна соответствовать различная запись. Можно рекомендовать следующую запись для вычисления значения алгебраического выражения:

$$\left.\frac{x+1}{x-2}\right|_{x=5}=\frac{5+1}{5-2}=2.$$

Пример 2. Найти значение $\frac{a+b}{b-3}$ при $a=5$, $b=6$.

$$\left.\frac{a+b}{b-3}\right|_{\substack{a=5\\ b=6}}=\frac{5+6}{6-3}=3\frac{2}{3}.$$

Запись $\left.\frac{x+1}{x-2}\right|_{x=5}$ $\left.\frac{a+b}{b-3}\right|_{\substack{a=5\\ b=6}}$ отражает операцию, которую надо выполнить, чтобы найти значение алгебраического выражения при данных значениях букв, входящих в него, и показывает, что вместо букв надо подставить их значения. Она наглядна и доступна. Знак равенства, входящий в запись, имеет такой же смысл, как и в арифметике.

В некоторых упражнениях этого вида целесообразно задавать приближенные значения букв, чтобы повторить правила приближенных вычислений, причем ученики выполняют действия по правилам приближенных вычислений, сохраняя запасную цифру в промежуточных действиях.

Пример 3. *Вычислить приближенно значение алгебраического выражения* $\frac{2x+3y}{5x+6y}$, *если:* 1) $x\approx 0{,}7$, $y\approx 0{,}2$;

2) $x\approx 0{,}35$; $y\approx 0{,}46$.

Решение.

1) $$\left.\frac{2x+3y}{5x+6y}\right|_{\substack{x\approx 0{,}7\\ y\approx 0{,}2}}\approx\frac{2\cdot 0{,}7+3\cdot 0{,}2}{5\cdot 0{,}7+6\cdot 0{,}2}=\frac{1{,}\underline{4}+0{,}\underline{6}}{3{,}\underline{5}+1{,}\underline{2}}=\frac{2{,}\underline{0}}{4{,}\underline{9}}\approx\approx 0{,}4\underline{3}\approx 0{,}4,$$

так как в данных только одна значащая цифра (подчеркнута запасная цифра).

$$2)\ \frac{2x+3y}{5x+6y}\ \Bigg|\ \begin{matrix} x\approx 0{,}35 \\ y\approx 0{,}46 \end{matrix} \quad \approx \frac{2\cdot 0{,}35+3\cdot 0{,}46}{5\cdot 0{,}35+6\cdot 0{,}46}=\frac{0{,}70+1{,}38}{1{,}75+2{,}76}=\frac{2{,}08}{4{,}51}\approx \approx 0{,}461\approx 0{,}46,$$

так как в данных только две значащие цифры.

Когда задается несколько значений одной и той же буквы алгебраического выражения, удобно применять таблицу (см. таблицу 6). Такие упражнения подготавливают к тому, что бы рассматривать алгебраические выражения как величины переменные, зависящие от значений входящих в них букв.

Пример 4. *Найти значения* $\frac{a}{b+c}$ *по следующей таблице.*

Таблица 6

a	200	480	1400	98	375	498,8
b	16	15	650	18	16,5	17,4
c	4	3	50	2,5	3	2,5
$\frac{a}{b+c}$	10					

По этой таблице учащимся можно предложить подобрать любые тройки значений a, b и c и найти соответствующие значения $\frac{a}{b+c}$. Здесь полезно подчеркнуть, что значение алгебраического выражения $\frac{a}{b+c}$ меняется в зависимости от значений a, b и c, и можно отметить, что $\frac{a}{b+c}$ — величина переменная, зависящая от других переменных a, b и c. Это не означает, что мы вводим понятие зависимой переменной, или функции, но подготавливаем к нему, накапливая необходимый материал, чтобы легче было потом его обобщить. Это один из важнейших элементов функциональной пропедевтики.

Вычисление значения отдельного алгебраического выражения показывает, что буквой записано число. Составление таблиц значений алгебраического выражения по произвольно взятым значениям букв имеет целью показать, что под буквой разумеется любое число, при котором выражение имеет смысл. При составлении таблиц лучше брать такие алгебраические выражения, в которых при подстановке любых чисел не получится числа отрицательного и не встретится деления на 0 (например, предыдущая таблица).

Все приведенные упражнения на вычисление значений алгебраических выражений довольно однообразны. Можно предложить еще упражнения, приведенные в польском учебнике алгебры.

1. Если m и n — простые числа, то $mn + 1$ — тоже простое число. Убедиться на примерах.

2. Многие математики искали общую формулу, по которой можно узнать простое число.

а) Французский математик Лежандр (1752—1833) нашел, что числа вида $2n^2 + 29$ при $n = 0; 1; 2; 3; \dots; 28$ будут простыми. Проверить это.

б) Л. Эйлер (1707—1783), долго работавший в России, нашел, что числа вида $n^2 + n + 41$ при $n = 0; 1; 2; 3; \dots; 39$ будут простыми. Проверить это.

3. a и b — взаимно простые числа. Показать, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима.

4. Найти значения выражения $\frac{n(n+1)}{2}$ при $n = 2; 3; 4; \dots; 10$ и убедиться, что оно равно соответственно сумме $1 + 2$; $1 + 2 + 3$; $1 + 2 + 3 + 4$; ...; $1 + 2 + 3 + \dots + 10$.

Полезно дать упражнения, рассчитанные на сообразительность, например: 1) Может ли ab равняться a? 2) При каком значении b ab больше a? 3) При каком значении b ab меньше a? и т. д.

Когда ученики несколько привыкнут к записи чисел буквами, им можно дать задание составить таблицу, в которой буквам можно давать не любые значения, а приходится на них накладывать ограничения.

П р и м е р 5. Заполнить таблицу:

Таблица 7

a	6	5	4	3	2
$a - 3$					

Ученик последовательно найдет искомые значения 3, 2, 1, 0, а для $a = 2$ он в таблице напишет, что 2—3 не имеет смысла, так как из меньшего числа нельзя вычесть большего. После заполнения таблица примет вид:

Таблица 8

a	6	5	4	3	2
$a - 3$	3	2	1	0	не имеет смысла

П р и м е р 6. Заполнить таблицу:

Таблица 9

a	0	1	2	3	4
$\frac{a+3}{a}$					

Здесь ученик встретится со случаем, в котором знаменатель $a = 0$, и выражение $\frac{a+3}{a}$ не имеет смысла.

После таких подготовительных упражнений дают определение допустимых значений букв. Причем лучше сказать учащимся, что при некоторых отдельных значениях букв алгебраическое выражение не имеет смысла, и не говорить о множестве всех допустимых значений букв, входящих в это выражение. Показав на 1—2 примерах, что при некоторых значениях букв разность не имеет смысла (пример 5), следует сосредоточить внимание на случае невыполнимости деления (пример 6).

Упражнения на заполнение таблиц, когда среди заданных значений букв имеются недопустимые, служат хорошей подготовкой к введению понятия допустимых значений букв.

Ставить же вопрос о том, при каком значении, например, выражение $\frac{x+5}{x-4}$ не имеет смысла, в этот момент изучения алгебры преждевременно.

Учащиеся еще недостаточно привыкли к буквенным обозначениям и, кроме того, вопрос о допустимых значениях букв станет проще, когда учащимся станут известны отрицательные числа.

Упражнения на вычисление значений алгебраических выражений и составление таблиц значений, особенно последние, очень полезно вести на протяжении всего курса алгебры VI и VII классов.

§ 5. ЧТЕНИЕ И ЗАПИСЬ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Упражнения на чтение и запись алгебраических выражений, вводимые до понятия коэффициента и степени, могут быть только очень простыми. Но и в этом случае учащиеся столкнутся с затруднениями, так как понятия, сложившиеся у них при изучении арифметики, приобретают новый смысл. Так, при изучении арифметики школьники считают, что 5+3 не сумма, а запись действия, сумма же равна 8. Также и по отношению к разности, произведению, частному. В алгебре всякое действие только обозначено. Например, при сложении чисел a и b ставится только знак действия плюс, таким образом, $a + b$ — запись действия и результат его. Аналогично выражения $a - b$, ab, $\frac{a}{b}$ обозначают и запись действия и результат действия. Совпадение записей действия и результата его имеет большое преимущество, так как сразу видно по результату, как он получен, но это для детей необычно и потому усваивается с трудом. Трудность значительно уменьшится, если различать «невычисленную» и «вычисленную» сумму, произведение. Например, $5 \cdot 3$ — невычисленное произведение.

Первые упражнения на чтение алгебраических выражений должны быть простыми, содержать не больше одного действия. Например, прочитать, что представляют следующие выражения: $a+5$, $b-3$, ab, $\frac{a}{5}$ и т. д.

Переход к чтению выражений, содержащих больше действий, затрудняется еще тем, что читать начинают с последнего действия. Поэтому вначале надо повторить порядок арифметических действий и сказать, что он сохраняется и в алгебре, то есть сначала выполняют действия второй ступени (умножение, деление), потом первой ступени (сложение, вычитание). Действия одной ступени выполняют в порядке записи. Последнее правило приводит в случае умножения и деления к некоторым разногласиям. В дальнейшем при делении одночленов будет, например, применяться запись $3ab : ab$. По указанному правилу порядка действий надо $3ab$ разделить на a и результат умножить на b, но по традиционному пониманию в алгебре здесь записано деление одночленов $3ab$ на одночлен ab. В спорных случаях можно поставить скобки и тем самым упорядочить запись, например: $3ab : (ab)$.

Прежде чем перейти к чтению алгебраических выражений, целесообразно дать ученикам упражнения, в которых они находят порядок действия.

Пример 1. *Указать порядок действия в следующих выражениях:*

$$a+bc; \quad a+b:c; \quad a-bc; \quad \frac{a+b}{c}; \quad \frac{a+b}{a-b} \text{ и т. д.}$$

Решение. Первое действие—умножение (b умножается на c), второе — сложение.

Затем можно перейти к чтению выражений, при этом надо указать, что первым всегда читается последнее действие. Правило это по возможности надо сделать наглядным, для чего полезно выполнить следующие упражнения.

Пример 2. Прочитать выражение $a - bc$.

Решение. Рассмотрим порядок действий в выражении

$$\underbrace{a - \overbrace{bc}^{\text{I}}}_{\text{II}}.$$

Последнее действие — вычитание (II), значит, это разность, разность между a и bc, но bc — произведение (I). Итак, это разность между числом a и произведением b на c. Окончательно опускаем a, b, c и читаем $a - bc$ — разность между числом и произведением двух других чисел.

Пример 3. Прочитать выражение

$$\frac{a+b}{a-b}.$$

Решение. Рассмотрим порядок действий:

$$\left.\frac{\overbrace{a+b}^{\mathrm{I}}}{\underbrace{a-b}_{\mathrm{II}}}\right]\mathrm{III}.$$

Последнее действие — деление, значит, данное выражение — частное, делимое $a + b$ (сумма), делитель $a - b$ (разность). Итак, это частное от деления суммы чисел a и b на их разность. Окончательно опускаем a, b, тогда $\frac{a+b}{a-b}$ — частное от деления суммы двух чисел на их разность.

Для выражения $a - bc$ можно составить наглядную таблицу:

Таблица 10

Порядок действий	Выражение $a - bc$	Порядок чтения
↓ 1. Умножение	bc	2. Произведение ↑
2. Вычитание	$a - bc$	1. Разность

Но для второго примера таблица уже неудобна.

Поэтому лучше приучить читать по этапам без таблиц.

Полезно показать учащимся схему для чтения алгебраических выражений. Например:

$$\underbrace{\underbrace{a}_{\text{число}} + \underbrace{bc}_{\substack{\text{произв.}\\ \text{чисел}}}}_{\text{сумма}}; \quad \underbrace{\underbrace{a}_{\text{число}} - \underbrace{b:c}_{\substack{\text{частное}\\ \text{чисел}}}}_{\text{разность}}; \quad \left.\frac{\overbrace{a+b}^{\text{сумма}}}{\underbrace{a-b}_{\text{разность}}}\right]\text{частное}$$

К уроку следует приготовить подобные таблицы для нескольких выражений или написать их на доске перед уроком.

Применяя таблицы, целесообразно сначала предложить ученикам показать все суммы, все разности, все произведения, все частные. Спросить, какое последнее действие в каждом из выражений, а потом перейти к чтению.

Подробный разбор приходится делать на первых порах, пока ученики не привыкли читать выражения.

Затем делают упражнения на запись выражений под диктовку или по сборнику задач по алгебре. В нем первые упражнения сформулированы так, что в них числа заданы, например, требуется написать частное от деления суммы чисел a и b на их разность. Это упрощает запись, но так как цель этих упражнений показать, что речь идет о любых числах, то наряду с этой формулировкой нужно употреблять и такую: «написать частное от деления двух чисел на их разность» и т. д.

§ 6. СТЕПЕНЬ

Вводя понятие степени, можно сделать записи, которые применялись в арифметике при разложении натуральных чисел на множители, и предложить более рациональную запись их.

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5; \quad 63 = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7 \text{ и т. д.}$$

Знакомство с понятием **степень** можно начать и с решения следующей задачи.

З а д а ч а. *Найти объем куба, ребро которого равно a.*

Р е ш е н и е. Чтобы получить объем куба, надо перемножить длину a, ширину a и высоту a, то есть объем равен aaa, или, введя краткую запись, a^3.

Целесообразно спросить учащихся:

1) Что называется произведением? 2) Как называются перемножаемые числа? 3) Какая особенность произведения aaa? 4) Как его записали кратко? 5) В чем удобство краткой записи? — после чего вводится определение степени.

Обращается внимание на термины *степень, основание степени, показатель степени*. Можно написать схему:

$$\boxed{a^{3 \leftarrow \text{показатель степени}}_{\leftarrow \text{основание степени}}} \leftarrow \text{степень}$$

Подчеркивается, что нахождение степени числа есть новое действие — возведение в степень (действие 3-й ступени).

Раскрыть смысл определения степени лучше при вычислении степеней чисел. Например, $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Можно потребовать, чтобы ученики для a^2, b^3 раскрыли бы определение степени, то есть написали $a^2 = aa$, $b^3 = bbb$, но упражнения, где из простого выражения, например $a^4 + b^5$, получается громоздкое выражение ($aaaa + bbbbb$), делать нецелесообразно, так как такие записи противоречат смыслу введения степени. Зато упражнения, в которых преобразования направлены в сторону упрощения, очень нужны. Например, $aaa + bbbbbb = a^3 + b^6$.

С введением степени значительно расширяется круг упражнений на вычисление значений алгебраических выражений.

числом a и произведением b на c. Окончательно опускаем a, b, c и читаем $a - bc$ — разность между числом и произведением двух других чисел.

Пример 3. Прочитать выражение

$$\frac{a+b}{a-b}.$$

Решение. Рассмотрим порядок действий:

$$\left.\frac{\overbrace{a+b}^{\text{I}}}{\underbrace{a-b}_{\text{II}}}\right]\text{III}.$$

Последнее действие — деление, значит, данное выражение — частное, делимое $a+b$ (сумма), делитель $a-b$ (разность). Итак, это частное от деления суммы чисел a и b на их разность. Окончательно опускаем a, b, тогда $\frac{a+b}{a-b}$ — частное от деления суммы двух чисел на их разность.

Для выражения $a - bc$ можно составить наглядную таблицу:

Таблица 10

Порядок действий	Выражение $a - bc$	Порядок чтения
1. Умножение	bc	2. Произведение
2. Вычитание	$a - bc$	1. Разность

Но для второго примера таблица уже неудобна.

Поэтому лучше приучить читать по этапам без таблиц.

Полезно показать учащимся схему для чтения алгебраических выражений. Например:

$$\underbrace{\underbrace{a}_{\text{число}} + \underbrace{bc}_{\text{произв. чисел}}}_{\text{сумма}}; \quad \underbrace{\underbrace{a}_{\text{число}} - \underbrace{b:c}_{\text{частное чисел}}}_{\text{разность}}; \quad \left.\frac{\overbrace{a+b}^{\text{сумма}}}{\underbrace{a-b}_{\text{разность}}}\right]\text{частное}$$

К уроку следует приготовить подобные таблицы для нескольких выражений или написать их на доске перед уроком.

Применяя таблицы, целесообразно сначала предложить ученикам показать все суммы, все разности, все произведения, все частные. Спросить, какое последнее действие в каждом из выражений, а потом перейти к чтению.

Подробный разбор приходится делать на первых порах, пока ученики не привыкли читать выражения.

Затем делают упражнения на запись выражений под диктовку или по сборнику задач по алгебре. В нем первые упражнения сформулированы так, что в них числа заданы, например, требуется написать частное от деления суммы чисел a и b на их разность. Это упрощает запись, но так как цель этих упражнений показать, что речь идет о любых числах, то наряду с этой формулировкой нужно употреблять и такую: «написать частное от деления двух чисел на их разность» и т. д.

§ 6. СТЕПЕНЬ

Вводя понятие степени, можно сделать записи, которые применялись в арифметике при разложении натуральных чисел на множители, и предложить более рациональную запись их.

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5; \quad 63 = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7 \text{ и т. д.}$$

Знакомство с понятием **с т е п е н ь** можно начать и с решения следующей задачи.

З а д а ч а. *Найти объем куба, ребро которого равно a.*

Р е ш е н и е. Чтобы получить объем куба, надо перемножить длину a, ширину a и высоту a, то есть объем равен aaa, или, введя краткую запись, a^3.

Целесообразно спросить учащихся:

1) Что называется произведением? 2) Как называются перемножаемые числа? 3) Какая особенность произведения aaa? 4) Как его записали кратко? 5) В чем удобство краткой записи? — после чего вводится определение степени.

Обращается внимание на термины *степень, основание степени, показатель степени*. Можно написать схему:

3 ← показатель степени a ← основание степени	← степень

Подчеркивается, что нахождение степени числа есть новое действие — возведение в степень (действие 3-й ступени).

Раскрыть смысл определения степени лучше при вычислении степеней чисел. Например, $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Можно потребовать, чтобы ученики для a^2, b^3 раскрыли бы определение степени, то есть написали $a^2 = aa$, $b^3 = bbb$, но упражнения, где из простого выражения, например $a^4 + b^5$, получается громоздкое выражение ($aaaa + bbbbb$), делать нецелесообразно, так как такие записи противоречат смыслу введения степени. Зато упражнения, в которых преобразования направлены в сторону упрощения, очень нужны. Например, $aaa + bbbbbb = a^3 + b^6$.

С введением степени значительно расширяется круг упражнений на вычисление значений алгебраических выражений.

Полезно наряду с вышеуказанными упражнениями давать легкие устные вопросы, рассчитанные на сообразительность и на доказательство. Например: 1) Доказать, что если $a = 0$, то $a^2 = a$. 2) Доказать, что если $a = 1$, то $a^3 = a^2$. 3) Что больше: a^2 или a^3? a^5 или a^4? 4) Всегда ли a^2 больше, чем a? 5) Может ли a^3 равняться a?

Решение. 1) $a\Big|_{a=0} = 0, a^2\Big|_{a=0} = 0 \cdot 0 = 0$, значит, при $a=0$ $a^2=a$.

4) Сильный ученик может догадаться, что при умножении на правильную дробь результат меньше множимого, и ответить, что a^2 меньше a при $a < 1$. Для наглядности в классе следует показать таблицу:

Таблица 11

a	4	3	2	$1\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
a^2	16	9	4	$2\frac{1}{2}$	1	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0
	$a^2 > a$				$a^2=a$	$a^2 < a$			$a^2 = a$

Итак, a^2 больше a, если $a > 1$; a^2 меньше a, если $0 < a < 1$.

Из таблицы это легче усмотреть. По этой таблице ученики легко могут сделать заключение, что если a — правильная дробь, то a^2 меньше a.

Следует уделить особое внимание упражнениям, подготавливающим к таблицам квадратов.

Пример 1. *С помощью степеней* 10 *представить следующие числа так, чтобы в целой части их была одна цифра*:

1) 45; 2) 349; 3) 56,3; 4) 2489; 5) 378,6; 6) 17,5.

Решение. 1) $45 = 4{,}5 \cdot 10$; 2) $349 = 3{,}49 \cdot 10^2$ и т. д.

С введением степени учащиеся ознакомились с пятым действием— возведением в степень, поэтому надо рассмотреть порядок выполнения действий.

Действия в алгебре разделяют по ступеням. Возведение в степень относится к третьей ступени. Правило сохраняется прежним, а именно: сначала выполняют действия старшей ступени, то есть третьей, потом второй и, наконец, первой.

Чтобы изменить порядок действий, вводят скобки, и тогда нужно сперва выполнить действия в круглых скобках, затем в квадратных и фигурных, при этом порядок действий в скобках одного вида не нарушают.

Упражнения по этой теме состоят в вычислении значений алгебраических выражений, в которых встречаются действия всех трех ступеней, и в чтении алгебраических выражений.

В случае затруднения при чтении выражений следует напомнить ученикам, что чтение идет в порядке, обратном порядку действий.

Пример 2. *Прочитать следующие выражения:* 1) $a^3 + b^3$; 2) $(a + b)^3$; 3) $(a - b)^3$.

Можно в выражении установить порядок действия: I — возведение в куб, II — сложение. Затем читаем, начиная с последнего действия: сумма (II) кубов (I), или, подробно, сумма кубов двух чисел.

Запись на доске можно сделать наглядной:

$$\underbrace{\underbrace{a^3}_{\text{куб}} + \underbrace{b^3}_{\text{куб}}}_{\text{сумма}}$$

2) $(a + b)^3$ — здесь порядок действий: I — сложение, II — возведение в куб. Читаем, начиная с последнего действия: куб (II) суммы (I), или, подробно, куб суммы двух чисел.

Запись на доске можно сделать наглядной:

$$\underbrace{(\underbrace{a+b}_{\text{сумма}})^3}_{\text{куб}}$$

§ 7. РАВЕНСТВО. ФОРМУЛА

К понятию равенства учеников подводят, рассматривая конкретные задачи. Например:

Задача 1. *Турист прошел в первый день a км, во второй b км, а за два дня прошел всего S км. Чему равно S?*

Решение. Пусть $a = 32$ *км*, $b = 29$ *км*. За два дня турист прошел $32 + 29 = 61$ (*км*), а вообще число километров, выражающее путь за два дня, равно числу, выражающему путь на первый день (*км*), плюс число, выражающее путь за второй день (*км*). Следовательно, $S = a + b$.

Задача 2. *Длина прямоугольной комнаты a м, ширина b м, а площадь S м^2. Найти S (площадь комнаты).*

Решение. Пусть $a = 5{,}2$ *м*, $b = 3{,}5$ *м*. Площадь равна $5{,}2 \cdot 3{,}5 = 18{,}2$ (*м*^{2}), а вообще площадь (кв. ед.) = длина (лин. ед.) $\times$ ширина (лин. ед.).

Следовательно, $S = ab$.

Назовем полученные записи, $S = a + b$ и $S = ab$, равенствами.

Ученикам нужно задать вопросы, как в алгебре называют ab и $a + b$? Что означает знак $=$? Что такое равенство? Относительно S, $a + b$ и ab ученики ответят, что это алгебраические выражения, после чего формулируется определение равенства как двух алгебраических выражений, соединенных знаком равенства.

Здесь нужно обратить внимание учеников на то, что равенство в алгебре носит несколько иной характер, чем в арифметике. В арифметике равенства будут иметь вид $5 + 3 = 8$; $5 \cdot 3 = 15$; $6 \cdot 7 = 42$ и т. д.; так как эти равенства числовые (имеющие смысл), то они могут быть только верными или неверными. В алгебре понятие равенства может носить условный характер, так как под буквами, входящими в них, подразумевается множество числовых значений. Например, $a - a = 0$ верно всегда, а равенство $x + 3 = 10$ носит условный характер и выполняется только при $x = 7$.

В арифметике $2 \neq 3$, а в алгебре равенство $2x = 3x$ верно при некоторых значениях x и неверно при других. Например, при $x=0$ $2 \cdot 0 = 3 \cdot 0$ — верное равенство, при $x=7$—$2 \cdot 7 = 3 \cdot 7$ — неверное равенство.

После введения понятия равенства его закрепляют упражнениями на запись основных законов арифметических действий и на составление формул.

Выше говорилось о том, что многие правила арифметики формулировались не для конкретных чисел, а для любых. Теперь учащиеся получили возможность записать эти правила и законы для любых чисел, то есть с помощью букв.

Можно рекомендовать записать:

1) Чему равна сумма любого числа и нуля?

2) Чему равно произведение любого числа на 0?

3) Чему равно частное от деления 0 на число, неравное 0?

4) Чему равно произведение любого числа на единицу?

Выполнив эти упражнения, можно сказать, что полученные равенства верны для всех допустимых значений букв, входящих в них, и что такие равенства называются тождествами. Можно отметить, что все верные равенства, содержащие только числовые выражения, — тождества.

Примеры тождеств берут простейшие, так как ученики еще не владеют алгебраическими операциями и ко всем вопросам подходят на основании знаний законов арифметических действий. Например, $a + 2 = 2 + a$ (на основании переместительного закона сложения), $\frac{a}{2} = \frac{1}{2}a$ $\left(\text{деление на 2 можно заменить умножением на } \frac{1}{2}\right)$, $(a + b)c = ac + bc$ (распределительный закон) и т. д.

Рассмотрев еще несколько примеров из геометрии и физики, вводят определение формулы.

На данном этапе формула — равенство, которое показывает, как найти значение одной величины по данным значениям других величин. Например, в формуле $S = ab$ по значениям $a = 6$ *м*, $b = 4$ *м* находим значение площади $S = 24$ (*м*^{2}).

Впоследствии понятие формулы станет шире после введения знаков неравенства и после введения неалгебраических операций предельного перехода, дифференцирования и интегрирования.

Следует обратить внимание, что формулы $S = a + b$, $S = ab$ и другие выражают зависимость между величинами.

Упражнений на составление формул приведено достаточно в сборнике задач. Техника составления формул близка к составлению общих решений однотипных арифметических задач, только искомая величина обозначается одной буквой, и в ответе она приравнивается полученному выражению.

Задача 3. *Скорость велосипедиста раван 12 км/ч. Сколько километров проедет он за 2 часа?*

Решение. Велосипедист проедет $12 \cdot 2$ (*км*).

Задача 3а. *Скорость велосипедиста равна v км/ч. Сколько километров проедет он за t часов?*

Решение. Аналогично решению предыдущей задачи путь (*км*) = скорость (*км/ч*) × время (*ч*), то есть

$$S = vt.$$

По формуле можно легко найти путь S для любых данных v и t.

Хорошо, если после составления формулы учащиеся смогут ответить на вопросы: 1) Каким числом может быть S? 2) Может ли S быть целым числом? 3) Может ли S быть дробным числом? 4) Может ли $S = 0$? Как понимать этот случай? 5) Может ли $t = 0$? Как понимать этот случай? 6) Можно ли утверждать, что $S = vt$ — формула?

При использовании формул может быть двоякое толкование букв, входящих в формулу.

1) Чисто математическое толкование, при котором считается, что числа, входящие в формулу, отвлеченные. Например, в последней формуле $S = vt$ надо дополнительно указать, что v выражено в *км/ч*, t в часах и S в *км*. Тогда данные будут в частном случае записаны так: $v = 12$, $t = 2$. По формуле находим, что $S = 12 \cdot 2 = 24$ (*км*). Запись (*км*) показывает, что действия выполнены над числами, результат 24 — число, но оно выражает число километров, о чем и напоминает запись (*км*).

Такая запись принята в алгебре.

2) В технической математике[1] все числа — именованные, тогда в формуле $S = vt$ под буквами S, v и t подразумеваются не числа, а количества, и данные в примере придется записать так: $v = 12$ *км/ч*, $t = 2$ *ч*.

[1] Термин введен Д. Перри.

По формуле находим $S = 12$ *км/ч* $\cdot$ 2 *ч* $= 24$ *км*.

Такая запись принята в физике.

На практике часто применяется смешанная запись: данные записываются с наименованиями, а в формулы вставляют числа отвлеченные, к результату приписывают в скобках соответствующие единицы.

Кроме алгебраических задач, где формула составляется на основании зависимостей, знакомых из арифметики, можно взять задачи с геометрическим содержанием.

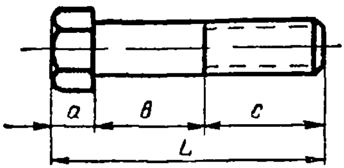


Рис. 6

Задача 4. 1) *Найти длину* L *болта вместе с головкой* (рис. 6).

2) *Найти длину болта, если* $a = 30$ *мм*, $b = 25$ *мм*, $c = 8$ *мм*.

Решение. 1) $L = a + b + c$;

2) $L = 30 + 25 + 8 = 63$ (*мм*).

Полезно использовать каждую полученную формулу для вычисления частных значений величины, определяемой по этой формуле, так как именно таким образом приходится формулы использовать на практике.

Так же полезно записать с помощью формул ранее известные зависимости; например, для длины окружности $C = 2\pi r$, для площади треугольника $S = \frac{1}{2}ah$.

Хорошо, если ученики смогут ответить на вопросы:

1) Чем удобнее формула для вычисления площади треугольника $S = \frac{1}{2}ah$, чем правило?

2) Чем удобнее формула для вычисления длины окружности $C = 2\pi r$, чем правило?

К перечисленным формулам можно добавить еще формулы: из геометрии $V = abc$ (объем прямоугольного параллелепипеда), потом после введения степени $S = \pi r^2$ (площадь круга), $V = a^3$ (объем куба), $V = \pi r^2 h$ (объем цилиндра); из физики $d = \frac{P}{V}$ (удельный вес), сила давления $F = SP$, где F — сила давления в *кГ*, S — площадь опоры в *см*^{2}, P — давление в *кГ/см*^{2}.

Использовать в этом месте формулы из техники можно только частично, так как их содержание большей частью непонятно учащимся VI класса. Формулы, пригодные для VI класса, имеются в стабильном задачнике П. А. Ларичева, а именно на вычисление объема бочек по трем размерам, живого веса коровы по двум измерениям.

Из книги «Начальная алгебра» В. Л. Гончарова можно взять формулы:

1) $H = 8 + \frac{18 - T}{2}$, где T — возраст в годах, H — нормальнсе число часов ежедневного сна в возрасте до 18 лет.

2) $B = \frac{2}{3} A + 1$, где A — номер ботинок, а B — номер валенок.

В польском стабильном учебнике предлагаются следующие упражнения.

1. Подставить в формулу $y = \frac{x}{x-1}$ любое значение x, найти значение y и убедиться, что сумма значений x и y равна их произведению.

2. Подставить в формулу $y = \frac{x}{x+1}$ любое значение x, найти значение y и убедиться, что разность значений y и x равна их произведению.

Кроме задач и упражнений на применение формул, можно учащимся предложить по данной формуле составить конкретные задачи. Можно предложить составить арифметические задачи, решение которых в общем виде будет записано формулой

$$x = a + b,\ x = ab,\ x = \frac{a}{b+c},\ x = \frac{a}{b-c} \text{ и т. д.}$$

Для формулы $x = a + b$ легко подобрать задачу, например: *У меня* 5 *руб., у товарища* 8 *руб. Сколько у нас вместе?*

Труднее подобрать задачи к формуле $x = \frac{a}{b+c}$, но если сходные задачи решали на составление формул, то ученики подберут задачу, например: *Двое идут навстречу из пунктов, расстояние между которыми* 18 *км, скорость первого* 4 *км/ч, второго* 5 *км/ч. Через сколько часов они встретятся?* и т. д.

Такие упражнения развивают учащихся.

В результате изучения алгебраических выражений, равенств и формул ученики должны уяснить: 1) под буквой понимается любое из известных чисел; 2) значение алгебраического выражения (или искомой величины в формуле) зависит от значений букв, входящих в него.

Они должны уметь дать ответы на вопросы: 1) Что понимается под буквой в алгебре? 2) Для чего нужны буквы в алгебре? 3) В чем удобство введения букв? Кроме того, уметь подтверждать ответ примерами.

Требовать в данный момент, чтобы они умели на буквы, входящие в алгебраическое выражение или в формулу, накладывать ограничения, то есть находить их допустимые значения, преждевременно, это можно будет сделать при рассмотрении алгебраических дробей. Но изредка при нахождении числовых значений алгебраических выражений можно давать такие значения букв, при которых выражение не имеет смысла.

§ 8. БУКВЕННАЯ ЗАПИСЬ ЗАКОНОВ И СВОЙСТВ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

Надо отметить, что обычно ученики не любят раздел о законах и свойствах арифметических действий, поэтому изложение этого материала надо сделать более интересным. Кроме того, рассмотрение законов можно несколько рассредоточить: дать часть их в виде упражнений, во время которых учащиеся сами сделают нужные выводы.

Чтобы изложение сделать более наглядным, полезно изготовить таблицы:

Таблица 12

1. Переместительный закон сложения		2. Переместительный закон умножения	
в арифметике	в алгебре	в арифметике	в алгебре
$2+7=7+2$ $3+\frac{7}{8}=\frac{7}{8}+3$ $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$	$a+b=b+a$	$2\cdot 7=7\cdot 2$ $3\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{8}\cdot 3$ $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}$	$ab=ba$

Подобные таблицы могут быть изготовлены и для иллюстрации других законов.

К этому времени учащиеся имеют достаточно сведений из геометрии об отрезках, о площади квадрата и прямоугольника (по курсу арифметики), поэтому можно изложение иллюстрировать еще и геометрически.

Для переместительного закона сложения $a+b=b+a$, сочетательного закона сложения $a+(b+c)=(a+b)+c$ можно дать иллюстрацию законов на отрезках (рис. 7 и 8).

Переместительный закон умножения $ab=ba$ и распределительный закон умножения $(a+b)c=ab+bc$ можно иллюстрировать посредством сравнения площадей (рис. 9 и 10).

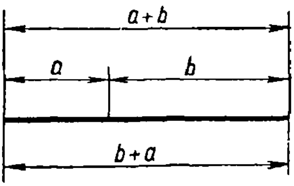


Рис. 7

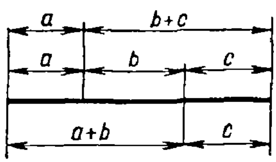


Рис. 8

Сочетательный закон умножения $(ab)\,c = a\,(bc)$ можно иллюстрировать на примере объема прямоугольного параллелепипеда (рис. 11).

Полезно проверить законы действий на арифметических примерах, посредством вычислений и геометрических — посредством сложения и вычитания отрезков.

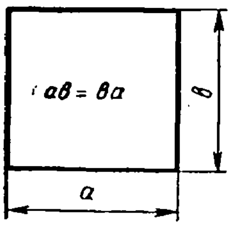


Рис. 9

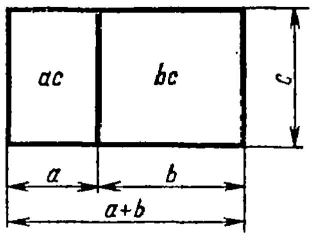


Рис. 10

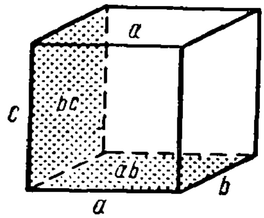


Рис. 11

Пример 1. *Имеем* $a - (b + c) = (a - b) - c$.

а) *Проверить, если* $a = 6$, $b = 3$, $c = 2$.

б) *Проверить, если* a, b *и* c *— отрезки, длина которых* $a = 6$, $b = 3$, $c = 2$ *линейным единицам.*

Пример 2. *Разные ли значения имеют* x *в равенствах* $x + 12 = 35$ и $12 + x = 35$? *Почему?*

§ 9. БУКВЕННАЯ ЗАПИСЬ ЧИСЛОВОГО НЕРАВЕНСТВА

Учащиеся VI класса из арифметики знают о том, что одно число может быть больше другого. Из двух натуральных чисел они сразу назовут большее, несколько сложнее для них выбрать большее дробное число, если знаменатели различные, но и с этим они справляются.

После ознакомления учеников с буквенными выражениями и равенствами можно ввести знак неравенства только для чисел, где неравенство очевидно.

Знак неравенства ставится так, что его острие обращено к меньшему числу. Ученикам известно, что, например, 8 больше, чем 5; 10 больше, чем 2. Это можно записать $8 > 5$, $10 > 2$; аналогично, если дано, что число a больше, чем число b, то пишут $a > b$. Если одно число больше другого, то, чтобы ответить на вопрос, на сколько первое число больше второго, надо взять разность между большим и меньшим числом. Например, возьмем неравенства $15 > 3$ и $8 > 2$, тогда $15 - 3 = 12$, $8 - 2 = 6$; первое неравенство более сильное, чем второе, так как $12 > 6$.

§ 10. ВВЕДЕНИЕ ПОНЯТИЯ МНОЖЕСТВА

Проще всего с понятием множества ознакомить учащихся на уроках арифметики. Опыт, проводившийся Ю. М. Калягиным в московской школе № 352, показывает, что уже ученики IV классов способны овладеть понятиями множества, подмножества, суммы и пересечения множеств, а также символами $\in$, $\subset$, $\cap$, $=$).

В алгебре с понятием множества учащиеся встретятся при введении буквенных обозначений. Действительно, под буквой разумеется множество значений ее. Поэтому дать первые представления о множествах можно до введения буквенных обозначений.

Рис. 12

К понятию множества шестиклассники подготовлены, в их практике уже встречались различные множества: учебников, учеников класса (параллели, начальной школы), парт и т. д. Представления учеников о множестве следует выявить и уточнить.

В природе существуют как отдельные предметы, так и их совокупности. Например, ученик и учащиеся V класса, береза и березовая роща, гусь и стая гусей и т. д. Совокупность отдельных предметов (чаще имеющих определенное свойство) в математике получило термин *множество*. Это описание, но не определение множества, термин *множество* неопределим.

Когда говорят *множество*, то совокупность предметов рассматривают как целое.

Множество будем обозначать прописными буквами латинского алфавита: A, B, ..., M, ... Отдельный предмет, входящий в множество, назовем *элементом*. Например, возьмем множество учебников ученика VI класса, тогда книга «Алгебра» есть его элемент. Или возьмем множество белых квадратов (рис. 12), каждый квадрат — элемент этого множества. Элементы обозначают строчными буквами латинского алфавита: a, b, ..., x. Чтобы показать, что x есть элемент множества M, пишут $x \in M$.

Если надо показать, что множество M состоит из элементов, например чисел 1, 3 и 5, пишут $M = \{1, 3, 5\}$, записывая в фигурных скобках все элементы множества.

Упражнения.

1. Привести примеры множеств, элементами которого будут, а) люди; б) домашние животные; в) деревья; г) книги; д) карандаши.

2. Дано множество $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Чем являются числа 1, 2, 3, 4, 5? Как это записать?

3. Множество M состоит из элементов 2,4, 6. Как это записать?

Затем учащимся даются понятия *конечное множество, бесконечное множество*. Для этого рассматривают различные конкретные множества. Например, $M = \{1, 2, 3\}$ — множество учеников данного класса, множество карандашей в коробке и т. д. Устанавливают, что число элементов этих множеств выражается натуральным числом, они имеют последний элемент. Такие множества называются конечными. Можно, кроме термина, дать и определение: *множество, число элементов которого есть натуральное число, называется конечным.*

В предыдущих примерах множество задавалось или описанием (например, множество страниц тетради), или перечислением всех его элементов (например, $M = \{1, 2\}$). Перечислить все элементы множества иногда затруднительно. Например, чтобы записать множество всех натуральных чисел от 17 до 1001, придется потратить много и времени и бумаги. В этом случае условились писать не все элементы, а только несколько первых, определяющих характер элементов, и последний, а вместо пропущенных элементов ставят три точки. В данном случае множество запишется $M = \{17, 18, 19, \ldots, 1001\}$.

Упражнение 1. Что значит запись $M=\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$? Можно ли сказать, сколько элементов в этом множестве?

Упражнение 2. Записать множество: а) натуральных чисел от 7 до 124 включительно; б) чисел десятков от 20 до 150 включительно; в) чисел, кратных 3, от 9 до 369 включительно.

Упражнение 3. На множестве $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ найти множество: а) чисел, больших 3; б) чисел, меньших 4; в) чисел, больших 2, но меньших 8.

Понятие пустого множества хорошо дать на примерах. Приведем один из возможных вариантов.

На полках лежат учебники алгебры, геометрии и физики (кратко а, г, ф).

Записать кратко множество M книг, лежащих на полке. ($M = \{$а, г, ф$\}$).

Сколько элементов содержит это множество? (3).

Сколько элементов содержит множество книг на пустой полке? (Ни одного).

Учитель говорит, что такое множество называется *пустым*, после чего дает определение: *Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым.* Символ пустого множества — $M = \varnothing$.

Далее подбирают другие примеры пустых множеств: множество рыб, пойманных рыболовом, в случае когда он не поймал ни одной рыбы; множество зеленых листьев на ветке липы зимой и летом.

Затем идет знакомство с понятием *бесконечного множества.* Для этого проще всего взять множество натуральных чисел и выяснить: 1) есть ли наибольшее натуральное число; 2) почему его нет. Затем ввести запись $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ и выяснить смысл точек. Установив, что это множество не имеет последнего элемента, вводят термин *бесконечное множество.* Можно дать и определение: *Множество, не имеющее последнего элемента, называется бесконечным.*

Например, во время урока множество учеников в классной комнате — конечное, состоит из 36 человек; ночью это множество пустое, в классной комнате нет ни одного ученика. В множестве натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ нет последнего элемента, это бесконечное множество.

Упражнения. 1. Каким будет множество: а) книг, лежащих в данный момент на парте; б) кусков мела на доске; в) правильных дробей; г) букв азбуки; д) точек отрезка; е) радиусов окружности; ж) центров окружности.

2. Привести примеры множеств: конечных, пустых, бесконечных.

3. На множестве натуральных чисел найти множество чисел: а) меньших 12; б) меньших 28; в) больших 5; г) больших 10; д) больших 10, но меньших 110; е) больших 8 и кратных 3.

§ 11. ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ. ПОДМНОЖЕСТВА

Пусть в школе имеется два шестых класса, VI А и VI Б. В VI А учатся 37 учеников, в VI Б — 35; вместе эти множества образуют множество учащихся шестых классов, состоящее из 72 учеников.

Новое множество называется *объединением* двух данных множеств. Знак объединения $\cup$.

Алгоритм объединения множеств: берут все элементы одного множества и присоединяют к ним отличные от них элементы другого.

Пусть даны множества $M = \{1, 2, 3\}$ и $L = \{4, 5, 6\}$, тогда множество $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ есть объединение множеств M и L или $M = \{1, 2, 3,\}$, $L = \{2, 3, 4\}$, их объединение $M \cup L = \{1, 2, 3, 4\}$.

Можно провести аналогию с отысканием общего наименьшего кратного чисел. Например, найдем НОК (12; 30).

$$12 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 3}_{\text{I множество}}; \qquad 30 = \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 5}_{\text{II множество}};$$

$$\text{НОК} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 3}_{\text{I множество}} \cdot \underbrace{\quad 5 \quad}_{\substack{\text{отл. эл.} \\ \text{II множества}}} = 60$$

Упражнение 1. Найти объединение множеств:

1) $M = \{1,3,5\}$ и $L = \{7,9\}$;

2) $M = \{0, 1\}$ и $L = \{2\}$;

3) $A = \{3, 4, 7\}$ и $B = \{3, 5, 8\}$;

4) четных чисел и нечетных чисел;

5) правильных дробей и неправильных дробей.

Возьмем вновь пример с учениками VI А и VI Б классов. Множество учеников VI А класса составляет часть множества учеников двух классов. Множество, элементы которого составляют часть элементов другого множества, называется *подмножеством*. Например, элементы множества M $\{1\}$ составляют часть элементов множества $L = \{1, 2\}$, значит, множество M — подмножество множества L, что записывают так: $M \subset L$.

Например (рис. 13), множество A черных квадратов есть подмножество всех квадратов B, в этом случае $A \subset B$.

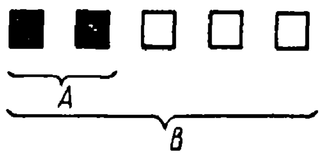


Рис. 13

Эту зависимость между множествами можно наглядно показать схематически на кругах, аналогичных кругам Эйлера в логике. Пусть множеству соответствует круг, тогда подмножество его изображаем тоже в виде круга, расположенного внутри первого. Например, прямоугольные треугольники составляют часть всех треугольников (рис. 14), значит, множество прямоугольных треугольников есть подмножество треугольников.

Упражнения. 1. Установить зависимость между множествами:

а) $M = \{0,3\}$ и $L = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;

б) $M = \{1, 2, 3\}$ и $L = \{3\}$;

Рис. 14

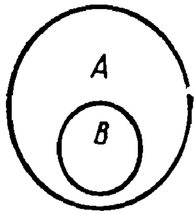


Рис. 15

в) углов и прямых углов; г) углов и острых углов; д) равнобедренных треугольников и треугольников; е) четных чисел 2, 4, ... и натуральных чисел 1, 2, 3, ...

В случае в, г, д, е начертить схему.

2. Что можно сказать о множествах A и B по рисунку 15?

ГЛАВА III

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. УРАВНЕНИЯ

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В Европе к введению отрицательных чисел подошел в начале XIII века Леонардо Пизанский, но в явном виде их стал применять лишь в конце XV века Н. Шюке и в середине следующего столетия М. Штифель (А. П. Юшкевич, Математика в средние века). Декарт в «Аналитической геометрии» (1637) дал им определенное истолкование, он рассматривал отрицательные числа как самостоятельные, расположенные на оси x влево от начала координат, но называл их ложными.

Строго научной теории отрицательных чисел обычно в школе не дают. В учебной и методической литературе имеются две тенденции в изложении этой темы: 1) реально-конкретная, когда отрицательные числа связываются с конкретными представлениями; 2) формально-логическая, когда введение этих чисел объясняется необходимостью выполнять действие вычитания во всех случаях.

Первая представлена в учебниках И. И. Сомова, А. Ю. Давидова, А. Ф. Малинина, К. П. Буренина, К. Ф. Лебединцева, А. П. Киселева (с 1912 г.) и др.

Вторая — в учебниках П. А. Погорельского, А. П. Киселева (до 1912 г.), Д. А. Граве и др.

В школе изучение отрицательных чисел целесообразнее всего строить на основании реально-конкретных представлений и показать, что это не выдуманные числа, а числа, отражающие некоторые отношения действительного мира.

К множеству нуля, натуральных и дробных положительных чисел добавляют множество отрицательных чисел и называют его множеством рациональных чисел.

Отто Штольц ввел термин относительные числа, который привился в учебной литературе XIX и XX веков. Сам этот термин подчеркивал относительность начальной точки отсчета — нуля. Но при этом одно и то же множество имело два названия: относительные числа и рациональные числа, а положительные числа имели другое название — числа без знака. Эта двойственность терминологии приводила к недоразумению, ученики считали, что в арифметике были одни числа, а в алгебре они стали со знаками. У них возникало неверное представление, им казалось, что речь идет не о расширении множества положительных чисел, а о введении совершенно новых чисел «со знаком».

При изложении этой темы следует указывать на связь изучения отрицательных чисел с действительностью, подчеркивать, что новые числа находят приложение в практике, в частности упрощают решение задач. Кроме того, учителю надо позаботиться, чтобы иллюстрации, которые разъясняют определение действий над отрицательными числами, не были восприняты учащимися как разновидность доказательства.

§ 2. ВВЕДЕНИЕ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В учебной литературе можно отметить три способа введения отрицательных чисел.

1) Рассматриваются случаи, когда вычитание на множестве положительных чисел невыполнимо.

2) Рассматривают векторы, расположенные на одной прямой. Необходимость характеризовать не только их длину, но и направление приводит к понятию положительных и отрицательных чисел.

3) Рассматривают величины, которые могут изменяться в противоположных направлениях.

Разберем каждый из указанных способов.

1) Задача. *Глубина реки a м; на дно реки поставлен шест, длина которого (от дна) b м. Найти расстояние верхнего конца шеста от уровня воды.*

Искомое расстояние в метрах равно $b - a$, то есть для решения задачи надо из длины шеста вычесть глубину реки. Возьмем частные случаи.

а) Пусть $a = 5$, $b = 7$ (рис. 16). Тогда расстояние $7 - 5 = 2$ (*м*), то есть верхний конец шеста на 2 *м* выше уровня воды.

б) Пусть $a = 5$, $b = 5$ (рис. 17), тогда расстояние $5 - 5 = 0$ (*м*), то есть верхний конец шеста на уровне воды (кстати, здесь 0 принимает новый смысл; это число, которое показывает расстояние

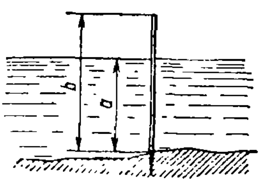


Рис. 16

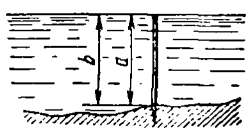


Рис. 17

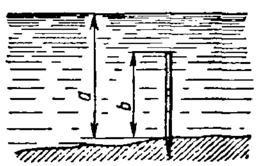


Рис. 18

конца шеста от уровня воды, то есть число, характеризующее величину).

b) Пусть $a = 7$, $b = 5$ (рис. 18), тогда по формуле получаем $5 - 7$, что не имеет смысла, но искомое расстояние существует и в этом случае. Как его найти?

На вопрос, как поступить в этом случае, ученики обычно предлагают сделать вычитание $7 - 5 = 2$ (*м*) или отвечают, что теперь конец шеста находится на 2 *м* ниже уровня воды.

Здесь можно предложить по формуле $b - a$ сделать вычитание $5 - 7$, но оно совершенно противоположно действию $7 - 5$, и в отличие от него договариваются приписать результату знак «—», то есть написать $5 - 7 = -2$.

Целесообразность введения новых чисел объясняется тем, что удобнее ввести математическую запись вместо слов «выше уровня» и «ниже уровня». Кроме того, в этом частном случае формула $b - a$ будет применима при любых значениях a и b. Затем вводят термины **положительные** и **отрицательные числа**.

2) Способ представлен в современном учебнике Breard'a для IV класса французской школы (соответствует у нас VII). Автор отмечает, что числа, известные в арифметике, характеризуют только длину отрезка. Когда же надо охарактеризовать и направление отрезков, то вводят относительные числа; со знаком «+» для одного направления, со знаком «—» для противоположного. Предварительно в геометрии дается понятие вектора и ориентированной прямой.

3) Третий способ заслуживает наибольшего внимания, поэтому рассмотрим его подробнее.

Введение отрицательных чисел посредством рассмотрения величин, изменяющихся в противоположных направлениях, лучше всего начать с упражнений, в которых очевидна необходимость указать направление рассматриваемых величин.

Задача 1. *Участок Московско-Казанской железной дороги в районе ст. Шатура почти прямолинеен и направлен с запада на восток. Указать положение поезда, который в данный момент находится в 10 км от ст. Шатура.*

Учащиеся быстро приходят к выводу, что положение поезда неопределено, так как он может быть в 10 *км* к востоку или в 10 *км* к западу от ст. Шатура (рис. 19).

Можно задать вопросы: 1) Определено ли положение поезда условием задачи? 2) Сколько решений имеет задача? 3) Как показать на графике положение поезда?

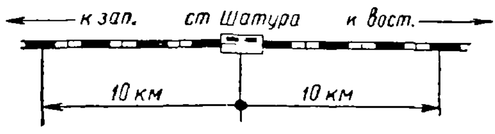


Рис. 19

Из ответов на вопросы становится ясным, что в этой задаче для определенности надо указать направление, в котором идет отсчет.

Задача 2. *N вышел из квартиры на 5 этаже десятиэтажного дома и проехал на лифте 3 этажа. На каком этаже он оказался?*

В этом случае опять имеет значение направление движения. Если лифт двигался вверх, то *N* окажется на 8 этаже, если вниз, то на 2 этаже (рис. 20). Здесь опять приходится учитывать противоположность направлений — «вверх» и «вниз».

Задача 3. *Термометр утром показывал* 10°. *Замерзла ли вода?*

Снова учащиеся убеждаются, что задача неопределенна и надо указать 10° тепла или 10° холода.

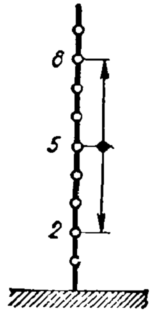


Рис. 20

Таким образом, на ряде примеров, взятых из жизни, ученики убеждаются, что в некоторых задачах известные им числа без указания направления не характеризуют полностью значение величины и приходится добавлять указание направления изменения величины. Для этого приходится применять не математические словесные записи: тепло — холод, вверх — вниз, к востоку — к западу и т. д., но эта запись неудобна, так как: 1) над словами нельзя выполнять математические операции; 2) к числам приходится приписывать направление.

Гораздо проще направление характеризовать математическими знаками (символами).

Для числа, характеризующего измерение величины в одном направлении, примем знак « + ». Например, +5° будет обозначать 5° тепла. А для числа, характеризующего изменение величины в противоположном направлении, примем знак « — ». Например, —5° будет обозначать 5° холода.

Аналогично в задаче 1 расстояние 10 *км* к востоку и 10 *км* к западу от ст. Шатура может быть записано (в *км*) + 10 и — 10 (рис. 21).

Числа +5, +10 и т. д. назовем *положительными*, а числа —5, —10 и т. д. назовем *отрицательными*. Следует обратить внимание учащихся, что числа положительные ничем не отличаются от ранее известных в арифметике натуральных и дробных чисел, запись +5, и 5, +10 и 10 означает одно и то же. Но теперь имеем числа отрицательные и в отличие от них старые числа называем положительными. После этого вводится определение:

Рис. 21

Все числа натуральные и дробные называются положительными. Все числа натуральные и дробные, перед которыми стоит знак минус, называют отрицательными.

Затем нужно сказать, что целыми числами называют не только натуральные числа и 0, но и —5, —28 — тоже числа целые.

Следует отметить, что первое время при изучении отрицательных чисел главное значение придается не столько заучиванию формальных определений, сколько различным иллюстрациям целесообразности их введения. Поэтому на первом уроке дают большее число примеров и упражнений, в которых знаком характеризуется направление изменения величины.

Кроме приведенных примеров с положением точки на прямой, движением в двух противоположных направлениях и с температурой, можно дать другие примеры величин, изменяющихся в двух противоположных направлениях: наличие денег и долг, выигрыш и проигрыш, перевыполнение и недовыполнение плана, поступление и расход денег в кассе, рост и убыль поголовья скота, привоз и увоз груза и т. д.

Подчеркивается, что отрицательные числа позволяют словесную характеристику направления изменения величины заменить символом, с которым можно выполнять математические действия, что расширяет круг задач.

Пример с температурой, пожалуй, лучший из всех, так как ученикам знакомы выражения 5° тепла, 3° холода, 5° выше нуля, 3° ниже нуля. Может быть, даже встречалась запись температуры +5°, —3°. Что температура может понижаться только до —273° Цельсия, им не известно.

Ученикам следует сказать, что есть величины, которые можно измерять только в одном направлении, например площадь, объем, масса и т. д.

Можно показать применение отрицательных чисел в истории, географии, физике.

Например, отсчету времени нашей эры соответствует знак плюс (+), а до нашей эры знак минус (—). Битва греков с персами при Марафоне произошла в 490 году до нашей эры. Это можно записать как — 490.

В географии можно северную широту и восточную долготу записывать со знаком плюс (+), а южную широту и западную долготу со знаком минус (—). Например, 50° южной широты и 20° восточной долготы можно записать: шир. —50°, долг. +20°.

В физике примером приложения отрицательных чисел может служить температура кипения некоторых веществ при нормальном атмосферном давлении:

Аммиак	— 33°	Соленая вода	+ 108°
Вода	+ 100°	Сера	+ 444°
Водород	— 253°	Цинк	+ 918°

§ 3. НУЛЬ КАК ЧИСЛО, ХАРАКТЕРИЗУЮЩЕЕ ВЕЛИЧИНУ

После введения отрицательных чисел необходимо на ряде конкретных примеров показать, что нуль — число, характеризующее величину. Обратимся к показаниям термометра.

Если, например, температура воздуха 0°, то это не значит, что температура воздуха отсутствует, она есть и 0° ее характеризует. В частности, когда по шкале Цельсия и Реомюра 0°, то по шкале Фаренгейта 32°, а нулю этой шкалы соответствует $-17\frac{7}{9}^{\circ}$ шкалы Цельсия и $-14\frac{2}{9}^{\circ}$ — Реомюра. В арифметике нуль характеризует пустое множество, в алгебре нуль характеризует величину.

Рассмотрим второй пример. Архимед родился в —287 году по нашему летосчислению, а по магометанскому в —909 году, по иудейскому в +3474 году и т. д.

Во всех этих случаях за нуль условно принимается определенный момент, или начало отсчета. Полезно разобрать и такие упражнения.

З а д а ч а . *Пояснить следующие записи (от уровня океана в метрах): гора Эльбрус* +5633 *м, гора Джомалунгма (Эверест)* +8848 *м, пик Ленина* +7134 *м, гора Роман-Кош* +1545 *м, северная низменность у Каспийского моря* — 26 *м, уровень Каспийского моря* — 28 *м, Марианская впадина Тихого океана* — 10 990 *м, Яванская впадина Тихого океана* — 7450 *м.*

Как это понять? Каким числом выражается уровень океана?

Цель таких упражнений — показать, что нуль тоже число, он характеризует какую-то величину. Например, если в последней задаче уровень океана нуль, то этот уровень выше, чем глубина Марианской и Яванской впадин, здесь нуль характеризует величину уровня океана.

В заключение следует записать правила действий с нулем.

$a+0=a-0=a$; $a\cdot 0=0\cdot a=0$; $\frac{0}{a}=0$, $\frac{a}{0}$ — не имеет смысла.

Эти равенства учащиеся записывают сами после наводящих вопросов:

Что получится, если к числу прибавить 0? (Получится тоже число).

Как это записать? ($a+0=a$) и т. д.

Можно предложить следующие упражнения:

1) У мальчика было 5 руб., он потерял 5 руб. Сколько осталось?

2) У мальчика было 5 руб., он потерял нуль рублей. Сколько осталось?

§ 4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ЧИСЛОВАЯ ОСЬ

После того как определены положительные, отрицательные числа и число нуль, учащимся говорят, что числа положительные, отрицательные и нуль вместе называются рациональными.

В классах, где ученикам было сказано о множествах, можно сказать, что до этого времени они изучали множество положительных чисел и нуля, а теперь получили множество отрицательных чисел.

Объединение этих двух множеств называется *множеством рациональных чисел.*

Можно сказать, что числа положительные и числа отрицательные — *подмножества рациональных чисел* (рис. 22).

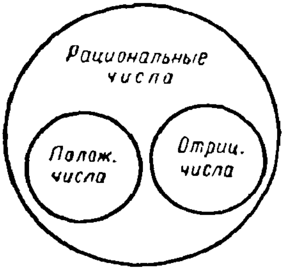


Рис. 22

Как вариант практических задач, на которых видна целесообразность употребления рациональных чисел, можно взять такие задачи, в которых приходится характеризовать направление изменения величины. Некоторые авторы предпочитают таким образом и вводить отрицательные числа.

З а д а ч а 1. *Найти изменение температуры за каждые два часа от 8 до 22 ч по следующей таблице.*

Таблица 13

Время в часах	8	10	12	14	16	18	20	22
Температура в °C	8	11	15	16	16	13	10	8

Примем начальную температуру за начало отсчета, за нуль, тогда таблица примет вид:

Таблица 14

Время в часах	8	10	12	14	16	18	20	22
Изменение температуры в °C	0	Больше на 3	Больше на 4	Больше на 1	Не изменится	Меньше на 3	Меньше на 3	Меньше на 2

Чтобы не употреблять слов б о л ь ш е, м е н ь ш е, характеризуют направление знаками «+» и «—», увеличению температуры соответствует «+», а понижению «—». Тогда таблица станет такой:

Таблица 15

Время в часах	8	10	12	14	16	18	20	22
Изменение температуры в °C	0	+3	+4	+1	0	−3	−3	−2

Можно сделать замечание, что в последней таблице удобно судить и о количественной стороне и о направлении изменения температуры. При этом следует подчеркнуть, что здесь нуль характеризует отсутствие изменения температуры, нуль дает ответ на вопрос, нуль — число, характеризующее величину изменения температуры.

Большое значение при изучении рациональных чисел имеют графические иллюстрации. Поэтому на одном из уроков нужно дать изображение отрицательных чисел на числовой оси. Задача упрощается, если раньше при изучении натуральных и дробных чисел ученики изображали их точками на числовом луче. Если нет, то очень естественно перейти к изображению их точками числовой оси после повторного решения задачи, в которой надо было определить положение поезда (теперь точки) на участке железной дороги (теперь прямой) относительно ст. Шатура (теперь начало отсчета, соответствующее числу 0), причем следует условиться, что положительные числа откладываются вправо, отрицательные — влево. Как пример числовой оси (ее части) можно рассмотреть шкалу термометра, и здесь уместно показать, что изображение положительных и отрицательных чисел производится на практике так же, как в теории.

Затем делают упражнения, в которых закрепляется смысл отрицательного числа, нуля и их расположения на числовой оси.

Определение противоположных чисел, данное в учебнике А. Н. Барсукова, громоздко, за ним следует правило нахождения противоположных чисел, которое из-за незнания учениками вычитания рациональных чисел нельзя полностью использовать. На первых порах достаточно, если ученик, не заучивая определения, будет знать, что числа 5 и —5, —8 и 8 противоположные, и скажет, что числа a и $-a$ называются противоположными.

Показывая расположение противоположных чисел на оси, следует: 1) приучить учеников показывать положительное направление стрелкой, изображение оси должно отличаться от изображения прямой; 2) избегать выражения *обратные знаки*, а употреблять более точный термин *противоположные знаки*, чтобы ученики не смешивали противоположные и обратные числа. С этой целью дают заполнить таблицу и полученные числа изобразить на числовой оси.

Таблица 16

Данное число	Противоположное число	Обратное число
2	— 2	$\frac{1}{2}$
3		
$\frac{1}{4}$		
0,8		
$3\frac{1}{2}$		

После того как множество положительных чисел расширили до множества рациональных чисел, требуется: 1) указать, как сравнивать числа этого множества между собой, то есть указать для чисел a и b критерий, когда $a = b$, $a > b$, $a < b$ (отношения между числами); 2) определить прямые действия над числами нового множества, а правила обратных действий вывести.

Дать полное понятие о сравнении рациональных чисел сразу нельзя. Ведь $a > b$, если разность $a - b$ — число положительное, но ученики еще не умеют вычитать рациональные числа, поэтому сравнение рациональных чисел приходится объяснять, исходя из других соображений.

В учебнике алгебры А. Н. Барсукова дается удобный метод сравнения рациональных чисел в зависимости от их расположения на числовой оси. Можно учащимся предложить следующие вопросы:

1) Даны числа $+2$ и $+5$, какое из них больше? Как они изображены на числовой оси? 2) Одно положительное число расположено на числовой оси правее другого. Что можно сказать, сравнивая эти числа? 3) Одно положительное число больше другого. Как они расположатся на числовой оси?

Затем рабочее правило для сравнения положительных чисел на основании расположения их на числовой оси распространяют на все рациональные числа и закрепляют достаточным числом упражнений.

Чтобы объяснить, что 0 больше —5 или —5 больше —7, хорошо взять конкретные примеры, в частности, сравнить показания термометра.

Упражнения: 1) *Термометр показывал сперва* 0°, потом —5°. *Какая температура выше?* (Температура выше при 0°.)

2) *Сравните числа* 0 и —5. ($0 > -5$.)

3) *Термометр показывал сперва* —5°, потом —7°. *Какая температура выше?* (Выше —5°.)

4) *Сравните числа* —5 и —7. ($-5 > -7$.)

Здесь полезно подчеркнуть, что, чем холоднее воздух, тем температура ниже, то есть $-12° < -7°$ и т. д.

В дальнейшем после вычитания придется ввести критерий для сравнения рациональных чисел, пользуясь алгебраическими операциями. Тогда это рабочее правило сохранится как наглядное средство сравнения рациональных чисел.

Умея сравнивать рациональные числа, можно уточнить предыдущее замечание относительно знака числа, записанного буквой.

Задача 2. *Дано число a. В каком случае это число будет отрицательным, если a равно* 5; $+3{,}5$; $\frac{1}{3}$; 0; $-3{,}5$; -5? Затем можно поставить вопросы:

1) Можно ли судить о знаке числа a без дополнительных условий? (Нет, оно может принимать различные значения, как положительные, так и отрицательные.)

2) Как записать, что a число положительное? ($a > 0$.)

3) Как записать, что a число отрицательное? ($a < 0$.)

4) Как записать, что a равно нулю? ($a = 0$.)

5) Как записать, что a число не отрицательное? ($a \geqslant 0$.)

6) Как записать, что a число не положительное? ($a \leqslant 0$.)

7) Что можно сказать о числе a, если $a > 0$, $a < 0$, $a = 0$, $a \geqslant 0$, $a \leqslant 0$? (Положительное, отрицательное, нуль, неотрицательное, неположительное.)

Последние 3 вопроса (5, 6 и 7) лучше рассмотреть при повторении в конце года.

В VI классе учащиеся испытывают затруднения, когда им надо показать на числовой оси множество значений какой-нибудь буквы. Например, требуется показать на оси множество значений x, если $x > 1$. Ученики уже знают, что каждому рациональному числу соответствует точка числовой оси. В данном случае речь идет о множестве чисел, соответствующие им точки сплошь заполняют часть оси, а это для них представление новое.

Чтобы облегчить переход от геометрического изображения отдельных точек на оси к изображению таких множеств точек, можно сперва поставить вопрос на конечном множестве, содержащем небольшое число элементов. Учащиеся подметят, что геометрически на числовой оси выделяются некоторые участки. После этого можно перейти к геометрическому изображению бесконечных непрерывных множеств. Например:

Упражнение. *Показать на числовой оси значения x, если x — элемент множества $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$* и 1) $x < 3$; 2) $x > 3$; 3) $x < 5$; 4) $x > 6$; 5) $1 < x < 6$; 6) $3 < x < 8$.

Решение. 1) По условию $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $x < 3$.

На числовой оси наносят точки, соответствующие элементам множества M (рис. 23). По условию $x < 3$, выделим точку 3 (на рисунке цифра 3 обведена). Значения x меньше 3, значит, на оси им соответствуют точки, расположенные левее точки 3. Обведем их (на доске лучше обвести цветным мелком). Это и есть искомые точки.

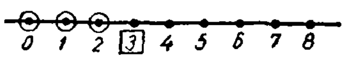


Рис. 23

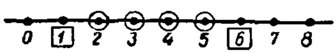


Рис. 24

5) По условию $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,\}$ и $1 < x < 6$. В отличие от предыдущего решения выделяют на оси две точки 1 и 6 (рис. 24). По условию x больше 1, но меньше 6, значит, соответствующие точки лежат правее точки 1, но левее точки 6. Обведем их. Это и есть искомые точки.

Когда шестиклассники усвоят изображение конечного множества точек, у них возникнет представление, что множеству нескольких точек соответствует какой-то участок оси. Он может быть расположен правее, левее данной точки, может быть и заключен между двумя точками.

Следующие упражнения можно дать на множестве натуральных чисел. Например, на множестве $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ученик покажет значения $x > 2$ (рис. 25).

После этого легко перейти к геометрическому изображению тех же значений $x > 2$ на множестве рациональных чисел. От рисунка 25 переходят к рисунку 26, заполняя сплошь точками промежутки между точками, соответствующими целым числам. В заключение учитель говорит, что в последнем случае точки не показывают, а показывают тонкой линией определенную часть числовой оси (можно также отметить эту часть оси другим цветом) (рис. 27).

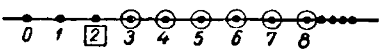


Рис. 25

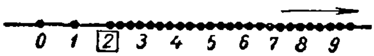


Рис. 26

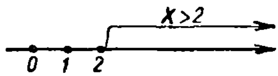


Рис. 27

§ 5. АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА ЧИСЛА

Когда вводят понятие абсолютной величины числа, полезно дать практические примеры, в которых существенно только количественное отклонение величины без указания направления изменения.

Задача 1. *Цех изготовил за день* 10 *валиков диаметром* 20,0 *мм. Допускаемое отклонение от размера* 0,1 *мм. Указать отклонение, если валики имеют диаметр* 20,1 *мм*, 20,1 *мм*, 19,9 *мм*, 19,9 *мм*, 20,1 *мм*, 20,2 *мм*, 20,1 *мм*, 20,0 *мм*, 20,0 *мм*, 19,8 *мм. Найти для каждого валика отклонение диаметра от нормы. Существен ли знак отклонения?*

Отклонения от нормы в *мм* будут: +0,1; +0,1; —0,1; —0,1; +0,1; +0,2; 0,0; 0,0; —0,2.

В этой задаче безразлично, в какую сторону произойдет отклонение, существенно только, на сколько отклонится. Поэтому знак отклонения безразличен и можно просто сказать, что отклонение в *мм* будет: 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,2; 0,1; 0; 0; 0,2.

Задача 2. *Завод изготовил для шарикоподшипников* 20 000 *шариков диаметра* 2 *мм. Допуск* $\pm 0{,}02$ *мм.* 125 *шариков не имеют отклонения,* 150 002 *имеют отклонение* 0,01 *мм*, 4828 — 0,02 *мм*, 30—0,03 *мм*, 12—0,04 *мм* и 3—0,05 *мм. 1) Найти процент бра-*

ка. 2) Каким числом выражается отклонение для нормального шарика? [1) 0,23%. 2) 0.]

В этой задаче снова подчеркивается, что отклонение характеризуется положительным числом. Если диаметр шарика будет отличаться от нормы на $+0{,}03$ или $-0{,}03$, то в обоих случаях будет брак, так как отклонение выражается числом 0,03.

В этом случае положительное число 0,03 называют абсолютной величиной чисел $+0{,}03$ и $-0{,}03$ и обозначают $|+0{,}3| = 0{,}03$, $|-0{,}03| = 0{,}03$.

Очевидно, что $|0| = 0$.

После этого вводится определение абсолютной величины числа: *Абсолютная величина положительного числа и нуля есть само это число; абсолютная величина отрицательного числа есть число, ему противоположное.*

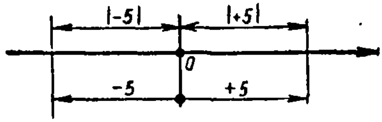


Рис. 28

В общем случае $|a| = a$, если $a > 0$ или $a = 0$, и $|a| = -a$, если $a < 0$.

Возьмем два противоположных числа $+5$ и -5, их абсолютные величины $|+5| = 5$, $|-5| = 5$. Отложим оба числа $+5$ и -5 на числовой оси (рис. 28). Теперь видно, что абсолютной величине взятых чисел соответствуют длины отрезков, у которых начало в точке 0, а конец у одного в точке $+5$, а у другого в точке -5.

После введения понятия абсолютной величины числа можно взять числа, например -12, -10, -7, -2, -1, и установить, какое из них больше в зависимости от абсолютной величины: $-12 < -10$, но $|-12| > |-10|$, $-10 < -7$, но $|-10| > |-7|$ и т. д., после чего учащиеся могут сделать вывод, что из двух отрицательных чисел то больше, абсолютная величина которого меньше.

Внимание учеников на полученном результате задерживать не нужно. В противном случае они смогут воспринять его как определение отношения «больше» для отрицательных чисел.

В стабильном задачнике П. А. Ларичева имеется много упражнений по этой теме; к ним можно (по мере улучшения навыка) добавить следующие.

1) При каких значениях x верны равенства:

а) $|x| = 2$; б) $|x| = \frac{3}{7}$; в) $|x| = 3{,}15$; г) $|x| = 0$; д) $|x| = -3$?

Ответ. а) $x = \pm 2$; д) таких значений x нет.

2) Найти значение следующих выражений:

а) $3|a| + 5|b| + 7$ при $a = -3$, $b = 5$;

б) $\frac{5|a| + 7}{4|b|}$ при $a = -0{,}2$; $b = -0{,}25$;

в) $[2|a|+7]:[5|a|+7{,}5]$ при $a=-7{,}4$.

3) Может ли значение выражения равняться нулю:

а) $|a|+1$; б) $|a|+|b|$; в) $\frac{1}{|a|+2}$?

4) Может ли значение выражения быть меньше нуля:

а) $3+|a|$; б) $4|a|+7$; в) $\frac{|2a|+|3b|}{4}$?

5) Сравнить числа:

а) $|-5|$ и 5; б) $|-5|$ и -5; в) $|a|$ и a.

6) а) $a=b$. Верно ли равенство $|a|=|b|$?

б) $|a|=|b|$. Можно ли утверждать, что $a=b$?

в) $a>0$, $b>0$, $|a|=|b|$. Можно ли утверждать, что $a=b$?

г) $a<0$, $b<0$, $|a|=|b|$. Можно ли утверждать, что $a=b$?

д) $a>0$, $b<0$, $|a|=|b|$. Можно ли утверждать, что $a=b$?

е) $a>0$, $b<0$, $|a|=|b|$. Можно ли утверждать, что a противоположно b?

Часть приведенных упражнений можно использовать при изучении темы, а другие (упр. 6) позже при повторении материала.

§ 6. СЛОЖЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

При введении правил действий с рациональными числами следует помнить, что в VI классе они вводятся как определения, доказать их в школе нельзя, но при этом можно и нужно показать их целесообразность.

В учебниках алгебры обычно дается следующее правило сложения:

1) чтобы сложить два числа с одинаковыми знаками, надо сложить их абсолютные величины и перед результатом поставить их общий знак;

2) чтобы сложить два числа с противоположными знаками и неравными абсолютными величинами, надо из большей абсолютной величины вычесть меньшую и перед разностью поставить знак числа с большей абсолютной величиной.

Пользуясь этим правилом, ученик сперва думает, что делать с абсолютными величинами, и только во вторую очередь о знаке суммы. Поэтому правило ведет к большому числу ошибок на знаки, а также к небрежной записи их, что повышает вероятность ошибки в дальнейших вычислениях. Правило, отражающее алгоритм сложения, должно иметь следующий порядок: 1) сравниваются знаки слагаемых; 2) ставится знак суммы; 3) приписывается абсолютная величина суммы.

Существует несколько способов введения сложения рациональных чисел: I—формальный, II—конкретный, использующий сумму рациональных чисел до ее определения; III—конкретный, в котором запись суммы дается после ее определения.

I. При формальном введении правило сложения сразу формулируется, затем на конкретных примерах показывается его целесообразность. Этот способ психологически непригоден. Когда сразу без подготовки дается правило сложения, то оно вызывает у школьников недоумение, некоторый протест. Поэтому последующие примеры, раскрывающие его целесообразность, дают меньший результат, менее убеждают.

II. Во втором случае берется конкретная задача. Например:

Группа туристов-школьников сошла с автобуса на остановке М и отправилась по шоссе, идущему по прямой линии с запада на восток. До отдыха группа прошла а км, потом после отдыха в км. На каком расстоянии от остановки оказалась группа туристов?

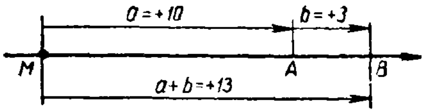


Рис. 29

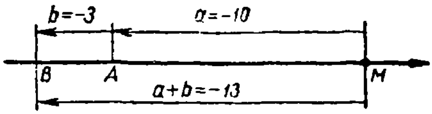


Рис. 30

Общее решение такой задачи для положительных значений a и b будет $a + b$. Путь, пройденный по направлению к востоку, будем считать положительным, к западу — отрицательным.

1) Пусть $a = +10$, $b = +3$.

Группа прошла к *востоку* 10 *км* до пункта A, потом в *том же направлении* еще 3 *км* и, очевидно, оказалась в 13 *км* к *востоку* от остановки M (рис. 29), то есть

$$(+10)+(+3)=+13.$$

2) Пусть $a = -10$, $b = -3$.

Группа прошла (рис. 30) к *западу* 10 *км* до пункта A, потом опять к *западу* еще 3 *км* и оказалась в 13 *км* к *западу* от остановки M, то есть

$$(-10)+(-3)=-13.$$

Пусть $a=+10$, $b=-3$.

Группа прошла (рис. 31) *к востоку* 10 *км* до пункта A, потом *в противоположном направлении* к западу 3 *км* и оказалась в 7 *км к востоку* от остановки M, то есть

$$(+10)+(-3)=+7.$$

4) Пусть $a = +3$, $в = -10$.

Группа прошла (рис. 32) *к востоку* 3 *км* до пункта A, затем *в противоположном направлении* к западу 10 *км* и оказалась в 7 *км к западу от остановки* M, то есть

$$(+3)+(-10)=-7.$$

Затем выписываются равенства:

$$(+10)+(+3)=+13;$$
$$(-10)+(-3)=-13;$$
$$(+10)+(-3)=+7;$$
$$(-10)+(+3)=-7;$$

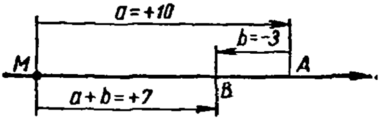


Рис. 31

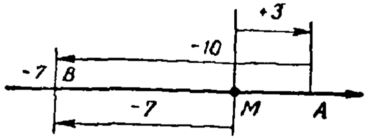


Рис. 32

и предлагаются следующие вопросы:

1. Каким действием решается во всех случаях задача? (Сложением.)
2. Что надо сделать с абсолютными величинами слагаемых? (В одних случаях сложить, в других — вычесть.)
3. В каких случаях абсолютные величины слагаемых складываются? (В первом и втором.)
4. Какие знаки имеют в этих случаях слагаемые? Их сумма? (Одинаковые.)
5. Как сформулировать правило сложения двух чисел с одинаковыми знаками? (Чтобы сложить два числа с одинаковыми знаками, надо сложить их абсолютные величины и поставить перед суммой общий знак.)

Затем также уясняется, как поступить в случае сложения чисел с противоположными знаками и формулируется правило.

Такой подход к определению суммы рациональных чисел через сумму встречается во многих учебниках. Он основан на аналогии и логически неверен. Действительно, в момент решения задачи сумма $a+b$ определена только для положительных чисел. Рассматривать сумму $a+b$ во всей всеобщности до определения суммы рациональных чисел нельзя. Из четырех рассмотренных случаев логически верен только один $(+10)+(+3)=+13$, так как для положительных чисел сумма определена. Все остальные рассуждения, что $(-10)+(-3)=-13$; $(+10)+(-3)=+7$; $(-10)+(+3)=-7$, несостоятельны. Суммы такого вида еще не определены, значит, они не существуют и записывать их нельзя. Тоже следует сказать и о наводящих вопросах.

Учащиеся этого недочета обычно не замечают.

III. Логический недочет предыдущего способа легко устранить за счет незначительного усложнения записи. Рассмотрим этот способ подробно.

Как и в предыдущем случае, дается задача, в которой надо найти результат двух последовательных изменений. Можно дать задачу на перемещение, изменение температуры и т. д. Возьмем, например, задачу на изменение суммы денег в кассе. Предварительно полезно вывесить таблицу, в которой дано наличие денег в кассе (дается то, что на строке 1):

Таблица 17

	Дни недели			
	четверг	пятница	суббота	воскресенье
1) Наличие денег в руб. 2) Изменение в руб.	2500 —	8000 Увеличилось на 5500	1000 Уменьшилось на 7000	1000 Не менялось
	—	+ 5500	— 7000	0

Как изменялось наличие денег каждый день, начиная с пятницы? (Появится строка 2.)

Как записать полученные изменения в рублях с помощью рациональных чисел? (Появится строка 3.)

Задача 1. *Наличие денег в кассе изменилось в первый день на 300 руб., во второй на 200 руб. Найти общее изменение наличия денег в кассе за два дня.*

Каким может быть изменение наличия денег в кассе? (Оно может увеличиться, может уменьшиться.)

Как обозначить в рублях увеличение на 300 руб., уменьшение на 300 руб.? (+300, —300.)

Какие могут быть случаи изменения на 200 руб. и 300 руб.? (В рублях +300 и +200, —300 и —200, +300 и —200, —300 и +200.)

Рассмотрим различные возможные случаи.

1. Пусть в первый день наличие *увеличилось* на 300 руб. (+300), во второй тоже *увеличилось* на 200 руб. (+200), тогда за два дня наличие *увеличится* на 500 руб. (+500).

2. Пусть в первый день наличие *уменьшится* на 300 руб. (—300), во второй тоже *уменьшится* на 200 руб. (—200), тогда за два дня наличие *уменьшится* на 500 руб. (—500).

3. Пусть в первый день наличие *увеличилось* на 300 руб. (+300), но во второй *уменьшилось* на 200 руб. (—200), тогда за два дня наличие *увеличилось* только на 100 руб. (+100).

4. Пусть в первый день наличие *уменьшилось* на 300 руб. (—300), но во второй день *увеличилось* на 200 руб. (+200), тогда за два дня наличие *уменьшилось* на 100 руб. (—100).

Результат сведем в таблицу.

Таблица 18

Изменение за 1-й день	Изменение за 2-й день	Общее изменение за 2 дня	Знаки изменений	Общее изменение	
				знак	абс. величины
+ 300 — 300	+ 200 — 200	+ 500 — 500	Одинаковые	Общий	Складываются
+ 300 — 300	— 200 + 200	+ 100 — 100	Противоположные	Знак числа с большей абс. величиной	Вычитаются

Даются наводящие вопросы.

Какими числами выражается изменение за 1-й и за 2-й день в первом случае? (Положительными.)

Каким действием находится общее изменение за 2 дня, когда оба изменения выражены положительными числами? (Сложением.)

Вывод. Естественно считать, что и в остальных случаях результат находится сложением, но следует определить сложение так, чтобы оно было целесообразным, не расходилось с практикой.

Для этого даются наводящие вопросы.

Что можно сказать о знаках изменений за 1-й и 2-й день? (В случаях 1 и 2 они одинаковые; в 3 и 4 противоположные.) Как это отражается на знаке общего изменения? Когда знаки двух изменений одинаковые, общее изменение имеет тот же знак; когда знаки двух изменений противоположные, то общее изменение имеет знак числа с большей абсолютной величиной.

Как получается абсолютная величина общего изменения, если знаки изменений одинаковые? (Надо сложить абсолютные величины за 1-й и 2-й дни.)

А если знаки изменений противоположные? (Надо вычесть.)

После этого дается определение суммы рациональных чисел, но его целесообразно сформулировать в виде правила: *Чтобы сложить два рациональных числа, надо: 1) если знаки одинаковые, то поставить общий знак и приписать сумму абсолютных величин; 2) если знаки противоположные, то поставить знак числа с большей абсолютной величиной и приписать разность абсолютных величин.*

В предыдущей задаче по определению имеем:

$$(+300)+(+200)=+500; \quad (-300)+(-200)=-500;$$
$$(+300)+(-200)=+100; \quad (-300)+(+200)=-100.$$

В заключение учитель подчеркивает, что разность абсолютных величин — разность между большей и меньшей абсолютными величинами слагаемых.

Перед задачей 3 полезно рассмотреть следующую задачу.

Задача 2. *Показать конечное положение точки, которая движется по числовой оси. Начальное положение было в точке O и* *точка сделала два перемещения на:* 1) + 5 *и* + 3; 2) — 5 *и* + 3; 3) + 5 *и* — 3; 4) — 5 *и* + 3.

З а д а ч а 3. *В начальный момент точка находилась на числовой оси в точке О. Точка переместилась вдоль оси сперва на 5 единиц, затем на 3 единицы. Найти общее перемещение из начальной точки в конечную, заменяющее два этих перемещения.*

Можно дать наводящие вопросы.

Что можно сказать о перемещении на 5 по числовой оси? на 3? (Точка переместится по числовой оси вправо или влево.)

Как же обозначим перемещение на 5 единиц вправо? на 5 единиц влево? (+5, —5.)

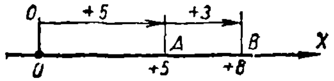


Рис. 33

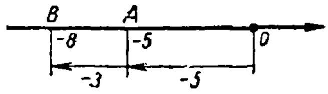


Рис. 34

Затем устанавливаем, что в задаче могут получиться следующие случаи перемещения: +5 и +3; —5 и —3; +5 и —3; —5 и + 3. Последовательно рассматриваем каждый случай.

1) Пусть точка переместилась на +5 (*вправо*), точка окажется в *А*, после второго перемещения на +3 (*вправо*) точка переместится *в том же направлении* и окажется в *В* (рис. 33). Из начальной точки *О* в конечную точку *В* — можно сделать одно перемещение *ОВ*, то есть на +8. Назовем это перемещение общим.

2) Пусть точка переместилась на —5 и —3. После первого перемещения на —5 (*влево*) точка окажется в *А*, после второго на —3 (*влево*) точка переместится в том же направлении и окажется в *В* (рис. 34).

Чтобы переместиться из начальной точки *О* в конечную точку *В*, можно сделать одно общее перемещение *ОВ*, *то есть на —8*.

3) Пусть точка переместилась на +5 и —3. После первого перемещения на +5 (*вправо*) она окажется в *А*, после второго на —3 (*влево*) точка переместится в противоположном направлении и окажется в *В* (рис. 35).

Чтобы переместиться из начального положения *О* в конечную точку *В*, можно сделать одно общее перемещение *ОВ*, то есть на +2.

4) Пусть точка переместилась на —5 и +3.

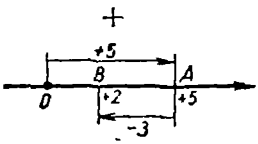


Рис. 35

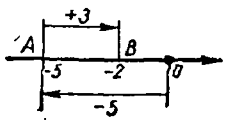


Рис.36

После первого перемещения на —5 (*влево*) точка окажется в A, после второго на $+3$ (*вправо*) точка переместится в противоположном направлении и окажется в B (рис. 36).

Чтобы переместиться из начального положения O в конечное B, можно сделать общее перемещение OB, то есть на —2.

Сведем результат в таблицу:

Таблица 19

Первое перемещение	Второе перемещение	Общее перемещение	Знак	Абсолютная величина
$+5$	$+3$	$+8$	Общий	Складываются
-5	-3	-8		
$+5$	-3	$+2$	Знак числа при большей абсолютной величине	Вычитаются
-5	$+3$	-2		
			Запись появляется после вопросов	

Даются наводящие вопросы.

Что можно сказать о знаке после двух перемещений, то есть о знаке общего перемещения? (Совпадает со знаком перемещений, если их знаки одинаковые; если же знаки противоположные, то знак общего перемещения совпадает со знаком перемещения с большей абсолютной величиной.)

Как получить абсолютную величину общего перемещения? (Если перемещения в одном направлении, то абсолютные величины складываются, если в противоположном, то вычитаются.)

Каким действием находится общее перемещение, если перемещения характеризуются положительными числами? (Сложением.)

Вывод. Целесообразно и в остальных случаях считать, что имеет место сложение перемещений, и потому найденные правила определяем как правила (алгоритм) сложения рациональных чисел.

В заключение дается правило сложения, после чего делается вывод, что по определению имеем право писать:

$$(+5)+(-3)=+8; \quad (-5)+(-3)=-8;$$
$$(+5)+(-3)=+2; \quad (-5)+(+3)=-2.$$

Можно правило сложения сформулировать иначе:

Чтобы сложить два рациональных числа, надо: 1) поставить знак числа с большей абсолютной величиной; 2) если знаки слагаемых одинаковые, то приписать сумму абсолютных величин, а если противоположные, то — разность.

Такое правило легче запомнить, но оно может повести к увеличению числа ошибок при вычитании абсолютной величины суммы (вместо суммы абсолютных величин слагаемых ученики часто берут их разность).

Случай, когда одно слагаемое нуль, можно рассмотреть на примерах: $(+3) + 0 = (+3) + (+0) = 3$ и т. д.

В заключение надо рассмотреть один частный случай, когда абсолютные величины слагаемых равны, а знаки противоположные, то есть слагаемые — числа противоположные (нет большей абсолютной величины). Возьмем, например, $(+5) + (-5)$. Применяя общее правило к данному случаю, получим или $(+5) + (-5) = + 0 = 0$, или $(+5) + (-5) = -0 = 0$.

Итак, в обоих случаях $(+5) + (-5) = 0$, то есть сумма противоположных чисел равна нулю. Здесь можно ввести термин *взаимно уничтожаются*, или *сокращаются*. Последний термин употребляется в разных смыслах: *сократить противоположные числа*, *сократить дробь*.

Имеется хороший наглядный способ иллюстрации сложения рациональных чисел, который аналогичен рассмотренному приему сложения перемещений.

Берутся две одинаковые шкалы, на которых отложены нуль, положительные и отрицательные числа (рис. 37), причем одна шкала может двигаться вдоль другой так же, как перемещается движок вдоль шкалы на логарифмической линейке.

Для сложения двух рациональных чисел поступают так же, как в задаче 2 при отыскании итогового перемещения.

Употребление такой линейки видно на рисунках 38 — 41.

Для сложения двух чисел конец отрезка, соответствующего одному слагаемому на нижней шкале, совмещается с нулевым делением верхней шкалы и конец отрезка, соответствующего второму слагаемому на верхней шкале, совместится с концом отрезка на нижней шкале, соответствующего сумме.

Такую линейку легко изготовить не только для демонстрации в классе, но и каждому ученику. В простейшем случае это будут две полоски бумаги, на которых намечены две шкалы целых чисел. Их кладут рядом на плоскости и устанавливают в соответствии с заданием. Шкалы линеек хорошо сделать из полосок миллиметровой бумаги, наклеенной на картон.

Следует помнить, что линейка употребляется только для иллюстрации правила. Упражнения на сложение рациональных чисел учащиеся должны научиться делать по правилу сложения.

Из других наглядных примеров можно указать перемещение пассажира вдоль палубы движущегося парохода, движение пассажира на движущемся эскалаторе (взять горизонтальный эскалатор).

Судя по задачам 1 и 3, по введенным правилам можно решать одними и теми действиями задачи как с положительными числами, так и с отрицательными, кроме того, сложение положительных чисел выполняется по тем же правилам, что и сложение рациональных чисел.

Остается показать, что при новых правилах сложения законы арифметических действий сохранились.

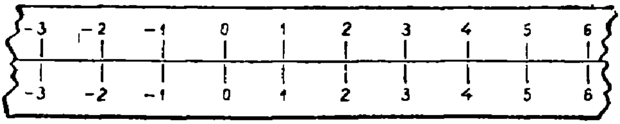


Рис. 37

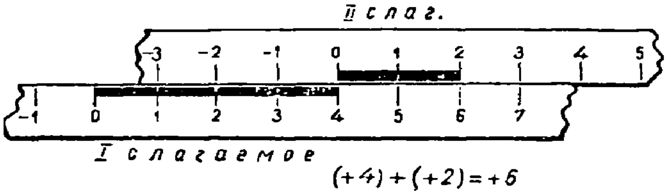


Рис. 38

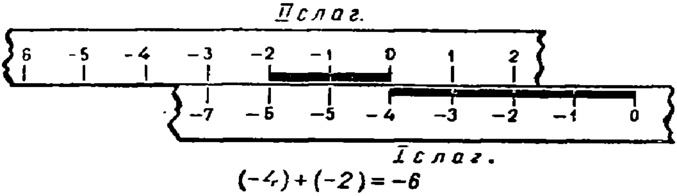


Рис. 39

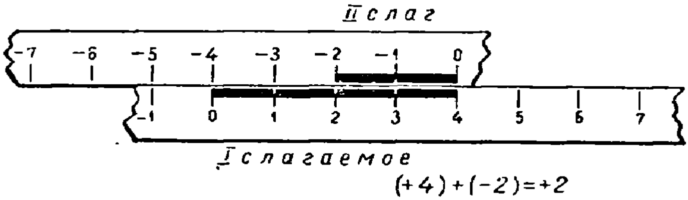


Рис. 40

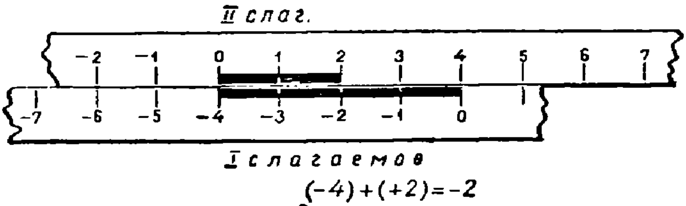


Рис. 41

Этот вопрос хорошо изложен в учебнике алгебры А. Н. Барсукова. Главное, чтобы ученики поняли, что если, например, любые рациональные числа соединены знаком «+», то их можно переставить. Также следует рассмотреть и остальные законы сложения. Можно к тому, что сказано в стабильном учебнике о независимости суммы рациональных чисел от порядка слагаемых, дать графическую иллюстрацию: показать, что $(-6)+(+2)=(+2)+(-6)$ (рис. 42); переместительный закон сложения рациональных чисел можно наглядно продемонстрировать и на линейке со шкалами рациональных чисел.

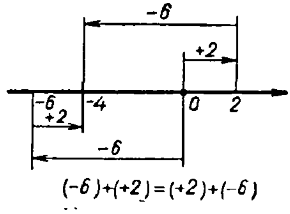


Рис. 42

На примерах типа «выполнить действие $(+2{,}5)+(-1)+(+1{,}5)$» можно показать их применение для рационализации вычислений. Но следует помнить, что такие примеры подбирают искусственно, а на практике эта возможность встречается крайне редко.

Выполняя упражнения на сложение рациональных чисел, следует уделить внимание и устному счету.

Начальные упражнения на сложение двух рациональных чисел требуется провести с полным объяснением каждого шага. Сперва делают несколько примеров на сложение двух чисел с одинаковыми знаками. Перед переходом к сложению чисел с противоположными знаками целесообразно сделать подготовительные упражнения.

Пример. *В следующих парах чисел подчеркнуть число с большей абсолютной величиной*: 1) -8 и $+6$; 2) -3 и 5; 3) -20 и 18; 4) 2,3 и $-2{,}2$; 5) $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{4}$; 6) $-\frac{14}{15}$ и $\frac{15}{16}$.

Затем, сделав несколько примеров на сложение двух чисел с противоположными знаками с подробным объяснением, целесообразно перейти к комментированным упражнениям. Так, выполняя сложение $(-3)+(+2)$, вызванный ученик с места дает примерно следующее объяснение: «знаки слагаемых противоположные; большая абсолютная величина у числа -3, поэтому знак будет «—»; разность абсолютных величин $3-2=1$, следовательно, сумма будет -1».

На первых порах рекомендуется решать устно (с объяснением) примеры с целыми числами, чтобы вычисления не отвлекали учеников от того, как находить знак и как поступать с абсолютными величинами.

Полезно, решая примеры устно, на доске начертить числовую ось (например, часть ее от -10 до $+10$). Учитель, дав задание сложить $(-5)+(+2)$, одновременно показывает числа -5 и 2 на оси. У учащихся при этом участвует в работе не только слух, но и зрительное впечатление, что облегчает решение, так как позволяет сделать более наглядным условие.

Учительница О. С. Шрамко (Ростов-на-Дону) для первых устных упражнений на действия с рациональными числами подбирает примеры, в которых абсолютная величина результата не превышает 10. При решении учащиеся держат в руках модель числовой оси, на которой нанесены числа от —10 до +10, и держат ее в руках так, что она видна учителю. Решая примеры, ученики показывают результат на оси. Таким образом учитель во время устных упражнений видит, как работает класс, и сразу замечает ошибки и тут же может разобрать их.

Учащимся можно рекомендовать при решении примеров на сложение пользоваться следующей схемой:

Таблица 20

	Знаки слагаемых	Знак суммы	Абсолютные величины слагаемых
Сложение двух чисел	Одинаковые	Тот же	Складываются
	Противоположные	Знак числа с большей абс. величиной	Вычитаются

Можно предложить устные упражнения типа:

1. Что можно сказать о знаках двух слагаемых, если абсолютная величина суммы меньше абсолютной величины одного из слагаемых?

2. Что можно сказать о знаках двух слагаемых, если абсолютная величина их суммы больше абсолютной величины каждого из слагаемых?

3. Что произойдет с рациональным числом *а* (уменьшится или увеличится), если к нему прибавить положительное число *в*? Что произойдет с его абсолютной величиной?

4. Тот же вопрос, если прибавить $в < 0$.

В контрольных работах внимание сосредоточивают на проверке усвоения правила сложения, поэтому избегают давать примеры с громоздкими абсолютными величинами.

§ 7. ВЫЧИТАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Вычитание — действие, обратное сложению; сложение вводится по определению, правило вычитания доказывается.

К вычитанию можно подойти посредством решения задачи.

Задача 1. *Найти расстояния: 1) от вершины Казбека 5047 м до вершины Эльбруса 5633 м; 2) от Прикаспийской низменности — 26 м до вершины пика Победы 7439 м.*

Решение.

1) Расстояние равно (+5633) — (+5047) = 586.

2) Задача одного типа с первой, поэтому решается тем же действием:

$$(+7439)-(-26).$$

В стабильном учебнике А. Н. Барсукова объясняется вычитание так: $5-(+7)=-2$, так как $(+7)+(-2)=5$. Это верно, но для учащихся объяснение лучше детализировать. В случае надобности используется графическая иллюстрация.

Пусть $5-(+7)=x$, тогда по определению действия вычитания $+7+x=5$, значит, x число отрицательное, а именно -2.

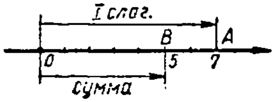


Рис. 43

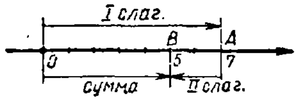


Рис. 44

Учащимся можно дать следующие наводящие вопросы.

Что такое $5-(+7)$? (Разность чисел 5 и 7.)

Примем $5-(+7)=x$. Как называется 5, +7, x? Какая между ними зависимость? Запишите ее. ($(+7)+x=5$.)

Какой знак должен быть у второго слагаемого? Почему? (x должен быть отрицательным, так как сумма 5 меньше первого слагаемого 7.)

Чему равен x? (-2.)

Это можно иллюстрировать на числовой оси. Берется сумма $(+7)+x=5$. На рис. 43 показано расположение известного слагаемого +7 и суммы 5. После этого ставится вопрос, что геометрически соответствует второму слагаемому x. Учащиеся должны показать его на чертеже (рис. 44). Здесь следует напомнить, что когда берется отрезок — сумма, то начальная точка этого отрезка совпадает с началом первого слагаемого, конец с концом второго слагаемого, значит, конец второго слагаемого x будет в точке B, поэтому $x=AB$, его абсолютная величина равна 2, отрезок направлен влево, то есть $x=-2$.

Аналогично решается вопрос и в приведенной задаче 1 в случае 2.

Докажем, что $a-b=a+(-b)$. Для этого примем, что $a-b=x$, тогда по определению действия вычитания $x+b=a$ это равенство числовое; чтобы получить x, добавим к обеим частям неравенства по $(-b)$, тогда получим $x+b+(-b)=a+(-b)$, откуда (применяя сочетательный закон сложения) $x+b+(-b)=a+(-b)$, но $b+(-b)=0$, как сумма противоположных чисел, значит, $x=a+(-b)$, или $a-b=a+(-b)$. После этого дается правило вычитания.

Упражнения на вычитание даются в основном на вычисление разностей чисел, но решаются и задачи, аналогичные приведенной в начале параграфа. Полезно задать следующие устные вопросы:

1) Что получится, если из нуля вычесть какое-либо рациональное число?

2) Может ли быть верным равенство $a - b = b - a$?

В каких случаях это возможно?

Можно предложить прикладные задачи. Например:

1) Температура в комнате t°, а на улице t_1°. На сколько комнатная температура выше уличной, когда:

а) $t^\circ = 17^\circ$, $t_1^\circ = 10^\circ$; б) $t^\circ = 16^\circ$, $t_1^\circ = -10^\circ$; в) $t^\circ = 15^\circ$, $t_1^\circ = -2^\circ$.

2) Бутылка молока находилась в комнате с температурой воздуха $+15^\circ$, затем ее перенесли в холодильник и охладили до -5°. На сколько градусов изменилась ее температура?

3) Высотомер показывает высоту подъема самолета относительно уровня площадки, с которой самолет взлетел. В данный момент высотомер показывает $+1200$ *м*. Какова высота подъема самолета относительно уровня моря, если высота взлетной площадки над уровнем моря равна: а) $+200$ *м*; б) -100 *м*; в) $+1200$ *м*; г) $+1500$ *м*?

§ 8. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СУММА

Из правила вычитания $a - b = a + (-b)$ следует важное правило, что всякую разность можно представить в виде суммы и можно ввести понятие алгебраической суммы. Этот вопрос хорошо освещен в стабильном учебнике.

И при сложении и при вычитании большим неудобством для учеников являются употребление одинаковых знаков для знака действия и для знака числа (предлагали, например, про второй говорить не знак, а «атташе» числа). В Индии для знака числа употребляли значок, например $5'$ вместо -5. В логарифмах вместо записи -5 употребляется запись $\bar{5}$. Мерэ и Рикье предлагали ставить над абсолютной величиной стрелки $\rightarrow$ и $\leftarrow$, первая вместо знака «+», вторая вместо «—». Эти обозначения хорошо подчеркивают отличие знака действия от знака числа и первое время полезны, но вопрос этот второстепенный, так как после введения понятия алгебраической суммы в записи остается только знак числа, а знак сложения будет подразумеваться.

С момента введения алгебраической суммы в упражнениях переходят к записи сложения с одним знаком. Необходимо первое время напоминать (хотя бы давая вопрос во время упражнений: что подразумевается между числами?), что в алгебраической сумме *показываются знаки* чисел, а между ними *подразумевается* знак плюс. В словесной формулировке первое время вместо пропущенного знака «+» можно в упражнениях говорить «да». Например, $5 - 8 + 6$: «плюс 5 да минус 8 да плюс 6».

На алгебраическую сумму можно предложить следующую задачу.

Задача. *В 15-этажной гостинице лифт находился в 7 час. утра на 8 этаже. За 20 минут он передвинулся на 6 этажей вниз, на 2 вниз, на 12 вверх, на 3 вверх, на 10 вниз, на 2 вверх, на 6 вниз. На каком этаже он оказался в конце?*

Решение. $(+8) + (-6) + (-2) + (+12) + (+3) + (-10) + (+2) + (-6) = +1$, или в виде алгебраической суммы: $8 - 6 - 2 + 12 + 3 - 10 + 2 - 6 = 1$.

Ученик, складывая, говорит: «+8 да —6 будет +2; +2 да —2 будет 0» и т. д.

§ 9. СРАВНЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

На первых шагах изучения рациональных чисел дается рабочее правило сравнения рациональных чисел с помощью числовой оси. В дальнейшем числовую ось применяют только для иллюстрации сравнения чисел. Когда вводили знаки $>$ и $<$ для положительных чисел, то попутно устанавливали, что разность между бо́льшим и меньшим положительными числами выражалась положительным числом. Теперь можно это использовать для сравнения всех рациональных чисел; например, число —2 расположено на числовой оси правее —5, значит, $-2 > -5$, здесь $(-2) - (-5) = -2 + 5 = 3$, то есть разность положительная. Из двух неравенств $-2 > -6$ и $-3 > -4$, первое более сильное, так как $(-2) - (-6) = -2 + 6 = 4$, $(-3) - (-4) = -3 + 4 = 1$.

В заключение надо дать определение неравенства для чисел a и b: *если $a - b = c$, где c — число положительное,* то $a > b$.

Приведенное определение в основном используется для доказательства неравенств и при сравнении двух чисел. Поэтому в упражнениях, решаемых по курсу VI класса на неравенства, приходится часто использовать рабочее правило сравнения рациональных чисел с помощью графиков.

Упражнение. *На множестве $M = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ найти значения x, при которых:* 1) $x < 1$; 2) $x > 1$; 3) $x < 4$; 4) $x > 4$; 5) $-1 < x < 3$; 6) $-2 < x < 2$. *Доказать, что найденные значения удовлетворяют условию.*

Решение. 1) На графике наносят точки, соответствующие данному множеству M (рис. 45). По условию $x < 1$, находят точку $x = 1$ и отмечают ее. Значения x меньше 1, значит, им графически соответствуют точки, расположенные левее отмеченной точки; обведем их и назовем. Это будут точки —2, —1, 0. $1 - (-2) = 1 + 2 = 3$ и т. д., значит, по определению $-2 < 1$, $-1 < 1$, $0 < 1$. Ответ. —2, —1, 0.

5) По условию $-1 < x < 3$, отметим на графике точки —1 и 3. Значения x больше —1, но меньше 3, поэтому отмечаем точки

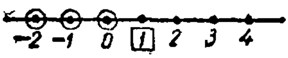


Рис. 45

Рис. 46

правее —1, но левее 3, обведем их (рис. 46). Получили точки 0, 1, 2. $0-(-1)=1$, $3-0=3$ и т. д., значит, по определению $-1<0<3$, $-1<1<3$, $-1<2<3$. Ответ. 0, 1, 2.

§ 10. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

При введении правила умножения рациональных чисел перед учителем стоят те же вопросы, что и при сложении. Правило умножения в VI классе вводится по определению.

Правило, даваемое учащимся, должно соответствовать алгоритму умножения. Наиболее распространена следующая формулировка: *Произведение двух чисел равно произведению их абсолютных величин, взятому со знаком плюс, если оба множителя имеют одинаковые знаки, и со знаком минус, если оба множителя имеют противоположные знаки.*

Используя это правило, ученик сперва перемножает абсолютные величины, часто даже пишет результат, и только после этого отыскивает знак произведения. Это повышает количество ошибок на знаки и ведет к нечеткой записи их, что в свою очередь повышает вероятность ошибки при последующих вычислениях.

В правиле должен быть следующий порядок: 1) сравнивают знаки множителей; 2) ставят знак произведения; 3) приписывают произведение абсолютных величин множителей.

Можно указать три способа подведения к правилу умножения: 1) формальный; 2) конкретный, при котором запись произведения появляется раньше его определения; 3) конкретный, причем запись произведения появляется после определения.

1) Первый способ аналогичен одноименному способу в сложении.

2) Второй способ состоит в том, что дается конкретная задача, решение которой для положительных чисел имеет вид ab. Затем вместо a и b берут различные значения, как положительные, так и отрицательные. Например:

Температура каждый час повышается на a градусов. В настоящий момент термометр показывает 0 градусов. Сколько градусов будет показывать термометр через t часов?

Сразу устанавливают, что через t часов температура будет at градусов.

Это верно, когда a и t неотрицательны. Но распространять эту зависимость на случай, когда a или t или оба вместе отрицательные, можно только, если определено произведение любых рациональных чисел. И в этом логическая ошибка такого изложения. Все последующие рассуждения о том, что $(-2) \cdot 3 = -6$; $2 \cdot (-3) = -6$; $(-2) \times \times (-3) = 6$ несостоятельны, так как эти произведения еще не определены.

3) Рассмотрим подробно третий способ.

Почти во всех задачах, приводящих к умножению рациональных чисел, берут за один множитель время. Поэтому уместно до разбора такой задачи остановиться на том, как понимать изменение времени, выражается ли оно только положительным числом. Можно привести даты рождения, например: Н. И. Лобачевский родился в 1792 году, Архимед в 287 году до н. э. Поставить вопрос, как можно записать год рождения Архимеда. Ответ: —287 г.

Вопрос: Как понимать отрицательное время? (Отрицательное время показывает, что событие происходило до момента, принятого за начало отсчета.)

Можно еще предложить заполнить недостающие слова в таких предложениях:

Таблица 21

Сказано	Это значит
Температура поднялась на (— 5°)	Температура ... на 5°
Температура опустилась на (— 5°)	Температура ... на 5°
Это будет через (— 8 лет)	Это ... 8 лет ...
Это было (— 8 лет) назад	Это ... ... 8 лет
Это будет правее пункта *А* (— 8 *км*)	Это будет ... пункта *А* на 8 *км*

Пример 1. *Точка движется по числовой оси со скоростью 1 см/сек. В данный момент находится в точке О. Найти ее положение для момента времени t сек, если:* 1) $t = +2$; 2) $t = -2$.

В случае 1) точка движется вправо со скоростью 1 *см/сек*, в начальный момент находится в точке *О*, а через $+2$ *сек* окажется в точке 2 (рис. 47).

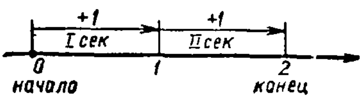


Рис. 47

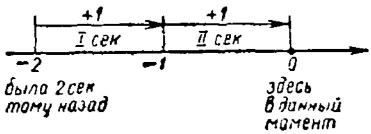


Рис. 48

В случае 2) точка тоже движется вправо с той же скоростью, в данный момент находится в точке *О*. Но $t = -2$, значит, надо определить положение точки, которое она занимала 2 *сек* тому назад (рис. 48).

Пример 2. *Точка движется по числовой оси со скоростью 1 см/сек. В данный момент она находится в точке О. Найти ее положение для момента времени t сек, если:* 1) $t = +2$; 2) $t = -2$.

Рассуждение ведется аналогично, только надо учесть, что точка движется влево (рис. 49 и 50).

Затем дается задача.

Точка движется по числовой оси со скоростью 3 см/сек. В данный момент она находится в точке О. Найти положение точки в момент, отстоящий от данного на 2 сек.

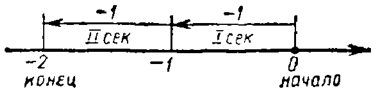


Рис. 49

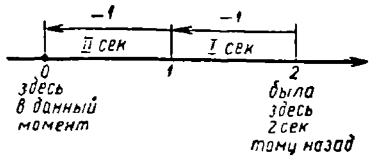


Рис. 50

Предварительно выясняются следующие вопросы (если рассмотрели упражнения 1 и 2, то число их можно сократить):

1) Как может перемещаться точка по числовой оси? (Вправо и влево.)

2) Как будем обозначать скорость при движении вправо и влево? (Вправо со знаком «+», влево со знаком «—».)

3) Как можно отсчитывать время от данного момента? (В будущее и прошлое.)

4) Как будем обозначать время, отсчитываемое в будущее, в прошлое? (В будущее со знаком «+», в прошлое со знаком «—».)

5) Как понять: скорость равна +3 *см/сек*; —3 *см/сек*?

6) Как понять: время +2 *сек*; —2 *сек*?

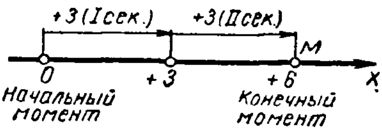


Рис. 51

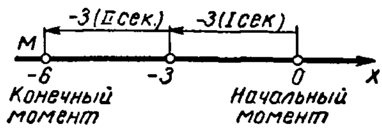


Рис. 52

Рассмотрим различные возможные случаи движения точки.

1. Пусть скорость равна +3 *см/сек*, время +2 *сек*. Это значит, что точка движется в п р а в о, и надо найти, где будет точка ч е р е з 2 *сек*.

Каждую секунду точка проходит +3 *сек* (рис. 51), через 2 *сек* она будет в точке *M*. Ее расстояние от точки *O* *OM* = +6 *см*.

2. Пусть скорость равна — 3 *см/сек*, время +2 *сек*.

Значит, точка движется в л е в о. Надо найти, где она будет ч е р е з 2 *сек*. Каждую секунду точка проходит — 3 *см* (рис. 52), через 2 *сек* она будет в точке *M*. Ее расстояние от точки *O* *OM* = = —6 *см*.

3. Пусть скорость равна $+3$ *см/сек* (рис. 53), время—2 *сек*. Значит, точка движется вправо, в данный момент находится в 0, но надо найти, где она была 2 *сек* тому назад. Каждую секунду точка проходила 3 *см* вправо, значит, 2 *сек* тому назад она была влево от точки O в точке M. Ее расстояние от точки O было $OM = -6$ *см*.

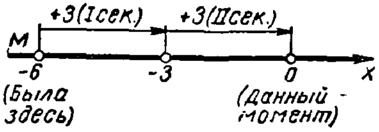


Рис. 53

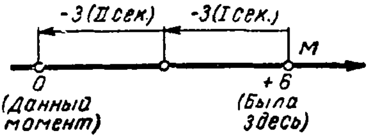


Рис. 54

4. Пусть скорость равна -3 *см/сек* (рис. 54), время — 2 *сек*. Значит, точка движется влево, в данный момент находится в O, надо найти, где она была 2 *сек* тому назад. Каждую секунду она проходила 3 *см* влево, значит, 2 *сек* тому назад была вправо от точки O в точке M. Ее расстояние от точки O было $OM = +6$ *см*.

Полученный результат заносят в таблицу:

Таблица 22

Скорость точки в *см/сек*	Время в *сек*	Положение точки в *см*	Знак	Абсолютная величина
1) $+3$	$+2$	$+6$	$+$	Перемножают
2) -3	$+2$	-6	$-$	
3) $+3$	-2	-6	$-$	
4) -3	-2	$+6$	$+$	

Вопрос: В первом случае имеем 3 *см/сек* $= v$, 2 *сек* $= t$ и путь $OM = 3 \cdot 2 = 6$ (*см*). Каким же действием находится OM для положительных чисел? (Умножением.)

Вывод. Естественно считать, что и в остальных случаях имеем умножение двух рациональных чисел, только надо дать ему определение.

Вопросы.

Сравнить знаки скорости и времени со знаком числа, характеризующим положение точки. (Когда скорость и время имеют одинаковые знаки, то это число имеет знак $+$, когда противоположные —.)

Что можно сказать об абсолютных величинах скорости, времени и числа, характеризующего конечное положение точки? (Абсолютная величина этого числа равна произведению абсолютных величин скорости и времени.)

Затем дается определение произведения двух рациональных чисел:

Чтобы перемножить два рациональных числа, надо: 1) *поставить знак «+», если знаки их одинаковые, и знак «—», если противоположные;* 2) *абсолютные величины перемножить.*

После этого можно по определению написать:

$$(+3)\cdot(+2)=+6;\ (-3)\cdot(+2)=-6;$$

$$(+3)\cdot(-2)=-6;\ (-3)\cdot(-2)=+6.$$

Всегда некоторое сомнение вызывает, что при умножении двух отрицательных чисел произведение положительное. Здесь уместно привести старое правило средневекового схоласта Рамуса, что «двойное отрицание — утверждение», оно знакомо им, употребимо в разговорной речи и не вызывает сомнений, только форму следует дать более доступную, например, «не нехороший — хороший».

Часто выведенные правила для чисел записывают на буквах: $(+a)\ (+b)=+ab$, $(-a)\ (+b)=-ab$, $(+a)\ (-b)=-ab$, $(-a)\ (-b)=+ab$.

При умножении хорошо пользоваться краткими правилами. Что делать с абсолютными величинами, очевидно каждому ученику, а внимание надо сосредоточить на знаках, и это делается в рабочих правилах «минус на минус дает плюс» и «минус на плюс дает минус». Опасаться, что в кратком правиле идет речь не об умножении чисел, а об умножении знаков, вряд ли целесообразно — ученики понимают, о чем идет речь.

Остается показать, что для правила умножения рациональных чисел сохранились в силе переместительный и сочетательный законы.

Кроме того, надо ввести правило умножения для трех и больше множителей.

Можно использовать переместительный и распределительный закон умножения для рационализации вычислений, подбирая соответствующие упражнения.

На примерах типа $(-25)\cdot(+3{,}72)\cdot(-0{,}04)$ хорошо показать, как рационализировать вычисление с помощью переместительного закона умножения.

В случае $\left[\frac{3}{555}+\left(-\frac{7}{1221}\right)\right]\cdot 1110$ выгодно использовать распределительный закон умножения:

$$\left[\frac{3}{555}+\left(-\frac{7}{1221}\right)\right]\cdot 1110=\frac{3\cdot 1110}{555}+\left(-\frac{7\cdot 1110}{1221}\right)=6-6\frac{4}{11}=-\frac{4}{11};$$

Деление — действие, обратное умножению, и потому правило деления выводится. Можно изложение в учебнике Барсукова детализировать.

Пусть надо 12 разделить на 3, примем $12 : 3 = x$, тогда по определению деления $x \cdot 3 = 12$, откуда $x = 4$.

Пусть надо $+12$ разделить на -3, примем $12 : (-3) = x$, тогда по определению деления $x \cdot (-3) = 12$, абсолютная величина x, очевидно, равна 4, а знак должен быть противоположен -3, в противном случае при умножении $4 \cdot (-3) = -12$, значит, $x = -4$ и $12 : (-3) = -4$ и т. д.

Можно ученикам задать вопросы по равенству $x \cdot (-3) = 12$.

1. Чему равна абсолютная величина x?
2. Какой должен иметь знак x?

Затем формулируется правило деления и рассматриваются законы деления. Из них переместительный и распределительный понадобятся для дальнейшего.

Полезны устные упражнения типа:

1. Что произойдет с рациональным числом a, если его умножить на положительное число b? Что произойдет при этом с его абсолютной величиной?
2. Тот же вопрос для $b < 0$.

§ 11. ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

В заключение можно подвести некоторые итоги. Изучено множество рациональных чисел.

При сложении:

1) $a + b = b + a$ (переместительный закон);
2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (сочетательный закон);
3) $a + 0 = a$ (имеется нейтральный элемент 0);
4) $a + (-a) = 0$ (имеется противоположный элемент — противоположное число).

При умножении:

1) $ab = ba$ (переместительный закон);
2) $a(b + c) = ab + ac$ (распределительный закон);
3) $a(ac) = (ab)c$ (сочетательный закон);
4) $a \cdot 1 = a$ (имеется нейтральный элемент 1);
5) $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$ (имеется противоположный элемент—обратная величина).

Таким образом, можно перечислить условия, определяющие множество рациональных чисел как поле и сообщить термины *кольцо* и *поле*, не углубляя этих понятий. Не надо требовать от учеников запоминания этих терминов, важно ознакомить их с идеей структур в алгебре.

Поступают примерно так. На примерах $2+3=5$, $3\cdot 7=21$ и т. д. делается вывод, что при сложении и умножении натуральных чисел результат — число натуральное, то есть *число того же множества*. На примерах $2-1=1$; $2-3=-1$; $6:2=3$; $6:4=1{,}5$ и т. п. делают вывод, что при вычитании и делении натуральных чисел получают не всегда число натуральное. Отсюда следует, что в множестве натуральных чисел всегда выполнимо только сложение и умножение. Такое множество чисел называют кольцом.

Переходят к множеству рациональных чисел, устанавливают, что в этом множестве чисел выполнимы сложение, вычитание, умножение и деление на число, не равное нулю. Кроме того, имеют место перечисленные выше законы. Такое множество чисел называют *полем*.

Отрицательные числа обладают не всеми свойствами положительных чисел. Например, $(-12):(-4)=3$, но число -12 меньше числа -4. Можно только сказать, что -12 меньше -4 на 8, а во сколько раз меньше, оценить нельзя.

Поэтому в алгебре говорят *умножить*, а не *увеличить*. Так, в арифметике говорят: «Если увеличить числитель и знаменатель дроби в одно и то же число раз, то величина дроби не изменится», то есть $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$, но эта формулировка верна лишь для $a>0$, $b>0$, $m>0$.

Следует приучать учеников к тому, что можно судить только о знаке чисел. Например, 5 — число положительное, -8 — отрицательное, но о знаке буквы a судить без дополнительных условий нельзя, так как a может принимать любые значения.

Полезно дать следующие устные упражнения:

1. Может ли a быть меньше $-a$?
2. Может ли a быть больше a^2?
3. Может ли a^3 быть меньше a^2?
4. Может ли a равняться -3?

На эти вопросы ответить легко, так как достаточно в подтверждение ответа привести один пример. Так, на вопрос 1 достаточно ответить «может» и привести пример, что при $a=-3$ a меньше $-a$.

Число таких вопросов может быть легко увеличено. Затем вопросы можно поставить в форме, которая потребует исследования.

1) Что больше: a или $-a$?

2) Что больше: $\frac{1}{a}$ или 0? $\frac{1}{-a}$ или 0?

3) Что больше: a или $3a$?

4) Что больше: a или $-2a$?

5) Что больше: a или a^2?

6) Чему равно наименьшее значение x^2? x^2+1?

Если вопросы вызовут затруднения, то можно подойти к решению, предварительно составив таблицы. Приведем таблицу к примеру 2.

Таблица 23

a	5	-1	0	-1	-5
$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{5}$	1	нет	-1	$-\frac{1}{5}$
	больше 0			меньше 0	
$\frac{1}{-a}$	$-\frac{1}{5}$	-1	нет	1	$\frac{1}{5}$
	меньше 0			больше 0	

Значит, $\frac{1}{a} > 0$, если $a > 0$, $\frac{1}{a} < 0$, если $a < 0$.

Можно задать вопрос иначе: Когда $-a > 0$? Ответить на этот вопрос проще. Усложнять формулировку вопроса следует в зависимости от уровня подготовки класса.

Эти же задачи можно дать как задачи на доказательство, изменив соответствующим образом формулировку, например, доказать, что a меньше $-a$, если $a < 0$.

Несколько сложнее для шестиклассников ответить на вопросы:

1. При каком условии $a + b = a - b$?
2. При каком условии $a + b > a - b$, $a + b < a - b$?

Дело в том, что ученики еще не имеют аппарата для решения таких вопросов. Собственно вопрос преждевременен. Ученик сможет только догадаться. Подтверждают ответ довольно сложными выкладками с числами, то есть при помощи частной индукции. Но такие упражнения развивают учащихся, приучают вести исследование, рассматривать результат в зависимости от изменения условий, причем эти условия они должны установить сами.

Можно часть вопросов дать на правило возведения в степень, например:

1. Чему равна четная степень -1? нечетная?
2. Вычислить $[3 \cdot (-1)^{20} - 8 \cdot (-1)^{17}] : [(-1)^{6} - (-1)^{101}$.

Можно дать задачу на доказательство:

1. Доказать, что $(-1)^{2n} = -(-1)^{2n} + 1$.

Такие вопросы хорошо давать ученику для уточнения оценки.

Основную часть упражнений в этой теме надо уделить действиям над рациональными числами и на вычисление значений буквенных выражений по данным значениям букв.

Вопросы обоснования преобразований со ссылкой на законы и правила действий многим ученикам даются с трудом, но такие вопросы ставить полезно. Например:

1) Верно ли равенство: $-1 \cdot a = -a$, если $a > 0$?
2) Верно ли равенство: $-1 \cdot a = -a$, если $a < 0$?

3) Верно ли равенство: $-1 \cdot a = -a$, если $a = 0$?

В заключение уместно выяснить, какие действия выполнимы в множестве рациональных чисел:

1) Сложение, вычитание и умножение выполнимо всегда. Можно подчеркнуть как одно из преимуществ отрицательных чисел то, что на множестве рациональных чисел вычитание выполнимо всегда.

2) Деление выполнимо, за исключением одного случая, а именно деления на нуль.

На этот случай полезно дать упражнения, в которых надо найти значения букв, при которых невыполнимы действия, например:

$$\frac{1}{a-2};\ \frac{1}{x+3};\ \frac{1}{(a-1)(b-2)};\ \frac{x}{a(x-3)};\ a\frac{1}{a(x+2)};\ \frac{a}{a-3}+\frac{a}{a-4}.$$

В этом упражнении можно поставить вопрос двояко:

1) какие действия могут быть невыполнимы; 2) при каких значениях букв данные алгебраические выражения не имеют смысла.

§ 12. УРАВНЕНИЯ В VI КЛАССЕ

Понятие уравнения по мере изучения алгебры изменяется. В VI классе его приходится давать в более доступной форме. Оно должно охватить только числовые уравнения с одним неизвестным, в определении отмечают, что в уравнение входит неизвестное и что надо найти его значение.

К понятию уравнения в VI классе можно подвести: 1) решая задачу; 2) находя значение буквы, входящей в формулу; 3) функционально.

В первом случае дается простая задача, например:

Задача 1. *Если из неизвестного числа вычесть* 5, *то получим* 7. *Найти это число.*

Решение. Пусть искомое число x, тогда после вычитания будет $x - 5$, но по условию число стало равным 7, значит, $x - 5 = 7$. Получили равенство, которое назовем уравнением. Его надо решить. Из этого уравнения с помощью зависимости между уменьшаемым, вычитаемым и разностью находим $x = 7 + 5$, то есть $x = 12$.

Во втором случае в формуле задаются значения всех входящих букв, кроме одной, значение которой надо найти.

Задача 2. *В формуле* $S = vt$ $v = 10$, $S = 45$. *Найти* t.

Решение. Подставим $v = 10$ и $S = 45$ в формулу $S = vt$, тогда $45 = 10t$ — получили уравнение. Решим его. Множитель равен произведению, деленному на второй множитель, значит,

$$t = \frac{45}{10},\quad t = 4{,}5.$$

В обоих случаях имеем равенство, в которое входят числа и неизвестные (буквы x, t), значение которого надо найти. Учащихся можно подвести к определению уравнения следующими вопросами:

Как назвать записи $x - 5 = 7$, $45 = 10$? (Равенства.)

Что в них обозначено через x и t? (Неизвестные.)

Что нужно найти? (Значения неизвестных.)

После этого дается определение уравнения:

Уравнением называется равенство, содержащее букву, значение которой надо найти.

В первом случае учитель столкнется со следующими трудностями. Когда неизвестное число обозначают через x, то под x подразумевается число, пока неизвестное. Поэтому ученики могут подумать, что и в уравнении $x-5=7$ x тоже число определенное, а не переменная величина. В дальнейшем при графическом решении уравнений учащихся придется переучивать.

Такое представление о неизвестном в уравнении встречается и в методических пособиях. Например, в книге Н. С. Истоминой «Планы уроков по алгебре в VI классе» (1956 г.) говорится: «...буквам, входящим в это уравнение (неизвестным уравнения), нельзя придавать произвольных значений» (стр. 23).

Второй способ предпочтительней первого, он чаще встречается на практике (на уроках физики, труда, в технике и т. д.). Но этот способ тоже не формирует представления, что x может принимать в равенстве различные значения, что надо найти то из них, при котором равенство будет верным.

Наиболее интересным является функциональный подход к понятию уравнения.

В книге В. Л. Гончарова «Начальная алгебра» (1955 г.) говорится: «Предположим..., что некоторое равенство содержит в какой-нибудь из двух частей или в обеих частях только одну букву, значение которой не указано. Такое равенство может быть верным при одном числовом значении буквы и неверным — при другом. Если мы ставим задачей узнать, при каких значениях входящей буквы равенство оказывается верным, то мы называем равенство уравнением...» (стр. 26).

В этой системе учитель дает учащимся несколько равенств, содержащих букву, и учащиеся подставляют вместо буквы значение ее. Например, можно поставить вопрос:

1. В равенство $x + 3 = 5$ подставить значения $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Какое получилось равенство? В первом случае получим $1 + 3 = 5$ — равенство неверное.

$2 + 3 = 5$ — равенство верное.

$3 + 3 = 5$ — равенство неверное.

2. То же, если $a - 1 = 2$ и $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$.

$0 - 1 = 2$ — равенство неверное;

$1 - 1 = 2$ — то же;

$2 - 1 = 2$ — то же;

$3 - 1 = 2$ — равенство верное.

Можно дать наводящие вопросы.

Что было дано в обоих примерах? (Равенство.)

Что они содержали? (Числа и букву.)

Что делали? (Для данных значений буквы находили значения обеих частей равенства.)

Учитель говорит, что если требуется найти значение буквы, при котором равенство будет верным, то такое равенство называется уравнением и дает определение: *уравнением называется равенство, содержащее букву, значение которой надо найти*. Затем вводятся термины: *неизвестное, удовлетворяет уравнению* и *корень уравнения* или *решение уравнения*.

Сравним термины *решение уравнения* и *корень уравнения*. Первый имеет то преимущество, что применим ко всем уравнениям независимо от числа неизвестных, а также к системам уравнений. Второй применяют только для уравнений с одним неизвестным. Недостаток первого термина в том, что и процесс отыскания неизвестного тоже называется решением, кроме того, затруднительно, какой термин ввести вместо *корень многочлена*. Нуль многочлена будет непонятен, так как нуль многочлена в общем случае отличен от нуля.

§ 13. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В VI КЛАССЕ

Уравнения решают различного вида, например, $x+9=32$,

$$x-4=7;\quad 2x=18;\ \frac{x}{4}=8;\ \frac{3y}{2}=10;\ \frac{7}{x}=\frac{1}{2}.$$

В VI классе ученики не знают теорию равносильности и поэтому, решая уравнения, рассуждают примерно так: допустим, что существует значение x, которое удовлетворяет этому уравнению. Исходя из допущения с помощью операций над числами, находим значение неизвестного, но, чтобы убедиться, что найденное значение неизвестного действительно есть корень уравнения, делаем проверку. В VI классе проверка корня есть органическая часть решения.

Пример. *Решить уравнение* $2x-3=7$.

Решение. $2x=10$ (уменьшаемое = разность + вычитаемое).

$$x=5\left(\text{множитель}=\frac{\text{произведение}}{\text{второй множитель}}\right)$$

Проверка.

$2\cdot 5-3=7$

$7=7$

Ответ. $x=7$.

Можно проверку оформить в следующем виде:

$x=5$	Левая часть	Правая часть
	$2x-3$	7
	$2\cdot 5-3$	

$$7=7.$$

В VI классе решают уравнения на основании:

1) зависимости между компонентами действий;

2) по свойству равенств.

Рассмотрим оба способа.

I. Пример 1. *Решить уравнение* $8x + 3 = 27$.

Решение. $\underbrace{\underset{\text{неизвестн.}}{8x} + \underset{\text{известн.}}{3}}_{\text{слагаемые}} = \underbrace{27}_{\text{сумма}}$

Известно, что одно слагаемое равно разности суммы и другого слагаемого, поэтому

$$8x = 27 - 3 \qquad \underbrace{\underset{\text{известн.}}{8} \quad \underset{\text{неизвестн.}}{x}}_{\text{множители}} = \underset{\text{произведение}}{24}$$

Известно, что один из множителей равен произведению, деленному на другой множитель, поэтому

$$x = \frac{24}{8}; \quad x = 3.$$

Такое решение несвойственно алгебре, и если ученики привыкнут к нему, то в VII классе придется их переучивать.

Кроме того, этот способ имеет еще следующие недостатки:

1) Если неизвестные окажутся в обеих частях уравнения, например $8x = 5x + 9$, то придется *находить* известное слагаемое: $9 = 8x - 5x$, что вызывает затруднение.

Обычно в VI классе избегают таких уравнений, но они могут получиться при составлении уравнений по условию задачи.

2) Изменение алгебраической терминологии на арифметическую, а именно:

В арифметике	В алгебре
$\underbrace{8x + 3}_{\text{слагаемые}} = \underbrace{27}_{\text{сумма}}$	$\underbrace{8x + 3}_{\text{сумма}} = \underbrace{27}_{\text{значение суммы}}$

Также и в случаях $8x - 3 = 5$, в арифметике разность 5, а в алгебре разность $8x - 3$.

Таким образом, ученикам приходится отбросить с трудом усвоенную алгебраическую терминологию и возвратиться к терминологии арифметической.

В лучшем положении будет тот учитель, который различал в V классе невычисленную и вычисленную сумму (разность и т. д.)

II. Пример 2. *Решить уравнение* $8x + 3 = 27$.

Решение.

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 8x + 3 = 27 \\ -3 = -3 \end{array} \\ \hline 8x = 24 \\ x = 3 \end{array} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{8} \end{array} \right.$$

Такой способ по форме близок к решению уравнений по теоремам о равносильности.

Но прежде чем применять его, необходимо познакомить учеников с двумя свойствами равенств. Лучше всего провести параллель между арифметикой и алгеброй. Для наглядности можно изготовить таблицы:

Таблица 24

1. Сложение равенств

В арифметике	В алгебре	
$+\begin{array}{r} 5 = 5 \\ 3 = 3 \\ \hline 8 = 8 \end{array}$	$+\begin{array}{c} a = b \\ c = d \\ \hline a + c = b + d \end{array}$	Равенство можно почленно складывать

2. Умножение равенств

В арифметике	В алгебре	
$\times\begin{array}{r} 5 = 5 \\ 3 = 3 \\ \hline 15 = 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \neq 3 \\ 0 = 0 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$	$\times\begin{array}{c} a = b \\ m = m \\ \hline am = mb \end{array}$	Обе части равенства можно умножить на одно и то же число, неравное нулю.

Можно дать свойства равенств иначе:

1) если $a = b$, то $a + c = b + c$;

2) если $a = b$ и $m \neq 0$, то $am = bm$.

Если учитель дал учащимся символ $\Longrightarrow$(если ..., то...), то эти свойства записывают кратко:

1) $a = b \Longrightarrow a + c = b + c$;

2) $a = b, m \neq 0 \Longrightarrow am = bm$.

Вторая система решения уравнений первой степени расширяет возможности учащихся VI класса при решении задач.

Например, можно после изучения сложения многочленов не заботиться при составлении уравнения, чтобы члены с неизвестными оказались в одной части.

Пример 3. *Решить уравнение* $13x - 8 = 7 + 8x$.

Решение. Надо устранить члены -8 и $+8x$.

Это достигается прибавлением противоположных им чисел $+8$ и $-8x$.

$$\begin{array}{r|c}
\begin{array}{r}
13x - 8 \;= 7 + 8x \\
\underline{8 - 8x = 8 - 8x} \\
13x - 8x = 7 + 8; \\
5x = 15; \\
\begin{array}{r|l} 5x = 15 & \frac{1}{5} \\ x = 3 & \end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\text{Проверка.} \\
13 \cdot 3 - 8 = 7 + 8 \cdot 3; \\
\underline{31 = 31} \\
\\
\text{Ответ. } x = 3.
\end{array}
\end{array}$$

Составление уравнений по условию задачи рассматривается систематически в VII классе. В VI классе решение задач с помощью составления уравнений носит пропедевтический характер.

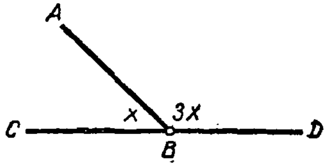


Рис. 55

Шестиклассникам не говорят о методах составления уравнений, а на легких задачах, содержащих простейшие зависимости (сумма, разность, частное), показывают, как можно составить уравнение. Обычно подбирают легкие для анализа задачи, условие которых можно представить наглядно. Особенно хороши в этом отношении геометрические задачи. Учитель предлагает решить какую-нибудь задачу, например:

Задача 1. *Угол в три раза меньше своего смежного угла. Найти этот угол.*

Решение. Пусть (рис. 55) искомый $\angle ABC = x$, тогда по условию смежный $\angle ABD = 3x$.

Известно, что сумма смежных углов равна 180°, значит, $x + 3x = 180°$, откуда $4x = 180°$ и $x = 45°$.

Задача 2. *При выпечке ржаного хлеба получается припек, составляющий* 0,3 *веса взятой муки. Сколько муки нужно взять, чтобы получить* 26 *кг печеного ржаного хлеба?*

К решению этой задачи можно было дать графическую иллюстрацию (рис. 56).

Решив еще 1—2 задачи, намечают в самых общих чертах следующий порядок составления уравнения по условию задачи:

1) Выбирается неизвестное x.

2) Через x и данные выражают остальные величины, о которых говорится в задаче.

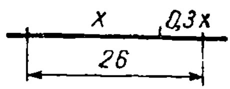


Рис. 56

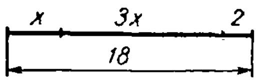


Рис. 57

3) Составляется уравнение.

Для VI класса очень большое значение имеет подбор задач. Хороший подбор начальных задач имеется в учебнике В. Л. Гончарова «Начальная алгебра». Для первых упражнений в составлении уравнений хорошо давать такие задачи, где после выбора неизвестного составление идет само собой. Рассмотрим пример.

Задача 3. *Задуманное число умножили на* 5 *и из полученного произведения вычли* 7; *результат равен* 33. *Найти это число.*

Пусть задумано число x, тогда уравнение будет $5x - 7 = 33$, откуда $5x = 40$ и $x = 8$.

Проверка: $8 \cdot 5 = 40$; $40 - 7 = 33$. Ответ: 8.

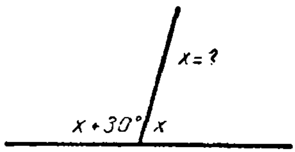


Рис. 58

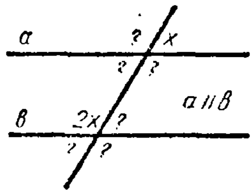


Рис. 59

Задача 4. *Если к задуманному числу прибавить столько же да полстолько, да четверть столько, то получится* 44.

Для VI класса много легких задач можно составить в геометрии по темам: «Отрезки», «Углы», «Параллельные прямые», «Треугольники».

Чтобы быстрее приучить учеников к составлению уравнений, можно предложить задачи на готовом чертеже. Например.

Задача 5 (рис. 57).

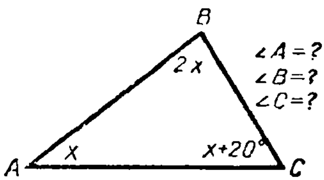


Рис. 60

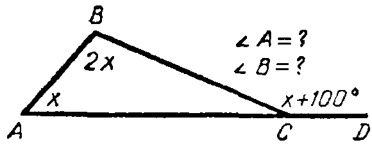


Рис. 61

Решение. $x + 3x + 2 = 18$; $4x = 16$; $x = 4$.

Задача 6 (рис. 58).

Задача 7 (рис. 59).

Задача 8 (рис. 60).

Задача 9 (рис. 61).

Для сравнения некоторые задачи из арифметики решают арифметически и параллельно с ним алгебраически.

З а д а ч а 10. *У двух мальчиков вместе 57 орехов, причем у второго вдвое больше, чем у первого. Сколько орехов имел каждый из них?*

Алгебраический способ	Арифметический способ
У первого x орехов, у второго $2x$ орехов. По условию $x+2x=57$, отсюда $3x=57$; $x=19$. **Ответ.** 19 орехов и 38 орехов.	Примем число орехов у первого мальчика за 1, тогда число орехов второго будет 2. 1) Сколько всего частей? $1+2=3$. 2) Сколько орехов было у первого мальчика? $57:3=19$ (орехов). 3) Сколько орехов было у второго мальчика? $19\cdot 2=38$ (орехов).

Очевидно, что алгебраический способ легче. Это следствие того, что в арифметике нет определенного алгоритма решения задач, а в алгебре он есть. Иначе говорят, что алгебра лучше моделирует задачу, чем арифметика.

Можно предложить на некоторых уроках занимательную форму решения задач на составление уравнений. Вызывают одного ученика к доске, а второму предлагают задумать число, умножить его на 2 и к результату прибавить 15, после чего сказать ученику у доски, что сделали с задуманным числом, и полученный результат, например 37, и предложить найти задуманное число. Решение приведет к уравнению $2x+15=37$, откуда $x=11$. Такой прием заинтересовывает учеников.

Полезно решить несколько задач на составление уравнений, корень которых отрицательный, но имеет смысл.

З а д а ч а 11. *Отцу 32 года, сыну 12 лет. Через сколько лет отец будет втрое старше сына?*

Ответ *через — 2 года* легко объясняется: отец втрое старше сына не будет, а был 2 года назад.

ГЛАВА IV. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОПЕДЕВТИКА

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В программе восьмилетней школы сказано, что в отношении идеи функциональной зависимости необходимо обеспечить усвоение координатного принципа, свойств и графиков простейших функций.

Понятие функции учащимися воспринимается с трудом; очевидно, сказываются привычка как в арифметике, так и в начале алгебры рассматривать лишь постоянные величины (в условии данной задачи).

Функциональная пропедевтика помогает облегчить переход к изучению переменных величин. В пропедевтической части следует, не давая определения переменной величины и функциональной зависимости, давать ученикам упражнения, которые: 1) формируют понятие переменной величины (допустимо более раннее введение термина п е р е м е н н а я); 2) накапливают запас функциональных зависимостей; 3) подготавливают к понятию абсциссы и ординаты.

§ 2. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОПЕДЕВТИКА НА УРОКАХ АРИФМЕТИКИ В V КЛАССЕ

В V классе можно указать ряд упражнений, в которых учащиеся имеют дело в скрытой форме с переменными величинами. К ним относятся упражнения на изменение суммы, разности, произведения и частного, дроби. Например, вопрос, как изменится произведение, если множитель увеличить в 2 раза, связан с изменением произведения в зависимости от изменения множителя. Чтобы приучать к понятию переменной величины, можно вопрос задать иначе: как изменится произведение, если один множитель увеличить в 2 раза? в 3 раза? в 4 раза? в 5 раз? Такие упражнения дадут пятиклассникам некоторое представление о переменных величинах. Полезно при записи решения подобных упражнений использовать таблицы. Они наглядны и в то же время это табличная запись функциональной зависимости.

Пример. *Как изменится сумма двух чисел, если второе слагаемое увеличить на* 1, 2, 3, 7, 12, 20, 30, 50, 92?

После устного ответа учеников им можно показать процесс изменения суммы:

Таблица 25

Первое слагаемое	3	3	3	3	3	3
Изменение второго слагаемого	+1	+2	+3	+7	+12	+20
Изменение суммы	+1	+2	+3	+7	+12	+20

Затем полезно дать такие упражнения, в которых изменяются оба слагаемых.

Аналогичные упражнения дают и на изменение разности, произведения, частного (дроби). Термины учащимся не сообщают, но обращают их внимание на то, что в задаче величины принимают различные значения.

В V классе при решении текстовых задач ученики используют различные функциональные зависимости.

Наиболее часто встречаются зависимости: 1) путь, скорость и время; 2) стоимость, цена и вес; 3) стороны и периметр квадрата, прямоугольника; 4) стороны и площадь прямоугольника; 5) работа, оплата и время работы и т. д.

Знание учениками этих зависимостей — залог успешного решения задач на составление уравнений и последующего изучения функциональной зависимости в алгебре.

Задачи по арифметике можно задать так, что некоторые величины предстанут как переменные.

Задача 1. *Велосипедист проезжает за час* 12 *км. Сколько проедет он за* 1 *час*, $1\frac{1}{2}$ *часа*, 2 *часа*, $2\frac{1}{2}$ *часа*, 3 *часа*?

При решении учащиеся устанавливают зависимость между величинами: путь равен скорости, умноженной на время движения.

Таблица 26

Скорость (*км/ч*)	12	12	12	12	12
Время (*ч*)	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
Путь (*км*)	12	18	24	30	36

В отношении функциональной пропедевтики здесь существенно следующее: 1) установлена зависимость между величинами; 2) сделана табличная запись зависимости; 3) в таблице время и путь выступают как переменные величины, а скорость — постоянная.

Выполнение таких упражнений и повторение время от времени различных функциональных зависимостей постепенно приучают учащихся к тому, что есть величины, которые могут менять свое значение, причем в зависимости от изменения одной величины (например, времени) другая величина (путь) принимает определенное значение.

Кроме того, учеников надо готовить к графикам.

Уже в V классе можно предложить изображать нуль, целые и дробные числа на числовом луче.

Если это будет введено, то можно для некоторых задач дать арифметическое решение с помощью очень простых номограмм (этот термин ученикам не сообщают).

З а д а ч а 2. *Цена кукурузной крупы* 20 *коп. за кг. Сколько стоит* 1 *кг*, $1\frac{1}{2}$ *кг*, 2 *кг*, $2\frac{1}{2}$ *кг*, 3 *кг*, 4 *кг*, 5 *кг*, 6 *кг*, 7 *кг*, 8 *кг*, 9 *кг*, 10 *кг*?

Составить таблицу и показать зависимость на графике.

Решение будет в виде таблицы.

Т а б л и ц а 27

Цена (к/*кг*)	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
Вес (*кг*)	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	4	5	6	7	8	9	10
Стоимость (к)	20	30	40	50	60	80	100	120	140	160	180	200

Отложим на числовом луче полученные значения веса сверху и стоимости снизу (рис. 62).

Затем ученикам показывают, как, пользуясь полученным графиком, можно сразу находить по данному весу стоимость и наоборот.

Такие графики-номограммы можно приготовить для различных задач по схеме путь = скорость × время, скорость = $\frac{\text{путь}}{\text{время}}$, стоимость газа = цена за 1 $м^3$ × объем; вес = уд. вес × объем и т. д.

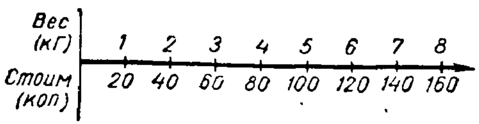


Рис. 62

Можно предложить задачи и на обратную пропорциональность. Например, число $м = \frac{\text{стоим. покупки}}{\text{цена } м}$ и т. д.

Такие упражнения, давая понятие переменной величины и функциональной зависимости, однако, не готовят учеников к графикам, выполненным на координатной плоскости. Для такой подготовки полезно вычерчивать столбчатые диаграммы. Учащиеся должны их выполнять на миллиметровке или на бумаге в клетку.

Тематика для таких диаграмм в V классе может быть различной: сопоставление данных семилетнего плана, сравнение урожайности, высоты гор, длины рек, численность населения, тоннаж торговых судов, потолок различных самолетов и т. д.

Для первых упражнений лучше брать наиболее простые условия.

П р и м е р 1. *В семье, состоящей из четырех человек, рост отца* 170 *см, матери* 162 *см, сына* 120 *см и дочери* 140 *см. Изобразить их рост на диаграмме.*

Выбираем масштаб: в 1 клетке 20 *см* (рис. 63). Тогда росту отца соответствует 170 : 20 = 8,5 (кл.), матери 162 : 20 = 8,1 (кл.); сыну 120 : 20 = 6 (кл.), дочери 140 : 20 = 7 (кл.).

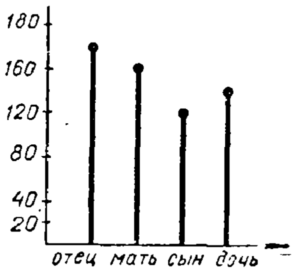


Рис. 63

На диаграмме наглядно изображено, кто выше и на сколько. Диаграммы в виде вертикальных столбиков или отрезков прямой особенно следует рекомендовать, так как от них проще всего перейти к координатной системе, столбик или отрезок — ордината. Ученики привыкнут к ним и потом, когда на чертеже будет отмечен только конец столбика — ординаты, они будут знать, что отрезок подразумевается.

В следующих диаграммах можно сопоставить высоту горных вершин, а затем рост производства основных видов промышленной продукции по семилетнему плану по сравнению с предыдущими годами.

Подобные диаграммы можно делать как в V, так и в VI классе. Материал для них можно взять из географических атласов, сводок о выполнении годового государственного плана и т. д.

§ 3. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОПЕДЕВТИКА В VI КЛАССЕ

В VI классе функциональная пропедевтика расширяется. По арифметике, рассматривая прямую и обратную пропорциональность, дают табличные записи этой функциональной зависимости, формулы $y = kx$, $y = \frac{k}{x}$; на уроках алгебры вводят буквенные обозначения, где под буквой подразумевается любое допустимое значение, то есть буква обозначает переменную величину.

Полезно больше делать упражнений, в которых надо находить значение алгебраического выражения не при одном значении буквы, входящей в выражение, а брать несколько таких значений, чтобы показать зависимость значения выражения от значений входящих в него букв.

Пример 1. *Вес детали 24 кГ, площадь ее основания s см². Ее поставили на горизонтальную опорную плоскость. Выразить давление детали на 1 см² опоры. Составить таблицу значений давления для* $s = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8$.

Решение. Давление на 1 *см²* равно $\frac{24}{s}\left(\frac{кГ}{см^2}\right)$.

Таблица 28

S	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{24}{S}$	24	12	8	6	4,8	4	$3\frac{3}{7}$	3

В заключение можно сделать столбчатую диаграмму.

Пример 2. *Дано выражение* $\frac{a^2+3a}{4+a}$. *Найти его значение при* $a = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$.

Результат записать в виде таблицы и сделать столбчатую диаграмму (рис. 64):

Рис. 64

Таблица 29

a	0	1	2	3	4	5
$\frac{a^2+3a}{a+4}$	0	$\frac{4}{5}$	$1\frac{2}{3}$	$2\frac{4}{7}$	$4\frac{4}{9}$	5,4

Учитель подчеркивает, что значение выражения $\frac{a^2+3a}{4+a}$ зависит от значений a.

Подобные упражнения целесообразно проводить и в VI и в VII классах и даже включать в них небольшой элемент исследования.

Пример 3. *Выполнить действие* $-8a^3 : (-4a)$ *и найти значение частного при* $a=0;\ -5;\ -1;\ -0,1;\ 3,5$. *Что можно сказать о знаке частного?*

Решение. $-8a^3 : (-4a) = a^2$,

Таблица 30

a	-5	-3	-1	0	1	3	5
$-8a^3:(-4a)$	25	9	1	Не имеет смысла	1	9	25

$$-8a^3 : (-4a) = a^2, \quad \text{при } a \neq 0.$$

Вывод. Частное может принимать только положительные значения (не может принимать отрицательных значений и быть нулем).

При решении примеров на тождественные преобразования учитель может ставить аналогичные вопросы.

Полезно составлять формулы. Хороший материал для этого имеется в курсе VI класса. Можно предложить такие упражнения.

1. Острые углы прямоугольного треугольника раны α и β. Найти зависимость между ними ($\alpha + \beta = 90°$).

2. Периметр равнобедренного треугольника равен P, боковая сторона a, основание b. Составить формулу, по которой находят: 1) P по данным a и b; 2) b по данным a и P; 3) a по данным b и P.

3. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен β, а при основании α. Составить формулу, по которой находят: 1) β по данному α; 2) α по данному β.

4. Пусть в треугольнике сторона равна a, соответствующая ей средняя линия равна α. Составить формулу, по которой находят: 1) d, зная a; 2) a, зная d. Составить таблицу значений d, если $a=1$; 2; 1,8; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 7; 8, и построить график зависимости d от a.

Последний пример предназначен для учеников VII класса.

Можно предложить упражнения, в которых ставится вопрос о значениях независимой переменной, при которых две функции равны, а также упражнения, содержащие вопрос о корнях функции.

Пример 1. *При каких значениях x следующие выражения равны между собой:* 1) $x - 3$ и 5; 2) $2x - 3$ и 8; 3) $\frac{3x-5}{5}$ и 4; 4) $\frac{8x}{3} - 6$ и 10; 5) $\frac{15x-40}{3}$ и -5.

Пример 2. *При каких значениях x следующие выражения равны нулю*: 1) $2x$; 2) $3x - 4$; 3) $\frac{2x-1}{4}$; 4) $\frac{x-8}{6}$; 5) $\frac{3x-4}{10}$?

После того как ученики ознакомятся с построением элементарных графиков, им можно показать их построение для случая, когда берется вся координатная плоскость.

Здесь можно дать интересные упражнения, связанные со сложением рациональных чисел.

Пример 3. *Наблюдение за температурой проводилось раз в день* (в 12 *ч*) *на протяжении* 9 *дней. Изменение температуры показано на графике* (рис. 65).

Записать, на сколько менялась температура ежедневно, сложить полученные числа и сравнить полученную сумму с изменением температуры за 9 дней по чертежу.

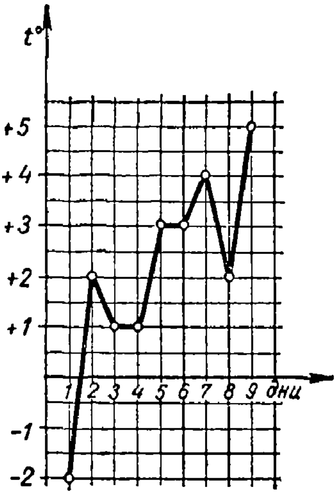


Рис. 65

Решение. По графику за эти дни температура поднялась с $-2°$ до $+5°$, то есть поднялась на 7°, изменение равно $+7°$.

Сумма изменений по дням: $(+4) + (-1) + 0 + (+2) + 0 + (+1) + (-2) + (+3) = 7$ (град.).

Такие упражнения даются на протяжении всего курса алгебры в VI—VIII классах. Цель их, не вводя новых терминов, формировать понятие переменной величины и функциональной зависимости с помощью упражнений.

Определяя допустимые значения букв, лучше говорить не о множестве их, а добиваться от учащихся понимания того, что в некоторых частных случаях выражение не имеет смысла. Например, ученик после действий над алгебраическими дробями получил ответ $\frac{1}{a-1}$; целесообразно поставить вопрос: найти значение полученного результата при $a = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 5; 6$. Получится таблица 31.

Таблица 31

a	-2	-1	0	1	2	3	$5,6$
$\frac{1}{a-1}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	Не имеет смысла	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{23}$

В функциональной пропедевтике учителю надо тактично соблюдать меру и помнить, что в первую очередь надо знакомить учеников с основным материалом, а представление о переменных и функциональной зависимости формировать попутно, не давая терминов.

ГЛАВА V. ДЕЙСТВИЕ НАД ЦЕЛЫМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ

§ 1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ТЕМЕ

Теме «Действия над целыми алгебраическими выражениями» уделяется наибольшее число часов по сравнению с другими темами. В VI классе на эту тему отведено 40 часов и в VII классе еще 28 часов, что составляет свыше 23% всего времени, отведенного на алгебру в восьмилетней школе.

В этой теме углубляется представление о букве в алгебре. Буква выступает не только как число, но и как комбинация других букв. Например, при возведении в квадрат $(a+b+c)^2$ делают замену (типа суперпозиции) $b+c=x$ и получают

$$(a+b+c)^2=(a+x)^2=a^2+2ax+x^2=a^2+2a(b+c)+ +(a+b)^2 \text{ и т. д.}$$

Необходимо добиваться от учеников твердого усвоения темы и выработать навык точного выполнения требуемых по теме алгебраических операций. Это фундамент для дальнейшего изучения алгебры. Чтобы улучшить изучение темы и усвоение материала, следует связать изучаемые алгоритмы операций с законами арифметических действий.

Все новые операции наобходимо закреплять большим числом упражнений. Как правило, на доске тщательно разбирают на новый алгоритм 2—3 примера, затем переходят к активным формам работы (комментированным упражнениям, методу ростовских учителей). Если алгоритм в основном усвоен, то в конце урока дается самостоятельная работа. Заметив ошибку, учитель должен не ограничиться ее констатацией, а потребовать от ученика сказать правило и разъяснить, как делать.

Выявить ошибку проще всего числовой проверкой.

Например, если ученик написал $a+a=a^2$, то можно показать ошибку, предложив ученику взять $a=1$, а потом спросить о правиле, пользуясь которым надо было выполнить операцию. В случае такой ошибки можно привести пример: карандаш + карандаш = = 2 карандаша.

В дальнейшем, когда появится навык в выполнении алгебраических действий, надобность в частом напоминании правил отпадает.

Ученик должен знать, что в алгебре сделать действие — значит поставить только знак действия, а дальше следует упрощение результата по установленным правилам.

Материал темы в значительной степени имеет формальный характер, поэтому, давая новое, полезно указывать, в чем целесообразность того, что делают. О тождественных преобразованиях можно сказать, что с их помощью можно придать более простой вид алгебраическому выражению. Например, возьмем равенство $\frac{a^3+1}{a^2-a+1} = a+1$; его можно проверить, взяв $a = 1$.

Очевидно, что найти значение выражения $\frac{a^3+1}{a^2-a+1}$ по данному значению a гораздо проще, подставив значение a в выражение $a+1$, а не в $\frac{a^3+1}{a^2-a+1}$.

§ 2. ОДНОЧЛЕН И МНОГОЧЛЕН

Есть две системы введения одночлена и многочлена.

1) Дается понятие рационального алгебраического выражения, целого и дробного, затем вводится определение одночлена и многочлена (например, А. Н. Барсуков, Алгебра).

2) Дается только определение одночлена и многочлена (например, В. Л. Гончаров, Начальная алгебра).

Рассмотрим обе системы.

В учебнике алгебры А. Н. Барсукова вводится сперва понятие рационального алгебраического выражения. Это понятие является новой ступенью абстракции и учащиеся усваивают его с некоторым трудом. Затем дается определение целого и дробного алгебраического выражения. Впоследствии термин рациональное алгебраическое выражение не встречается.

При втором способе дается определение одночлена, затем многочлена и рассматриваются действия с ними. Термин рациональное алгебраическое выражение совершенно не употребляется.

По-видимому, второй прием более приемлем в восьмилетней школе, где избегают лишних терминов, которые не используются.

Изучение темы можно начать с одночлена. Дав несколько примеров выражений, содержащих только умножение числа (написанного цифрами) и букв, например $3ab$, $-8a^2$, $7a^2b$, $\frac{3}{4}a$ и т. д., устанавливают, что в каждом случае взято произведение числа и букв.

Затем дается определение, одно из следующих:

Одночленом называется произведение числового множителя и букв, каждая из которых взята в определенной степени (А. Н. Барсуков, Алгебра);

Каждое выражение, представляющее собой произведение числового множителя и одного или нескольких буквенных множителей, называется одночленом (В. Л. Гончаров, Начальная алгебра);

Произведение, состоящее из множителя, выраженного цифрами, и одной или нескольких букв, взятых каждая в определенной степени, называется одночленом (П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Алгебра).

Первое из них короче и, по-видимому, удобнее для учеников.

Упражнения можно предложить такие:

Пример 1. *Какие из следующих алгебраических выражений одночлены:* 1) $3a$; 2) $-3a$; 3) $\frac{3}{4}ab$; 4) $\frac{a}{b}$; 5) $a+b$?

Пример 2. *Перемножить данные числа и буквы и сказать, как называется полученное алгебраическое выражение:* 1) b, 2, a; 2) -2, a, a, b; 3) a, a, a, b, b, b; 4) $\frac{3}{8}a$, b, x; 5) 1, a.

В этом месте можно дать определение коэффициента. Например, в предыдущем примере, получив одночлены $2ab, -2a^2b$, $3a^3b^2$, $\frac{3}{8}abx$, a, можно предложить ученикам: 1) выделить буквенную часть одночленов; 2) указать в одночленах числовой множитель, стоящий перед буквенной частью, после чего дать определение:

Числовой множитель в одночлене называется коэффициентом (В. Л. Гончаров, Начальная алгебра).

Затем обращается внимание на то, что коэффициент может быть целым (2, —2 и 3), как положительным, так и отрицательным, дробным $\left(\frac{3}{8}\right)$. В частности, коэффициент может быть равен 1, но он не пишется.

Если коэффициент — целое число, например $3a$, то он показывает, сколько раз множитель взят слагаемым. Так, $3a = a + a + a$.

Стоит обратить внимание, что запись $\frac{a}{3}$ — то же, что и выражение $\frac{1}{3}a$, так как в арифметике деление на 3 и умножение на $\frac{1}{3}$ дает один и тот же результат.

С введением коэффициента задачи на составление общих решений и формул можно усложнить и ввести такие, в решение которых появится числовой коэффициент.

Расширяется и круг устных упражнений, например:

1) Всегда ли $2a$ больше a? 2) Написать общий вид четного числа, числа, кратного 3, кратного 5. 3) Всегда ли $2a$ четное число? 4) При каких значениях a число $2a$ четное? 5) Каким будет число $2n - 1$,

если n — натуральное число? 6) Можно ли сказать, что $n+1$ — целое число, если n — целое? 7) Можно ли утверждать, что an — целое число, если n — целое число? 8) Можно ли сказать, что $4n$ принимает все четные значения, если n — целое число?

Решение. 1) При $a = 0$ $2a = a$; значит, не всегда.

Обычно учащиеся решают такие упражнения по догадке (собственно говоря, подбором).

3) Лучше составить таблицу, придавая a значения как целые, так и дробные. Из таблицы будет видно, что при a целом $2a$ — число четное.

5) а) Лучше составить таблицу:

Таблица 32

n	1	2	3	4	5
$2n-1$	1	3	5	7	9

Из нее будет видно, что числа вида $2n-1$ — нечетные (положительные).

б) Более сильные ученики смогут решить так: при натуральном n число $2n$ — четное, значит, отняв от него 1, получим число нечетное.

Многочлен определяется как алгебраическое выражение, в котором несколько одночленов соединены знаком $+$ или $-$.

После определения устанавливается, что всякий многочлен — алгебраическая сумма одночленов.

С целью научить учеников видеть одночлены, входящие в многочлен, и понимать, что многочлен — алгебраическая сумма их, необходимо давать упражнения вида:

выписать из следующих многочленов входящие в них одночлены: 1) $3a - 5b + 2c$; 2) $5a - 8$; 3) $a - b + 7$.

Решение. 1) Одночлены $3a$, $-5b$, $2c$, 2) одночлены $5a$, -8.

Понятие расположенного многочлена понадобится в дальнейшем, оно помогает при собирании подобных членов, умножении и делении многочленов. Следует ввести термин *свободный член* для члена, несодержащего буквы (свободный от букв).

§ 3. ПРИВЕДЕНИЕ ПОДОБНЫХ ЧЛЕНОВ

Приведение подобных членов — первая алгебраическая операция, с которой встречаются учащиеся. От того, как будет она усвоена, во многом зависит успех изучения тождественных преобразований, так как опыт показывает, что наибольшее число ошибок учащихся приходится на знаки при собирании подобных членов.

В «Алгебре» А. Н. Барсукова хорошо изложено, как подойти к понятию подобных членов. Но приведение подобных членов дано на основании распределительного закона умножения, что может быть воспринято учениками чисто формально. Для учеников значительно понятнее, если приведение подобных членов начинать с простейших случаев, в которых легко дать объяснение.

Рассмотрим три способа ознакомления с приведением подобных членов:

I. Использование определения коэффициента.

II. Аналогия со сложением именованных чисел.

III. Применение распределительного закона.

Например, надо упростить многочлен $3x + 2x$.

I. Имеем $3x + 2x = \underbrace{(x + x + x) + (x + x)}_{\text{по смыслу целого коэффициента}} = \underbrace{x + x + x + x + x}_{\text{закон прибавления суммы}} =$

$= \underbrace{5x}_{\text{по смыслу целого коэффициента}}$

II. Имеем: 3 книги + 2 книги = 5 книг, аналогично

$$3x + 2x = 5x.$$

Этот способ часто используется, чтобы сделать более наглядным приведение подобных членов. Вместо книг можно взять десятки, дюжины, яблоки, километры, ведра и т. д.

Ученик затруднился сделать упрощение $5x + 2x - 4x$, тогда дается наводящий вопрос 5 *км* да 2 *км* и минус 4 *км*, или 5 яблок да...

III. Нужно добиваться, чтобы ученики понимали, что приведение подобных членов делается при помощи распределительного закона умножения в виде $ac + bc = (a + b)c$. Вернемся к примеру $3x + 2x$.

Можно дать следующие вопросы:

Как записать распределительный закон?

$[(a + b)c = ac + bc]$.

С чем можно сравнить выражение $3x + 2x$ в этом равенстве? [С $(ac + bc)$].

Напишите предыдущее равенство в обратном порядке. $[ac + bc = (a + b)c]$.

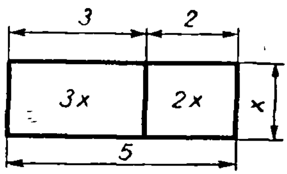


Рис. 66

Подставьте в последнее равенство $a = 3$, $b = 2$, $c = x$. [Получим $3x + 2x = (3 + 2)x$].

Сколько будет окончательно? ($5x$).

Можно дать геометрическую иллюстрацию (рис. 66): сумма площадей двух частей прямоугольника $3x$ и $2x$ равна площади всего прямоугольника, значит, $3x + 2x = 5x$.

Если обоснование приведения подобных членов будет некоторыми из учеников плохо усвоено, то в конце года при повторении можно дать объяснение еще раз.

После того как получили $3x + 2x = 5x$, можно составить таблицу, из которой видно, что это тождество.

Таблица 33

x	-2	-1	0	1	2	3
$3x + 2x$	-10	-5	0	5	10	15
$5x$	-10	-5	0	5	10	15

Затем берут многочлен, в котором подобные члены имеют различные знаки, например:

$$4a - 7a + 5a = \underbrace{(+4a) + (-7a) + (+5a)}_{\text{многочлен — алгебр. сумма одночленов}} =$$

$$= \underbrace{(+4)\,a + (-7)\,a + (+5)\,a}_{\text{опр. одночлена}} = \underbrace{[(+4) + (-7) + (+5)]}_{\text{распред. закон умножения}}\, a = 2a.$$

Когда переходят к приведению подобных членов с разными коэффициентами, то на первых порах можно, пользуясь переместительным законом, собирать их вместе, а потом группировать на основании сочетательного закона, например:

$$2a + 3b - a - 8b + 6a - 7 = \underbrace{2a - a + 6a + 3b - 8b - 7}_{\text{перемест. закон}} =$$

$$= \underbrace{(2a - a + 6a) + (3b - 8b) - 7}_{\text{сочет. закон}} = 7a - 5b - 7.$$

Чтобы не терять много времени, подробно делают только 2—3 примера.

Когда учащиеся при подробной записи приведения подобных членов поняли алгоритм, то на последнем примере показывают, как можно упростить подробную запись:

$$5a - 3b - 8a + 6a + 5b - 6b = 5a - 8a + 6a - 3b + 5b - 6b =$$
$$= (5a - 8a + 6a) + (-3b + 5b - 6b) = 3a - 4b.$$

Очевидно, что для решения достаточно иметь только начальную и конечную запись, то есть

$$5a - 3b - 8a + 6a + 5b - 6b = 3a - 5b.$$

Переходя к такой записи, следует подчеркнуть, что здесь используются те же законы арифметических действий, только запись промежуточных операций опущена.

Особенно много внимания уделять обоснованию приведения подобных членов с помощью законов действий не приходится. Сознательное применение законов придет потом вместе с возрастом. Основное внимание нужно обратить на выработку прочного навыка приведения подобных членов.

Важно, чтобы ученики видели подобные члены и не делали ошибок в сложении. Последнее зависит от того, насколько хорошо были изучены действия над рациональными числами.

Чтобы ученики легко находили подобные члены, следует приучить писать буквы, входящие в члены, в алфавитном порядке. Кроме того, необходимо запись вести аккуратно, четко выписывать знаки между членами многочлена, не ставить точек между буквами (это увеличивает дистанцию между буквами и члены плохо различаются). Удобно приводить подобные члены по степеням букв, приучая к расположенным многочленам.

Например, в многочлене $2—x+13x^2+5x^3+16x-7x^2$ можно собрать сперва члены с x^3, потом с x^2 и т. д. Это уменьшает возможность потерять члены.

Подчеркивая подобные члены, целесообразно соблюдать определенный порядок, например, начинать со старшего члена и выбирать остальные по убывающим степеням главной буквы. В последнем примере запись будет такой:

$$2-\underline{x}+\underline{\underline{13x^2}}+5x^3+\underline{16x}-\underline{\underline{7x^2}}=5x^3+6x^2+15x+2.$$

Учащимся следует сказать, что приведение подобных членов ведет к упрощению многочлена, но это не действие, а внутреннее преобразование в многочлене. Его целесообразность можно сделать более наглядной, если предложить найти значение многочлена по данным значениям букв до приведения и после приведения подобных членов.

§ 4. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ОДНОЧЛЕНОВ И МНОГОЧЛЕНОВ. РАСКРЫТИЕ СКОБОК

Начиная изучать сложение одночленов и многочленов, следует напомнить, что под буквой в алгебре понимаются числа и потому действия над ними выполняются по правилам действий над рациональными числами.

Сложить одночлены — значит соединить данные слагаемые знаком + (плюс), после чего получаем алгебраическую сумму одночленов, то есть многочлен.

Пусть надо сложить одночлены $12a$, $—3b$, $—5a$, b. Учащимся предлагаются вопросы, и после каждого ответа следует действие:

Что значит в алгебре сложить числа a и b? (Чтобы сложить числа a и b, их надо соединить знаком +.)

Как записать сложение данных одночленов?

(Данные одночлены надо соединить знаком $+$, то есть написать $(12a) + (-3b) + (-5a) + b$.)

Какое выражение получили? (Алгебраическую сумму одночленов.)

Что можно еще сделать? (Привести подобные члены.)

Сделанные учениками преобразования записывают цепочкой. Получаем результат $7a - 2b$.

Сложение многочленов обосновывается законом прибавления суммы чисел (сочетательный закон). Этого вполне достаточно. Объяснение на примере сложения чисел типа $35 + 142 = 35 + (2 + 40 + 100)$ вряд ли будет убедительным, так как в такой форме прибавление числа учащимся не встречалось, оно было позиционным. Для аналогии с арифметикой лучше взять пример типа $35 + (160 + 25)$.

Пусть надо сложить одночлен a и многочлены $3a - 2b$ и $8a + b$.

Можно дать наводящие вопросы.

Как записать сложение данных одночлена и многочленов? (Надо обозначить действие: $a + (3a - 2b) + (3a + b)$.

Что значит прибавить разность чисел? сумму чисел?

После ответа появится запись: $a + 3a - 2b + 8a + b$.

Можно ли сделать упрощение многочлена? (Да, надо привести подобные члены, тогда получим $12a - b$.)

После нескольких упражнений на сложение многочленов делается обобщение и выводится правило сложения многочленов. Наряду с формулировкой правила, данного в стабильном учебнике А. Н. Барсукова, вполне приемлема и другая формулировка:

чтобы сложить два многочлена, надо к первому многочлену приписать все члены второго многочлена.

Правило сложения многочленов после выполнения нескольких упражнений можно заменить правилом раскрытия скобок, когда перед скобкой стоит знак $+$.

Запись сложения многочленов применяется двоякая: столбиком и цепочкой. Вообще следует приучать ко второй записи. Столбиком складывают только в том случае, когда есть подобные члены в складываемых многочленах, цепочкой же складывать удобно любые многочлены. Пусть надо сложить многочлены $5a^3 - 16a^2 - 7$ и $-a^3 + 2a^2 - 5a + 9$. Сравним две записи.

$$1)\ +\begin{array}{r} 5a^3 - 16a^2 \qquad\quad - 7 \\ -a^3 + \ 2a^2 - 5a + 9 \\ \hline 4a^3 - 14a^2 - 5a + 2 \end{array}$$

При такой записи ученики легко выписывают члены первого многочлена только тогда, если в нем содержатся все последующие степени. В данном примере они обычно не делают пропуска за членом $-16b^2$ и запись сбивается.

2) Запись цепочкой выглядит компактнее:

$$(5a^3 - 16a^2 - 7) + (-a^3 + 2a^2 - 5a + 9) = 5a^3 - 16a^2 - 7 - \\ - a^3 + 2a^2 - 5a + 9 = 4a^3 - 14a^2 - 5a + 2.$$

Полезно показать проверку с помощью подстановки числовых значений букв. Пусть в последнем примере $a = 0$, тогда получим $(-7) + (+9) = +2$, что верно (левая часть — значение исходного выражения, правая — конечного). Заключают, что сложение сделано верно.

Учитель должен знать, что это заключение сделано на основании частной индукции и потому вероятностно. Действительно, значение $a = 0$ взято произвольно и может быть корнем уравнения $(5a^3 - 16a^2 - 7) + (-a^3 + 2a^2 - 5a + 9) = 4a^3 - 14a^2 - 5a + 2$ и потому при $a = 0$ получили верное числовое равенство. Но кубическое уравнение имеет три корня, поэтому, чтобы удостовериться, что сложение сделано верно, надо взять четыре значения a и проверить полученные числовые равенства. Вероятность, что произвольно взятое значение a есть корень уравнения, ничтожна, поэтому практически можно делать проверку для одного-двух значений букв, входящих в проверяемое равенство.

При записи цепочкой (после того как сложение многочленов усвоено) можно приводить подобные члены, игнорируя скобки, так как перед скобками стоит знак $+$.

Аналогично вводится вычитание одночленов и многочленов, но обосновывается оно вычитанием алгебраической суммы.

Обосновать правило раскрытия скобок можно позднее, после изучения умножения одночлена на многочлен.

Чтобы ученикам легче было понять умножение многочлена на многочлен, имеет смысл предварительно показать им буквенные подстановки и приучить выполнять их. В этом случае впервые буква выступит не как число, а как комбинация букв.

Пример 1. *Даны многочлены* $A = 3x^2 - 5x + 6$ и $B = -5x^2 + 8x - 1$, найти: 1) $A + B$; 2) $A - B$.

Решение. 1) Имеем: $A + B = (3x^2 - 5x + 6) + (-5x^2 + 8x - 1) = 3x^2 - 5x + 6 - 5x^2 + 8x - 1 = -2x^2 + 3x + 5$.

Пример 2. *Найти значение многочлена* $x + 3$ при:

1) $x = 2$; 2) $x = 0$; 3) $x = 2t$; 4) $x = 3t - 8$.

Решение: 1) $x + 3 \Big|_{x=2} = 2 + 3 = 5$

3) $x + 3 \Big|_{x=2t} = 2t + 3$

4) $x + 3 \Big|_{x=3t-8} = (3t - 8) + 3 = 3t - 8 + 3 = 3t - 5$

Когда будет изучено умножение многочлена на одночлен, число упражнений такого типа можно увеличить.

Из других упражнений решают примеры на заключение в скобки.

§ 5. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ОДНОЧЛЕНОВ

В умножении одночленов новым для учеников будет умножение степеней одинаковых букв. С этого и следует начинать умножение. Пусть надо умножить a^2 на a.

Можно дать наводящие вопросы:

Как записать произведение a^2 на a? (Надо обозначить действие умножения: $a^2 \cdot a$.)

Что означает записать a^2? (произведение aa).

Как можно записать a^2a ($a^2 \cdot a = aa \cdot a$).

Как можно записать результат проще? Каким определением можно воспользоваться? (Следует воспользоваться определением степени, тогда $a^2 \cdot a = aa \cdot a = a^3$.)

Какая зависимость между показателями умножаемых степеней и произведения? (Показатель произведения равен сумме показателей умножаемых степеней.)

Почему так получается? Возьмите пример $a^3 \cdot a^5$. (Это получается потому, что при умножении a^3 на a^5 получим $3 + 5$ множителей a, то есть множителей a столько, сколько составит сумма показателей умножаемых степеней.)

При умножении одночленов желательно, чтобы учащиеся поняли, на основании каких законов выполняется действие.

Например, $3a^2b \cdot 5ab^3c = \underbrace{3aab \cdot 5abbbc}_{\text{определение степени}} = \underbrace{3 \cdot 5aaa \cdot bbbb \cdot c}_{\text{перемест. зак. умн.}} =$

$= \underbrace{15a^3b^4c}_{\text{опр. степени}}$.

После того как проделано некоторое число упражнений с подробной записью и устными ссылками на определения и законы действий, можно сформулировать правило умножения одночленов и пользоваться им. В случае ошибки, например $a^2 \cdot a^3 = a^6$, следует показать ошибочность числовой подстановкой, например, при $a = 2$ получим $32 = 64$, что говорит о допущенной ошибке. Затем надо вновь разъяснить порядок умножения на подробной записи $a^2 \cdot a^3 = aa \cdot aaa = a^5$.

Для объяснения деления одночленов можно указать три способа.

I. Использование законов деления рациональных чисел.

II. Запись деления чертой с последующим сокращением членов дроби.

III. *Использование определения деления.*

Предварительно рассматривается деление степеней одного и того же основания.

Пусть $a^4 : a = x$, тогда по определению частного имеем $ax = a^4$, откуда делаем заключение на основании правила умножения степеней одного основания, что $x = a^3$, то есть $a^4 : a = a^3$.

Наводящими вопросами могут быть следующие:

Указать в равенстве $a^4 : a = x$ зависимость между a^4, a и x.

Чему должен быть равен x в равенстве $ax = a^4$?

На основании какого правила получили $x = a^3$?

На основании нескольких примеров вида $a^4 : a = a^3$ делается вывод и формулируется правило.

Этот способ дан в стабильном учебнике А. Н. Барсукова.

Рассмотрим три названных способа объяснения деления одночленов.

I. Пусть надо выполнить действие $15\,a^3b : 3a$.

Можно дать наводящие вопросы:

Что называется одночленом? (Одночленом называется произведение коэффициента, выраженного цифрами, и буквенных множителей, каждого в определенной степени.)

Как разделить число на произведение? (Надо разделить число на первый множитель, а полученный результат на второй множитель.)

Какую последовательность деления надо соблюдать в данном примере? (Надо $15a^3b$ разделить на 3, а результат на a.)

Как разделить произведение $15a^3b$ на 3? (Чтобы разделить произведение на число, достаточно разделить один из множителей. Делим 15 на 3, получим $15a^3b : 3 = 5a^3b$.)

Как разделить полученный результат $5a^3b$ на a? (Делим аналогично a^3 на a. Тогда $5a^3b : a = 5a^2b$.)

Какой же окончательный результат? ($15a^3b : 3a = 5a^2b$.)

После подробного решения нескольких примеров формулируется правило деления одночленов и в дальнейшем действия выполняются по этому правилу.

II. Учащиеся знают, что знак деления можно записать двумя точками или чертой. Запишем выражение: $15a^3b : 3a$ в виде дроби и сократим члены дроби $\frac{15a^3b}{3a} = \frac{3 \cdot 5aaab}{3a} = 5a^2b$, или

$$\frac{15a^3b}{3a} = 5a^2b.$$

Зададим вопрос: Как производится сокращение дробей? (Числитель и знаменатель надо разделить на одно и то же число. Здесь делим на 3 и на a.)

Получим

$$\frac{\overset{5}{\cancel{15}}\,\overset{2}{\cancel{a^3}}\,b}{\underset{1}{\cancel{3}}\,\cancel{a}} = 5a^2b$$

После ряда таких упражнений формулируется правило деления одночленов.

III. Пусть надо разделить $15a^3b$ на $3a$. Это значит, что надо найти такой одночлен, который при умножении на $3a$ дает $15a^3b$. При умножении одночленов коэффициенты перемножаются, а показатели степеней одинаковых букв складываются. Поэтому коэффициент частного будет 5, так как $5 \cdot 3 = 15$; буква a должна входить во второй степени, так как $a \cdot a^2 = a^3$, а буква b в первой степени.

Значит, $15a^3b : 3a = 5a^2b$.

После решения таким приемом нескольких примеров формулируют правило.

Во всех случаях в заключение надо остановиться на частном примере невыполнимого деления и отметить, что результат можно записать дробью, например

$$\frac{4ab^2}{2a^2b^2} = \frac{2}{a}.$$

Наиболее часто ошибки при умножении и делении одночленов ученики делают на умножение степеней с одинаковыми основаниями. Для предупреждения таких ошибок помогут краткие рабочие правила, сосредоточивающие внимание ученика на главном:

1) при умножении показатели складываются;

2) при делении показатели вычитаются.

Учащиеся хорошо понимают, что правила сокращенные, в них речь идет о степенях с одинаковыми основаниями.

§ 6. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

Умножение многочлена на одночлен обосновывается распределительным законом умножения, который ученики уже неоднократно применяли и поэтому понимают.

Например, надо умножить $2x^2 - 3x + 6$ на $5x$.

Вопросами к ученикам поможем им наметить «шаги» преобразований.

Как умножить $2x^2 - 3x + 6$ на $5x$? [Надо обозначить действие: $(2x^2 - 3x + 6) \cdot 5x$].

Какой закон арифметических действий можно здесь применить? (Распределительный закон.) Появится запись $(a + b)c = ac + bc$.

Примените этот закон для умножения и сделайте упрощения.

$$(2x^2 - 3x + 6) \cdot 5x = 2x^2 \cdot 5x - 3x \cdot 5x + 6 \cdot 5x = 10x^3 - 15x^2 + 30x.$$

Сделав несколько упражнений с устными подробными объяснениями, следует сформулировать правило и дальше выполнять умножение по правилу.

К некоторым упражнениям можно после умножения поставить вопрос: как из полученного выражения получить начальное?

Например, выполнили умножение $(8a + 5) \cdot 3 = 24a + 15$, результат получили по распределительному закону $c(a + b) = ac + bc$.

Возьмем многочлен $24a + 15$. Чтобы получить первоначальное выражение, используем тот же закон, но запишем его в виде $ac + bc = c(a + b)$. Тогда

$$24a + 15 = \underbrace{8a \cdot 3 + 5 \cdot 3}_{3 = c} = 3(8a + 5).$$

Такие упражнения подготавливают учеников к разложению на множители.

В нескольких упражнениях вместо «умножить многочлен на одночлен» можно потребовать «раскрыть скобки».

Теперь после умножения многочлена на одночлен легко обосновать правило раскрытия скобок.

Имеем $c(a + b) = ca + cb$ (I) (распределительный закон
$c(a - b) = ca - cb$ (II) умножения)

Пусть в тождестве (I) и (II) $c = +1$, тогда

$$+(a + b) = a + b,$$
$$+(a - b) = a - b,$$

то есть если перед скобкой стоит знак +, то скобки можно опустить.

Пусть в тождестве (I) и (II) $c = -1$, тогда

$$-(a + b) = -a - b,$$
$$-(a - b) = -a + b,$$

то есть если перед скобкой стоит минус, то, опуская скобки, надо сменить знаки на противоположные.

Для объяснения деления многочлена на одночлен используется распределительный закон деления. Его можно дать в форме правила деления суммы на число или в виде формулы. Обе формы можно сопоставить в таблице:

Арифметическая форма	Алгебраическая форма
$86 : 2 = 43$ (стрелкой показана последовательность деления) I. $(80 + 6) : 2 = 80 : 2 + 6 : 2$ или $\frac{80 + 6}{2} = \frac{80}{2} + \frac{6}{2} = 40 + 3 = 43$ II. $(90 - 4) : 2 = 90 : 2 - 4 : 2$ или $\frac{90 - 4}{2} = \frac{90}{2} - \frac{4}{2} = 45 - 2 = 43$	$\left.\begin{array}{l}(a + b) : c = a : c + b : c \\ \frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\end{array}\right\}$ (III) $\left.\begin{array}{l}(a - b) : c = a : c - b : c \\ \frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}\end{array}\right\}$ (IV)

Пусть надо выполнить действие $(8a^3y^2 + 32x^4) : 4x^2$.

Следует спросить учащихся, на основании какого закона можно выполнять действие. Распределительный закон деления имеет две формы записи (III) и (IV), отсюда и запись данного деления может иметь две формы.

1. По тождеству (III)

$(8x^3y^2 + 32x^4) : 4x^2 = 8x^3y^2 : 4x^2 + 32x^4y : 4x^2 = 2xy^2 + 8x^2y.$

2. По тождеству (IV).

$$\frac{8x^3y^2 + 32x^4}{4x^2} = \frac{8x^3y^2}{4x^2} + \frac{32x^4}{4x^2} = 2xy^2 + 8x^2.$$

После двух-трех примеров, когда ученики поймут характер операции, следует дать правило и потребовать писать результат деления сразу:

$$(8x^3y^2 + 32x^4) : 4x^2 = 2xy^2 + 8x^2y.$$

В упражнениях можно видоизменить вопрос, например, представить выражение $\frac{ax^2 + bx}{x}$ в виде многочлена.

§ 7. УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Перед изложением темы «Умножение многочлена на многочлен» следует учащимся дать упражнения на буквенные подстановки.

Пример. *Даны многочлены* $P = 2x^2 - 3x - 7$ и $Q = -5x^2 + 8x + 3$.

Найти многочлены: 1) $2P + Q$; 2) $P + 3Q$; 3) $3P - Q$.

Число подобных упражнений можно увеличить или сократить, в зависимости от того, понятна ли ученикам такая подстановка. Такие упражнения необходимы, так как умножение многочленов обосновывается расширением распределительного закона умножения $(a + b)\,m = am + bm$ (1) на случай, когда $m = c + d$, то есть придется сделать буквенную подстановку.

Пусть нам надо умножить двучлен $a + b$ на двучлен $c + d$. В (1) заменяем m на $c + d$, получим:

$$(a+b)(c+d) = a\,(c+d) + b\,(c+d) = ac + ad + bc + bd \quad (2).$$

Полезно сопоставить умножение в алгебре с умножением в арифметике с помощью таблицы:

Арифметическая форма	Алгебраическая форма
Имеем: $37 \cdot 45 = 1635$, или $37 \cdot 45 = (30 + 7) \cdot 45 =$ $30 \cdot 45 + 7 \cdot 45 = 1350 + 315 = 1665$ $37 \cdot 45 = (30 + 7) \cdot 45 = 30 \cdot 45 +$ $+ 7 \cdot 45 = 30 \cdot (40 + 5) + 7 \cdot (40 + 5) =$ $= 30 \cdot 40 + 30 \cdot 5 + 7 \cdot 40 + 7 \cdot 5 =$ $= 1200 + 150 + 280 + 35 = 1665$	$30 = a,\ 7 = b,\ 45 =$ $(a + b)\,m = am + bm$ (1) Пусть теперь $m = c + d$ $(a + b)\,m = am + bm = a\,(c + d) +$ $+ b\,(c + d) = ac + ad + bc + bd$ (2)

Последовательная запись, сопровождаемая одновременным сравнением операций в арифметике и в алгебре, лучше той, когда сначала разбирают все в арифметической форме, потом в алгебраической, так как в первом случае каждый раз рассматривается только одна определенная операция.

Пусть теперь надо умножить $a + b$ на $c + l + n$, тогда во (2) заменим d на $l + n$ и получим:

$$(a+b)(c+l+n) = ac + a(l+n) + bc + b(l+n) = ac + al + \\ + an + bc + bl + bn \qquad (3)$$

Результаты умножения (2) и (3) —частные случаи умножения, но в них есть некоторая закономерность. Можно наглядно показать, как идет процесс умножения.

$(a+b)(c+d)$: $(a+b)(c+l+n)$:

На что умножается член a? член b? (Член a умножается на c и d, то есть на каждый член второго многочлена.)

После этого можно сформулировать правило.

Для случая положительных чисел a, b, c полученное правило можно проиллюстрировать геометрически (рис. 67). Общая площадь прямоугольника рассматривается как сумма площадей отдельных прямоугольников.

Некоторые методисты предлагают к правилу умножения многочлена на многочлен подвести учеников через умножение многозначных чисел, например, берут запись, данную ранее:
$37 \cdot 45 = (30 + 7) \cdot (40 + 5) = 30 \cdot 40 + 30 \cdot 5 + 40 \cdot 7 + 7 \cdot 5$
и делают обобщение для буквенных выражений.

Несколько упражнений (1 — 2) на умножение многочлена на многочлен можно сделать до правила по тождеству:

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$

Например, надо выполнить действие $(2x + 1) \cdot (3x - 4)$.

Здесь $a = 2x$, $b = 1$, $c = 3x$, $d = -4$, тогда

$$(2x+1)(3x-4) = 2x \cdot 3x + 2x \cdot (-4) + 1 \cdot 3x + 1 \cdot (-4) = \\ = 6x^2 - 8x + 3x - 4 = 6x^2 - 5x - 4.$$

В дальнейшем делают умножение многочленов по правилу, причем члены сразу перемножают, то есть пишут

$$(2x + 1)(3x - 4) = 6x^2 - 8x + 3x - 4 = 6x^2 - 5x - 4.$$

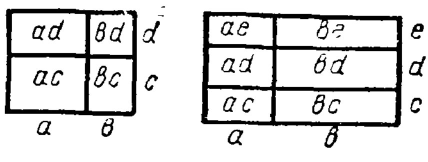


Рис. 67

Результат действия можно проверить подстановкой. Пусть в последнем равенстве $x = 0$, тогда $-4 = -4$, при $x = 1$ $-3 = -3$. Наиболее частая ошибка при умножении многочленов — пропуск произведения двух или нескольких членов, поэтому одна из первичных проверок — подсчет числа членов произведения: до приведения подобных членов оно равно произведению числа членов одного многочлена на число членов другого.

Запись умножения многочленов ведется чаще всего цепочкой.

Проверку делают лишь в некоторых упражнениях — она отнимает время, но учащиеся должны иметь о ней представление.

Для расположенных многочленов, содержащих одну (две) букву, можно применить ускоренное умножение, но уже после того, когда алгоритм умножения многочленов усвоен. Пусть надо умножить $(3x^2 - 5x + 6)(2x - 3)$. Ускоренное умножение основано на том, что подбирают множители, дающие определенную степень. Старший член произведения получится от умножения старших членов многочленов, то есть от $3x^2(-2x)$, и будет третьей степени; член второй степени получится от умножения $3x^2(-3)$ и $(-5x) \times 2x$; член первой степени получится от умножения $(-5x)(-3)$ и $6 \cdot 2x$; свободный член от умножения $6 \cdot (-3)$; окончательно $(3x^2 - 5x + 6)(2x - 3) = 6x^3 - 19x^2 + 27x - 18$.

Можно дать наглядную запись порядка умножения:

x^1	$3 \cdot 2$	$(3x^2 - 5x + 6)(2x - 3)$
x^2	$3(-3) - 5 \cdot 2$	$(3x^2 - 5x + 6)(2x - 3)$
x^3	$-5 \cdot (-3) + 6 \cdot 2$	$(3x^2 - 5x + 6)(2x - 3)$
без x	$6 \cdot (-3)$	$(3x^2 - 5x + 6)(2x - 3)$

Запись многочленов справа дана, чтобы наглядно показать, от умножения каких членов получается результат слева. Применение такого способа оправдано только при устном выполнении этих вычислений.

Среди примеров на умножение многочленов можно дать такие, которые будут готовить к умножению по формулам: $(a + b)(a - b)$, $(a + b)^2$ и т. д.

После того как пройдены три первых действия одночленами и многочленами, их сле-

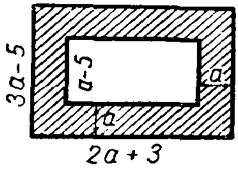


Рис. 68

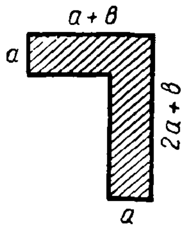


Рис. 69

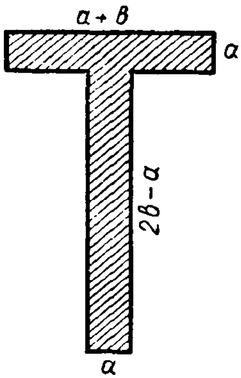


Рис. 70

дует закрепить достаточным числом упражнений на все действия и решением уравнений. Часть упражнений полезно связать с геометрией, предложив найти выражение для площадей фигур по данным размерам (рис. 68, 69, 70).

В частности, можно применить эти правила к выводу формул для приближенных вычислений.

Пусть имеем $(1 + a)(1 + b) = 1 + a + b + ab$, где a и b малы (например, $a = 0{,}01$, $b = 0{,}02$).

Тогда ab тем более мало (в данном примере $ab = 0{,}0002$) и его можно отбросить. Получим приближенную формулу:

$$(1 + a)(1 + b) \approx 1 + a + b.$$

Пример 1. *Вычислить приближенно* $1{,}01 \cdot 1{,}02$.

Здесь $a = 0{,}01$, $b = 0{,}02$, тогда

$$1{,}01 \cdot 1{,}02 = (1 + 0{,}01)(1 + 0{,}02) \approx 1 + 0{,}01 + 0{,}02 = \mathbf{1{,}03}.$$

Если перемножить точно $1{,}01 \cdot 1{,}02 = 1{,}0302$.

Абсолютная погрешность равна 0,0002.

Относительная погрешность равна $\frac{0{,}0002 \cdot 100\%}{1{,}0302} \approx 0{,}02\%$.

Если считать, что 1,01 и 1,02 имеют три значащие цифры, то откинутые цифры по правилам приближенных вычислений незначащие. Поэтому применение приближенной формулы избавило нас от ненужной работы.

Пример 2. *Найти относительную погрешность при умножении по формуле* $(1 + a)(1 + b) \approx 1 + a + b$:

1) $1{,}002 \cdot 1{,}05$; 2) $1{,}03 \cdot 1{,}08$; 3) $1{,}1 \cdot 1{,}23$.

§ 8. ФОРМУЛЫ УМНОЖЕНИЯ

До формул умножения обычно выводят правило возведения степени в степень. В частности, следует дать упражнения, в которых находят квадраты одночленов, например квадраты $2a$, $5a^3$, $7b^2$, $\frac{3}{4}ab^2$ и т. д.

При решении примеров на умножение нужно дать квадрат суммы и разности двух чисел, разность квадратов, сумму и разность кубов в качестве упражнений. Учащиеся получат, например, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ и учитель может сказать, что полученный результат потом будет использован.

Приступая к изложению формул умножения, учителю следует сказать, что некоторые частные случаи произведения многочленов часто встречаются при выполнении действий, поэтому полезно запомнить их преобразованный результат.

Из формул сокращенного умножения наиболее простой будет разность квадратов. С нее и начинают тему.

Находят произведение:

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2.$$

После ответа на вопрос, как называется выражение $(a+b)$, $(a-b)$, подчеркивается, что здесь сумма и разность одних и тех же чисел.

Вопрос: Чему равняется произведение $a+b$ на $a-b$? (Разности квадратов a и b.)

Затем учитель говорит, что умножать сумму двух чисел на их разность приходится часто и потому промежуточные действия опустим, а данные и результат запишем в виде формулы и запомним ее

$$\underbrace{(a+b)(a-b)}_{\substack{\text{произведение суммы}\\ \text{двух чисел на их}\\ \text{разность}}}=\underbrace{a^2-b^2}_{\substack{\text{разность}\\ \text{квадратов}\\ \text{этих чисел}}} \qquad (1).$$

Пример. *Выполнить действия* $(x+3)(x-3)$.

Устанавливаем, что умножаем $x+3$ — сумму двух чисел на $x-3$ — их разность. Здесь $a=x$, $b=3$, вставим в формулу x вместо a, 3 вместо b:

$$(x+3)(x-3)=x^2-3^2=x^2-9.$$

Когда формула усвоена, дают ее устную формулировку.

Затем выводят формулу

$$(a+b)^2=\underbrace{(a+b)(a+b)}_{\text{опр. степени}}=\underbrace{a^2+ab+ab+b^2}_{\substack{\text{умножение многочл.}\\ \text{на многочл.}}}=a^2+2ab+b^2$$

Здесь также следует сказать, что в дальнейшем промежуточные операции будем опускать и сразу писать окончательный результат, то есть

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (2).$$

Сделать это можно потому, что $a^2+2ab+b^2$ получено из $(a+b)^2$ путем тождественных преобразований и само равенство (2) есть тождество. Затем ученики сами смогут вывести формулу:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \qquad (3).$$

Можно сказать, что формула (3) получается из формулы (2) заменой b на $-b$; заменим в равенстве (2) b на $-b$, тогда

$$[a+(-b)]^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2, \text{ или } (a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Формулу (3) можно не давать, но тогда надо, чтобы ученики поняли, что в случае $(a-b)^2$ имеем квадрат алгебраической суммы $[a+(-b)]^2$. Например, $(x-5)^2=[x+(-5)]^2=x^2+2\times$ $\times(-5)x+(-5)^2=x^2-10x+25$.

Первые упражнения можно делать подстановкой в формулы (2) и (3) вместо a и b их буквенных значений. Пусть надо выполнить действие $(3x+5)^2$; сравнивая с формулой (2), делаем вывод, что $a=3x$, $b=5$, и подставляем в формулу (2):

$$(3x+5)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 5+5^2=9x^2+30x+25.$$

Таких упражнений выполняют столько, чтобы учащиеся научились видеть, что они делают, как применяют формулу, видели ее структуру. После этого можно дать словесную формулировку этих формул. Учащиеся могут пользоваться формулой или словесной формулировкой, то есть тем, что им удобнее, главное, чтобы они не делали ошибок.

Тренировку на формулы (2) и (3) имеет смысл начать с упражнений, цель которых — научить учеников быстро находить удвоенное произведение двух чисел.

П р и м е р. *Найти удвоенные произведения следующих пар чисел:* a *и* b; $2a$ *и* b; a *и* $3b$; $2a$ *и* $3x$; $2a$ *и* $8a^2$; $5a^2$ *и* ab^2.

Следующие упражнения можно дать на возведение в степень по формулам квадратов суммы и разности.

Можно параллельно провести запись на числах и на буквах:

Для чисел	Для букв
$61^2=(60+1)^2=60^2+2\cdot 60\cdot 1+$ $+1^2=3600+120+1=3721$	$(x+3)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^3=x^2+$ $+6x+9$

Ученики часто путают квадрат разности с разностью квадратов. Следует обратить внимание на следующее различие: когда говорят квадрат разности, то речь идет об одном квадрате — $(a-b)^2$, в разности квадратов речь идет о двух квадратах, a^2-b^2.

Первые формулы надо изучить особенно тщательно, так как остальные будут применяться аналогично.

Можно использовать общеизвестную геометрическую иллюстрацию с площадями (рис. 71, 72, 73) формул (1) и (2), но учащиеся воспринимают ее с большим затруднением, чем саму формулу. Это полезно только для связи с геометрией, но не для усвоения формул умножения.

Учителю, первый раз ведущему шестые классы, следует помнить, что формулы сокращенного умножения усваиваются не сразу, с трудом; причиной служит то, что это собственно первое систематическое применение формул в алгебре.

В качестве упражнений на формулы квадрата суммы и разности двух чисел можно сделать упражнения на выполнение действий (смешанные), решение уравнений. Упражнения, где используются эти формулы для возведения в степень чисел, например 72^2, искусственны, много делать таких упражнений нецелесообразно. Практически так не считают, обычное умножение ведет к цели быстрее, а в дальнейшем для возведения чисел в квадрат и куб будут применяться таблицы.

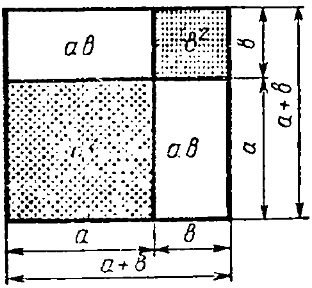


Рис. 71

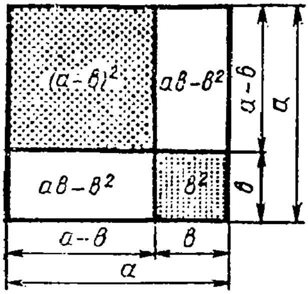


Рис. 72

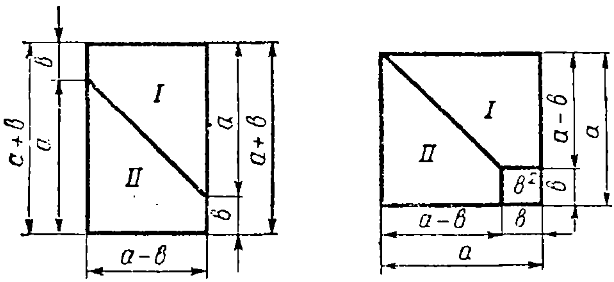


Рис. 73

Аналогично вводятся и остальные формулы:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad (4);$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \qquad (5);$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \qquad (6);$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \qquad (7).$$

Также следует подчеркнуть, что эти равенства — тождества, что формулы (5) и (7) можно получить из формул (4) и (6) заменой b на $-b$.

Формулу (5) можно не давать и рассматривать $(a-b)^3$ как $[a+(-b)]^3$.

Характер упражнений тот же. Отдельно на уроке рассматриваются группы формул (4) и (5), а затем (6) и (7).

Можно формулы (1), (2), (3) и (5) использовать для приближенных вычислений в следующих случаях:

1) Возьмем квадрат суммы $(1+a)^2$. По формуле (1) имеем: $(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2$.

Здесь если a мало (например, $a = 0{,}01$), то a^2 тем более мало (при $a = 0{,}01$ $a^2 = 0{,}0001$), тогда в последнем равенстве a^2 можно отбросить и получим приближенное равенство

$$(1+a)^2 \approx 1 + 2a \qquad (8).$$

Вычислим приближенно $1{,}02^2$: по формуле (8) $a = 0{,}02$ и $1{,}02^2 \approx 1 + 2 \cdot 0{,}02 = 1{,}04$.

Если вычислить точно, то $1{,}02^2 = 1{,}0404$.

Абсолютная погрешность равна $1{,}0404 - 1{,}04 = 0{,}0004$.

Относительная погрешность равна $\frac{0{,}0004 \cdot 100\%}{1{,}0404} \approx 0{,}04\%$.

Кроме того, из формул (2), (4) и (5) получаем при малом a еще три формулы.

Точность вычислений по этим формулам тем больше, чем меньше a. В качестве тренировки можно предложить следующие упражнения.

Пример 3. *Вычислить приближенно* $1{,}08^2$, $0{,}99^2$, $1{,}03^3$, $1{,}08^3$, $0{,}96^3$. *Найти абсолютную и относительную погрешность.*

В заключение упражнений на формулы умножения можно дать упражнения на дополнение до полного квадрата и на выделение полного квадрата.

Из $(a + b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ следует, что $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$, поэтому выражение $a^2 \pm 2ab + b^2$ называется полным квадратом; оно содержит квадраты первого и второго чисел и удвоенное произведение этих чисел.

Рассмотрим две системы выделения полного квадрата.

1) Упражнения подбирают так, что вначале в них легко выделить полный квадрат, а затем постепенно их усложняют.

Пример 1. *Заменить пропущенные места так, чтобы полученное выражение было полным квадратом:* 1) $a^2 + 2ab + \ldots$; 2) $a^2 - 6a + \ldots$; 3) $a^2 - 3a + \ldots$; 4) $x^2 + x + \ldots$; 5) $x^2 + 3{,}5x + \ldots$.

Решение. 2) Представим данное выражение в виде $a^2 - 2a \cdot 3 + \ldots$, тогда первое число a, второе 3, значит, на месте пропуска надо поставить квадрат второго числа, то есть 9.

Пример 2. *Из данных выражений выделить полный квадрат:* 1) $a^2 - 8a$; 2) $a^2 + 3a$; 3) $x^2 - 4x + 5$; 4) $x^2 + 6x + 7$; 5) $x^2 - 5x - 3$.

Решение. 2) $a^2 + 3a = a^2 + 2a \cdot \frac{3}{2} = a^2 + 2a \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(a + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$.

При этом можно поставить следующие вопросы: а) Какие значения принимает выражение $\left(a + \frac{3}{2}\right)^2$? б) Какое оно имеет наименьшее значение?

2) Можно выделение полного квадрата автоматизировать, дав учащимся следующую формулу:

$$(x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2, \text{ отсюда}$$
$$x^2 + 2hx = (x + h)^2 - h^2 \qquad (9).$$

Рассмотрим применение этой формулы.

Пример 1. *Выделить полный квадрат из многочленов:* 1) x^2+3x; 2) $x^2-6x-19$; 3) $\frac{2}{3}x^2-8x+10$.

Решение. 1) Сравним x^2+3x и x^2+2hx, тогда $2h=3$ и $h=\frac{3}{2}$. Значит, по формуле (9):

$$x^2+3x=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}.$$

2) Сравним x^2-6x и x^2+2hx; тогда $2h=-6$ и $h=-3$, следовательно,

$$x^2-6x-19=(x-3)^2-9-19=(x-3)^2-28.$$

3) $\frac{2}{3}x^2-8x+10=\frac{2}{3}(x^2-12x+15)$.

Сравним x^2-12x с x^2+2hx, тогда $2h=-12$ и $h=-6$. Значит, $\frac{2}{3}x^2-8x+10=\frac{2}{3}[(x-6)^2-36+15]=\frac{2}{3}(x-6)^2-14$.

§ 9. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

На внеклассных занятиях можно познакомить учащихся с делением многочленов, с тем чтобы в конечном счете дать схему Горнера.

Рассмотрим пример деления. Деление запишем так, как это принято в английских школах. Схема Горнера — просто сокращенная форма этой записи.

$$\begin{array}{l|l|l}
x-2 & 3x^4-2x^3+4x^2+5x+7 & 3x^3+4x^2+12x+29 \\
 & -\underline{3x^4-6x^3} & \\
 & \qquad\quad 4x^3+4x^2 & \\
 & \qquad -\underline{4x^3-8x^2} & \\
 & \qquad\qquad\quad 12x^2+5x & \\
 & \qquad\qquad -\underline{12x^2-24x} & \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 29x+7 & \\
 & \qquad\qquad\qquad -\underline{29x-58} & \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 65 &
\end{array}$$

Из этой записи выпишем только коэффициенты и свободные члены, оставив только те из них, которые влияют на результаты:

$$\begin{array}{l|l|l}
1-2 & 3-2+4+5+7 & 3+4+12+29 \\
 & \quad\ \underline{-6} & \\
 & \qquad 4+4 & \\
 & \qquad\ \underline{-8} & \\
 & \qquad\quad 12+5 & \\
 & \qquad\qquad \underline{-24} & \\
 & \qquad\qquad\quad 29+7 & \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{-58} & \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 65 &
\end{array}$$

Последнюю запись можно сделать проще

— второй		3	—2	4	5	7	← коэфф. делимого
член	2	1	6	8	24	58	← произв. коэфф. частн.
делителя		3	4	12	29	$\boxed{65}$	на 2

коэффициенты частного — остаток

И окончательно:

коэффициенты делимого

	3	—2	4	5	7
2	3	4	12	29	$\boxed{65}$

коэффициенты частного — остаток

Первый коэффициент частного 3 получается непосредственно от деления коэффициентов старшего члена делителя на старший член делимого; второй 4 получается от сложения произведения первого коэффициента частного на 2 со вторым коэффициентом делимого; третий 12 получается от сложения произведения второго коэффициента частного на 2 с третьим коэффициентом делимого и т. д.

§ 10. ПОДВЕДЕНИЕ ИТОГОВ ПО КУРСУ АЛГЕБРЫ VI КЛАССА

Заканчивая курс алгебры VI класса, уместно провести повторение. Материала для повторения имеется в достаточном числе в стабильном задачнике. В первую очередь повторяются действия с многочленами, затем решаются уравнения и задачи на составление уравнений; при повторении, как и на протяжении всего курса, даются упражнения на вычисление значений алгебраических выражений по данным значениям букв. Чертят графики. Составляют таблицы и делают чертежи для геометрических иллюстраций различных алгебраических формул, законов и действий.

Если плохо усвоено обоснование действий, то следует вернуться и повторить этот вопрос.

Полезно сделать сводку полученных законов:

I. $a+b=b+a.$

II. $a+(b+c)=(a+b)+c.$

II а. $a-(b+c)=(a-b)-c.$

III. $ab=ba.$

IV. $a(bc) = (ab)c$.

V и Va. $(a+b)m = am + bm$; $(a-b)m = am - bm$.

VI и VIa. $\frac{a+b}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$; $\frac{a-b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}$.

В частности, при повторении можно использовать полученные по алгебре знания, чтобы познакомить учащихся с системами счисления, объяснить, что всякое число в десятичной системе счисления — сумма степеней основания 10.

Например, $345 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5$, или $345 = 3d^2 + 4d + 5$, где $d = 10$.

Итак, будем считать $d = 10$, $d^2 = 100$, $d^3 = 1000$ и т. д.

Сложение чисел 243 и 325 выглядит так ($d = 10$):

$$+\begin{array}{l} 243 = 2d^2 + 4d + 3 \\ 325 = 3d^2 + 2d + 5 \\ \hline 568 = 5d^2 + 6d + 8, \end{array} \text{ где } d = 10.$$

Умножение 431 на 2:

$$431 \cdot 2 = (4d^2 + 3d + 1) \cdot 2 = 8d^2 + 6d + 2 = 862.$$

Умножение 21 на 31:

$$21 \cdot 31 = (2d + 1)(3d + 1) = 6d^2 + 2d + 3d + 1 = 6d^2 + 5d + 1 = 651.$$

Более сложным случаем будет, например, умножение:

$$345 \cdot 3 = (3d^2 + 4d + 5)\,3 = 9d^2 + 12d + 15 = 9d^2 + (10 + 2)\,d + (10 + 5) = 9d^2 + (d + 2)\,d + (d + 5) = 9d^2 + d^2 + 2d + d + 5 = 10d^2 + 3d + 5 = d^3 + 3d + 5 = 1035.$$

Можно использовать тождественные преобразования для решения легких задач на доказательство.

Пример 1. *Доказать, что если к одному слагаемому суммы прибавить, а из другого вычесть одно и то же число, то сумма не изменится.*

Решение. Пусть одно слагаемое a, другое b, сумма их s, тогда

$$S = a + b \qquad (1).$$

К a прибавим c, из b вычтем c, новые слагаемые будут $a + c$ и $b - c$, тогда

$$S_1 = (a + c) + (b - c) = a + c + b - c = a + b \qquad (2).$$

Сравнивая равенства (2) и (1), делаем заключение, что сумма не изменилась, $S_1 = S$.

П р и м е р 2. *Доказать, что сумма трех последовательных натуральных чисел делится на* 3.

Р е ш е н и е. а) Возьмем три последовательных натуральных числа n, $n+1$, $n+2$; пусть их сумма s, тогда $s = n + (n+1) + (n+2) = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3$. Каждое слагаемое делится на 3, следовательно, и сумма делится на 3.

б) Легче будет доказать, если взять последовательные натуральные числа $n - 1$, n, $n + 1$, тогда $s = (n - 1) + n + (n + 1) = n - 1 + n + n + 1 = 3n$.

П р и м е р 3. *Доказать, что сумма двух нечетных чисел — число четное.*

Р е ш е н и е. Возьмем нечетные числа $2n + 1$ и $2m + 1$, их сумма $s = (2n + 1) + (2m + 1) = 2n + 2m + 2$; каждое слагаемое делится на 2, значит, и сумма делится на 2.

Число таких упражнений можно увеличить.

В частности, полезно дать упражнения на доказательство тождеств путем приведения более сложной части при помощи тождественных преобразований к виду другой части. В более сложных случаях обе части приводят к одному и тому же виду.

П р и м е р. *Доказать тождество* $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - b)^2 + (a + bc)^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Левая часть:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + a^2c^2 + b^2d^2.$$

Затем выполним действия в правой части данного тождества:

$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + \\ + b^2c^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2.$$

Обе части при помощи тождественных преобразований привели к одинаковому виду, значит, тождество доказано.

В VI классе можно ввести понятие однородности. Многочлен будет однородным, если все члены его одного измерения (измерение — сумма показателей буквенных множителей). Например, выражение $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ — *однородный многочлен* третьего измерения. Это понятие можно использовать при умножении однородных многочленов для обнаружения ошибки. Пусть умножаем два однородных многочлена, один 1-го измерения, другой 3-го; получим однородный многочлен 4-го измерения.

Пусть учащийся сделал умножение так:

$$(a^3 - 3a^2b)\,a = a^4 - 3a^2b.$$

Первый множитель — однородный многочлен, произведение—неоднородный, значит, сделана ошибка. Чтобы найти ее, проверим измерение членов произведения. Они должны быть 4-го измерения, но второй член произведения имеет 3-е измерение, значит, ошибка сделана во втором члене произведения.

ГЛАВА VI
УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

§ 1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ТЕМЕ

Из 290 часов, отводимых в восьмилетней школе на алгебру, часов 85—90 отводится непосредственно на изучение уравнений. Кроме того, их решают во время, отведенное на повторение, а также и при изучении других тем.

Ученики встречаются в алгебре с уравнениями впервые в VI классе, где их решают либо по зависимости между компонентами действий, либо по свойствам равенств. В отличие от VI класса изучение уравнений в VII классе становится систематическим. Семиклассники знакомятся с теорией решения уравнений, позволяющей решать алгебраические уравнения, приводимые к уравнениям первой степени с одним неизвестным.

В VII классе алгебру начинают с изучения решения и составления уравнений первой степени с одним неизвестным. Затем знакомятся с разложением на множители и действиями с алгебраическими дробями. Это позволяет ученикам применять уравнения к решению задач в алгебре, геометрии и физике.

Проходя эту тему в VII классе, необходимо в то же время систематически повторять тождественные преобразования многочленов и некоторые вопросы из арифметики: действия с десятичными дробями, умножение на 10, 100, 1000 и т. д. (подготовка к использованию таблиц), проценты.

§ 2. ТОЖДЕСТВО И УРАВНЕНИЕ

Вопрос о тождестве и уравнении поднимался в литературе неоднократно и нашел свое отражение в учебниках по алгебре.

До недавнего времени была принята следующая классификация равенств.

1) Тождеством называется равенство, верное при всех значениях, входящих в него букв.

2) Уравнением называется равенство, верное только при некоторых значениях входящих в него букв.

Такое определение тождества оказалось неудачным. Например, равенство $\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$, которое безусловно надо считать тождеством (всякое число равно себе). Но оно верно не при всех значениях x, так как не имеет смысла при $x = 0$. Следовательно, по приведенному определению равенство $\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ будет не тождеством, а уравнением, решение которого $x \neq 0$.

Чтобы равенства вида $\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$, $\frac{3}{x-5} = \frac{3}{x-5}$, $\lg x^2 = 2 \lg x$ и т. д. считать тождествами, дают определение: *тождество — равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него букв.*

Что касается верных числовых равенств, то в одних учебниках они выделены в особый класс равенств, в других отнесены к тождествам (числовым).

Вышеприведенное определение уравнения тоже оказалось неудачным, так как не охватывало всех возможных видов уравнений. Решая уравнение $2(x - 3) = 2x - 6$, получим $0 \cdot x = 0$, то есть равенство, верное не «при некоторых значениях» x, а при любых его значениях.

Решая уравнение $\frac{1}{x-3} = 0$, вообще не найдем ни одного значения x, при котором данное равенство будет верным.

Таким образом, такое определение уравнения не охватывает случаев уравнений: 1) имеющих бесконечное множество решений; 2) не имеющих решения.

Поэтому уравнение стали определять так:

Каждое равенство, в котором одно число, выраженное буквой, считается неизвестным, а значения остальных букв (если они имеются) считаются известными, называется уравнением с одним неизвестным («Алгебра» П. С. Александрова, А. Н. Колмогорова).

Одно время в учебной литературе стали подчеркивать, что тождество — частный случай уравнения, а именно: тождество — уравнение, которому удовлетворяют все допустимые значения неизвестного.

Решая выше уравнение $2(x - 3) = 2x - 6$, пришли к равенству $0 \cdot x = 0$, которому тождественно удовлетворяет любое значение x, то есть равенство $2(x - 3) = 2x - 6$ — тождество.

Такое толкование тождества не ново, оно давалось и раньше (без слова допустимые), например, еще в курсе алгебры Сомова издания 1868 года.

С другой стороны, хотя тождество и есть частный случай уравнения, но оно имеет свойства, которые противопоставляют его уравнению. Рассмотрим их.

I. В процессе решения уравнения приводят к простейшему виду. Например, уравнение $\frac{x-3}{x-2}=\frac{x-5}{x+2}$ приводится предварительно к виду $3x-8=0$, или $3x=8$. После приведения к простейшему виду получается какое-то алгебраическое уравнение n-й степени, в данном примере получили алгебраическое уравнение первой степени.

Всякое тождество приводится к виду $0 \doteq 0$; в этом случае ни о каком алгебраическом уравнении n-й степени не может быть и речи. В ранее рассмотренном примере $2(x-3)=2x-6$ получили $0=0$ и пришлось ввести искусственную запись $0 \cdot x = 0$.

II. Для тождеств верно свойство транзитивности, а для уравнений нет.

Например, если взять тождества $a = b$ и $b = c$, то $a = c$. В таких случаях может измениться только область определения. Если взять уравнения $2x = 1$ и $x^2 = 1$, то заключение, что $2x = x^2$, неверное.

При тождественном преобразовании в промежуточных действиях может измениться только область определения, поэтому пользуются транзитивностью тождеств и записывают последовательно тождественные преобразования цепочкой.

При решении уравнений записи цепочкой избегают. В частности, запись $x + y = xy = 0$ означает, что здесь дана система уравнений:

$$\begin{cases} x+y=0; \\ xy=0. \end{cases}$$

III. Учащиеся привыкли в геометрии, что частный случай имеет все свойства общего, например, они знают, что квадрат имеет все свойства параллелограмма и прямоугольника, так как является их частным случаем.

Если подчеркнуть, что тождество — частный случай уравнения, то возникнет вопрос, почему нельзя переносить свойства уравнений на тождественные преобразования. А известно, как много ошибок делают учащиеся, когда после темы уравнений начинают выполнять действия с алгебраическими дробями. Привыкнув преобразовывать уравнения к целому виду, они «отбрасывают знаменатель» в действиях с дробями, меняют знак в одной части на противоположный и т. д.

Учитывая эти обстоятельства, в школьной практике приходится подчеркивать не сходство тождеств и уравнений, а их различие. Внимание обращается больше на противопоставление этих понятий, чем на их сходство. При этом противопоставление настойчиво проводится и в записи: цепочкой для тождественных преобразований и в виде уравнения, содержащего левую и правую части.

Только на первых уроках, когда дают понятие тождества и уравнения, возникает вопрос о виде равенства. В дальнейшем в задачах ставится вопрос конкретно. Например, для тождеств будем говорить: выполнить действия, упростить, найти значение, доказать; для уравнений — решить уравнение, доказать, что данные числа — корни уравнения, исследовать решение уравнения и т. д.

Современный взгляд на уравнение рассмотрен в диссертации А. Л. Бондарева.

Термин *равенство* имеет не единственный смысл: 1) он означает, что два выражения соединены знаком «=», например записи: $2+1=3$, $7=5$; 2) он выражает отношение двух чисел (величин), что тоже записывают с помощью знака «=». Так, в записи $2+1=3$ имеем и знак равенства и отношение равенства (значения обеих частей равенства равны). В записи $7=5$ знак равенства есть, а отношения равенства нет. Это — ложное суждение. Неверные равенства появляются потому, что часто знак равенства задается до установления отношения равенства.

Если взять равенство $f(x)=\varphi(x)$, то здесь имеет место наличие равенства. Если же стоит вопрос о том, что надо найти значения x, при которых будет иметь место и отношение равенства, то равенство $f(x)=\varphi(x)$ будет уравнением. На этом основано определение уравнения, данное в книге С. И. Новоселова «Специальный курс элементарной алгебры» (изд. «Советская наука», М., 1956, стр. 169): «Уравнением называется равенство $F_1(x, y, \ldots)=F_2(x, y, \ldots)$, выражающее следующее суждение: значение функции $F_1(x, y, \ldots)$ равно значению функции $F_2(x, y, \ldots)$». Здесь речь идет не об одном значении F_1 и одном значении F_2, а о множестве их значений.

В частности, запись корня уравнения, например $x=a$, рассматривается уже не как уравнение, а как конкретное значение корня уравнения.

В польском журнале «Matematik», 1956, № 5, была приведена в статье Ю. Едловского формулировка: «Уравнением с неизвестным x называется функция-суждение вида $f(x)=g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ означают числовые функции переменного x». Близкое по смыслу толкование уравнения дается в «Начальной алгебре» В. Л. Гончарова.

В отличие от уравнения тождество есть условно-универсальное суждение — это равенство, которое рассматривается на заданном множестве и которому удовлетворяют все элементы этого множества.

Подобное трактование термина уравнения было дано в 1936 году в книге известного польского математика и логика А. Тарского «Введение в логику и методологию дедуктивных наук» (перевод 1948 г.).

Он делит все термины и символы на постоянные и переменные[1].

Пример постоянных терминов: *число, нуль, сумма* и многие другие; пример постоянных символов: 1, $\frac{3}{4}$, $+$ и многие другие. Постоянные термины и символы имеют определенное значение, остающееся неизменным в процессе рассуждения.

Пример переменных символов: a, b, ..., x, y, z. В противоположность постоянным они сами по себе не имеют определенного значения.

---

[1] В дальнейшем встретятся термины: переменное суждение и открытое суждение.

Например, на вопрос, можно ли умножить на нуль, ответить можно утвердительно или отрицательно; ответ будет истинным или ложным, но всегда осмысленным. Но на вопрос, содержащий переменный термин, или символ x, например, является ли x целым числом, нельзя ответить ни утвердительно, ни отрицательно.

Из выражения «x есть целое число» получается высказывание только после замены переменного символа x постоянным. Так, при замене x на 1 получим истинное высказывание, а если на $\frac{1}{2}$ то, ложное.

В ы р а ж е н и е, с о д е р ж а щ е е п е р е м е н н ы е и п р е в р а щ а ю щ е е с я в в ы с к а з ы в а н и е п р и з а м е н е э т и х п е р е м е н н ы х п о с т о я н н ы м и, н а з ы в а е т с я ф у н к ц и е й - в ы с к а з ы в а н и е м.

Н а п р и м е р, $x^2 + 6 = 5x$ — функция-высказывание. При $x = 2$ и $x = 3$ эта функция-высказывание обращается в верное, при других значениях x — в ложное.

Понятие уравнения как суждения дается в экспериментальных классах некоторых школ США (предложено и Ю. Едловским) примерно так:

Всякое суждение выражает какую-то идею.

Если суждение имеет «бланк» для заполнения, например, «Меня звать $\square$», то такое суждение не может быть ни верным, ни неверным.

Если заполнить «бланк», то получается закрытое суждение. Закрытое суждение верно или неверно.

Например, если в предыдущее открытое суждение «Мое имя $\square$ » подставить в «бланк» имя Джон, то получим суждение «Мое имя Джон»; это закрытое суждение; оно будет верным или неверным в зависимости от того, кто это говорит.

В алгебре примером открытого суждения будет неравенство $n > 6$, а закрытого — $8 > 6$.

Затем переходят к уравнениям.

В одном пособии предлагается установить дни рождения учащихся класса и рассмотреть суждение «X в сентябре справляет день рождения». Это суждение открытое, оно содержит незаполненный «бланк» — x. Вместо x учитель предлагает подставить имена учащихся класса — получаются различные суждения, это закрытые суждения, одни из них верны, другие неверны.

Переходят к уравнениям, берут, например, равенство

$$x + 3 = 5.$$

Ставится вопрос, какое суждение выражает равенство $x + 3 = 5$? (Открытое.) Можно ли вместо x подставить имя? слово Азия? Приходят к выводу, что в незаполненный «бланк» — x надо поставить число. Подставляют:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 0+3=5 \\ 1+3=5 \end{array}\right\} \text{неверные} \\ 2+3=5 \ \text{— верное} \end{array}\right\} \text{закрытые суждения}$$

Дается определение уравнения. Далее устанавливают, что значит решить уравнение, что такое корень уравнения и т. д.

§ 3. УРАВНЕНИЯ В VII КЛАССЕ

Знакомство учащихся с темой можно начать с числовых равенств. Затем дают примеры, подводящие к понятиям тождества и уравнения.

П р и м е р 1. *Выполнить действие* $(a+3)^2$.

Р е ш е н и е. $(a+3)^2 = a^2 + 6a + 9$.

П р и м е р 2. *Решить уравнение* $3x - 4 = x + 2$.

Р е ш е н и е. $3x - 4 = x + 2$; $3x = x + 6$; $2x = 6$; $x = 3$.

П р о в е р к а: $3 \cdot 3 - 4 = 3 + 2$ — равенство верное.

Затем устанавливается принципиальное различие между равенствами $(a+3)^2 = a^2 + 6a + 9$ и $3x - 4 = x + 2$.

Можно для наглядности составить таблицы 34, 35.

Т а б л и ц а 34

a	-1	0	1	2	
$(a+3)^2$	4	9	16	25	значения частей совпадают при всех значениях a
$a^2 + ba + 9$	4	9	16	25	

Т а б л и ц а 35

x	-1	0	1	2	3	4	5	
$3x - 4$	-7	-4	-1	2	5	8	11	значение частей совпадает при $x = 3$
$x + 2$	1	2	3	4	5	6	7	

Учащихся спрашивают: 1) При каких значениях a верно равенство $(a+3)^2 = a^2 + 6a + 9$?

2) При каких значениях x верно равенство $3x - 4 = x + 2$? Затем делается вывод, что равенства могут быть двух типов: тождества и уравнения.

После примера $(a+3)^2 = a^2 + 6a + 9$ можно будет определить тождество, как равенство, верное при всех значениях входящих в него букв. Но это будет верно только для выражений, не содержащих деления на буквенное выражение. Чтобы уточнить определение, можно дать пример явного тождества $\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$, затем установить, что:

1) при одинаковых значениях x равенство верное;

2) брать можно не все значения x, а только отличные от нуля.

После этого можно уточнить понятие тождества, сказав о допустимых значениях букв и дать точное определение тождества.

В частности, следует отметить особенность тождества: тождество не нарушится, если какую-нибудь букву заменить другой буквой или алгебраическим выражением.

Уравнение определяется, как равенство, содержащее букву, значение которой надо найти.

Упражнений, в которых надо определить вид равенства, делают немного, так как вопрос этот обычно предрешен условием упражнения. В задачнике всегда будет указано: решить уравнение или доказать тождество.

Затем дается понятие простейшего вида уравнения, уравнения первый степени с одним неизвестным и корня уравнения.

Корень уравнения определяют или как значение неизвестного, которое при подстановке в уравнение обращает его в тождество, или как значение неизвестного, которое при подстановке в уравнение обращает его в верное равенство. Последнее время отдается предпочтение второй формулировке.

Если при подстановке значения неизвестного в уравнение получаем верное равенство, то говорят, что это значение удовлетворяет уравнению.

Решить уравнение — значит найти множество корней уравнения.

Решение уравнений уже встречалось, только теперь указывается, что будут введены правила, по которым можно будет решать все уравнения.

Затем проделывают упражнения, в которых рассматривают различные виды уравнений, в зависимости от корней.

Пример 3. *Объяснить, почему уравнение* $x + 3 = x$ *не имеет корня.*

Решение. а) При любых одинаковых значениях x значение левой части будет больше значения правой на 3, поэтому они не будут равны ни при каких значениях x, то есть уравнение не имеет корня.

б) Можно привести уравнение к виду $0 \cdot x = 3$, откуда видно, что при всех значениях x будем получать неверное равенство $0 = 3$, то есть уравнение корня не имеет.

Пример 4. *Каким будет множество корней уравнения:*

1) $2x - 1 = 5$; 2) $(x - 1)(x - 2) = 0$;
3) $x + x = 2x$; 4) $x + 1 = x$.

Ответ. 1) Конечное множество $x = 3$ или $M = \{3\}$; 2) конечное множество $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ или $M = \{1;\ 2\}$; 3) бесконечное множество всех чисел; 4) пустое множество $M = \varnothing$.

§ 4. РАВНОСИЛЬНОСТЬ УРАВНЕНИЙ

Равносильные уравнения определяют, как:

1) уравнения, корни которых одинаковые;

2) два уравнения, множества корней которых совпадают;

3) два уравнения, если любой корень каждого из них является корнем другого или они не имеют корней.

Первым определением не охватывается случай уравнений, не имеющих корней. Поэтому приходится дополнительно говорить, что уравнения, не имеющие корней, тоже равносильны. Второе определение кратко, удобно для запоминания, предусматривает и случай, когда нет корней, — ему соответствует пустое множество; третье точно, но трудно запоминается.

По-видимому, удобнее пользоваться вторым определением, но это потребует приучить учащихся к множественной терминологии.

При доказательстве теорем о равносильности приходится вести общие рассуждения на частном примере. Но вывод будет в этом случае не частным, а общим, так как весь ход рассуждений не зависит от частного вида уравнения, на котором он выводится. Другой трудностью является то, что выбор неравносильных уравнений в VII классе крайне ограничен: уравнение первой степени с одним неизвестным имеет только один корень, следовательно, показать неравносильность уравнений можно только, сравнивая это уравнение с уравнением, не имеющим корней.

Предварительно следует повторить свойства равенств:

1) если $a = b$, то $a + c = b + c$; 2) если $a = b$ и $m \neq 0$, то $am = bm$.

Теорема 1. *Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число или многочлен, то получим уравнение, равносильное данному.*

1) Возьмем уравнение $2x - 1 = 5$ (1). По зависимости между компонентами находим $2x = 6$, $x = 3$.

Прибавим к обеим частям (1) по числу, например по 17, тогда получим уравнение $2x + 16 = 22$ (2), корень которого тоже $x = 3$.

Множество корней уравнений (1) и (2) совпало, следовательно, по определению уравнения равносильны.

2) Прибавим к обеим частям уравнения (1) по многочлену, например по $3x - 7$, тогда получим уравнение $5x - 8 = 3x - 2$ (3).

Чтобы решить это уравнение, надо к обеим частям его прибавить по многочлену — $(3x - 8)$, а эту возможность как раз и надо доказать. Поэтому сравнивать множества корней уравнений приходится иначе.

Корень уравнения (1) $x = 3$ удовлетворяет уравнению (3): $5 \cdot 3 - 8 = 3 \cdot 3 - 2$ — равенство верное, но этого недостаточно для заключения о равносильности уравнений (1) и (3). Отсюда только следует, что при переходе от уравнения (1) к уравнению (3), то есть от прибавления к обеим частям уравнения одного и того же многочлена, корень $x = 3$ не потеряли.

Допустим, что прибавление к обеим частям уравнения (1) одного и того же многочлена привело к появлению в уравнении нового корня (например, $x = 1$). Переходя от уравнения (3) к уравнению (1), путем прибавления к обеим частям уравнения по многочлену — $(3x - 8)$, этот корень потеряем, а это противоречит только что полученному выводу. Значит, прибавление к обеим частям уравнения (1) одного и того же многочлена не приведет к потере или приобретению корней. Следовательно, множества корней уравнений (1) и (3) совпадают, уравнения равносильны.

Далее доказывают следствия из теоремы.

Если ученики приучены в VI классе решать уравнения по свойству равенств, то при доказательстве первой части теоремы при решении уравнения $2x - 1 = 5$ придется прибавить к обеим частям уравнения по 1, а эта возможность как раз и доказывается. Поэтому и здесь придется вести доказательство, как в предыдущем случае.

Перед второй теоремой можно предварительно дать вопросы:

1) Равенство $2 = 3$ неверно. На какое число надо умножить обе его части, чтобы оно стало верным?

2) Равенство $3 = 5$ неверно, обе части его умножили на a и получили равенство $3a = 5a$. При каких значениях a последнее равенство верное, при каких неверное?

Затем формулируется т е о р е м а 2. *Если обе части уравнения умножить на одно и то же число, неравное нулю, то получим новое уравнение, равносильное первому.*

Как и в первом случае, возьмем, например, уравнение $x-1=3$ (1), его корень $x = 4$. Умножим обе части уравнения (1), например, на число 7, тогда получим уравнение

$$(x-1)\cdot 7 = 3\cdot 7 \qquad (2).$$

Решая его, получим $7x - 7 = 21$; $7x = 28$, корень $x = 4$.

Таким образом, уравнения (1) и (2) имеют одинаковый корень $x = 4$, множества их корней одинаковые, следовательно, уравнения равносильны.

Затем умножаем обе части уравнения (1) на какое-нибудь другое число (дробное, отрицательное) и в заключение на 0.

Следует отметить, что при решении уравнения умножение обеих частей на 0 встречается только в скрытом виде. Например, умножим обе части уравнения (1) на x, тогда получим уравнение

$$(x-1)\,x = 3x \qquad (3),$$

которому удовлетворяют два значения x:

1) $x_1 = 0$, так как $(0-1)\cdot 0 = 3\cdot 0$ — равенство верное;

2) $x_2 = 4$, так как $(4-1)\cdot 4 = 3\cdot 4$, или $3\cdot 4 = 3\cdot 4$ — равенство верное.

Таким образом, при умножении обеих частей уравнения (1) на x получили уравнение, имеющее не один, а два корня, множества их корней не совпадают, то есть уравнение (1) и (3) неравносильны.

Отметим, что один из корней уравнения (3) $x_1 = 0$; следовательно, при умножении обеих частей уравнения (1) на x в скрытом виде умножили на 0, что и привело к появлению постороннего корня.

В этом случае при $x = 0$: $(0-1)\cdot 0 = 3\cdot 0$ — равенство верное, но на нуль умножены неравные числа -1 и 3.

В случае $x = 4$ имеем: $(4-1)\cdot 4 = 3\cdot 4$ — равенство верное, в каждой части записано произведение равных множителей.

В VIII классе после введения понятия функции и символа $f(x)$ следует повторить и углубить сведения о равносильности уравнений.

Дается общий вид уравнения $f(x) = g(x)$. Определение корня можно записать символически[1]:

$$x = a \text{ — корень } f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(a) = g(a).$$

Также символически можно записать теоремы о равносильности:

1) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$;

2) $f(x) = g(x),\ h(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$.

Докажем теорему 1.

Пусть $x = a$ — корень уравнения $f(x) = g(x)$ (1), тогда $f(a) = g(a)$ — верное числовое равенство. Прибавим к обеим частям его по числу $h(a)$, тогда и $f(a) + h(a) = g(a) + h(a)$ — верное числовое равенство, значит, $x = a$ — корень уравнения

$$f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \qquad (2)$$

Также доказывается, что $x = b$ — корень уравнения (2) — есть корень уравнения (1) и делается заключение о равносильности уравнений (1) и (2).

При этом следует отметить, что $h(x)$ должно иметь смысл при всех значениях $x = a$ и $x = b$, которые служат корнями уравнения (1) и (2).

Такое доказательство лучше дать на внеклассных занятиях. Можно, не доказывая теорем 1 и 2, разъяснить равносильность уравнений на примерах.

Пример 1. *Показать, что уравнения* $x - 1 = 3$ и $(x - 1) + 7 = 10$ равносильны.

Решение. Решаем первое уравнение $x - 1 = 3$, $x = 4$. Решаем второе уравнение $x - 1 + 7 = 10$; $x + 6 = 10$, $x = 4$. Корни уравнений одинаковы, следовательно, уравнения равносильны. При этом второе уравнение получено из первого прибавлением к обеим частям первого уравнения по 7, отсюда формулируется следствие.

Аналогично можно рассмотреть и вторую теорему.

§ 5. РЕШЕНИЕ В VII КЛАССЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ (ПЕРВЫЙ ЭТАП)

Изучение уравнений первой степени с одним неизвестным разбивается в VII классе на два этапа: 1) до изучения алгебраических дробей решают уравнения, не содержащие неизвестного в знаменателе; 2) после алгебраических дробей решают уравнения, имеющие неизвестное в знаменателе.

---

[1] Символ $\Rightarrow$ означает «если ..., то ...», а символ $\Leftrightarrow$ — соединение двух таких символов, объединяющих две теоремы: прямую ($\Rightarrow$) и обратную ($\Leftarrow$), означает равносильность.

Учитель дает определение: *уравнения вида* $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ *называются уравнениями первой степени.*

После определения уравнения первой степени с одним неизвестным следует проверить понимание определения.

Пример. *Выписать уравнения первой степени*: $x^2 = 4$; $x^2 - 3x = 0$; $2x - 3 = 0$; $x^2 + x - 3 = x^2 + 8$; $x + 3 = x$; $2x = x + x$.

Подчеркивается, что о степени уравнения судят только после приведения его к нормальному виду. Так, уравнение $x^2 + x - 3 = x^2 + 8$ содержит квадрат неизвестного, но приводится к виду $x - 3 = 8$, следовательно, это уравнение первой степени. А уравнение $x + 3 = x$ содержит x в первой степени, но приводится к виду $3 = 0$, следовательно, не может считаться уравнением первой степени.

В VII классе возможны два метода решения: 1) на основании теорем о равносильности; 2) на основании свойств равенств.

I. Первый способ требуется программой и широко распространен.

При решении уравнения на основании теорем о равносильности получают значение неизвестного x. Если в процессе решения равносильность не нарушалась, то найденное значение неизвестного и есть корень данного уравнения. Доказать это можно, или сделав ссылку на теоремы о равносильности, или проверкой. В VII классе предпочитают первое, поэтому при решении первых уравнений в VII классе ученики на первых 2—3 уроках рядом с уравнением записывают теорему, по которой делается заключение о равносильности. Проверка решения имеет другой характер, чем в VI классе. В VI классе из-за отсутствия теорем о равносильности проверка была доказательством того, что найденное значение неизвестного есть корень уравнения. В VII классе проверку делают, чтобы убедиться в отсутствии ошибок при решении. Ученики должны уметь ее делать, но выполняют ее, в основном, в домашних и контрольных работах, когда проверяют свою работу самостоятельно.

Пример 1. *Решить уравнение* $2x - 19 = 7x + 31$.

Решение. Переносим члены с неизвестным в левую часть уравнения, а известные в правую:

$2x - 7x = 31 + 19$ (следствие теоремы 1):

$-5x = 50$ (тождественное преобразование); умножаем обе части уравнения на $-\frac{1}{5}$:

$\frac{-5x}{-5} = \frac{50}{-5}$ (теорема 2);

$x = -10$ (тождественное преобразование).

В процессе решения равносильность не нарушена, следовательно, $x = -10$ — корень данного уравнения.

Ответ. $x = -10$.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{4x}{9} - \frac{5x}{12} = 1$.

Решение. Приведем уравнение к целому виду, для этого умножим обе части на 36 (на число, равное общему знаменателю)

$$\frac{4x}{9} - \frac{5x}{12} = 1 \quad \Big| \; 36$$

$$\frac{4x \cdot 36}{9} - \frac{5x \cdot 36}{12} = 36 \text{ (теорема 2);}$$

$16x - 15x = 36$ (тождественное преобразование);

$\underline{x = 36}$ (тождественное преобразование).

Равносильность не нарушена, следовательно, $x = 36$ — корень данного уравнения.

В этих примерах ученик должен понимать, что каждое из полученных в процессе решения уравнений равносильно предыдущему по указанным в записи теоремам. Это доказывает, что найденное значение x есть корень данного уравнения.

Полезно приучить учащихся писать в конце ответ (как в примере 1) или подчеркивать значение корня (как в примере 2). Требовать это следует. Иначе ученик, найдя корни последнего уравнения, не будет указывать, какие корни он оставил, какие отбросил, а это понадобится при решении уравнений, содержащих в знаменателе неизвестное, и в ряде других случаев.

Впоследствии ссылку на теоремы о равносильности уравнений не записывают, но требуют устно указать использованную теорему.

Вернемся к примеру 1. Решая уравнение $2x - 19 = 7x + 32$, нашли корень уравнения $x = -10$. Проверку правильности решения можно сделать одним из следующих способов.

1) $2 \cdot (-10) - 19 = 7 \cdot (-10) + 31$; $-39 = -39$ — равенство верное, следовательно, $x = -10$ — корень уравнения.

2) Л. ч. $2 \cdot (-10) - 19 = -39$;
п. ч. $7 \cdot (-10) + 31 = -39$.

Значения обеих частей уравнения при $x = -10$ равны, следовательно, $x = -10$ — корень уравнения.

3)

Левая часть	Правая часть
$2x - 19$	$7x + 31$
$2 \cdot (-10) - 19$	$7x \cdot (-10) + 31$
$-20 - 19$	$-70 + 31$

$$-39 = -39$$

Ответ. $x = -10$.

Следует подчеркнуть, что здесь проверена правильность вычислений. Что $x = -10$ есть корень уравнения $2x - 19 = 7x + 31$ устанавливают на основании теорем о равносильности уравнений.

Решив несколько уравнений, следует доказать, что уравнение первой степени с одним неизвестным имеет только один корень.

Например, возьмем уравнение $7x = 42$ (1).

Вариант I. Для решения умножаем обе части данного уравнения на число $\frac{1}{7}$: $\frac{7x}{7} = \frac{42}{7}$ (2) и получаем $x = 6$ (3). При решении сделано умножение на число $\frac{1}{7}$, неравное нулю, поэтому уравнения (1) и (2) равносильны. Затем после упрощения получили $x=6$ (3) — уравнение, равносильное уравнениям (2) и (1). Но если уравнение $x = 6$ имеет единственный корень, то и равносильное ему уравнение (1) имеет тоже единственный корень.

Вариант II. Произведение чисел 7 и x равно 42, поэтому один из сомножителей $x = \frac{42}{7}$, откуда $x = 6$. Это корень данного уравнения и он единственный, так как деление выполняется однозначно.

Решение примера 2 подробное. Так поступают лишь в начале, впоследствии решение записывают короче, как это сделано в примере 3. Ссылки на теоремы о равносильности делают устно.

Пример 3. *Решить уравнение*

$$\frac{5x+2}{12} = \frac{16x-4}{9}.$$

Решение. $\frac{5x+14}{12} = \frac{16x-14}{9} \quad \Big| \, 36;$

$$\frac{(5x+14)\cdot 36}{12} = \frac{(16x-14)\cdot 36}{9};$$

$$(5x+14)\cdot 3 = (16x-14)\cdot 4;$$

$$15x+42 = 64x-56;$$

$$-49x = -98;$$

$$x = 2.$$

После такого подробного решения можно сказать, что есть более удобная запись, а именно

$$\frac{5x+14}{12} = \frac{16x-14}{9} \quad \Big| \, 36$$

$$3(5x+14) = 4(16x-14);$$

$$15x+42 = 64x-56;$$

$$-49x = -98;$$

$$x = 2.$$

II. В «Начальной алгебре» В. Л. Гончарова предлагается решать уравнения, не используя теорем о равносильности. Автор говорит, что можно «... не слишком углубляя принципиальную сторону дела, практически познакомить учащихся с механизмом решения уравнений». Затем, «приступая к решению уравнения, мы допускаем (постулируем), что корень уравнения существует (хотя бы один), и обозначим его такой же буквой, которой обозначено неизвестное, например буквой x. Затем выводим из уравнения, представляющего теперь уже утверждение, хотя и гипотетическое, одно за другим ряд следствий, строя их цепь таким образом, чтобы прийти к равенству вида $x = a$... После этого остается проверить, — и это принципиально необходимо, — удовлетворяет ли число a нашему требованию».

Решение предлагается делать на основании зависимости между компонентами или на основании свойств равенств: 1) если $a = b$, то $a + c = b + c$; 2) если $a = b$ и $m \neq 0$, то $am = bm$.

В этом случае проверка — органическая часть решения.

Способ не получил распространения, хотя и применим при решении многих видов уравнений (показательных, логарифмических и др.).

§ 6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЗНАК АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Существует два приема решения.

Пример. *Решить уравнение* $|2x - 1| = 7$.

Вариант I.

Дано: $|2x - 1| = 7$. Это равенство показывает, что абсолютная величина числа $2x - 1$ равна 7, но число $2x - 1$ может быть:

1) положительным, тогда это число есть $+7$, откуда $2x - 1 = + 7$, $2x = 8$, $x_1 = 4$;

2) отрицательным, тогда это число есть -7, откуда $2x - 1 = -7$, $2x = -6$, $x = -3$.

Вариант II.

Имеем определение: $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$

Раскрывая знак абсолютной величины в уравнении $2x - 1 = 7$, имеем:

1) если $2x - 1 \geqslant 0$, то $2x - 1 = 7$, откуда $x = 4$;

2) если $2x - 1 < 0$, то $-2x + 1 = 7$, откуда $x = -3$.

ГЛАВА VII

РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Разложение многочлена на множители — тема трудная. В ней нельзя дать определенное правило, пригодное во всех случаях разложения на множители, нельзя указать алгоритм. Общие правила, по которым можно судить о разложимости многочлена и найти способы разложения его на множители, для учащихся средней школы недоступны.

В школе можно только для некоторых простейших случаев указать приемы, предусмотренные программой: вынесение за скобку, группировка, применение формул умножения и комбинации этих приемов. Основным методом разложения в школе является метод проб, то есть учащийся применяет один прием; если неудачно, то пробует другой, третий до тех пор, пока не разложит выражение на множители. Полезно указать ученикам, что подобная операция рассматривалась и в арифметике, когда составное число представляли в виде произведения, например $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$. Это требовалось при нахождении НОК нескольких натуральных чисел, сокращении дробей, приведении дробей к общему знаменателю и т.д. Чтобы разложение на множители нашло в алгебре применение, сразу вполне допустимо сочетать упражнения в разложении на множители с сокращением алгебраических дробей. Это будет вполне естественно, если деление одночленов и многочлена на одночлен записывать в виде дроби, например, при делении a на $ab - ac$ писать $\frac{a}{ab - ac}$.

Изложение темы целесообразно начать с арифметического примера, в котором показана целесообразность с помощью распределительного закона представить числовое выражение $37 \cdot 26 + 37 \cdot 7 - 37 \cdot 23$ в виде $37 \cdot (26 + 17 - 23)$.

Полезно провести некоторую параллель с арифметикой. Натуральные числа делятся на простые и составные; последние можно разложить на простые множители. Аналогично и многочлены делятся на разложимые (приводимые) и неразложимые (неприводимые).

Иногда начинают разложение на множители с одночленов. Но цель таких упражнений непонятна, ведь всякий одночлен, например, 4 a^3b — произведение (a^3 — частный случай произведения) и уже разложен на множители.

§ 2. ВЫНЕСЕНИЕ ЗА СКОБКУ

Перед упражнениями на вынесение за скобку целесообразно рассмотреть несколько числовых примеров и вспомнить распределительный закон. Например,

1) $29 \cdot 37 + 29 \cdot 13 = 29 \cdot (37 + 13) = 29 \cdot 50 = 1450;$

2) $17 \cdot 49 - 17 \cdot 29 = 17 \cdot (49 - 29) = 17 \cdot 20 = 340.$

После решения этих примеров нужно уточнить следующие вопросы:

Как называется закон $(a + b)m = ma + mb$ (V) и закон $(a - b)m = ma - mb$ (Va)? (Распределительный.)

Как надо записать эти законы, чтобы решить предыдущий пример? ($ma + mb = m(a + b)$ и $ma - mb = m(a - b)$.)

Какое действие надо выполнить, чтобы из выражения $29 \cdot 37 + 29 \cdot 13$ получить $37 + 13$? Из $ma + mb$ получить $a + b$? (Действие деления.)

Чему равен общий множитель в каждом из этих случаев? ($29; m$)

Главное, чтобы учащиеся поняли, что для вынесения за скобку надо: 1) найти общий множитель всех членов; 2) вынести его за скобку; 3) найти посредством деления данного многочлена на общий множитель многочлен, заключенный в скобки.

Очень хорошо в стабильном задачнике П. А. Ларичева даны предварительные упражнения, в которых требуется найти делители многочлена; только на первых порах лучше ставить вопрос не о делителях данного многочлена, а искать только одночленный делитель.

Первые упражнения в разложении на множители даются такие, которые решаются по формулам

$$ma + mb = m(a + b) \qquad \text{(V)},$$

$$ma - mb = m(a - b) \qquad \text{(Va)}.$$

Примеры. $2a + 2b$; $3a - 3b$; $4a + 4b - 4c$.

Можно первые упражнения связать с умножением многочлена на одночлен, например, $d(a + b - c) = ad + bd - cd$, а обратно, $ad + bd - cd = d(a + b - c)$, но ученикам трудно объяснить, зачем это делать.

Затем упражнения усложняют.

Пример 1. *Разложить на множители* $4xy - 2x^2$.

Вопросы:

Чему равен общий множитель членов $4xy - 2x^2$? ($2x$, так как $4xy - 2x^2 = 2x \cdot 2y - 2x \cdot x$.)

Укажите общий множитель слагаемых в тождествах (V и Va)? (m.)

Чему равно m в данном случае? ($m = 2x$.)

Чему равны a и b в данном случае ($a = 2y$, $b = x$)?

Пользуясь формулой (Va), запишите многочлен в виде произведения. [$4xy - 2x^2 = 2x(2y - x)$.]

Как получить $2y - x$ из $4xy - 2x^2$? (Посредством деления на $2x$.)

После нескольких упражнений, выполненных с помощью тождества (V), можно перейти к решению посредством отыскания общего множителя членов и вынесения его за скобку.

Решение того же примера будет выглядеть так:

$$4xy - 2x^2 = 2x \cdot 2y - 2x \cdot x = 2x(2y - x).$$

В дальнейшем будем писать только начало и конец, а данная запись делается в первых примерах, пока учащиеся не привыкли видеть общий множитель.

Говорить о том, что выносится общий наибольший делитель, нет смысла. В случае если будут вынесены не все делители, следует спросить учеников: «А какой множитель можно вынести еще?»

На первых порах можно устно проводить проверку правильности вынесения за скобку посредством умножения, чтобы обнаружить, не потеряли ли ученики в частном 1. Например, типичная ошибка учеников $a^3 + a^2 + a = a(a^2 + a)$.

Устная проверка эту ошибку обнаружит.

Чтобы предупредить ее, полезно вначале спросить: сколько членов в многочлене? Имеют ли они общий множитель?

Среди особенностей можно указать на то, что общий множитель можно вынести за скобку как со своим знаком, так и с противоположным. Например,

$$-6a^2 + 3abc - 9ac = 3a(-2a + bc - 3c) = -3a(2a - bc + 3c).$$

Можно в этом случае сказать, что обе формы разложения равноценны, безразлично, какую из них взять.

В заключение предлагают упражнения, в которых общий множитель — многочлен. Например,

$$5(a + b) + x(a + b) = (a + b)(5 + x).$$

В этом случае также целесообразно спросить: Сколько здесь слагаемых? Какой у них общий множитель? — и попросить объяснить, как его вынесли. Для наглядности общий множитель можно подчеркнуть.

Такие упражнения послужат хорошей подготовкой к введению способа группировки.

Начиная знакомство с этим способом, полезно дать подготовительные упражнения, в которых надо найти многочлен, являющийся общим множителем.

Пример 1. *Найти общий множитель следующих выражений*:

1) $a(m+n)$, $b(m+n)$; 2) $3(x-y)$, $a(x-y)$;

3) $c(a+b)$, $c^2(a+b)$; 4) $a(x-y)$, $b(y-x)$.

Особенно надо обратить внимание на изменение знаков в скобках. Так, если дано выражение $5(a-b)+x(b-a)$, то можно сказать, что $a-b$ или $b-a$ — общий делитель, и написать сразу $5(a-b)+x(b-a)=(a-b)(5-x)$, так как частное от деления $x(b-a)$ на $(a-b)$ равно $-x$. Но ученики VII класса еще недостаточно владеют алгеброй, и потому целесообразно сделать запись более наглядной:

$$5(a-b)+x(b-a)=5(a-b)-x(a-b)=(a-b)(5-x).$$

При изменении знаков в скобках ученики часто ошибаются, когда общий множитель — многочлен и входит в состав слагаемых в степени больше первой.

Пример 2. *Разложить на множители* $m(a-b)^2+n(b-a)$.

Решение. а) $m(a-b)^2+n(b-a)=m(a-b)^2-n(a-b)=(a-b)[m(a-b)-n]=(a-b)\cdot(ma-mb-n)$.

б) Можно сменить знаки в первой скобке, здесь следует учесть, что $(a-b)^2=(b-a)^2$, в чем учащиеся часто ошибаются.

§ 3. СПОСОБ ГРУППИРОВКИ

Способ группировки применяют к многочленам, у которых нет общего для всех членов множителя.

Сначала полезно рассмотреть примеры, в которых общий множитель двучленный.

Пример 1. $m(x+y)+n(x+y)=(x+y)(m+n)$ (1).

Этот пример не вызывает затруднений, так как является упражнением на повторение.

Пример 2. Разложить на множители $mx+my+nx+ny$(2).

Вопросы.

Все ли члены многочлена (2) имеют общий множитель? (Нет.)

Сравните многочлены (1) и (2). (Это разные формы одного многочлена.)

Следовательно, к какой форме надо привести многочлен (2), чтобы его разложить на множители. (К виду многочлена (1).)

Далее выясняют, что надо вынести общие множители m и n; затем учитель говорит, что предварительно надо члены, имеющие общие множители, собрать в группы и заключить в скобки. Поэтому и способ называется способом группировки. Дается решение с устным объяснением каждого шага: $mx + my + nx + ny = (mx + my) + (nx + ny) = m(x + y) + n(x + y) = (x + y) \times (m + n)$.

Последующие примеры постепенно усложняют.

Можно к способу группировки подойти, рассматривая процесс, обратный умножению многочленов, например:

умножение многочленов

$$\underbrace{(x+y)(m+n)}_{\text{произведение многочленов}} = \underbrace{m(x+y)+n(x+y)}_{\text{разложение на множители}} = \underbrace{\overbrace{mx+my}^{\text{I группа}}+\overbrace{nx+ny}^{\text{II группа}}}_{\text{многочлен}}.$$

Если рассматривать приведенное преобразование слева направо (верхняя строчка), то имеем умножение многочлена на многочлен с помощью распределительного закона. А если рассматривать его в обратном направлении (нижняя строчка), то получим разложение на множители.

При этом видна последовательность всех операций, которые надо произвести: 1) члены четырехчлена объединить в две группы; 2) группы заключить в скобки и вынести общие множители m и n; 3) в полученных слагаемых $m(x + y)$ и $n\ (x + y)$ вынести общий двучленный множитель $x + y$.

В основном способ группировки применяется, когда в многочлене больше трех членов.

Разложение начинают с подбора группы членов, имеющих общий множитель: если окажется, что группы взяты неудачно, то члены перегруппировывают. При группировке может оказаться в скобках разное число членов, например:

$$a^2 - 2ab + b^2 - a + b = (a^2 - 2ab + b^2) - (a - b) \quad \text{и т. д.}$$

§ 4. РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ ПО ФОРМУЛАМ УМНОЖЕНИЯ

При использовании формул умножения берутся формулы, например, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ и записывают их в обратном порядке, здесь $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Учитель объясняет, что в этом тождестве левая часть — многочлен, правая часть — его разложение на множители, затем переходят к упражнениям.

Иногда предлагают до разложения на множители этим способом делать упражнения на деление многочленов по формулам умножения. Вряд ли это является хорошей подготовкой для разложения на множители, так как разложить на множители $16a^2 - 9b^2$ значительно легче, чем выполнить деление $(16a^2 - 9b^2) : (4a + 3b) = 4a - 3b$.

Главная трудность при разложении на множители по формулам — определить вид формулы. Можно руководствоваться внешним признаком — числом членов:

1) разность квадратов, сумма и разность кубов содержат два члена;

2) квадраты суммы и разности содержат три члена;

3) кубы суммы и разности содержат четыре члена.

Но это можно сделать после того, как накоплен некоторый опыт в разложении.

Вернемся к первой формуле

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \qquad (1).$$

Целесообразно начать с подготовительных упражнений.

Пример 1. *Какие из следующих одночленов квадраты:* 1) a^2; 2) a^4; 3) $4a$; 4) $4b^2$; 5) $9b^4$; 6) $3a^2$; 7) $16a^2b^4$?

Пример 2. *Какие из следующих многочленов разность квадратов:*

1) $x^2 - y^2$; 2) $x^2 + y^2$; 3) $a^2 - d^2$; 4) $a^2 - 3$; 5) $a^8 - 3b^2$; 6) $4a^2 - 9c^5$; 7) $a^4b^2 - x^8$?

Несколько упражнений следует сделать по формуле (1). Пусть надо разложить $x^2 - 9$.

Вопросы.

Чем являются выражения x^2 и 9? (Квадратами чисел x и 3.) Сравните многочлены $a^2 - b^2$ и $x^2 - 9$. ($a = x$, $b = 3$.)

Как разложить $x^2 - 9$ на множители? ($x^2 - 9) = (x + 3)(x - 3$.)

После ряда подобных упражнений можно дать правило, что разность квадратов разлагается в произведение суммы на разность оснований квадратов.

На следующем этапе рассматривают разложение по формулам квадрата суммы (разности). Формула вводится так же, как разность квадратов. Главная здесь трудность в том, что при решении учащиеся могут не увидеть наличия формулы. Внешний признак квадрата суммы или разности в том, что многочлен содержит три члена. Отличие от их разности квадратов — наличие удвоенного произведения и плюс перед квадратом второго члена. Чтобы подготовить к этим формулам, можно дать следующие упражнения.

Пример 3. *Найти удвоенное произведение следующих чисел:* a и b, a и $3b$, $2x$ и $5y$, $6x$ и $3x^2y$.

Пример 4. *Какие из следующих многочленов полные квадраты:*

1) $a^2 - 4a + 4$; 2) $a^2 + 12a + 9$; 3) $x^4 - 6x^2y + 9y^2$; 4) $a^2 - 12a + 9$; 5) $a^2 - 10ab^2 + 25b^4$; 6) $x^4 - 18x^2 + 9$?

Затем можно взять формулу (сдвоенную):

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 \qquad (2)$$

и начать разлагать на множители, пользуясь просто формулой. Например, разлагая $x^2 - 10x + 25$, ученик обнаружит, что $a = x$, $b = 5$, затем проверяет, является ли средний член $10x = 2x \cdot 5$ удвоенным произведением, и тогда пишет по формуле: $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$.

Разлагая на множители по формулам, можно в первых упражнениях писать подробно, например:

$$a^4 + 8a^2b^3 + 16b^6 = (a^2)^2 + 2a^2 \cdot 4b^3 + (4b^3)^2 = (a^2 + 4b^3)^2.$$

Труднее делать упражнения на разложение по формулам, когда коэффициенты дробные. Например:

$$\frac{25}{9}b^2 - \frac{5}{3}bn^2 + \frac{1}{4}n^4 = \left(\frac{5}{3}b - \frac{1}{2}n^2\right)^2.$$

Но можно сделать иначе: $\frac{25b^2}{9} - \frac{5}{3}bn^2 + \frac{1}{4}n^4 = \frac{1}{36}(100b^2 - 60bn^2 + 9n^4) = \frac{1}{36}(10b - 3n^2)^2$.

Наиболее частая ошибка — разложение по формулам неразложимых по этой формуле многочленов, например, ошибка типа $a^2 - 2a + 4 = (a - 2)^2$.

Поэтому после разложения на множители часто делают проверку. Так, в последнем примере возводят в квадрат $(a - 2)^2 = a^2 - 4a + 4$ и обнаруживают ошибку.

Аналогично вводятся и остальные формулы. Словесную формулировку полезно дать для суммы и разности кубов. Подготовительными упражнениями будут такие.

Пример 5. *Какие из следующих одночленов кубы:* 1) a^4; 2) a^6; 3) 8; 4) $4a^3$; 5) a^6b^3; 6) $8a^2$; 7) a^3b^{15}?

Пример 6. *Какие из следующих многочленов сумма (разность) кубов:* 1) $a^3 + 1$; 2) $a^3 + 6$; 3) $x^3 - 8$; 4) $a^3 + 8b^3$; 5) $a^6 - 1$; 6) $a^3 + b^5$?

Пример 7. *Написать неполные квадраты суммы и разности следующих пар чисел:*
1) a и b; 2) $2a$ и b; 3) $a^2 - 2b$; 4) $2a - 3b$.

Формула куб суммы (разности) встречается в практике редко и усложнять упражнения с ней нецелесообразно.

В заключение полезно привести сводку формул, по которым разлагают на множители, в виде таблицы:

Таблица 36

Число членов многочлена	Многочлен	Разложение его
2	a^2-b^2	$(a-b)(a+b)$
	a^3-b^3	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$
	a^3+b^3	$(a+b)(a^2-ab+b^2)$
3	$a^2+2ab+b^2$	$(a+b)^2$
	$a^2-2ab+b^2$	$(a-b)^2$
4	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$(a+b)^3$
	$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$	$(a-b)^3$

Во французском учебнике Lebosse C. и Hemery C. формулы сокращенного умножения применяются для ускоренного умножения. Приведем это место учебника.

1. Квадрат числа, оканчивающегося на 1 или 9.

$$(41)^2=(40+1)^2=40^2+2\cdot 40+1^2=1600+80+1=1681.$$

$$(29)^2=(30-1)^2=30^2-2\cdot 30+1^2=900-60+1=841.$$

2. Квадрат числа, оканчивающегося на 5. Пусть d — цифра десятков, тогда данное число $10d+5$. $(10d+5)^2=100d^2+100d+25=100d(d+1)+25$.
Отсюда $(10d+5)^2=d(d+1)$ сотен $+\ 25$ единиц.
Поэтому: $75^2=7\cdot 8$ сотен $+\ 25=5625$; $125^2=12\cdot 13$ сотен $+\ 25=15\,625$.

3. Произведение двух различных чисел.

$$28\cdot 22=(25+3)(25-3)=625-9=616.$$

$$57\cdot 43=(50+7)(50-7)=2500-49=2451.$$

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ ВСЕХ СПОСОБОВ

Наибольшее затруднение вызывает комбинированное применение всех способов. До этого ученикам способ указывался заранее. Теперь учащийся должен выбрать способ решения.

Наиболее трудным является способ группировки. Довольно часто ее находят после нескольких неудачных проб, причем заранее трудно определить, понадобится ли группировка. Поэтому, за исключением «прозрачных» случаев, группировку лучше отложить на конец, а сначала поискать другие приемы решения.

Большинство авторов рекомендует следующий порядок: 1) вынести общий множитель за скобку (если он есть); 2) полученный многочлен попробовать разложить на множители по формулам умножения; руководствоваться можно внешними признаками (число членов, наличие квадратов, кубов и т. д.); 3) если формулы умножения применить нельзя, попытаться применить группировку. Например:

Пример 1. *Разложить на множители* $a^3c - 4a^2c + 4ac$.

Решение. Есть общий множитель ac, вынесем его и рассмотрим полученный многочлен. Решение в первых упражнениях можно оформлять для наглядности так:

$$\underbrace{a^3c - 4a^2c + 4ac}_{\text{общ. мн. } ac} = ac\ \underbrace{(a^2 - 4a + 4)}_{\text{квадр. разн. } a \text{ и } 2} = ac(a-2)^2$$

Пример 2. *Разложить на множители* $(a^2+1)^2 - 4a^2$.

Решение.

$$\underbrace{(a^2+1)^2 - 4a^2}_{\text{разность квадратов}} = [(a^2+1) - 2a][(a^2+1)+2a] =$$

$$= \underbrace{(a^2+1-2a)}_{\substack{\text{квадрат}\\ \text{разности}}}\underbrace{(a^2+1+2a)}_{\text{квадрат суммы}} = (a-1)^2(a+1)^2.$$

Здесь применили сразу формулы умножения, так как общего множителя нет.

Пример 3. Разложить на множители $m^5 + m^3 - m^2 - 1$.

Решение.

$$m^5 + m^3 - m^2 - 1 = m^3(m^2+1) - (m^2+1) = (m^2+1)\ \underbrace{(m^3-1)}_{\substack{\text{разность}\\ \text{кубов}}} =$$

$$= (m^2+1)(m-1)(m^2+m+1).$$

Здесь прибегли сразу к группировке, потому что общего множителя нет, формул умножения нет.

§ 6. ПРИЛОЖЕНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ

В VII классе разложение на множители применяют для решения многих задач, в которых надо доказать свойства чисел, связанных с делимостью. Начнем с более легких.

Задача 1. *Доказать, что при любом натуральном значении* x:

1) $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x$ делится на 13;

2) $5^x + 4 \cdot 5^{x-2}$ *делится на* 29;

3) $7^{x+1} - 2 \cdot 7^x + 7^{x-1}$ *делится на* 36.

Решение.

1) $3^{x+2}+3^{x+1}+3^{x}=3^{x}(3^{2}+3+1)=13\cdot 3^{x}$, то есть делится на 13.

Учитель сам легко может составить такие упражнения. Он берет какое-то выражение и разлагает его на множители, например, $3^{x-1}-4\cdot 3^{x-2}+7\cdot 3^{x-3}=3^{x-3}(3^{2}-4\cdot 3+7)=3^{x-3}\cdot 4$. Далее ставит задачу: доказать, что это выражение делится на 4 или что число $3^{x-1}-4\cdot 3^{x-2}+5\cdot 3^{x-3}$ при любом натуральном значении x— четное.

Приведем пример более сложной задачи.

Задача 2. *Доказать, что если к целому числу прибавить его квадрат, то полученная сумма будет всегда четной.*

Доказательство. Пусть целое число n, тогда квадрат его n^2; докажем что сумма их n^2+n — число четное. Имеем $n^2+n=n(n+1)$, то есть сумма равна произведению двух последовательных целых чисел. Дадим два варианта доказательства.

1) Пусть n — число четное, тогда и все число $n(n+1)$ — четное.

Пусть n — число нечетное, тогда следующее за ним целое число четное, тогда в числе $n(n+1)$ один из множителей четный, а значит, и число $n(n+1)$ — четное.

2) Данное число может быть либо четным, либо нечетным.

Пусть оно — четное число $(2n)$, тогда его квадрат $(2n)^2$, а их сумма $2n+(2n)^2=2n(1+2n)$. Данная сумма разложена в произведение, один множитель которого равен 2, значит, число $2n(1+2n)$ — четное.

Пусть данное число — нечетное число $2n+1$, тогда его квадрат $(2n+1)^2$, а их сумма $2n+1+(2n+1)^2=(2n+1)(1+2n+1)=2(n+1)(2n+1)$, то есть получили число четное.

Следовательно, сумма целого числа со своим квадратом — число четное.

Если ученикам непонятна постановка задачи в общем виде, то можно перед доказательством дать ряд числовых примеров. Когда учащиеся увидят содержание задачи на числах, им говорят, что это частные случаи, и переходят к общему доказательству.

С помощью разложения на множители даются доказательства признаков делимости на 3, 9 и 11. Например, докажем признак делимости на 9 трехзначного числа $100a+10b+c$. Его можно представить в виде $100a+10b+c=99a+a+9b+b+c=(99a+9b)+(a+b+c)=9(11a+b)+(a+b+c)$; слагаемое $9(11a+b)$ делится на 9, значит, вся сумма $100a+10b+c$ разделится на 9 при условии, что и второе слагаемое $a+b+c$ разделится на 9. Но $a+b+c$ — сумма цифр данного трехзначного числа, откуда следует искомое заключение.

Помимо тематики, связанной с делимостью чисел, можно предложить иные задачи.

З а д а ч а 3. *Простое или составное число* 399?

Р е ш е н и е. Имеем: $399 = 400 - 1 = (20 + 1)(20 - 1)$, то есть число составное.

З а д а ч а 4. *Если к трехзначному числу приписать такое же число и полученное шестизначное число разделить на произведение* 7, 11 *и* 13, *то в частном получится первоначальное число.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим числовой пример. Возьмем число 315, шестизначное будет 315 315; первые три цифры смещены на 3 разряда, иначе 315.1000 + 315(1) после деления 315 315 на 7.11.13 получим частное 315.

Пусть трехзначное число $100a + 10b + c$, после приписки получим шестизначное $(100a + 10b + c)$. $1000 + (100a + 10b+c) = (100a + 10b + c)\ 1001$. Значит, после деления на $7.11.13 = 1001$ получим частное $100a + 10b + c$, то есть число первоначальное.

З а д а ч а 5. *Доказать, что при всех значениях* $a \neq 1$ *многочлен* $a^2 - 2a + 1$ *принимает только положительные значения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$, то есть получили квадрат рационального числа.

При $a = 1$ $(a - 1)^2 = 0$, при прочих значениях a $a - 1 \neq 0$, значит, при $a \neq 1$ $a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 > 0$.

§ 7. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОРМУЛ УМНОЖЕНИЯ

К делению многочленов по формулам следует подходить очень осторожно. Чтобы их применять в полном объеме, учащиеся должны очень хорошо разбираться в структуре формул, сразу выяснять вид делимого (квадрат суммы, разность квадратов, кубов и т. д.) по отношению делителя. В момент изучения темы ученики к этому еще не подготовлены.

Следует показать, что из формул умножения можно получить формулы деления. Возьмем, в частности, формулу

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Учащиеся по вопросам ответят, что

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b.$$

Заучивать эту и другие формулы вряд ли имеет смысл. Упражнений на закрепление делают немного и только самые легкие, например, разделить $a^2 - 4$ на $a + 2$.

Выполнять деление $a^2 - 4$ на $a + 2$ будет гораздо проще потом, когда учащиеся пройдут алгебраические дроби. Если записать частное в виде $\frac{a^2 - 4}{a + 2}$ то получим дробь, которую легко сократить. Кстати, в школьной практике деление многочленов и встретится в основном при сокращении дробей. Это служит еще дополнительной причиной, что не следует тратить время на материал, который в дальнейшем будет легко усвоен.

§ 8. ДРУГИЕ СПОСОБЫ РАЗЛОЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

На уроках показывают и более сложные приемы, знание которых расширяет кругозор.

Рассмотрим несколько таких примеров.

I. *Прибавление какого-нибудь члена.*

Пример 1. $a^4 + 5a^2 + 9 = (a^4 + 6a^2 + 9) - a^2 = (a^2 + 3)^2 - a^2 = (a^2 + 3 + a)(a^2 + 3 - a)$.

Учитель подчеркивает, что a^4 и 9 — квадраты чисел a^2 и 3, но $5a^2$ — не удвоенное произведение, не хватает a^2; добавим его и вычтем и т. д.

Пример 2. $a^4 + 4 = (a^4 + 4a^2 + 4) - 4a^2 = (a^2 + 3)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 3 + 2a)(a^2 + 3 - 2a)$.

Учитель подчеркивает, что a^4 и 4 — квадраты чисел a^2 и 2, но нет удвоенного произведения $4a^2$, прибавим и вычтем $4a^2$ и т. д.

II. *Разбивка одного члена на два.*

Пример 1. $a^2b^2 - a^2c^2 - b^2d^2 - 4abcd + c^2d^2 = (a^2b^2 - 2abcd + c^2d^2) - (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) = (ab - cd)^2 - (ac + bd)^2 = (ab - cd + ac - bd)(ab - cd - ac - bd) = [b(a - d) + c(a - d)](ab - ac - bd - cd) = (a - d)(b + c)(ab - ac - bd - cd)$.

Иногда разбивка может быть сложной.

Пример 2. $ac(a + c) - bc(b + c) + ab(a - b) = ac[(b + c) + (a - b)] - bc(b + c) + ab(a - b) = \underline{ac(b + c)} + \underline{\underline{ac(a - b)}} - \underline{bc(b + c)} + \underline{\underline{ab(a - b)}} = c(b + c)(a - b) + a(a - b)(c + b) = (a - b)(b + c)(c + a)$.

Пример 3. $a^4 + a^3 + 4a^2 + 3a + 3 = \underline{a^4 + a^3 + a^2} + \underline{3a^2 + 3a + 3} = a^2(a^2 + a + 1) + 3(a^2 + a + 1) = (a^2 + a + 1)(a^2 + 3)$.

Пример 4. а) $a^3 + a^2 - 2 = a^3 + a^2 - 1 - 1 = (a^3 - 1) + (a^2 - 1) = (a - 1)[(a^2 + a + 1) + (a + 1)] = (a - 1)(a^2 + 2a + 2)$.

б) $a^3 + a^2 - 2 = a^3 + 2a^2 - a^2 - 2 = a^2(a - 1) + 2(a^2 - 1) = (a - 1)[a^2 + 2(a + 1)] = (a - 1)(a^2 + 2a + 2)$.

III. *Разложение квадратного трехчлена.*

Возьмем квадратный трехчлен, например, $x^2 - 4x + 3$; это не полный квадрат, общего множителя нет, значит, остается применить искусственный прием.

а) Применим способ группировки, для этого увеличим число членов до четырех (наименьшее число членов, при котором можно применить группировку). Разобьем член $-4x$ на два, первая возможность $-2x$ и $-2x$, вторая возможность $-x$ и $-3x$; вторая разбивка дает возможность сделать группировку:

$$x^2-4x+3=\underline{x^2-x}-\underline{\underline{3x+3}}=x(x-1)-3(x-1)=(x-1)(x-3)$$

Следует обратить внимание на то, что разбивать средний член надо так, чтобы группировка удалась, а для этого в первую очередь число отрицательных (положительных) членов должно быть четное. В частности, в данном случае бесполезно было разбивать $-4x$ на $5x-x$; группировка, очевидно, не дает результата, так как в одной скобке будет сумма, в другой разность.

б) Применим способ выделения полного квадрата.

Имеем $\underline{x^2+2hx}=(x+h)^2-h^2$ (1)

$\underline{x^2-4x}+3=(x-2)^2-1^2=(x-2+1)$ | $2h=-4$; $h=-2$.

$(x-2-1)=(x-1)(x-3)$.

Кроме разбора искусственных приемов разложения на множители, можно решить более сложные задачи на тождественные преобразования и доказательство.

Задача 1. *Доказать, что при всяком нечетном x многочлен x^3+3x^2-x-3 делится на 48.*

Доказательство.

$$x^3+3x^2-x-3=x^2(x+3)-(x+3)=(x+3)(x^2-1)=$$
$$=(x-1)(x+1)(x+3).$$

При $x=2n+1$ $x^3+3x^2-x-3\,\Big|_{x=2n+1}=2n(2n+2)(2n+4)=$

$$=8n(n+1)(n+2).$$

Во-первых, этот многочлен делится на 8, во-вторых, на $n(n+1)\times\times(n+2)$, но n — число целое, тогда n, $n+1$, $n+2$ — три последовательных целых числа; одно из последовательных целых двух делится на 2, одно из трех последовательных целых делится на 3; значит, окончательно многочлен при $x=2n+1$ делится на $8\cdot2\cdot3=48$.

Задача 2. *Доказать тождество $a^3+b^3+c^3=3abc$, если $a+b+c=0$.*

Доказательство.

а) $a^3+b^3+c^3=\underbrace{(a+b)^3+c^3}_{\text{сумма кубов}}-3ab(a+b)=\underbrace{(a+b+c)}[(a+b)^2-$

$-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b)=-3ab(a+b)=-3ab(-c)=3abc.$

б) $a+b+c=0$, тогда $(a+b)^3=(-c)^3$, или a^3+3a^2b+ $+3ab^2+b^3=-c^3$, отсюда $a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)=$ $=-3ab(-c)=3abc$.

Задача 3. *Доказать, что* $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=$ $=3(x-y)(y-z)(z-x)$.

Доказательство.

Сравним с предыдущим тождеством, здесь $a=x-y$, $b=y-z$, $c=z-x$, причем $(x-y)+(y-z)(z-x)=0$, то есть $a+b+$ $+c=0$, откуда следует правильность доказываемого тождества.

ГЛАВА VIII
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Теоретическая часть темы занимает мало времени, почти все время отводится на тренировочные упражнения, чтобы выработать у учащихся прочные навыки в операциях с дробями.

Дробные выражения ученикам встречались раньше. Для повторения их можно рассмотреть примеры невыполнимого деления.

Пример. *Выполнить деление* $15a^2b$ *на*: 1) $5a$; 2) $3ab$; 3) $30b$; 4) $3a^2b^2$; 5) $15b^4$.

Решение. Деление лучше записать дробью.

1) $\frac{15a^2b}{5a} = 3ab$; 2) $\frac{15a^2b}{3ab} = 5a$; 3) $\frac{15a^2b}{30b} = \frac{a^2}{2}$ и т. д.

Рассмотрим результаты деления. В 1 и 2 примерах частное целое; в 3 примере тоже целое, потому что делитель не содержит буквы, в случае сомнения можно указать, что $\frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}a^2$. В примерах 4 и 5 деление нацело не выполнено $\frac{5}{b}$ и $\frac{1}{b^3}$. Эти выражения дробные.

После этого можно дать определение алгебраической дроби. В школах дают два определения.

1) *Алгебраическое выражение, представляющее собой дробь, числитель и знаменатель которой многочлены, называется алгебраической дробью* («Алгебра» А. Н. Барсукова).

2) *Алгебраической дробью называется частное от деления двух алгебраических выражений, записанное при помощи черты* («Начальная алгебра» В. Л. Гончарова и др.).

При дальнейшем изучении алгебры в школе к определению дроби ученики не возвращаются и все операции с алгебраическими дробями выполняют так же, как в арифметике.

Рассматривая дробь $\frac{a}{b}$, следует обратить внимание на то, что a и b — буквы, значит, они могут принимать различные значения, но деление на нуль невыполнимо, следовательно, алгебраическая дробь $\frac{a}{b}$ существует (или имеет смысл) только, когда знаменатель $b \neq 0$. Однако пока вырабатывается навык в действиях с алгебраическими дробями, нецелесообразно обращать много внимания на допустимые значения букв, так как это отвлекает учеников от главного и создает неуверенность в работе.

Учащиеся в этом разделе наиболее часто делают следующие ошибки: 1) $\frac{2a+b}{2c} = \frac{a+b}{c}$ — довольно распространенная ошибка — «сокращение множителей отдельных слагаемых». Учитель должен обратить внимание, что при сокращении дробей используется основное свойство дроби, следовательно, на 2 надо было делить весь числитель, а не один член его $2a$.

2) $\frac{1}{a^2-b^2} - \frac{1}{b-a} = \frac{1}{a^2-b^2} + \frac{1}{a+b}$.

Учителю нужно обратить внимание учеников на то, что при замене знака перед дробью надо менять знаки у всех членов знаменателя или числителя на противоположные.

3) $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^3} = \frac{-(b-a)^2}{(b-a)^3}$.

Необходимо обратить внимание учеников на то, что $(a-b)^2 = [-1(b-a)]^2 = (-1)^2(b-a)^2 = (b-a)^2$.

4) $\frac{a-b}{a(a-b)} = 0$,

иногда ученики говорят, «ничего не осталось». Им нужно объяснить, что здесь числитель и знаменатель разделен на $a - b$ и в числителе осталась 1.

Из действий с алгебраическими дробями наиболее трудными являются сложение и вычитание. Поэтому на эти действия уделяют как можно больше времени и даже при изучении умножения и деления задают на дом хотя бы по одному примеру на сложение.

Большое значение имеет сокращение дробей, смысл этой операции понятен ученикам, так как в результате сокращения получается дробь проще данной.

Отыскание общего кратного и общего знаменателя нескольких дробей и приведение их к общему простейшему знаменателю кажется ученикам бесцельным и поэтому изучение его сочетается со сложением и вычитанием алгебраических дробей.

Навык в действиях с алгебраическими дробями вырабатывается у учеников медленно, поэтому необходимо, чтобы они выполняли упражнения с дробями в течение всего года. Для этого в домашнее задание включают по мере возможности пример на действия с дробями и после окончания темы.

§ 2. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ. СОКРАЩЕНИЕ ДРОБЕЙ

Основное свойство дроби должно быть хорошо усвоено учащимися. Нечеткое понимание этого свойства приводит к ошибкам типа «сокращение слагаемых».

Можно основное свойство алгебраической дроби не доказывать, а только сослаться на аналогичное свойство арифметических дробей и дать таблицу.

Таблица 37

В арифметике	В алгебре
$\frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{3}{5}$	$\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b}$

Доказать основное свойство алгебраической дроби можно (при наличии времени) так, как показано ниже.

В арифметике

$3 : 4 = \frac{3}{4}$

$(3 \cdot 2) : (4 \cdot 2) = \frac{3}{4}$ (рис. 74)

$(3 \cdot 2) : (4 \cdot 2) = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2}$

$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 2}$

В алгебре

$a : b = \frac{a}{b}$ (определение алгебраической дроби)

$am : bm = \frac{a}{b}$ (свойство частного)

$am : bm = \frac{am}{bm}$ (определение частного)

$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ (сравнение равенств)

Следует подчеркнуть, что равенство $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ — тождество.

При таком доказательстве сначала дается числовой пример (запись слева), потом — доказательство в общем виде на буквах (запись справа).

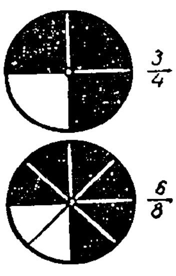


Рис. 74

При этом следует требовать от учеников говорить, что числитель и знаменатель надо умножить (разделить), а не увеличить, так как с введением отрицательных чисел умножение не всегда ведет к увеличению.

Изменение знака в числителе или в знаменателе встретится при вычислении значений дробей по данным значениям входящих в них букв.

Пример 1. *Найти значение дроби* $\frac{1}{2x+1}$ *при* $x = -4$.

Решение.

$$\left.\frac{1}{2x+1}\right|_{x=-4} = \frac{1}{2\cdot(-4)+1} = \frac{1}{-7} = -\frac{1}{7}.$$

Следующим видом упражнений будет сокращение дробей. Ученики должны понимать, что здесь используется основное свойство дроби, записанное в обратном порядке:

$$\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b}.$$

До упражнений на сокращение дробей это тождество проверяют, например, при 1) $a = 4$; $b = 5$; $m = 7$; 2) $a = -3$; $b = 2$; $m = 10$; 3) $a = 5$; $b = -20$; $m = -8$.

Можно просто сослаться на свойство арифметических дробей.

Упражнения на сокращение даются в следующей последовательности: 1) сокращение на число (записано цифрами); 2) сокращение на одночлен; 3) сокращение на многочлен (числитель и знаменатель даны в виде произведения; 4) смена знака в числителе (знаменателе дроби); 5) смена знака и сокращение дроби; 6) сокращение, связанное с разложением членов дроби на множители.

Особенно обращают внимание на случай смены знаков в скобках.

Здесь еще у некоторых учителей сохранился термин «смена знака». Это выражение ведет к ошибке. Можно говорить лишь о «смене знаков», ведь $(a - b) = -(-a + b)$.

Часть упражнений на сокращение дробей можно задать функционально.

Пример 2. Доказать, что дробь $\frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$ при всех допустимых значениях x и y имеет положительное значение.

Доказательство. $\frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2} = x^2 + y^2 > 0$, так как $x \neq y$ и потому одновременно не могут равняться нулю, кроме того, $x^2 \geqslant 0$, $y^2 \geqslant 0$ (квадраты рациональных чисел).

§ 3. ОБОЗНАЧЕНИЕ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Отрицательный показатель степени вводится по определению, но учащимся надо показать целесообразность этого определения.

По определению степени $a^2 = aa$, $a^3 = aaa$, вообще $a^n = \underbrace{aaa \ldots a}_{n \text{ раз}}$.

Показатель степени показывает, сколько раз основание степени нужно взять сомножителем, и по смыслу может быть только натуральным числом.

Возьмем, например, дробь $\frac{a^2}{a^5}$; после сокращения получим $\frac{1}{a^3}$. В то же время черта есть знак деления и a^2 надо разделить на a^5. Деление здесь невыполнимо, так как показатель степени делится выше показателя степени делимого, но если выполнить деление формально, то есть $a^2 : a^5$, то получим a^{-3}.

Чтобы правила действий со степенями были верны во всех случаях, дается новое определение $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$. Всобще, по определению $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Для работы формула удобнее, чем ее словесная формулировка.

Степень с отрицательным показателем удобна для записи малых чисел и часто применяется в физике. Например, $0{,}0000001 = 10^{-7}$, $0{,}000075 = 7{,}5 \cdot 10^{-5}$ и т. д.

Полезно проделать упражнения, в которых числа приводят к виду, удобному для работы по таблицам.

У п р а ж н е н и е. С помощью степеней 10 представить число так, чтобы в целой части его была одна цифра: 1) 245; 2) 0,245; 3) 0,000649; 4) 0,00535.

Р е ш е н и е.

1) $245 = 2{,}45 \cdot 10^2$; 2) $0{,}245 = \frac{2{,}45}{10} = 2{,}45 \cdot 10^{-1}$.

§ 4. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

Сложение алгебраических дробей начинают со случая сложения дробей с одинаковыми знаменателями.

Надо добиваться, чтобы ученики понимали, что сложение таких дробей делается на основании распределительного закона деления:

$$\frac{a \pm b}{m} = \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m}, \text{ где } m \neq 0.$$

Закон в свое время вводился перед делением многочлена на одночлен. Его можно напомнить или повторить, пользуясь параллелью с арифметикой:

$(15+25) : 5 = 15:5 + 25 : 5 = 3+5 = 8$	$(a+b) : m = a : m + b : m$ (распр. закон)
	$\frac{a+b}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$ (опред. дроби)
	Аналогично получим $\frac{a-b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}$

Чтобы получить правило сложения дробей, ученикам предлагают написать первое тождество в обратном порядке, то есть

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m},$$

после чего можно предложить правило сложения таких дробей.

Но можно начать со сложения и вычитания дробей в арифметике и дать таблицу.

Таблица 38

В арифметике	В алгебре
$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3+2}{7}=\frac{5}{7}$	$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$

Аналогично дается правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Первые упражнения на сложение дробей берут с одночленными знаменателями и числителями, причем все действия делают подробно.

Пример 1. $\frac{5}{a}+\frac{4x}{a}-\frac{x}{a}=\frac{5+4x-x}{a}=\frac{5+3x}{a}$.

Затем переходят к сложению дробей с одинаковыми одночленными знаменателями и многочленными числителями. Вначале в таких примерах лучше числители писать в скобках.

Пример 2. $\frac{m-n}{a}+\frac{m+n}{a}=\frac{(m-n)+(m+n)}{a}=\frac{2m}{a}$.

Когда переходят к сложению дробей с разными одночленными знаменателями и числителями, то первые 3—5 примеров делают подробно, объясняя, что сложение таких дробей сводится к сложению дробей с одинаковыми знаменателями. Сперва делают знаменатели дробей одинаковыми (приводят к общему знаменателю) и потом складывают их как дроби с одинаковыми знаменателями.

Пример 3. $\frac{4}{27xy}-\frac{5}{18xy}=\frac{8}{54xy}-\frac{15}{54xy}=\frac{8-15}{54xy}=\frac{-7}{54xy}$.

После двух-трех примеров пишут сразу $\frac{4}{27xy}-\frac{5}{18xy}=\frac{8-15}{54xy}$.

Приступая к сложению и вычитанию дробей, у которых одночленные знаменатели, но многочленные числители, можно первые примеры брать только со сложением, чтобы не отвлекать внимание сменой знака.

Пример 4. $\frac{2a-3}{a}+\frac{4a^2-5b^2}{ab}=\frac{b(2a-3b)+(4a^2-5b^2)}{ab}=$

$=\frac{2ab-3b^2+4a^2-5b^2}{ab}=\frac{4a^2+2ab-8b^2}{ab}$.

В дальнейшем, когда ученики привыкнут к операции сложения дробей, можно будет, найдя общий знаменатель, надписать над данными дробями дополнительные множители и сразу выполнять умножение, то есть получить предпоследнюю запись, минуя запись со скобками.

В более сложных примерах на сложение дробей слабые и даже средние ученики обычно испытывают затруднение при самостоятельном решении. Чтобы облегчить их работу, можно дать после анализа план решения следующим образом: дают пример, анализируют его, затем по требованию учителя ученик с места говорит, что надо сделать в первом шаге, а учитель записывает этот шаг и оставляет «чистый бланк» (или «пропуск») для заполнения, потом выясняют второй шаг и т. д., после чего на доске появится примерно такая запись.

$$\frac{a-1}{4a+4}-\frac{1}{a-1}-\frac{3a^2+5}{4a+4a^2}=\frac{a-1}{4(a+1)}-\frac{\square}{\square}-\frac{3a^2+5}{4(\square-\square)}=$$

$$=\frac{a-1}{4(a+1)}+\frac{a}{\square}-\frac{3a^2+5}{4(\square)(\square)}=\frac{\square+\square-\square}{4(\square)(\square)}=\frac{\square}{4(\square)(\square)}=\square.$$

Учащиеся решают и после каждого шага комментируют, а учитель под диктовку заполняет пропуски.

Вместо плана решения можно написать до урока все решение и закрыть его листом бумаги. Потом разобрать устно первый шаг и открыть эту часть решения. Также разобрать устно второй шаг и открыть решение его и т. д. Затем решение закрывают и ученики приступают к решению этого примера в своих тетрадях. По мере решения учитель по шагам показывает запись на доске.

Наряду с записью цепочкой существуют другие записи.

Пример 5. $\frac{x}{a-x}+\frac{a}{a+x}-\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$.

Общий знаменатель: $(a-x)(a+x)$.

$$\frac{x}{a-x}=\frac{x(a+x)}{(a-x)(a+x)}=\frac{ax+x^2}{a^2-x^2}$$

$$+\frac{a}{a+x}=\frac{a(a+x)}{(a+x)(a-x)}=\frac{a^2-ax}{a^2-x^2}$$

$$-\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}=-\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$$

$$\frac{x}{a-x}+\frac{a}{a+x}-\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}=\frac{ax+x^2+a^2-ax-a^2-x^2}{a^2-x^2}=\frac{0}{a^2-x^2}=0.$$

Вот образец, применяемый в стабильном учебнике Германской Демократической Республики.

Пример 6. $\frac{1}{a+b}-\frac{a}{a^2-2ab+b^2}+\frac{b}{a^2-b^2}$.

Отыскание общего знаменателя.

Таблица 39

Знаменатель	Разложение	Высшая степень
$a+b$	$a+b$	$a+b$
$a^2-2ab+b^2$	$(a-b)^2$	$(a-b)^2$
a^2-b^2	$(a+b)(a-b)$	
Общий знаменатель $(a+b)(a-b)^2$		

Дроби	Дополнительный множитель
$\frac{1}{a+b}=\frac{1\cdot(a-b)^2}{(a+b)(a-b)^2}$	$(a-b)^2$
$\frac{a}{a^2-2ab+b^2}=\frac{a\cdot(a+b)}{(a-b)^2\cdot(a+b)}$	$a+b$
$\frac{b}{a^2-b^2}=\frac{b\cdot(a-b)}{(a+b)(a-b)(a-b)}$	$a-b$

Результат: $\frac{(a-b)^2-a(a+b)\ 2b\,(a-b)}{(a+b)(a-b)^2}=\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-ab+}{(a+b)(a-b)^2}$

$$\frac{+ab-b^2}{(a+b)(a-b)^2}=\frac{-2ab}{(a+b)(a-b)^2}=-\frac{2ab}{(a-b)(a^2-b^2)}.$$

В приведенных решениях подробно записаны все промежуточные операции. В них можно проследить алгоритм сложения дробей, но выполненные операции оторваны от условия примера и разобщены. Запись в виде цепочки более наглядна, так как результат каждой операции располагается на одном и том же месте относительно знака равенства. Покажем это на примере 7.

Пример 7.

$$\frac{1}{6x-4y}-\frac{1}{6x+4y}-\frac{3x}{4y^2-9x^2}=\frac{1}{2(3x-2y)}-\frac{1}{2(3x+2y)}+$$

$$+\frac{3x}{(3x+2y)(3x-2y)}=\frac{(3x+2y)-(3x-2y)+6x}{2(3x+2y)(3x-2y)}=$$

$$\frac{3x+2y-3x+2y+6x}{2(3x+2y)(3x-2y)}=\frac{6x+4y}{2(3x+2y)(3x-2y)}=\frac{2(3x+2y)}{2(3x+2y)(3x-2y)}=$$

$$=\frac{1}{3x-2y}.$$

В этом решении можно снять третью запись со скобками, надписав над дробями с разложенными знаменателями дополнительные множители. Она намного короче, чем запись в примерах 6 и 7.

Некоторые упражнения на сложение и вычитание дробей могут дополнить вопрос, связанный с исследованием. Например, после того как ученики получили, что

$$\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a+2}-\frac{4}{a^2-4}=\frac{2}{2-a},$$

можно задать вопросы:

Что можно сказать о значениях, которые принимает алгебраическая сумма данных дробей при $a<2$; при $a>2$? (При $a<2$ — положительная.)

Может ли алгебраическая сумма данных дробей равняться нулю? (Нет.)

Такие вопросы хорошо задавать учащемуся, сделавшему пример, для уточнения оценки.

Если надо сложить несколько дробей, из которых некоторые имеют одинаковые знаменатели, то можно сложить сначала дроби с одинаковыми знаменателями.

Пример 8.

$$\frac{a^3}{a-1}-\frac{a^2}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}=\left(\frac{a^3}{a-1}-\frac{1}{a-1}\right)-\left(\frac{a^2}{a+1}-\frac{1}{a+1}\right)=$$

$$=\frac{a^3-1}{a-1}-\frac{a^2-1}{a+1}=(a^2+a+1)-(a-1)=a^2+2.$$

При ином порядке выполнения действий в *этом примере можно* получить дробь $\frac{a^4+a^2-2}{a^2-1}$, числитель которой разлагается на множители только искусственным приемом.

Полезно для решения некоторых примеров использовать несколько способов решения.

§ 5. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ДРОБЕЙ

Умножение и деление алгебраических дробей удобно начать с умножения и деления арифметических дробей. Здесь также полезно будет провести параллель между теми и другими дробями и составить таблицу:

Таблица 40

В арифметике	В алгебре	
$\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{3\cdot 4}{5\cdot 7}=\frac{12}{35}$	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ (правило умножения дробей)	(VIII)

Рассмотрим традиционное правило умножения дробей: «чтобы умножить дробь на дробь, надо числитель первой дроби умножить на числитель второй, а знаменатель первой дроби на знаменатель второй и первое произведение сделать числителем дроби, а второе знаменателем». По этому правилу при умножении дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$

надо: 1) найти ac; 2) найти bd; 3) написать дробь $\frac{ac}{bd}$. Это правило расходится с алгоритмом умножения дробей. На самом деле порядок операций другой: 1) пишут дробную черту; 2) числитель ac; 3) знаменатель bd. Краткое правило хорошо отражает этот алгоритм: *числитель на числитель, знаменатель на знаменатель.* Ученик интуитивно понимает, что при умножении дробей получается дробь. Остается сказать, что сделать с числителями и знаменателями перемножаемых дробей. Поэтому требовать от учащихся заучивать первое правило нецелесообразно. То же касается и правила деления дробей. Полезно на практике сравнить работу учащихся по формуле и по словесной формулировке.

Для убедительности можно предложить учащимся проверить тождество $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ при различных системах значений a, b, c, d. Например, при 1) $a = 4$, $b = 7$, $c = 14$, $d = 20$; 2) $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{1}{4}$; $d = \frac{1}{10}$; 3) $a = 0{,}2$, $b = 0{,}6$, $c = 1{,}3$, $d = 0{,}6$.

В частности, можно рассмотреть формулу (VIII) при $b = 1$, затем при $d = 1$ и задать вопрос, какое правило выражает тождество:

$$1)\quad a \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{d};\quad 2)\ \frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}.$$

Затем переходят к упражнениям, располагая их по степени трудности.

Наибольшие затруднения возникают тогда, когда для сокращения дроби приходится разлагать на множители числитель и знаменатель. Первые из более сложных упражнений выполняют подробно.

Пример. $\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 - xy} \cdot \frac{x - y}{x^2 + 2xy} = \frac{(x^2 - 4x^2)(x - y)}{(x^2 - xy)(x^2 + 2xy)} = \frac{(x - 2y)(x + 2y)(x - x)}{x(x - y)x(x + 2y)} = \frac{x - 2y}{x^2}$.

Затем от учащихся можно потребовать, обозначая действие умножения числителей и знаменателя на знаменатель, сразу писать их в виде произведения простейших множителей. Часть примеров нужно решить устно.

Правило деления дробей обычно вводят так, как оно дано в стабильном учебнике, или сравнивают с правилом деления арифметических дробей.

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 4} = \frac{3}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} \;\Big|\; \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \text{ (правило деления дробей)} \quad \text{(VIII a)}.$$

Тождество (VIII а) можно проверить для частных значений a, b, c, d.

§ 6. СЛОЖНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

Пример 1. *Упростить* $\dfrac{\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{b}}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}}$.

Решение. а) В общем случае решение будет основано на том, что черта означает знак деления:

$$\frac{\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{b}}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}}=\frac{\dfrac{a-c}{b}}{\dfrac{a+c}{b}}=\frac{(a-c)\,b}{b\,(a+c)}=\frac{a-c}{a+c}.$$

б) По свойству дроби (или частного) умножаем числитель и знаменатель на b, тогда:

$$\frac{\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{b}}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}}=\frac{a-c}{a+c}.$$

Пример 2. *Упростить дробь* $\dfrac{4-\dfrac{4+b^2}{b}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{b}}$.

а) $$\frac{4-\dfrac{4+b^2}{b}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{b}}=\frac{\dfrac{4b-4-b^2}{b}}{\dfrac{b-2}{2b}}=\frac{(4a-4-b^2)\cdot 2b}{b\,(b-2)}=$$

$$=-\frac{2\,(b^2-4b+4)}{b-2}=-\frac{2\,(b-2)^2}{b-2}=-2\,(b-2)=-2b+4.$$

б) $$\frac{4-\dfrac{4+b^2}{b}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{b}}=\frac{2b\left(4-\dfrac{4+b^2}{b}\right)}{2b\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{b}\right)}=\frac{8b-8-2b^2}{b-2}=-\frac{2\,(b^2-4b+4)}{b-2}=$$

$$=\frac{2\,(b-2)^2}{b-2}=-2\,(b-2)=-2b+4.$$

При действиях со сложными дробями знаки «+», «—» и «=» необходимо ставить против основной черты, например:

$$\frac{\dfrac{a+b}{c}}{a-b}-1 \quad \text{и} \quad \frac{\dfrac{a+b}{c}-1}{a-b}$$ — разные выражения.

§ 7. УПРАЖНЕНИЯ НА ВСЕ ДЕЙСТВИЯ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ДРОБЯМИ

Первые упражнения на смешанные действия с дробями ученики выполняют с трудом. Для уяснения этих упражнений можно провести не только анализ, но и решение нескольких примеров следующим образом. До урока на доске решают пример $\left(\frac{a+1}{2a-2}+\frac{3}{a^2-1}-\frac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\frac{4a^2-4}{3}$, но решение закрывают.

Делают анализ условия: сколько дано дробей, порядок действий и т. д. Ученики устно говорят, как сделать первый шаг — разложить знаменатели первых трех дробей на множители. После рассказа учительница открывает это место решения. Устно учащиеся устанавливают, какой общий знаменатель — учительница открывает соответствующую часть записи и т. д. Таким образом выясняют шаги решения до конца. Затем доску закрывают и ученики приступают к решению письменно. Для сверки решения учительница постепенно открывает на доске один-два шага решения. Такой прием был применен А. М. Лабинцевой (школа № 70 г. Ростова-на-Дону).

В записи смешанных действий с дробями имеются две формы: 1) цепочкой, 2) по действиям.

Первую хорошо применять в примерах, где одновременно выполняются действия, близкие по степени трудности. Тогда запись цепочкой будет краткой, удобной; в частности, допускает промежуточные упрощения, например, сокращение при умножении.

Вторую применяют в случае, если в одной части упражнения надо выполнить много преобразований, а в других частях преобразований нет, поэтому при записи цепочкой придется многократно переписывать значительную часть выражения без всякого преобразования. При выполнении упражнений и в том и в другом случаях надо предварительно выяснить наиболее рациональные приемы решения их.

Пример 1. *Выполнить действие*:

$$-\frac{x^2}{x+y}-\left(\frac{x^2}{x+y}-\frac{x^3}{x^2+2xy+y^2}\right):\left(\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{x}{y-x}\right).$$

Решение. а) $-\frac{x^2}{x+y}-\left(\frac{x^2}{x+y}-\frac{x^3}{x^2+2xy+y^2}\right):\left(\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{x}{y-x}\right)=$

$$=-\frac{x^2}{x+y}-\left[\frac{x^2}{x+y}-\frac{x^3}{(x+y)^2}\right]:\left[\frac{x^2}{(x+y)(x-y)}-\frac{x}{x-y}\right]=-\frac{x^2}{x+y}-$$

$$-\frac{x^3+x^2y-x^3}{(x+y)^2}:\frac{x^2-x^2-xy}{(x+y)(x-y)}=-\frac{x^2}{x+y}-\frac{x^2y(x+y)(x-y)}{(x+y)^2\cdot(-xy)}=$$

$$=-\frac{x^2}{x+y}+\frac{x(x-y)}{x+y}=\frac{-x^2+x^2-xy}{x+y}=-\frac{xy}{x+y}.$$

$$б)\ 1)\ \frac{x^2}{x+y}-\frac{x^3}{x^2+2xy+y^2}=\frac{x^2}{x+y}-\frac{x^3}{(x+y)^2}=\frac{x^3+x^2y-x^3}{(x+y)^2}=$$

$$=\frac{x^2y}{(x+y)^2};$$

$$2)\ \frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{x}{y-x}=\frac{x^2}{(x+y)(x-y)}-\frac{x}{x-y}=\frac{x^2-x^2-xy}{(x+y)(x-y)}=$$

$$=-\frac{xy}{(x+y)(x-y)};$$

$$3)\ \frac{x^2y}{(x+y)^2}:-\frac{xy}{(x+y)(x-y)}=-\frac{x^2y(x+y)(x-y)}{(x+y)^2xy}=$$

$$=-\frac{x(x-y)}{x+y};$$

$$4)\ -\frac{x^2}{x+y}+\frac{x(x-y)}{x+y}=\frac{-x^2+x^2-xy}{x+y}=-\frac{xy}{x+y}.$$

В последней записи окончательный ответ приписывают к данному в начале выражению.

Сравнение записей показывает, что при записи цепочкой (обе записи сделаны подробно) пришлось зря переписать 3 раза — $\frac{x^2}{x+y}$; при записи по действиям 4 раза переписать из условия громоздкие выражения. Следовательно, в записи по действиям больше приходится затрачивать времени на решение. При этой записи каждый раз учащийся выполняет только одно действие и в этом случае делают в отдельных действиях меньше ошибок. Но когда ученикам от отдельных действий надо перейти к последнему и связать результаты отдельных действий, то они часто ошибаются. В данном примере легко ошибиться в действии 4.

Бо́льшую часть ошибок в тренировочных упражнениях на смешанные действия с дробями ученики делают при получении числителя новой дроби число ошибок уменьшается, если умножать не сразу на дополнительный множитель, а писать сперва скобки (§ 4, пример 4). Вообще подробная запись — одно из средств уменьшить число ошибок (правда, за счет числа решенных примеров).

При решении упражнений часто приходится выполнять вспомогательные действия· разлагать на множители, искать общий знаменатель и т д. В таких случаях запись можно оборвать, обозначить полученное выражение буквой, лучше A (алгебраическое выражение), и, сделав нужные вспомогательные операции, продолжить действия $A =$ и т. д.

В первую очередь упражнения идут на действия с дробями, затем на решение уравнений, вычисление значений алгебраических выражений после их упрощения. К некоторым примерам на дроби следует подобрать дополнительные вопросы функционального характера. Так, после решения примера 1 уместно задать вопросы:

1. Что можно сказать о значении данного алгебраического выражения $-\frac{x^2}{x+y}-\left(\frac{x^2}{x+y}-\frac{x^3}{x^2+2xy+y^2}\right):\left(\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{1}{y-x}\right)=$ $=-\frac{xy}{x+y}$, если $x>0$, $y>0$? Ответ. Судя по ответу $-\frac{xy}{x+y}$, все значения его будут отрицательны.

2. Заполнить таблицу:

Таблица 41

x	1	2	5	0,2	-1
y	3	-3	9	$-0,8$	$+1$
$-\frac{xy}{x+y}$	$-\frac{3}{4}$	6	?	?	?

Целесообразно показать учащимся ускоренные приемы вычисления с помощью формулы разности квадратов.

Пример. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{a+b+a-b}{2}\cdot\frac{a+b-a+b}{2}=ab.$

Промежуточную запись можно опустить и результат ab получить устно.

Можно предложить решить задачи на доказательство. Например:

Задача 1. *Если a — число целое, то значение* $\left(\frac{a^3}{a-1}+\frac{1}{a+1}\right)-\left(\frac{a^2}{a+1}+\frac{1}{a-1}\right)$ — *число натуральное. Доказать.*

Доказательство. Данное выражение равно a^2+2 (§ 4, пример 8), и при целом a число a^2 — натуральное и a^2+2 — число натуральное.

Задача 2. *Доказать, что при всех допустимых значениях x значения выражения* $\left(\frac{8x^3}{2x-1}+\frac{1}{2x+1}\right)-\left(\frac{4x^2}{2x+1}+\frac{1}{2x-1}\right)$ *положительны.*

Доказательство. Данное выражение равно $4x^2+2$, но $x^2\geqslant 0$, значит, $4x^2+2>0$.

На внеклассных занятиях можно дать задачи, при решении которых ученикам надо проявить изобретательность. Например:

Задача 1. *Упростить выражение* $A = \frac{x}{xy + x + 1} + \frac{y}{yz + y + 1} + \frac{z}{zx + z + 1}$ *при условии, что* $xyz = 1$.

Решение.

$$A = \frac{xz}{xyz + xz + z} + \frac{yzx}{yz^2x + yzx + zx} + \frac{z}{zx + z + 1} = \frac{xz}{1 + xz + z} + \frac{1}{z + 1 + zx} + \frac{z}{zx + z + 1} = \frac{xz + 1 + z}{xz + z + 1} = 1.$$

Упражнения на смешанные действия с дробями после изучения их предлагаются ученикам систематически в течение года, включая их в домашнее задание.

§ 8. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ НЕИЗВЕСТНОЕ В ЗНАМЕНАТЕЛЕ

Прежде чем приступить к решению уравнений, содержащих неизвестное в знаменателе, следует сказать учащимся, что теоремы о равносильности нуждаются в уточнении. В теореме 1 шла речь о прибавлении к обеим частям уравнения по многочлену (или числу), а в теореме 2 об умножении обеих частей на число.

I. Возьмем уравнение $x - 1 = 2$ (1), его корень $x = 3$. Если к обеим частям этого уравнения прибавить по дроби $\frac{1}{x-4}$, то получим уравнение

$$x - 1 + \frac{1}{x - 4} = 2 + \frac{1}{x - 4} \qquad (2)$$

Корень уравнения (1) удовлетворяет уравнению (2) и, обратно, их множества корней одинаковы. Следовательно, уравнения (1) и (2) равносильны.

Если же к обеим частям того же уравнения (1) прибавить по дроби $\frac{1}{x - 3}$, то получим уравнение

$$x - 1 + \frac{1}{x - 3} = 2 + \frac{1}{x - 3} \qquad (3)$$

Корень уравнения (1) не удовлетворяет уравнению (3), так как при $x = 3$ дробь $\frac{1}{x - 3}$ не имеет смысла.

Следовательно, уравнения (1) и (3) неравносильны.

Таким образом, прибавление к обеим частям уравнения дроби, содержащей в знаменателе неизвестное, может привести к уравнению, неравносильному данному.

На практике чаще приходится идти не от уравнения целого вида (1) к уравнению дробного вида (3), а наоборот.

Пример 1. *Решить уравнение* $x-1+\frac{1}{x-3}=2+\frac{1}{x-3}$ (1)

Решение. Прибавить к обеим частям уравнения (1) по $-\frac{1}{x-3}$:

$$x-1+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-3}=2-\frac{1}{x-3} \qquad (2)$$

$$x-1=2 \qquad (3)$$

$$x=3 \qquad (4)$$

Проверка. $3-1+\frac{1}{3-3}=2+\frac{1}{3-3}$, дробь $\frac{1}{3-3}$ не имеет смысла, следовательно, $x=3$ не удовлетворяет уравнению (1).

Ответ. Уравнение не имеет корня.

Уравнения (3) и (1) неравносильны. Рассмотрим, в какой момент нарушилась равносильность. Значение $x=3$ не удовлетворяет уравнениям (1) и (2), но уравнению (3) удовлетворяет.

Следовательно, равносильность нарушилась при переходе от уравнения (2) к уравнению (3), и именно в момент взаимного уничтожения дробей $\frac{1}{x-3}$ и $-\frac{1}{x-3}$, *то есть при тождественном преобразовании.*

II. Возьмем уравнение $x-1=2$ (1), его корень $x=3$. Умножим обе части уравнения (1) на $\frac{1}{x-2}$, тогда получим уравнение $\frac{x-1}{x-2}=\frac{2}{x-2}$, которое имеет тот же корень $x=3$.

Но умножим обе части уравнения (1) на множитель $\frac{1}{x-3}$, тогда получим уравнение

$$\frac{x-1}{x-3}=\frac{2}{x-3}, \qquad (3)$$

которому корень уравнения (1) $x=3$ не удовлетворяет, так как $\frac{3-1}{3-3}=\frac{2}{3-3}$ и обе дроби не имеют смысла.

На практике приходится при решении уравнений идти в обратном порядке от уравнений вида (2) и (3) к уравнению вида (1).

Пример 2. *Решить уравнение* $\frac{x-1}{x-3}=\frac{2}{x-3}$ (1)

Решение. Приведем уравнение к целому виду. Для этого умножим обе части уравнения на $x-3$:

$$\frac{x-1}{x-3}=\frac{2}{x-3}\ \Big|\ x-3$$

$$\frac{(x-1)(x-3)}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} \qquad (2)$$

$$x - 1 = 2 \qquad (3)$$

$$x = 3 \qquad (4)$$

Проверка. $\frac{3-1}{3-3} = \frac{2}{3-3}$, обе дроби не имеют смысла, то есть $x = 3$ не удовлетворяет уравнению (1).

Ответ. Уравнение не имеет корня.

Уравнения (1) и (3) неравносильны. Рассмотрим, в какой момент нарушилась равносильность. Значение $x = 3$ не удовлетворяет уравнениям (1) и (2), но уравнению (3) оно удовлетворяет. Следовательно, равносильность нарушилась при переходе от уравнения (2) к уравнению (3) после сокращения дробей на $x—3$, то есть *при тождественном преобразовании.*

Учащимся можно при решении таких примеров дать наводящие вопросы:

Равносильны ли уравнения (1) и (3).

Показать два последовательных уравнения, неравносильные одно другому.

В какой момент нарушилась равносильность? Почему?

Потом делают выводы.

1) При решении уравнений, содержащих неизвестное в знаменателе, может получиться уравнение неравносильное.

2) Полученные корни уравнения с неизвестным в знаменателе необходимо проверять.

Можно обратить внимание учеников в примере 2 на некоторую аналогию с теоремой 2 о равносильности уравнений. Обе части уравнения умножали на $x - 3$

$$\frac{x-1}{x-3} = \frac{2}{x-3} \quad \Big| \; x - 3$$

Нашли значение $x = 3$, но при этом значении x множители $x—3=0$, то есть здесь множитель обращается в нуль при значении x, являющемся корнем уравнения (3).

К сожалению, приведенные рассуждения в VII классе можно показывать на примерах уравнений лишь двух видов: имеющих только один корень и уравнений, не имеющих корня.

Что касается записи решения уравнений, то в школе применяют следующие формы ее.

I. *Решение с обязательной проверкой.*

Пример 1. *Решить уравнение* $\frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x-1} + \frac{8}{1-4x^2}$ (1)

Решение. Предварительно разложим знаменатели на множители.

$$\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{8}{(2x+1)(2x-1)}\ \Big|\ (2x+1)(2x-1)$$

Затем преобразуем уравнение:

$$(2x-1)^2=(2x+1)^2-8 \quad \text{(теорема 2);}$$

$4x^2-4x+1=4x^2+4x+1-8$ (3) (тождественное преобразование, следствие теоремы 1)

$-8x=-8$ (следствие теоремы 1 и тождественное преобразование); $x=1$ (теорема 2).

Знаменатели дробей, входящих в уравнение, содержат неизвестное, следовательно, необходима проверка.

Проверка. $\frac{2\cdot1-1}{2\cdot1+1}=\frac{2\cdot1+1}{2\cdot1-1}+\frac{8}{1-4\cdot1^2}$; $\frac{1}{3}=3-\frac{8}{3}$; $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ — равенство верное.

Ответ. $x=1$.

II. *Решение, при котором предварительно находят допустимые значения неизвестного.*

Пример 2. *Решить уравнение* $\frac{8}{3x-3}-\frac{2+x}{x-1}=\frac{5}{2-2x}-\frac{5}{18}$. (1)

Решение.

$$\frac{8}{3(x-1)}-\frac{2+x}{x-1}=-\frac{5}{2(x-1)}-\frac{5}{18}\ \Big|\ 18(x-1); \quad x\neq1,$$

первые три дроби не имеют смысла при $x=1$, поэтому допустимые значения неизвестного будут $x\neq1$.

$$48-18(2+x)=-45-5(x-1) \quad (2)$$

$$48-36-18x=-45-5x+5 \quad (3)$$

$$-18x+5x=-45+5-48+36 \quad (4)$$

$$-13x=-52 \quad (5)$$

$$x=4 \quad (6)$$

В этом случае $x=4$ — допустимое значение x, следовательно, $x=4$ не может быть посторонним корнем и является решением данного уравнения.

Можно сделать проверку, чтобы установить, не сделана ли ошибка в подсчете.

Примечание. Критерием, по которому можно судить о равносильности уравнений (1) и (2), может быть еще вычисление значения НОК при $x = 4$. В примере 2 $18(x-1)\Big|_{x=4} \neq 0$, следовательно, равносильность не нарушена. На этом основана третья форма записи. Она такая же, как в примере 1. Когда получили $x = 1$, находят значение $(2x+1)(2x-1)\Big|_{x=1} = 3 \neq 0 =$ после чего делают заключение, что уравнения (1) и (2) равносильны, далее равносильность не нарушалась. Значит, $x = 1$ — корень уравнения.

Если класс хорошо подготовлен, то можно в решении обоих примеров опустить записи (2) и (4) и дать сразу записи (3) и (5).

Если учащиеся класса делают много ошибок, то запись должна быть подробной, как это показано в примерах 1 и 2.

Можно предложить упражнения комбинированные.

Пример. Даны две *рациональные дроби*

$$A = \frac{4x^2-9}{4x^2-6x+9} \quad \text{и} \quad B = \frac{6x-2x^2}{4x^2+6x}$$

1) *Упростить выражение* $z = A + B$.
2) *Найти значение* x, *при котором значение* z *равно нулю, равно* 1.
3) *Существует ли значение* x, *при котором* z *равно* 0,5?

§ 9. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С БУКВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Программа рекомендует решать только простейшие уравнения с буквенными коэффициентами. В решение таких уравнений органически входит исследование, причем оно производится в процессе решения.

Пример 1. *Решить уравнение* $ax + b = 0$ *относительно* x.

Решение. $ax + b = 0$, $ax = -b$; если $a \neq 0$, то $x = -\frac{b}{a}$.

Пример 2. *Решить уравнение* $\frac{x+a}{2} + \frac{2}{x+a} = \frac{x-a}{2}$.

Решение. $\frac{x+a}{2} + \frac{2}{x+a} = \frac{x-a}{2} \ \Big|\ 2(x+a);\ x \neq -a$

$$(x+a)^2 + 4 = x^2 - a^2;$$

$$x^2 + 2ax + a^2 + 4 = x^2 - a^2;$$

$$2ax = -2a^2 - 4.$$

Если $a \neq 0$, то $x = -\frac{2(a^2+2)}{2a}$, $x = -\frac{a^2+2}{a}$.

На этом обычно решение уравнений с буквенными коэффициентами заканчивается. Проверку делают только в простейших случаях, когда корень уравнения имеет целый вид. В заключение пишут ответ:

$$x = -\frac{a^2+2}{2},\ a \neq 0.$$

Примечание. Мы не использовали условия $x \neq -a$. Подставим в это неравенство найденное значение x:

$$-\frac{a^2+2}{a} \neq -a, \text{ отсюда}$$

$-a-\frac{2}{a} \neq -a$; или $-\frac{2}{a} \neq 0$, что очевидно, то есть $x = -\frac{a^2+2}{a}$ есть корень данного уравнения при всех значениях $a \neq 0$.

Эта часть исследования в VII классе обычно не проводится. Программа предлагает познакомить учащихся с исследованием решения уравнений с параметрами только на простейших примерах.

При решении упражнений полезно предложить, например, для уравнения $3(m-1)x^2-8(2m+1)x-(5m-3)=0$:

1) Найти x при $m=1$.

2) Определить, при каком значении m $x=1$? $x=a$?

ГЛАВА IX

КООРДИНАТЫ И ПРОСТЕЙШИЕ ГРАФИКИ

§ 1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ТЕМЕ

В этой теме учащиеся впервые начинают систематическое изучение функциональной зависимости и построения графиков.

Будем считать, что имеем зависимость между величинами x и y, если указан алгоритм, раскрывающий, как по данному значению x получить соответствующее значение y. Например, формулой $y = 3x$ задан алгоритм: значение x надо умножить на 3, в результате чего получим значение y. Формула $y = 3x$ выражает зависимость. Учитель подчеркивает, что значение x берется произвольно, а значение y от него зависит. Желательно ввести термин п е р е м е н н а я.

В VII классе термин ф у н к ц и я не дается и речь будет идти о построении графиков з а в и с и м о с т е й. Это приводит к тому, что термин ф у н к ц и я придется ввести в геометрии, когда учащиеся будут проходить тему «Тригонометрические функции острого угла», которая по программе начинается на несколько часов раньше, чем вводят понятие функции в алгебре.

В теме «Координаты и простейшие графики» много времени уходит на черчение графиков, поэтому учитель должен сделать все возможное, чтобы сэкономить время на их выполнение. Учащиеся будут быстрее работать с графиками, если станут чертить графики на миллиметровке. На доске следует четверть доски (обычно в правой части ее) разграфить в клеточку. Можно разграфить одну сторону переносной доски.

Программой не предусмотрено исследование зависимостей. Однако с целью подготовки к теме «Функции и их графики» полезно уже в VII классе приучать учащихся к исследованию.

Следует отметить, что в VII классе графики строятся по точкам, вид графиков определяется эмпирически, то есть на основании опыта учащихся.

Изложение хорошо сочетать с демонстрацией коротких кинофрагментов (2—5 минут). Например, учитель дает представление о координатах точки и потом иллюстрирует его с помощью кино.

§ 2. ВВЕДЕНИЕ ПОНЯТИЯ КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Тема начинается с ознакомления учащихся с *координатной плоскостью*. Если ученики в V и VI классах вычерчивали столбчатые диаграммы, то это облегчит им усвоение новых представлений.

Первый урок полезно начать с построения столбчатой диаграммы, выбирая тему задачи так, чтобы в условие ее входили две величины, например время и связанная с ним другая величина.

Задача. *Построить столбчатую диаграмму темпов роста промышленной продукции за* 1958—1961 гг. (в процентах к 1958 г.):

1958 г.	100%	1960 г.	122,1%
1959 г.	111,4%	1961 г.	133,3%

Примем масштаб в 1 *см* — 25% (на доске соответственно в 1 *дм*— 25%).

Подготовительная работа:

1) 100 : 25 = 4,00;
2) 111,4 : 25 = 4,46;
3) 122,1 : 25 = 4,88;
4) 133,3 : 25 = 5,34.

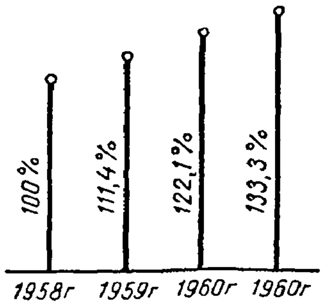


Рис. 75

Учащимся задают вопросы:

О каких величинах сказано в условии задачи? (время и темп роста промышленной продукции в процентах.)

Где отмечается на диаграмме время? (На горизонтальной прямой.)

Как отмечается на диаграмме процент роста продукции? (Вертикальным столбиком, соответствующим году.)

Затем можно рассмотреть, как зритель находит свое место в зале кинотеатра (рис. 76). На плане представлен зал, в зале 22 ря-

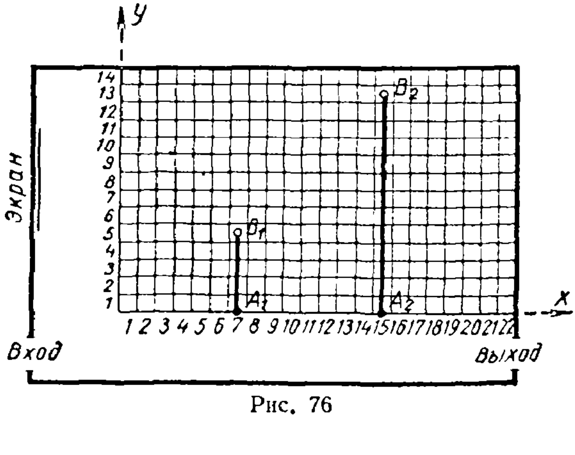


Рис. 76

да, в каждом ряду 14 мест. Зритель имеет билет, в котором указано: ряд 7, место 5. Здесь дана пара чисел 7 и 5; отыскивая место, зритель от вершины угла O проделает путь OA_1B_1. Если в билете указано: ряд 15, место 13, зритель проделает путь OA_2B_2.

Во всех случаях место зрителя определяется двумя числами, а на плане отрезками: один из них лежит на прямой OX, другой — на перпендикуляре к этой прямой.

Кроме того, следует взять пример из географии и показать, что на картах положение пунктов определяется заданием широты и долготы.

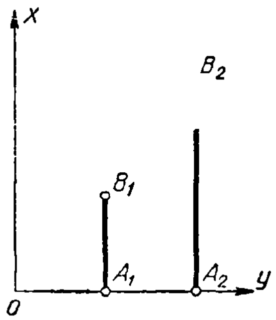


Рис. 77

После этих примеров легко перейти к объяснению, как определяется положение точки на плоскости. Например, зритель, чтобы найти свое место в зале, имеет два числа — номер ряда и номер места в ряду. Геометрически месту соответствует точка (B_1 или B_2), а номеру ряда и номеру места соответствует пара отрезков (OA_1, A_1B_1), в другом случае — (OA_2, A_2B_2) (рис. 77).

Можно еще предложить ученикам решить следующую задачу. В комнате делают ремонт; при этом надо снять с потолка плафон и после побелки укрепить его на том же месте. Как найти место плафона? Вероятно, учащиеся найдут ответ и укажут, что надо из центра плафона опустить перпендикуляр на линию пересечения потолка со стеной и измерить два отрезка, определяющих положение плафона.

После этих предварительных упражнений легко ввести понятие координатной плоскости. Например, можно сказать, что положение точек B_1 и B_2 определено, но могут быть точки, находящиеся вне угла XOY. Чтобы охватить и эти точки плоскости, проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые OX и OY, которые разделят плоскость на четыре части. Эти части называются четвертями.

Затем дают определения осей координат, начала координат, абсциссы и ординаты точки и переходят к построению точек по данным их координатам. Вопрос о направлении оси OX для учащихся не нов. Можно сказать, что числа откладываются на оси OX так же, как раньше откладывали их на числовой оси. Что касается оси OY, то ученикам можно напомнить вертикальную шкалу термометра и уже затем установить направление оси OY и показать, как откладывать на оси OY положительные и отрицательные числа. Необходимо подчеркнуть, что абсцисса точки и ее ордината — числа, геометрически им соответствуют отрезки.

Сравнение двух абсцисс проводится так же, как сравнение чисел на числовой оси (рис. 78): если $x_2 > x_1$, то точка x_2 расположена на оси OX правее точки x_1, подчеркивают, что $x_3 < x_4$, хотя отрезок Ox_3 больше отрезка Ox_4.

Аналогично сравнивают и значения ординат: если $y_2 > y_1$, то точка y_2 расположена выше точки y_1. На это необходимо обратить внимание. В частности, сразу можно отметить, что $y_4 > y_3$, но отрезок, соответствующий числу y_4, меньше отрезка, соответствующего числу y_3, длины этих отрезков соответствуют абсолютной величине чисел y_4 и y_3.

Учащихся подводят к этому выводу, рассматривая показания термометра. Ставят вопрос, какая температура больше: 5° или —6°? Как при этом расположен столбик ртути в термометре? Затем обобщить.

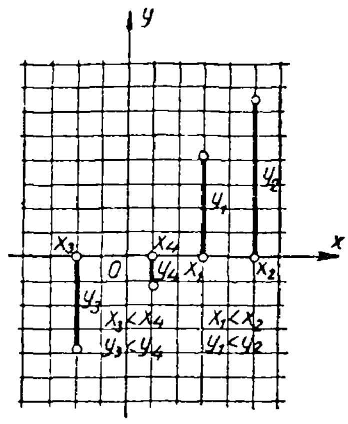


Рис. 78

В связи с построением точек по их координатам следует помнить, что во многих учебниках это построение делается излишне сложно. Чтобы найти точку M (2, 1) на координатной плоскости (рис. 79), предлагается на оси OX отложить отрезок, равный 2, на оси OY — равный 1, затем через концы этих отрезков провести прямые, параллельные OX и OY, тогда пересечение прямых даст точку M (2, 1). Здесь делается 4 построения. Такая система применяется на практике, когда функциональная зависимость задается графиком. Тогда на осях дается шкала, по которой отсчитывают значения независимой переменной и функции (рис. 137, рис. 140).

В школьной практике, особенно в дальнейшем при исследовании функций, удобнее следующая система.

Положение точки M (2, 1) определяется парой чисел (2, 1), поэтому и строить ее можно в два приема (рис. 80): 1) на оси OX откладывается отрезок, равный 2 (абсцисса); 2) из конца первого отрезка проводят перпендикулярно оси OX второй отрезок, равный 1 (ордината).

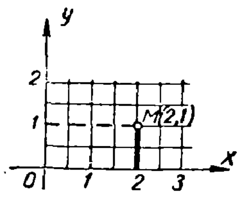


Рис. 79

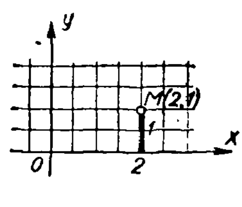


Рис. 80

Ординату на доске откладывают в масштабе по линейке, а в тетради по клеткам или по линейке.

Такое построение точки рациональнее (2 построения вместо 4) и удобнее для чтения графиков при исследовании функций.

При определении знака координат ученики должны уметь ответить на следующие вопросы.

1. Что можно сказать об абсциссе точки, расположенной:

а) в первой четверти; б) во второй четверти; в) в третьей четверти; г) в четвертой четверти? [для случая а) и г) положительны; б) и в) — отрицательны.]

2. Что можно сказать об ординате точки, расположенной: а) в первой четверти; б) во второй четверти; в) в третьей четверти; г) четвертой четверти? [а) и б) — положительны; в) и г) — отрицательны.]

3. Какой знак имеют координаты точки $M(x, y)$, если точка находится: а) в первой четверти; б) во второй четверти; в) третьей четверти; г) в четвертой четверти? (а) $x > 0$, $y > 0$; б) $x < 0$, $y > 0$; в) $x < 0$, $y < 0$; г) $x > 0$, $y < 0$).

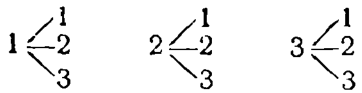
4. Что можно сказать о координатах точек, лежащих на оси: а) OX; б) OY?

В качестве дополнительных упражнений можно предложить:

1. Найти по карте (лучше взять карту в меркаторской проекции) пункты, имеющие следующие координаты: а) 38° сев. широты, 90° вост. долготы; б) 40° юж. широты, 8° зап. долготы и т. д.

2. Определить координаты: Москвы, Ленинграда, Парижа, Лондона, Буэнос-Айреса, Нью-Йорка.

Новый способ введения координат стали применять в экспериментальных классах школ США. Координаты рассматриваются как упорядоченные пары чисел. Берется ограниченное множество чисел, например множество $A = \{1, 2, 3\}$, и образуется новое множество $A \times A$, состоящее из упорядоченных пар (в школах США знак пересечения $\cap$).



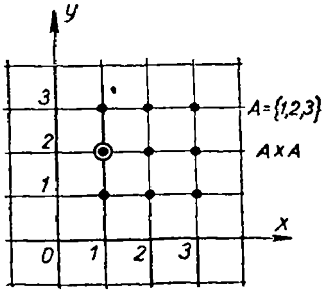


Рис. 81

Получили множество $A \times A = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (3, 1); (3, 2); (3, 3)\}$. Подчеркивается, что в полученных парах существенное значение имеет порядок чисел. Например, в паре (3,1) первое число пары 3, второе 1; при изменении получаем другую упорядоченную пару (1, 3). Множества вида $A \times A$ называют **картезианскими** или **декартовыми**.

Затем вводят координатную плоскость, оси координат и координатные точки. В частности, для картезианского множества $A \times A$, где $A = \{1, 2, 3\}$, графически соответствует множество девяти точек (рис. 81). Ученики решают обычные упражнения, но на картезианских множествах. Например, отмечают точки M (1, 2), на рисунке она обведена. В заключение переходят к множеству упорядоченных пар всех рациональных чисел $R \times R$.

§ 3. ПРЯМАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ. ГРАФИК ЗАВИСИМОСТИ $y = ax$

О прямой пропорциональности ученики знают по VI классу. Они учили, что если с увеличением (уменьшением) значения одной величины в несколько раз значение другой величины увеличивается (уменьшается) в такое же число раз, то такие величины называются прямо пропорциональными.

Ученики составляли таблицы для задач типа 1 *кг товара стоит* 25 *коп. Сколько стоит* 1 *кг*, 2 *кг*, 3 *кг*, 4 *кг*, 5 *кг*, 6 *кг*, 7 *кг этого товара*?

Кроме того, они знакомились с формулой $y = ax$.

Этот материал к моменту изучения его в VII классе в некоторой степени забыт, поэтому можно напомнить эту зависимость, решая, например, задачу.

Задача 1. *Составить формулу зависимости между периметром квадрата P и его стороной a.*

Решая, получим формулу $P = 4a$.

Можно спросить учащихся:

Что произойдет с периметром квадрата, если все его стороны увеличить (уменьшить) в 2 раза? 3 раза? 4, 5 раза?

Как называется такая зависимость в арифметике? Как называется коэффициент 4?

Какой формулой выражалась прямая пропорциональная зависимость между y и x при коэффициенте пропорциональности a?

К формуле $P = 4a$ можно добавить формулы из физики. Например, взять уравнение пути равномерного движения $s = vt$ и задать, в частности, скорость $v=2$ *м/сек*, тогда $s = 2t$ — зависимость того же вида, как и $P = 4a$.

Делается вывод, что вообще такая зависимость имеет вид $y = ax$.

Целесообразно объяснить ученикам, почему зависимость $y = ax$ называется прямо пропорциональной. При $x = x_1$ $y_1 = ax_1$(1), при $x = x_2$ $y_2 = ax_2$ (2). Делим равенство (2) на равенство (1) и получаем

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1}, \text{ то есть}$$

соответствующие значения y и x составляют пропорцию, из которой видно (для положительных значений y и x), что, во сколько раз увеличится x, во столько же раз увеличится и y.

Приступая к изучению прямо пропорциональной зависимости в алгебре, следует помнить, что вышеприведенное определение прямой пропорциональности из арифметики верно только для положительных чисел. Возьмем, например, зависимость $y = 3x$ и заполним таблицу:

x	1	2	3	4	5
$y = 3x$	3	6	9	12	15

Из таблицы видно, что если x увеличится в 2 раза, то y увеличится тоже в 2 раза.

Для той же зависимости $y = 3x$ составим таблицу, беря и положительные и отрицательные числа:

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5
$y = 3x$	-12	-9	-6	-3	3	6	9	12	15

Отношение чисел $(-4) : (-2) = 2$, но это не значит, что -4 в два раза больше -2, так как $-4 < -2$.

Поэтому прямо пропорциональную зависимость определяют в VII классе так:

1) *Зависимость между величинами* y и x, *выражаемая формулой* $y = ax$ (a *число,* $a \neq 0$), *называется прямо пропорциональной зависимостью.*

2) *Если отношение величин* y и x *равно числу* $a \neq 0$, *то такие величины называются прямо пропорциональными.*

Отсюда получаем зависимость $\frac{y}{x} = a$, или $y = ax$ ($a \neq 0$), которая и называется *прямо пропорциональной зависимостью.*

При такой формулировке коэффициент пропорциональности a может быть и отрицательным.

График зависимости строится по точкам и эмпирически устанавливается, что эта линия — прямая.

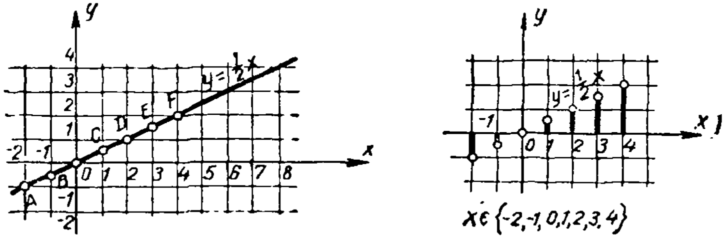
Пример 2. *Построить график зависимости* $y = \frac{1}{2}x$. Составим таблицу:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2

Построим точки $(-2,\ -1)$, $\left(-1,\ -\frac{1}{2}\right)$, $(0,\ 0)$, $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$, $(2,\ 1)$, $\left(3,\ 1\frac{1}{2}\right)$, $(4,\ 2)$.

Прикладывая линейку, убеждаемся, что все точки лежат на одной прямой. Но значение x изменяется, принимая все промежуточные значения между -2 и $+4$, а также все другие значения (рис. 82а), промежутки между точками A, B, O, C, D, E тоже заполнятся точками, которые будут лежать, судя по чертежу, на одной прямой линии. Над графиком пишут зависимость $y = \frac{1}{2}x$.

Предварительно можно построить график зависимости, когда $x \in M = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ (рис. 82,б), затем распространить



а) Рис. 82 б)

построение графика на случай $x \in R$, где R — множество рациональных чисел.

Доказательство того, что график зависимости $y = ax$ — прямая, относят в VIII класс.

Затем строится еще один, два графика для зависимостей $y = x$, $y = -\frac{1}{2}x$ и делается вывод.

1) График прямой пропорциональной зависимости — прямая.

2) График проходит через начало координат.

3) Такие графики можно строить по двум точкам.

4) Если $a > 0$, то график расположен в III и I четвертях, если $a < 0$, то во II и IV четвертях.

В дальнейшем график зависимости $y = ax$ строится по двум точкам. Точки лучше выбирать так, чтобы между ними был промежуток больше, тогда график будет точнее. В предыдущем примере можно для зависимости $y = \frac{1}{2}x$ взять:

I)

x	-2	4
y	-1	2

II)

x	0	1
y	0	$\frac{1}{2}$

График, выполненный по первой таблице, предпочтительнее (рис. 83), так как точки дальше отстоят одна от другой и погрешность чертежа будет меньше, чем в случае, где точки, определяющие график, сближены.

Кроме того, в первом случае имеется контрольная точка (0, 0), через которую должен пройти график зависимости $y = \frac{1}{2}x$.

В упражнениях ученики должны:

1) понять, что в прямо пропорциональной зависимости величин y и x отношение $\frac{y}{x}$ не меняется (в данной задаче);

2) уметь строить график зависимости $y = ax$ (по 2 точкам);

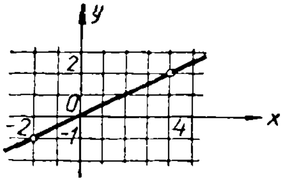


Рис. 83

3) по графику найти для данного значения x соответствующее значение y;

4) по графику для данного значения y найти соответствующее значение x.

Готовя к VIII классу, полезно научить учащихся видеть на чертеже положительные и отрицательные ординаты. Например, возвратившись к графику зависимости $y = \frac{1}{2}x$ (рис. 84), учеников спрашивают:

1. Показать точки оси OX для которых $x > 0$. (Ученик проводит от начала координат O по оси OX вправо.)

2. Показать точки оси OX, для которых $x < 0$. (Ученик проводит от начала координат O по оси OX влево.)

3. На оси OX взята точка x_1 (рис. 85), показать соответствующую ей ординату. (Ученик в точке x_1 восставляет перпендикуляр до пересечения его с графиком; обозначает этот отрезок — y_1.

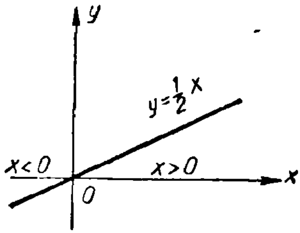


Рис. 84

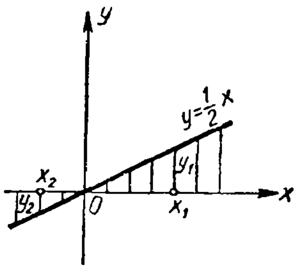


Рис. 85

4. Что можно сказать о знаке y_1? ($y_1 > 0$.)

5. Что можно сказать о всех ординатах графика $y = \frac{1}{2}x$ при $x > 0$? (Все ординаты положительны.)

6. Как это записать? (Если $x > 0$, то $y > 0$.)

7. На оси OX взять точку $x_2 < 0$. Показать соответствующую ей ординату. Что можно сказать о знаке y_2?

Вывод. При $x < 0$, $y < 0$; при $x = 0$, $y = 0$; при $x > 0$, $y > 0$.

Затем можно затронуть вопрос возрастания и убывания y. К понятию подводят, рассматривая на графике изменение значений y в зависимости от изменения значений x. По графикам (рис. 86 и рис. 87) ученики отвечают на вопросы:

1. Что больше: x_1 или x_2? ($x_2 > x_1$, так как x_2 правее x_1.)
2. Показать значения y_1 и y_2, соответствующие x_1 и x_2. (Проводят y_1 и y_2.)

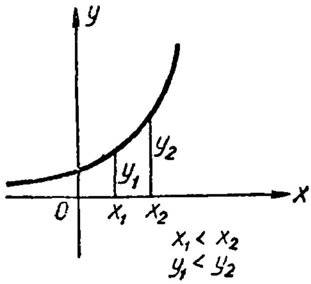


Рис. 86

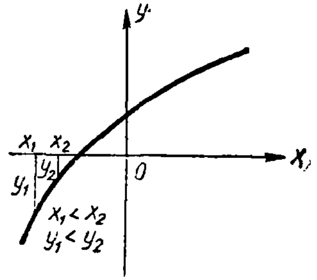


Рис. 87

3. Что больше: y_1 или y_2? ($y_2 > y_1$, так как конец ординаты y_2 выше конца ординаты y_1.)

В этом случае большему значению x соответствует большее значение y, y — возрастает.

Аналогично определяется убывание y (рис. 88 и рис. 89).

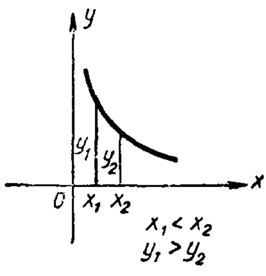


Рис. 88

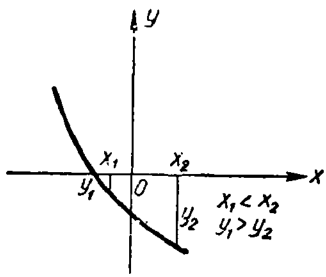


Рис. 89

§ 4. ГРАФИК ЗАВИСИМОСТИ $y = ax + b$

Проще всего подвести к зависимости от решения задачи.

Задача 1. *Автомобиль находится в 5 км от города и движется от него по шоссе со скоростью 60 км/ч. На каком расстоянии от города он будет через 2 часа? 3 часа? t часов?*

Решение. $s = 5 + 60 \cdot 2$; $s = 5 + 60 \cdot 3$; наконец, $s = 5 + 60t$.

В качестве второго примера можно взять задачу 2: *Определить количество теплоты, потребное для нагревания 8 г вещества с 5° до $t°$ при удельной теплоемкости* 0,1. Ответ. $Q = 0{,}1 \cdot 8\,(t - 5)$, или $Q = 0{,}8t - 4$.

При построении графика зависимости сначала строят график зависимости с числовыми данными.

Задача 3. *Построить график зависимости* $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Сравним зависимость $y = \frac{1}{2}x + 1$ с зависимостью $y = \frac{1}{2}x$.

Таблица 42

x	-2	0	2	4	6
$y = \frac{1}{2}x$	-1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{2}x + 1$	0	1	2	3	4

В зависимости $y = \frac{1}{2}x + 1$ каждому значению x соответствует значение y на 1 больше, чем в зависимости $x = \frac{1}{2}x$ (рис. 90).

График $y = \frac{1}{2}x + 1$ — тоже прямая, параллельная графику $y = \frac{1}{2}x$, сдвинутая вверх на 1 (смотреть по оси OY).

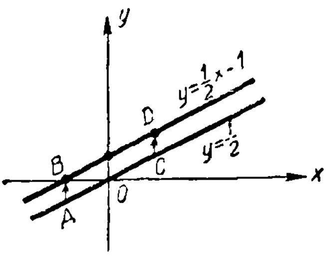


Рис. 90

Можно рассмотреть четырехугольник $ABDC$, в нем $AB = DC$ и $AB \parallel DC$, следовательно, $ABDC$ — параллелограмм и $BD \parallel AC$. График — прямая, поэтому для построения достаточно знать две его точки.

Кроме обычных вопросов о построение графика и о нахождении значения y по данному значению x и обратно, можно задать вопрос о знаке y, найти интервалы, в которых $y > 0$, $y < 0$. В этом случае исследование сложнее.

Задача 4. *Построить график зависимости* $y = 2x - 3$. *При каких значениях* x $y = 0$, $y > 0$, $y < 0$?

Решение. График линейной зависимости — прямая. Находим две точки графика (беря $x = 0$, затем $y = 0$) и строим график (рис. 91).

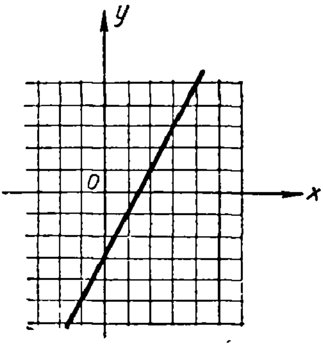


Рис. 91

x	0	$1\frac{1}{2}$
y	-1	0

1) Правее точки $x = 1\frac{1}{2}$ все ординаты положительны, следовательно, при $x > 1\frac{1}{2}$ $y > 0$.

2) Левее точки $x = 1\frac{1}{2}$ $y < 0$.

3) При $x = 1\frac{1}{2}$ $y = 0$.

Итак, при $x < 1\frac{1}{2}$ $y<0$, при $x = 1\frac{1}{2} y=0$, при $x > 1\frac{1}{2}$ $y > 0$.

Полезно графически решить несколько задач на движение. Сначала устанавливаем, что формулы $S = vt$ и $S = a + vt$ — зависимости линейные, значит, их графики — прямые, каждую из них определяют две точки.

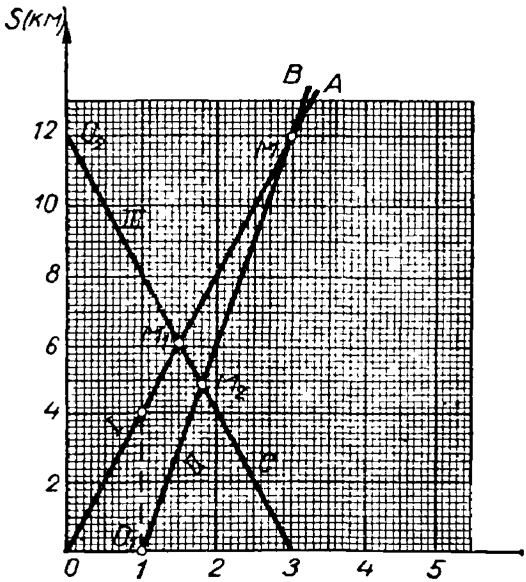


Рис. 92

Например, один пешеход вышел из пункта и идет со скоростью 4 *км/ч*, тогда уравнение его пути будет $S = 4t$. График его пути прямая, найдем две точки его: при $t_0 = 0$ $S_0 = 0$, при $t_1 = 1$ $S_1 = 4$; график его пути — луч OA (рис. 92).

Пусть второй пешеход вышел на 1 час позже и идет со скоростью 6 *км/ч*. Не составляя формулы пути, найдем две точки графика: при $t_0 = 1$ $S_0 = 0$, при $t_1 = 2$ $S_1 = 6$; график — луч O_1B.

Графики этих путей пересеклись в точке M (3, 12). Абсцисса точки пересечения дает время встречи — 3 часа, ордината — пройденное расстояние — 12 *км*. Пусть третий пешеход вышел одновременно с первым из пункта, отстоящего от первого пункта на 12 *км* и идет со скоростью 4 *км/ч*. Не составляя формулы пути, найдем две точки графика пути: при $t_0 = 0$ $S_0 = 12$, при $t_1 = 1$ $S_1 = 8$; график пути — луч O_2C.

Координаты точек пересечения его с лучами OA и O_1B дают время встречи третьего пешехода с первым и вторым и расстояние встречи от начального пункта.

§ 5. ГРАФИК ЗАВИСИМОСТИ $y = \frac{a}{x}$

Так же, как и при изучении прямо пропорциональной зависимости, в начале повторяют известное из арифметики определение обратно пропорциональных величин, и формулы $y = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$, или $xy = a$. Также приходится сказать, что данное в арифметике определение верно только для положительных значений x и y и формулу можно рассматривать только при $a \neq 0$.

Следует дать определение:

если произведение величин x и y равно числу $a \neq 0$, то такие величины называются обратно пропорциональными.

К зависимости $y = \frac{a}{x}$ можно подойти от решения задачи:

Пусть тело, двигаясь равномерно, прошло 6 км. Какая зависимость между его скоростью v и временем движения t?

Решение. Возьмем уравнение пути $S = vt$, по условию $S = 6$ *км*, следовательно, $vt = 6$, откуда

$$v = \frac{6}{t}$$

По смыслу $v > 0$, $t > 0$ и потому из формулы следует, что с увеличением времени t в несколько раз дробь $\frac{6}{t}$, а следовательно, и скорость v во столько же раз уменьшается.

После этого дается определение обратно пропорциональной зависимости и пишется формула

$$y = \frac{a}{x}.$$

Можно показать, почему в общем случае эта зависимость носит название обратной пропорциональности.

При x_1 $y_1 = \frac{a}{x_1}$ (1), при x_2 $y_2 = \frac{a}{x_2}$ (2). Делим равенство (2) на равенство (1) и получаем пропорцию

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_1}{x_2},$$

из которой наглядно видна обратная пропорциональность чисел y_2, y_1, x_2 и x_1.

Ученики должны уметь приводить примеры обратно пропорциональных величин.

Вид графика определяется эмпирически путем построения его по точкам.

Пример. *Построить график зависимости* $y = \frac{6}{x}$.

x	-6	-3	-1	0	1	3	6
y	-1	-2	-6	не сущ.	6	2	1

Обращаем внимание учеников, что: 1) при $x = 0$ y не существует; 2) график разрывается в этой точке на две ветви; 3) график — кривая линия (рис. 93).

Оси координат — асимптоты графика $y = \frac{6}{x}$, поэтому необходимо следить, чтобы на чертежах учащихся кривые по мере удаления от начала координат постепенно приближались к осям координат, но не касались их.

Перечень вопросов к графику обратно пропорциональной зависимости тот же, что и для линейной функции.

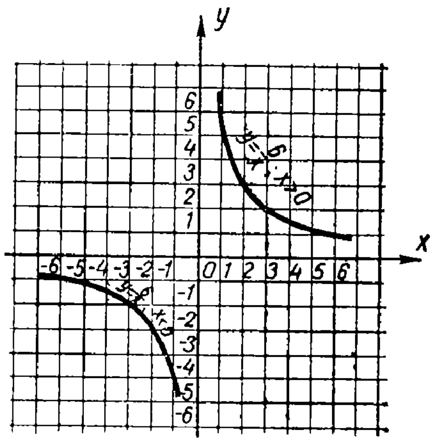


Рис. 93

ГЛАВА
X

СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В теме «Системы линейных сравнений с двумя неизвестными» ученики должны усвоить: 1) решение линейного уравнения с двумя неизвестными—пара чисел; множество решений такого уравнения бесконечно; 2) решение системы двух уравнений; — пара чисел, удовлетворяющих обоим уравнениям системы. Иначе решение системы — пересечение множеств решений обоих уравнений. Запись (x_1, y_1) тоже подчеркивает, что решение системы — пара чисел.

В теме большое значение имеют графические иллюстрации. При графическом решении системы уравнений пары значений неизвестных находят приближенно, поэтому проверка — органическая часть решения. Хорошо на уроках продемонстрировать кинофрагменты.

§ 2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Два множества могут не иметь общих элементов, например множество тетрадей в магазине школьных принадлежностей и множество шахт в Донбассе. Интерес представляет случай, когда два множества имеют общие элементы.

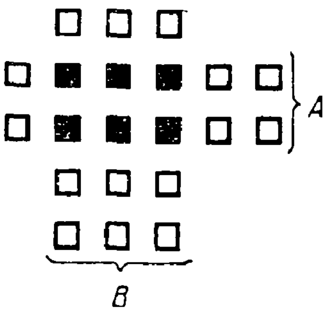


Рис. 94

Возьмем на карте множество союзных республик, граничащих с УССР {РСФСР, БССР, Молдавская ССР}.

Затем возьмем множество союзных республик, граничащих с Черным морем {УССР, РСФСР, Молдавская ССР}.

Эти два множества имеют общие элементы, которые образуют новое множество, а именно {РСФСР, Молдавская ССР}.

Возьмем еще два множества квадратов A и В (рис. 94). Черные квадраты являются общими для множеств A и B, они образуют новое множество.

Затем дается или термин *пересечение множеств*, или термин и определение.

Множество всех общих элементов двух данных множеств называется пересечением этих множеств.

Знак пересечения множеств $\cap$. Например, возьмем два множества $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 3, 6\}$; общие их элементы 2 и 3 образуют множество $C = \{2, 3\}$. Это множество — пересечение множеств A и B, что записывают $A \cap B = C$, или $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$.

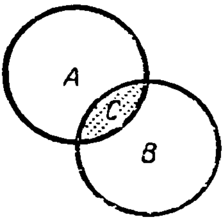


Рис. 95

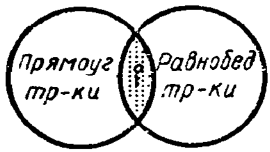


Рис. 96

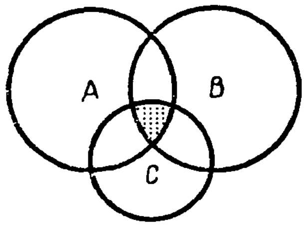


Рис. 97

Пересечение можно наглядно показать с помощью кругов (рис. 95).

Упражнение 1. *Найти пересечение множеств*: 1) $M = \{3, 4\}$ и $N = \{3, 7\}$; 2) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{2, 4, 6\}$. 3) *Прямоугольных треугольников и равнобедренных треугольников* (рис. 96).

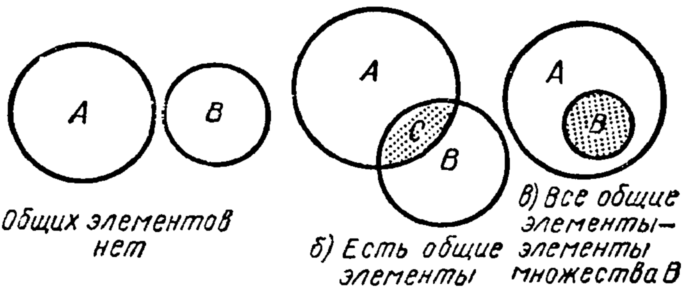


Рис. 98

Упражнение 2. *Показать на чертеже, что*: а) $\{2, 4\} \cap \{4, 5\} = \{4\}$; б) $\{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{3, 6, 7\} = \{3, 7\}$.

Можно поставить вопрос о пересечении трех (и более) множеств (рис. 97), даже выяснить, что $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Упражнение 3. *На рисунке 98 даны три возможных случая задачи о пересечении двух множеств. Рассмотреть все три случая.*

Ответ. а) $A \cap B = \varnothing$, то есть пересечение — пустое множество.

б) $A \cap B = C$.

в) $A \subset B$, то есть B — подмножество A.

§ 3. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Возьмем равенство, содержащее две буквы, например

$$2x + 3y = 5.$$

Подставим в него различные пары значений x и y:

1) $x = 0$, $y = 3$: $2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 5$ — равенство неверное;

2) $x = 1$, $y = 1$: $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$ — равенство верное;

3) $x = -2$, $y = 3$: $-2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 5$ — тоже.

Вывод. При одних парах значений x и y данное равенство обращается в верное, при других — в неверное.

Учитель говорит, что когда стоит задача найти пары значений букв, которые при подстановке обращают данное равенство в верное, то равенство называют уравнением, после чего даются определения:

1) *Равенство, содержащее две буквы, пары значений которых надо найти, называется, уравнением с двумя неизвестными.*

2) *Пара значений неизвестных, которые при подстановке в уравнение обращают его в верное равенство, называется решением уравнения.*

Затем выполняют упражнения на отыскание решений одного уравнения с двумя неизвестными, причем подчеркивается, что такое уравнение имеет бесконечное множество решений.

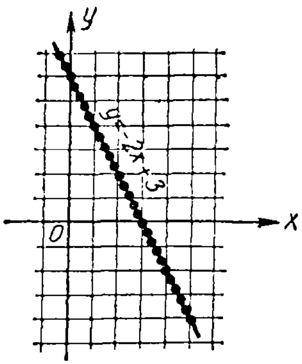


Рис. 99

Кроме того, надо определение равносильности уравнений и теоремы о равносильности распространить на уравненения с двумя неизвестными: *два уравнения с двумя неизвестными, множества решений которых совпадают, называются равносильными.*

Теоремы о равносильности уравнений с двумя неизвестными формулируются и доказываются аналогично теоремам для уравнений с одним неизвестным. В школе их обычно только сообщают.

В заключение новые понятия иллюстрируют на графиках. Возьмем, например, уравнение $2x + y = 3$, оно равносильно уравнению $y = -2x + 3$, которое выражает линейную зависимость, ее график — прямая (рис. 99). Поэтому график данного уравнения тоже прямая.

Пара чисел (1; 1) — решение уравнения $2x + y = 3$, так как равенство $2 \cdot 1 + 1 = 3$ — верное. Геометрически ему соответствуют координаты точки (1; 1). Но прямая — бесконечное множество точек, значит, одно уравнение с двумя неизвестными имеет бесконечное множество решений.

Наряду с уравнениями с двумя неизвестными, имеющими бесконечное множество решений, можно дать примеры других уравнений. Например, на множестве рациональных чисел уравнение $x^2 + y^2 = 0$ имеет только одно решение (0, 0), а уравнение $x^2 + y^2 = -5$ не имеет ни одного решения.

После предварительного рассмотрения темы или в начале урока можно показать кинофрагмент, иллюстрирующий графическое решение одного линейного уравнения с двумя неизвестными. В нем очень удачно демонстрируется бесконечность множества решений уравнений с двумя неизвестными.

§ 4. ВВЕДЕНИЕ ПОНЯТИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

К системе уравнений можно подойти: 1) от задачи; 2) графически. Рассмотрим каждый прием отдельно.

I. Первый способ.

Задача. *Сумма двух чисел равна 7, а их разность — 3. Найти эти числа.*

Пусть x и y — искомые числа, по условию задачи

$$x + y = 7 \quad (1),$$

$$x - y = 3 \quad (2),$$

то есть для решения задачи получили два уравнения. Надо найти такие значения x и y, которые одновременно удовлетворяют обоим уравнениям. Для этого берем пары значений x и y, удовлетворяющих уравнению (1), и проверяем, удовлетворяют ли они уравнению (2):

Таблица 43

x	0	1	2	3	4	5	6	...
y	7	6	5	4	3	2	1	...
$x + y$	7	7	7	7	7	7	7	...
$y - y$	-7	-5	-3	-1	1	3	5	...

Следовательно, пара значений $x = 5$ и $y = 2$ удовлетворяет обоим уравнениям (1) и (2) и служит ответом на вопрос задачи.

Вопросы к ученикам.

1. Что надо найти для уравнений (1) и (2)? (Значения x и y, удовлетворяющие обоим уравнениям.)

2. Сколько решений имеет одно уравнение (1)? (Бесконечно много.)

3. Как проверить, какие из этих решений удовлетворяют уравнению (2)? (Подставить пары значений x и y в оба уравнения.)

4. Какая пара значений x и y из таблицы удовлетворяет обоим уравнениям? ($x = 5$, $y = 2$.)

Затем дается одно из следующих определений:

1. *Два уравнения, для которых надо найти значения неизвестных, удовлетворяющих одновременно обоим уравнениям, называются системой уравнений.*

2. *Несколько уравнений, для которых надо найти общие решения, называются системой уравнений.*

3. *Несколько уравнений, для которых надо найти пересечение множеств их решений, называются системой уравнений.*

В последнем случае до определения учитель устанавливает, что пара значений неизвестных 5 и 2 есть пересечение множеств решений обоих уравнений.

Для VII класса достаточно определение (1) или (2). Впоследствии придется его расширить для случая большего числа уравнений.

Знак системы $\{$.

Системы различают по числу уравнений и их степени. Система, составленная по данной задаче, — система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

Вводится определение решения системы:

1. *Пара значений неизвестных, одновременно удовлетворяющих обоим уравнениям системы, называется решением системы.*

2. *Пересечение множеств решений называется решением системы.*

Решение можно писать различно: 1) $x = 5$, $y = 2$; 2) $\begin{cases} x = 5; \\ y = 2; \end{cases}$ 3) (5; 2).

Чтобы показать, что других решений данная система не имеет, можно построить графики уравнений, составляющих систему.

По этим графикам ученики находят пары значений x и y, которые одновременно удовлетворяют уравнениям $x + y = 7$ и $x - y = 3$; геометрически эта пара выражается абсциссой (x) и ординатой (y) общей точки графиков уравнений. Две прямые пересекаются в одной точке (5; 2), поэтому других решений, кроме $x = 5$,

$y = 2$, система не имеет. Этим обоснована запись решения системы (5; 2) как точки.

Построение графиков можно заменить демонстрацией кинофрагмента, показывающего, что графики уравнений пересекаются.

II. Второй способ.

Задача. *Найти общие решения уравнений $x + y = 3$ и $x - y = 1$.*

Каждое из этих уравнений имеет бесконечное множество решений. Надо найти их общие решения (то есть пересечение множеств их решений).

Построим графики данных уравнений.

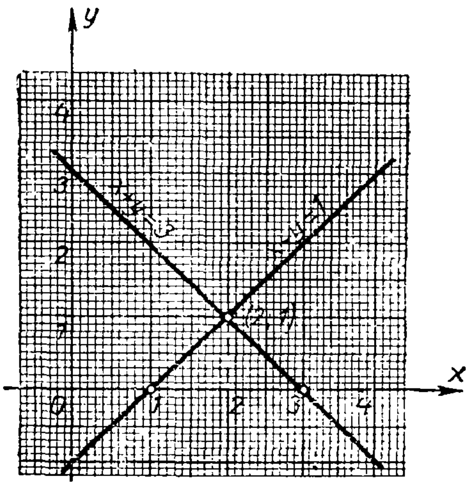


Рис. 100

Графики уравнений $x + y = 3$ и $x - y = 1$ пересеклись в точке M (2; 1) (рис. 100). Ее координаты удовлетворяют обоим уравнениям: $2 + 1 = 3$ и $2 - 1 = 1$ — равенства верные. Следовательно, пара чисел (2; 1) — общее решение данных уравнений, причем оно единственное, так как прямые могут иметь только одну точку пересечения.

После этого дается определение системы уравнений (1 или 3) и определение решения системы (1 или 2).

Следует подчеркнуть, что графически можно найти значения x и y только приближенно, поэтому необходимо сделать проверку и только после нее давать точный или приближенный ответ.

И в этом случае нужно показать часть кинофрагмента, соответствующую теме.

При желании учитель может наглядно показать, что решение системы есть пересечение множеств решений уравнений, входящих в систему. Для этого следует решить систему на множестве точек, состоящем из небольшого числа элементов.

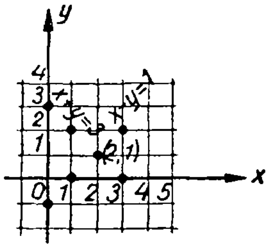


Рис. 101

Решим предыдущую систему на множестве значений $x \in M = \{0, 1, 2, 3\}$, пусть A — множество решений уравнения $x + y = 3$, B — множество решений уравнения $x - y = 1$, тогда

$$A = \{(0,3);\ (1,2);\ (2,1);\ (3,0)\},$$
$$B = \{(0,-1);\ (1,0);\ (2,1);\ (3,2)\}.$$

Решение системы — общий элемент множеств A и B, а именно: (2, 1). Поэтому пересечение множеств $A \cap B = \{(2, 1)\}$ является решением системы.

Для иллюстрации строят графики обоих уравнений системы на заданном конечном множестве значений x (рис. 101). На этом графике ясно видно, что точка (2,1) — решение данной системы и, кроме того, это — пересечение множеств A и B.

Можно поставить вопрос и об объединении множеств решений нескольких уравнений. Так ставится вопрос, например, когда данное уравнение распадается на несколько уравнений, например, $(x - a)(x - b)(x - c) = 0$. В этом случае надо найти объединение множеств решений трех уравнений $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$.

§ 5. ОБОСНОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Существует несколько способов обоснования решения системы уравнений в VII классе:

I) на основании свойств равенств; в этом случае понятие равносильности не дается; II) используется такая линейная комбинация левых частей уравнений системы, которая позволяет исключить сначала одно неизвестное, а затем другое; III) на основании равносильности систем уравнений, причем теоремы не даются; равносильность устанавливают при решении путем рассуждений; IV) на основании теорем о равносильности систем уравнений.

I. Решение на основании свойств равенств. Предварительно надо повторить свойства равенств (глава III) или вновь изучить их.

Пример 1. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} 2x + 3y = 8; \\ 5x - 2y = 1. \end{cases}$

Решение. Предположим, что есть значения x и y, которые одновременно удовлетворяют обоим уравнениям системы.

Уравняем абсолютные величины коэффициентов при y:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases} \left|\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right| \begin{cases} 4x + 6y = 16 \\ 15x - 6y = 3 \end{cases}$$ Два равенства можно почленно сложить

$$\overline{19x = 19;\ x = 1.}$$

Остается найти значение y; подставим найденное значение x в первое уравнение системы:

$$2 \cdot 1 + 3y = 8; \ \ 3y = 6; \ \ y = 2.$$

Далее следует проверка:

$$\begin{array}{ll} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8; & \underline{8 = 8;} \\ 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 1; & \underline{1 = 1.} \end{array} \quad \text{Ответ. } (1;\ 2).$$

В этом случае проверка является органической частью решения. Здесь $19x$ — линейная комбинация левых частей уравнений, а именно $19x = 2(2x + 3y) + 3(5x - 2y)$.

II. Используем линейную комбинацию левых частей уравнений системы дважды.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y = 8 \\ 5x - 2y = 1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{rr} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{array}\right| \text{Два равенства можно почленно сложить}$$

$$\begin{array}{ll} 19x = 19; & x = 1; \\ 19y = 38; & y = 2; \end{array}$$

Проверка.

$$\begin{array}{ll} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8; & 8 = 8; \\ 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1; & 1 = 1. \end{array} \quad \text{Ответ. } (1;\ 2).$$

Здесь $19x$ и $19y$ — линейные комбинации левых частей уравнений системы; убедимся в этом для $19y$:

$$19y = 5(2x + 3y) - 2(5x - 2y).$$

III. Решение, при котором равносильность уравнений системы обосновывается в процессе решения, рассмотрим в следующем параграфе.

IV. Теорема. *Системы* $\left\{\begin{array}{l} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \end{array}\right.$ *и* $\left\{\begin{array}{l} f_1 = 0, \\ mf_1 + nf_2 = 0 \end{array}\right.$ где $n \neq 0$, *равносильны*.

Доказательство. При всех значениях x и y, при которых $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, верно и $mf_1 + nf_2 = 0$. Обратно, при всех значениях x и y, при которых $f_1 = 0$ и $mf_1 + nf_2 = 0$, будет и $nf_2 = 0$, но $n \neq 0$, значит, $f_2 = 0$. Следовательно, обе системы равносильны.

Здесь выражение $mf_1 + nf_2$ — тоже линейная комбинация выражений f_1 и f_2.

Решим ту же систему:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y - 8 = 0 \\ 5x - 2y - 1 = 0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 2; \\ 3; \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 2x + 3y - 8 = 0; \\ 2(2x + 3y) + 3(5x - 2y) - 16 - 3 = 0; \end{array}\right.$$

$$\begin{cases}2x+3y=8;\\19x=19;\end{cases}\quad\begin{cases}2\cdot 1+3y=8;\\x=1;\end{cases}\quad\begin{cases}3y=6;\\x=1;\end{cases}\quad\begin{cases}x=1;\\y=2.\end{cases}$$

Первая и вторая системы равносильны по доказанной теореме. Далее следуют преобразования.

§ 6. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

В VII классе рассматривают два способа решения системы двух уравнений с двумя неизвестными: I) способ подстановки; II) способ сложения.

I. Способ подстановки.

Систематические упражнения лучше начать со способа подстановки, так как после ознакомления со способом сложения учащиеся неохотно решают системы уравнений подстановкой.

Решение системы уравнений можно начать с гипотезы о наличии решения (x, y); затем, используя свойства равенств и теоремы о равносильности (для одного уравнения), находят значения x и y. В заключение делается проверка решения, это служит доказательством того, что найденные значения — решения системы.

Можно обосновать равносильность систем, полученных при решении; тем самым будет доказано, что найденные значения x и y — решение исходной системы; проверка решения делается только для того, чтобы установить, не было ли сделано ошибки в вычислениях.

Пример 1. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases}3x+2y=8;\\2x-3y=1.\end{cases}$$

Решение. Имеем

$$\begin{cases}3x-2y=8;\\2x-3y=1.\end{cases}\quad(1)$$ выразим в первом уравнении y через x.

$$\begin{cases}y=\dfrac{8-3x}{2};\\2x-3y=1.\end{cases}\qquad(2)$$

Системы (1) и (2) равносильны, так как уравнения $3x+2y=8$ и $y=\frac{8-3x}{2}$ равносильны.

Подставим во второе уравнение системы (1) $\frac{8-3x}{2}$ вместо y;

$$\begin{cases} y = \dfrac{8 - 3x}{2}; \\ 2x - 3 \cdot \dfrac{8 - 3x}{2} = 1. \end{cases} \qquad (3)$$

Но $\dfrac{8 - 3x}{2}$ равно y при всех парах значений x и y, являющихся решением систем (1) и (2), следовательно, система (3) равносильна системе (2).

Далее делаем упрощения и находим:

$$\begin{cases} y = \dfrac{8 - 3x}{2}; \\ 4x - 24 + 9x = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{8 - 3x}{2}; \\ 13x = 26; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{8 - 3x}{2}; \\ x = 2. \end{cases} \qquad (4)$$

Надо найти значения x и y, которые одновременно удовлетворяют обоим уравнениям системы, поэтому

$$\begin{cases} y = \dfrac{8 - 3 \cdot 2}{2}; \\ x = 2; \end{cases} \quad (5) \qquad \begin{cases} x = 2; \\ y = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Проверка. $3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$; $\underline{8 = 8}$;

$2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$; $\underline{1 = 1}$.

Ответ. (2; 1).

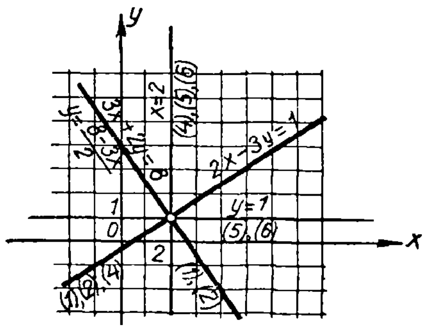


Рис. 102

Можно дать графическую иллюстрацию равносильности полученных систем уравнений. Если системы равносильны, то они имеют одно и то же решение, следовательно, для каждой из этих систем решение (координаты точки пересечения) одинаково, а точка пересечения — общая (рис. 102).

1) $3x + 2y = 8$

x	0	$2\frac{2}{3}$
y	4	0

2) $2x - 3y = 1$

x	0	$\frac{1}{2}$
y	$-\frac{1}{3}$	0

[системы (1) и (2)]

3) $2x-3\cdot\frac{8-3x}{2}=1$

или $x=2$

x	2	2
y	0	1

[системы (3), (4)]

4) $y=1$

x	0	2
y	1	1

[системы (5), (6)]

Аналогично можно дать иллюстрацию равносильности и при решении других систем.

На решение систем уравнений первой степени способом подстановки затрачивается около двух часов, основное внимание уделяется другому способу.

II. Способ сложения.

Вместо традиционного названия *способ сложения и вычитания*, или *способ алгебраического сложения*, называем *способ сложения*, так как опыт показывает, что целесообразнее сводить решение линейных систем только к сложению, подбирая соответствующие множители для обеих частей уравнений системы. Алгоритм такого решения однообразен и потому более четок.

Способ основан на свойстве равенств: *если* $a=b$ и $c=d$, *то* $a+c=b+d$ *и* $a-c=b-d$. Объяснить первое свойство можно, если не давали раньше в VI классе, как указано в § 9 главы III.

К способу сложения можно подвести, решая системы уравнений.

Пример 1. *Решить систему уравнений*:

$$\begin{cases}x+y=13;\\ x-y=\ \ 3.\end{cases}$$

Решение. Сперва предполагают, что система имеет решение (x, y). Затем учеников спрашивают, нельзя ли получить из уравнений системы такое уравнение, чтобы оно содержало одно неизвестное. Обычно кто-нибудь отвечает, что надо оба уравнения сложить, и появляется запись

$$\begin{cases}x+y=13\\ x-y=\ \ 3\end{cases}\Bigg|\ \text{два равенства можно сложить}$$

$$2x=16;\quad x=8.$$

При этом уместно спросить: почему взаимно уничтожились y и $-y$?

Затем спрашивают, как получить значение y, и ученики обычно говорят, что, зная значение $x=13$, можно найти значение y из первого или второго уравнения систем, например:

$$8+y=13 \text{ и } y=5.$$

Необходимо сделать проверку:
$8+5=13$ и $8-5=3$ — равенства верные. О т в е т (8; 5).
После этого берут систему уравнений вида

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-2y=7 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 5x+2y=9; \\ 7x+2y=11. \end{cases}$$

Установив, что во всех решенных примерах члены с y уничтожались, так как коэффициенты при y имели одинаковые абсолютные величины и противоположные знаки, можно взять более общий случай.

П р и м е р. *Решить систему*

$$\begin{cases} 3x-4y=5; \\ 5x+6y=21. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. От учеников добиваются путем наводящих вопросов, что надо уравнять абсолютные величины коэффициентов при y, их наименьшее кратное равно 12; вторым вопросом устанавливают, что первое уравнение системы надо умножить на 3, второе на 2, после чего решение будет:

$$\begin{cases} 3x-4y=5 \\ 5x+6y=21 \end{cases} \left|\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\right. \begin{cases} 9x-12y=15 \\ 10x+12y=42 \end{cases} \left| \begin{matrix} 5\cdot 3+6y=21; \\ 5+2y=7; \\ 2y=2;\ y=1. \end{matrix}\right.$$
$$\overline{19x=57;\ x=3.}$$

П р о в е р к а. $3\cdot 3-4\cdot 1=5$; $\underline{5=5}$; $5\cdot 3+6\cdot 1=21$; $\underline{21=21}$.

О т в е т. (3; 1).

П р и м е р 3. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} 3x+2y=8; \\ 2x-3y=1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Умножим оба уравнения данной системы так, чтобы коэффициенты при одном неизвестном стали равны по абсолютной величине и противоположны по знаку (в данном случае при y):

$$\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2x-3y=1 \end{cases} \left|\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\right. \qquad (1)$$

$$\begin{cases} 9x+6y=24; \\ 4x-6y=2. \end{cases} \qquad (2)$$

Системы (1) и (2) равносильны по теореме 2 о равносильности уравнений.

Наша задача — получить из системы одно уравнение, такое, чтобы в нем осталось только одно неизвестное. При сложении уравнений $6y$ и $-6y$ взаимно уничтожатся, поэтому сложим (отсюда название способа) по свойству равенств оба уравнения и присоединим к нему первое из уравнений системы (2):

$$\begin{cases} 9x+4y=24+2; \\ 9x+6y=24. \end{cases} \qquad (3)$$

Можно было бы обосновать равносильность систем (2) и (3) следующим образом.

Все значения x и y, которые удовлетворяют системе (2), удовлетворяют и первому уравнению системы (3) по свойству суммы равенств и, очевидно, второму уравнению.

Обратно, все значения x и y, которые удовлетворяют системе (3), удовлетворяют и системе (2), так как одно их уравнение одинаковое, а уравнению $4x - 6y = 2$ удовлетворяют по свойству разности равенств $(9x + 6y) + (4x - 6y) = 26$ и $9x + 6y = 24$ (эту часть с учащимися часто опускают.)

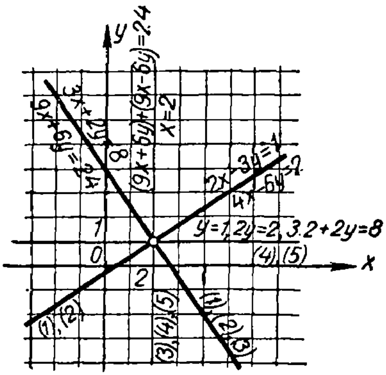


Рис. 103

Очевидно, второе уравнение для решения лучше брать в виде $3x + 2y = 8$. Форма $9x + 6y = 24$ нужна для доказательства того, что значения x и y, удовлетворяющие системе (3), удовлетворяют и системе (1).

Но в школе это не делают. Считается вполне достаточным, что учащиеся используют для решения свойства равенств с обязательной проверкой решения.

Далее решение состоит в упрощении.

$$\begin{cases} 13x = 26; \\ 3x + 2y = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2; \\ 3 \cdot 2 + 2y = 8; \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} x = 2; \\ 2y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2; \\ y = 1. \end{cases} \qquad (5)$$

Проверка. $3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8;\ 8 = 8;$
$2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1;\ 1 = 1.$

Ответ. (8; 1).

И в этом случае хорошей иллюстрацией служит графическое толкование решения системы (рис. 103).

1) $3x + 2y = 8$

x	0	$2\frac{2}{3}$
y	4	0

[системы (1), (2)]

2) $2x - 3y = 1$

x	0	$\frac{1}{2}$
y	$-\frac{1}{3}$	0

3) $(9x+6y)+(4x-6y)=26$, или $x=2$
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline x & 2 & 2 \\ \hline y & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$$
[системы (3), (5)]

4) $3\cdot 2+2y=8$, или $y=1$
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline x & 0 & 2 \\ \hline y & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$
[системы (4) и (5)]

При решении примера первая запись была излишне подробной. Для экономии времени запись укорачивают. Например:

Решение.

$$\begin{array}{r|l}
\begin{cases}3x+2y=8 & \vert\ 3\\ 2x-3y=1 & \vert\ 2\end{cases} & \text{в (1): } 3\cdot 2+2y=8;\\
+\begin{cases}9x+6y=24\\ 4x-6y=\ \ 2\end{cases} & 6+2y=8;\\
13x=26; & 2y=2;\\
x=2. & y=1.
\end{array}$$

Проверка. $3\cdot 2+2\cdot 1=8;\ \ 6+2=8;\ \ \underline{8=8;}$
$2\cdot 2-3\cdot 1=1;\ \ 4-3=1;\ \ \underline{1=1.}$

Ответ. (2; 1).

В дальнейшем эту запись следует еще укоротить, а именно не писать вторую систему:

$$\begin{array}{r|l}
\begin{cases}3x+2y=8 & \vert\ 3\\ 2x-3y=1 & \vert\ 2\end{cases} & \text{в (1): } 3\cdot 2+2y=8;\\
 & 2y=2;\\
13x=26;\ x=2 & y=1.
\end{array}$$

Проверка. $3\cdot 2+2\cdot 1=8;\ 6+2=8;\ \underline{8=8;}$
$2\cdot 2-3\cdot 1=1;\ \ 4-3=1;\ \underline{1=1.}$

Ответ. (2; 1).

Можно дать вариант решения, используя линейную комбинацию частей уравнения для исключения обоих неизвестных:

$$\begin{cases}3x-8y=\ \ 21 & \vert\ 7\ \vert\ -2\\ 6x+7y=111 & \vert\ 8\ \vert\ \ \ \ 1\end{cases}$$

$$21x+48x=147+888;\quad 69x=1035;\ x=15.$$
$$16x+\ 7y=-42+111;\ 23y=69;\quad y=\ 3.$$

Проверка. $3\cdot 15-8\cdot 3=21;\ 45-24=21;\quad \underline{21=21.}$
$6\cdot 15-7\cdot 3=111;\ 90+21=111;\ \underline{111=111.}$

Ответ. (15; 3) или $x=15$, $y=3$.

§ 7. ИСКУССТВЕННЫЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В VII КЛАССЕ

Следует сказать, что большинство систем уравнений первой степени, решаемых по традиции способом замены, решить можно способом сложения. Рассмотрим несколько примеров.

П р и м е р 1. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases}\dfrac{10}{x-5}+\dfrac{1}{y+2}=1;\\ \dfrac{25}{x-5}+\dfrac{3}{y+2}=2.\end{cases}$$

Р е ш е н и е.

$$\begin{cases}\dfrac{10}{x-5}+\dfrac{1}{y+2}=1 & \Big| \ 3\\ \dfrac{25}{x-5}+\dfrac{3}{y+2}=2 & \Big| -1\end{cases}$$

$$+\begin{cases}\dfrac{30}{x-5}+\dfrac{3}{y+2}=3\\ -\dfrac{25}{x-5}-\dfrac{3}{y+2}=-2\end{cases}$$

$$\frac{5}{x-5}=1;$$

$$5=x-5;\ x=10.$$

В (1): $2+\dfrac{1}{y+2}=1$

$$\frac{1}{y+2}=-1$$

$$1=-y-2$$

$$y=-3$$

После проверки пишется ответ (10; —3).

Это решение гораздо проще, чем при рекомендуемых заменах

$$\frac{1}{x-5}=v,\quad \frac{1}{y+2}=t.$$

При таком решении в VII классе учитель должен помнить, что после приведения уравнений системы к целому виду получим систему квадратных уравнений, но приведенное решение дает все решения данной системы.

Программой предусмотрено решение только системы уравнений с двумя неизвестными, но учеников, интересующихся математикой, полезно ознакомить с решением систем с большим числом неизвестных и с некоторыми системами, решаемыми искусственно.

П р и м е р 2. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases}x+y=c;\\ y+z=a;\\ z+x=b.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Сложим все уравнения системы, тогда вместе с данными уравнениями получим систему:

$$\begin{cases}2x+2y+2z=a+b+c;\\ x+y=c;\\ y+z=a;\\ z+x=b;\end{cases}\qquad \begin{cases}x+y+z=\dfrac{a+b+c}{2};\\ x+y=c;\\ y+z=a;\\ z+x=b.\end{cases}$$

Вычитая из 1-го уравнения 3-е, найдем x, из 1-го — 4-е — y; из 1-го — — 2-е — z, откуда

$$\begin{cases} x = \dfrac{b+c-a}{2}; \\ y = \dfrac{c+a-b}{2}; \\ z = \dfrac{a+b-c}{2}. \end{cases}$$

Данная система относится к виду циклически симметричных систем, так как каждое следующее уравнение системы получается из предыдущего посредством циклической перестановки букв x, y, z и a, b, c, (рис. 104).

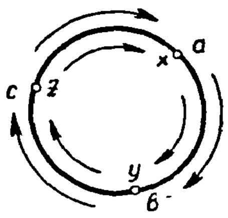


Рис. 10

В таком же порядке расположены x, y, z и a, b, c в решении. Достаточно было найти $x = \dfrac{b+c-a}{2}$, чтобы, сделав циклическую перестановку букв, получить значения y и z.

Пример 3. *Решить систему*

$$\begin{cases} x + 2y + 3 = a; \\ y + 2z + 3x = b; \\ z + 2x + 3y = c. \end{cases}$$

Данная система циклически симметричная.

Решив ее, найдем $x = \dfrac{-5a + 7b + o}{18}$. С помощью циклической перестановки, не решая, получим $y = \dfrac{-5b + 7c + a}{18}$, $z = \dfrac{-5c + 7a + b}{18}$.

Представляет интерес и следующий прием решения.

Пример 4. *Решить систему*

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}; \\ 2x - y + 5z = 63. \end{cases}$$

Решение. Пусть $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4} = t$, тогда $x = 2t$, $y = 3t$, $z = 4t$. Подставим эти значения x, y, z во второе уравнение системы: $4t - 3t + 20t = 63$, откуда $21t = 63$ и $t = 3$. Значит, $x = 6$, $y = 9$, $z = 12$.

§ 8. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

В VII классе общего исследования таких систем не дается, ограничиваются только рассмотрением частных примеров.

Пример 1. *Решить систему*

$$\begin{cases} x+3y=5; \\ 2x+6y=10. \end{cases}$$

Решим обычным путем:

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+6y=10 \end{cases} \left|\begin{array}{r} 2 \\ -1 \end{array}\right.$$

$$+\begin{cases} 2x+6y=10; \\ -2x-6y=-10. \end{cases}$$

$$0=0.$$

Неожиданный для учащихся результат легко объяснить. Если в данной системе обе части второго уравнения разделить на 2, то получим систему $\begin{cases} x+3y=5; \\ x+3y=5, \end{cases}$ то есть одно уравнение с двумя неизвестными, имеющее бесконечное множество решений, которые можно записать так:

$$\begin{cases} x \text{ — любое число:} \\ y=\dfrac{5-x}{3}, \end{cases}$$

то есть x выбирается произвольно, но y зависит от x.

Дадим графическую иллюстрацию.

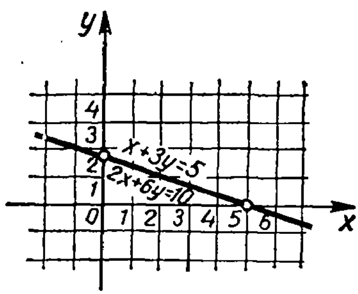


Рис. 105

1) $x+3y=5$

x	0	5
y	$1\frac{2}{3}$	0

2) $2x+6y=10$

x	0	5
y	$1\frac{2}{3}$	0

По чертежу (рис. 105) видно, что графики уравнений совпали и координаты любой их общей точки можно принять за решение системы. И в этом случае x — любое число, но $y=\dfrac{5-x}{3}$.

Примеры решений

x	-1	2	....
y	2	1	....

Пример 2. *Решить систему*

$$\begin{cases} x+2y=6; \\ x+2y=9. \end{cases}$$

Решим обычным путем:

$$\begin{cases} x+2y=6 \\ x+2y=9 \end{cases} \left| \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right.$$

$$+\begin{cases} \ \ x+2y=\ \ 6; \\ -x-2y=-9. \end{cases}$$

$$0=-3.$$

Такой результат легко объяснить.

Заметим, что левые части уравнений системы равны, а правые нет, следовательно, ни при каких значениях x и y не будет одновременно выполняться равенство в обоих уравнениях.

На графике (рис. 106) легко показать, почему нет решения.

1) $x+2y=6$

x	0	6
y	3	0

2) $x+2y=9$

x	0	9
y	4,5	0

Графики параллельны, следовательно, точки пересечения у них нет и нет решения системы.

После разъяснения следует продемонстрировать соответствующую часть кинофрагмента.

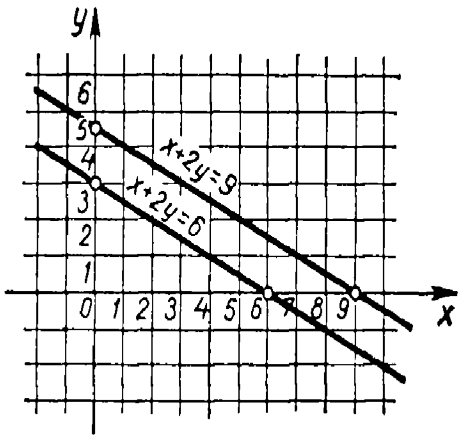


Рис. 106

ГЛАВА XI
СЧЕТНАЯ ЛИНЕЙКА (НАЧАЛО)

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

На изучение устройства счетной линейки, умножения и деления на ней в программе отводится 9 часов.

Применение счетной линейки для вычислений значительно ускоряет выполнение действий второй и третьей ступени, так как кроме ускорения отдельных действий, если действий несколько, то на счетной линейке результаты промежуточных действий можно не прочитывать.

На счетной линейке в результате можно получить 3—4 значащие цифры (в основном 3). Относительная погрешность вычислений на счетной линейке длиной в 25 *см* равна приближенно 1% (это зависит и от умений вычислителя).

Необходимо, чтобы счетная линейка имелась у каждого ученика. Чтобы приобретенный навык в действиях со счетной линейкой не терялся, следует применять ее систематически при вычислениях на уроках физики, химии и геометрии.

Применение счетной линейки для вычислений в геометрии позволяет увеличить число решенных задач. Особенно эффективно ее применение в тех разделах геометрии, где приходится вести действия над приближенными числами, например при решении треугольников, вычислении площадей, объемов деталей, и т. д.

В этой теме хорошо продемонстрировать учащимся учебный фильм «Счетная техника».

§ 2. НЕРАВНОМЕРНАЯ ШКАЛА. ЧТЕНИЕ ОСНОВНОЙ ШКАЛЫ СЧЕТНОЙ ЛИНЕЙКИ

Рассказав коротко о неравномерных шкалах и приведя примеры (шкала амперметра, вольтметра и др.), можно остановить внимание учеников на определении цены деления.

Для этого можно на таблице крупно изобразить следующую шкалу (рис. 107) и спросить учащихся о делениях шкалы.

Вопрос. Сколько десятых приходится на одно деление между отметками 1 и 2; 2 и 3; 3 и 4; 4 и 5 и т. д. (Между 1 и 2 приходится 1 десятая, между 2 и 3 приходится 2 десятых, ... между 5 и 6 приходится 5 десятых.)

Рис. 107

Начинают объяснение устройства счетной линейки с названия ее частей: корпус, движок, визир. Чтобы заинтересовать, учитель может быстро сделать на линейке трудное вычисление, например, $\frac{3{,}55^2 \cdot 2{,}8}{0{,}75}$. Затем переходят к изучению основной шкалы корпуса, движок при этом можно удалить.

Вначале обращают внимание учеников на то, что основная шкала корпуса неравномерна и начинается не с 0, а с 1.

Вряд ли целесообразно предлагать учащимся строить такие шкалы, так как это отнимет много времени, но принципа вычислений на линейке не раскроет.

Учащимся говорят, что числа, например 35 и 0,035, отмечаются на шкале одинаково.

Описание основной шкалы счетной линейки можно дать в следующей последовательности.

I. Рассматривают шкалу (рис. 108) и отмечают, что вся шкала разделена на 10 неравных частей. Эти деления выделены крупно и на них поставлены цифры 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.

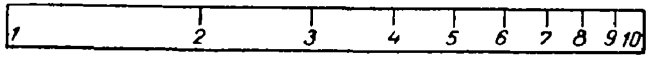


Рис. 108

Это первая цифра числа.

Далее следуют упражнения.

Пример 1. *Установить (отметить визиром) на основной шкале корпуса числа* 5, 7, 3.

Учащиеся легко с этим упражнением справляются.

Далее следует разъяснение, что если число содержит, кроме одной значащей цифры, еще и нули, например 5000; 0,005, то оно устанавливается на шкале так же, как и число 5, то есть в данном случае визир устанавливают на делении 5.

Пример 2. *Установить на основной шкале корпуса числа* 70; 700; 800; 0,8; 4000.

Упражнение не вызывает затруднений.

II. Рассматривают более детально основную шкалу и устанавливают, что каждый промежуток между делениями, соответствующими первой цифре числа, разбит на 10 частей. Между делениями, соответствующими первым цифрам и 1 и 2, против делений поставлены числа 1, 1, 1,2, и т. д., в остальных случаях против делений обозначений нет.

Рассмотрим один из промежутков, например промежуток между делениями, соответствующими цифрам 2 и 3 (рис. 109). Он разбит на 10 частей, каждое деление нанесено длинными штрихами, из них пятое несколько длиннее.

Эти деления соответствуют в т о р о й ц и ф р е числа.

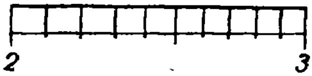


Рис. 109

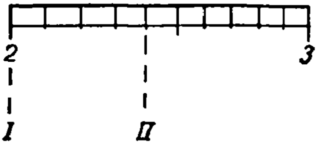


Рис. 110

Отмечая число на линейке, сперва устанавливают его первую цифру, затем сдвигают визир вправо и ставят его на деление, соответствующее второй цифре.

Пусть дано число 24. Число читают: 2—4.

Сперва визир устанавливают на делении 2, соответствующем первой цифре (рис. 110, положение I), затем визир сдвигают вправо и ставят на четвертое деление между первыми цифрами 2 и 3 (положение II).

П р и м е р 3. *Установить на основной шкале числа* 1,4; 0,25; 37; 4,1; 980; 0,83 и 7000.

Эти упражнения проходят довольно легко. Цифры чисел читают 1—4; 2—5 и т. д. Последний случай заслуживает внимания, он подготавливает к установке на шкале таких чисел, у которых вторая цифра 0, например 5—0—3 или 8—0—4. Как известно, бóльшая часть ошибок в чтке шкалы приходится именно на этот случай.

III. Пример 4 подготавливает к чтению на шкале чисел, содержащих 3 цифры, например 2—3—4; 8—0—5 и т. д. Но именно в этом случае и возникают наибольшие трудности, связанные с тем, что: 1) «цена делений», соответствующих третьей цифре числа, различна; 2) во многих случаях приходится устанавливать визир на основной шкале между делениями, определяя его положение на глаз.

Здесь полезно провести некоторые подготовительные упражнения.

Можно начертить на доске несколько отрезков длиной в 1 *дм*, нанести на них точку и поставить вопрос, какую часть отрезка составляет левая часть отрезка (рис. 111). В данном случае левый отрезок составляет «на глаз» 0,3 всего отрезка. Можно поставить обратную задачу: на данном отрезке «на глаз» отметить точку, отделяющую от отрезка 0,3 его, или 0,5, или 0,7 и т. д.


Рис. 111

В дальнейшем ученикам часто придется на глаз оценивать часть деления.

Приступая к чтению на основной шкале третьей цифры, рассмотрим промежуток между делениями, соответствующими первым цифрам 1 и 2. На этом участке шкалы каждый из промежутков между делениями, соответствующими второй цифре, например между делениями 1,4 и 1,5 (рис. 112), поделен на 10 частей. Будем говорить, что на этом участке шкалы (между 1 и 2) каждому мелкому делению соответствует 1 единица третьей цифры числа (цена деления 1).

Пусть надо установить число, состоящее из цифр 1—4—8. Положение визира для цифр 1—4 учащиеся находят легко (рис. 113,

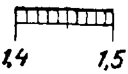


Рис. 112

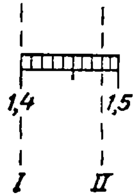


Рис. 113

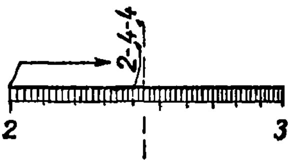


Рис. 114

первое положение), затем сдвигают визир вправо на 8 мелких делений (второе положение).

Рассмотрим основную шкалу между делениями 2 и 3; 3 и 4.

На этом участке шкалы (рис. 114) промежутки между делениями, соответствующими второй цифре числа, разбиты на 5 частей, эти деления соответствуют третьей цифре числа и потому на этом участке каждому мелкому делению соответствует 2 единицы третьей цифры числа (цена деления 2).

Это не заучивают, но обращают внимание учащихся, как определить, на сколько частей разбито деление, соответствующее вторым цифрам числа, то есть скольким единицам третьей цифры соответствует мелкое деление.

Пример 5. *Установить на основной шкале число, состоящее из цифр*: 1) 2—4—4; 2) 2—4—6; 3) 2—4—3; 4) 2—4—5.

Ученик устанавливает визир на 2—4, затем, учитывая, что каждое мелкое деление соответствует 2 единицам третьей цифры, сдвигает визир на: 1) на 2 мелких деления вправо; 2) на 3 мелких деления вправо; 3) одно деление соответствует 2 единицам третьей цифры, поэтому сдвинуть вправо надо на 1,5 мелких деления; 4) на 2,5 мелких деления вправо.

Наконец, надо рассмотреть основную шкалу между делениями 4 и 5; 5 и 6; 6 и 7; 7 и 8; 8 и 9; 9 и 10. На этом участке шкалы (рис. 115) промежутки между делениями, соответствующими второй цифре числа, разбиты на 2 части, то есть на этом участке каждому мелкому делению соответствует 5 единиц третьей цифры числа (цена деления 5).

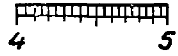


Рис. 115

П р и м е р 6. *Установить на основной шкале числа, состоящие из цифр*: 1) 4—1—5; 2) 4—1—3; 3) 4—1—9.

Учащийся находит деление, соответствующее числу 4—1, затем замечает, что каждому мелкому делению соответствует 5 единиц третьей цифры, и потому сдвигает визир: 1) на 1 мелкое деление вправо; 2) вправо соответственно третьей цифре 3 (на глаз берет $\frac{3}{5}$ мелкого деления); 3) на 1 мелкое деление (5 единиц) и еще на глаз берет $\frac{4}{5}$ мелкого деления (рис. 116 в увеличенном виде).

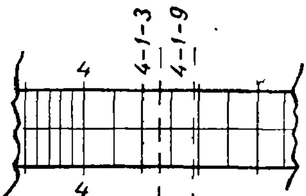


Рис. 116

Затем можно перейти к упражнениям с установкой и чтением чисел на шкале.

П р и м е р 7. *Установить на основной шкале числа* 3,74; 0,865; 9,32; 1,56; 2,36; 3,87.

В частности, надо обратить внимание на случай, когда вторая цифра 0.

П р и м е р 8. *Установить на основной графе числа* 3,04; 2,07; 4,05; 9,08.

В заключение можно указать, что на участке основной шкалы от 1 до 2 можно установить и четыре цифры числа. Например, установить число 1—2—7—6 (рис. 117 в увеличенном виде).

Часть времени надо уделить обратным упражнениям, когда по положению визира читают соответствующие цифры числа.

Для этого на демонстрационной счетной линейке устанавливают визир в каком-то положении на основной шкале и ставят вопрос, какие цифры соответствуют этому положению. Учеников приучают

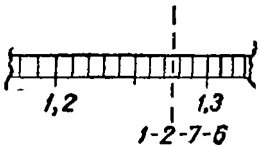


Рис. 117

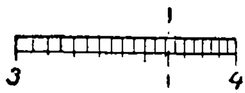


Рис. 118

находить сперва первую цифру числа, затем вторую и третью. Например, в положении визира (рис. 118) число будет содержать цифры 3—6—1 или 3—6—2.

Обращают внимание учащихся на то, что по отметке на шкале прочитываются цифры числа, а судить о числе без дополнительных данных нельзя.

Если учитель примет, что на основной шкале цифры первого разряда числа — единицы, второго — десятые доли, третьего — сотые доли, то упражнения на чтение шкалы следует подбирать в той же последовательности, то есть откладывать сперва числа с одной цифрой, с нулями, например 3; 50; 0,008, затем с двумя и в заключение с тремя цифрами.

§ 3. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ

Теории умножения и деления на счетной линейке в VIII классе не касаются. Счетная линейка рассматривается как инструмент, который дает возможность быстро и правильно выполнять эти действия. На примерах надо убедить учеников, что действия выполняются верно. Главное — научить выполнять эти действия.

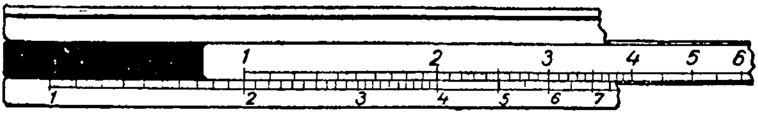


Рис. 119

Приступая к умножению, берут простой пример, сначала такой, в котором результат умножения окажется в пределах основной шкалы, например 2 · 3.

Устанавливают начало основной шкалы движка (деление 1) против деления 2 основной шкалы корпуса (рис. 119), на шкале движка находят деление, соответствующее второму множителю 3, устанавливают на нем визир и по визиру на основной шкале находят результат 6. Это для учащихся достаточно убедительно. Дальше можно приступить к умножению других чисел, подбирая множители так, чтобы произведение их давало число, соответствующее черточке, расположенной между началом смещенного вправо движка и концом шкалы корпуса. На этих примерах знакомят с прикидкой результата.

П р и м е р 1. 1,32 · 5,6.

При умножении получим в произведении цифры 7—3—8 (или 7—3—9).

Округляем множители до одной значащей цифры:

1,32 · 5,6 ≈ 1 · 6 = 6.

Следовательно, результат содержит в целой части 1 цифру, то есть 1,32 · 5,6 ≈ 7,38.

П р и м е ч а н и е. У учеников может получиться расхождение в последней цифре из-за неточности при установке как чисел множителей, так и при установке начала шкалы движка.

П р и м е р 2. 0,0256 · 0,34.

Цифры произведения 8—4—4.

Прикидка 0,03 · 0,3 = 0,009, то есть в результате первая цифра будет в тысячных долях, поэтому

$$0{,}0256 \cdot 0{,}34 \approx 0{,}00844.$$

После таких упражнений дают пример, в котором деление основной шкалы движка, соответствующее второму сомножителю, окажется после умножения за границами шкалы корпуса.

Например, возьмем и умножим 3 на 4 (рис. 120).

Поступим аналогично умножению 2 на 3. Тогда деление основной шкалы движка, соответствующее числу 4, окажется за границами основной шкалы корпуса.

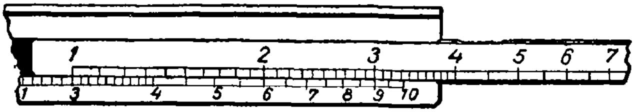


Рис. 120

Если учащихся спросить, как поступить в этом случае, они могут сказать, что надо продолжить основную шкалу корпуса. Учитель тогда разъясняет, что вместо сдвига корпуса вправо на длину шкалы можно сдвинуть движок влево на длину шкалы (рис. 121) и под делением 4 (на движке) найти на шкале корпуса результат 1—2. Таким образом, и этот пример на умножение можно выполнить на счетной линейке.

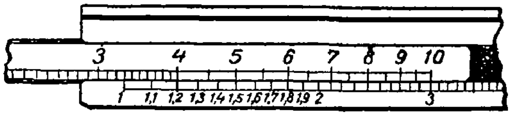


Рис. 121

В дальнейшем ученики начинают упражняться в умножении. Несколько придется задержаться на прикидке, когда результат близок к 1.

П р и м е р 3. 0,86 · 0,53.

0,86 · 0,53 = 0,456 | цифра 4—5—6
прикидка 0,9 · 0,5 = 0,45.

Этот случай не вызывает сомнений.

П р и м е р 4. 0,39 · 0,26.

0,39 · 0,26 = 0,101 | цифры 1—0—1
прикидка 0,4 · 0,3 = 0,12.

Прикидка и в этом случае проходит хорошо.

П р и м е р 5. 0,36 · 0,26.

0,36 · 0,26 = 0,0937 | цифры 9—3—7
прикидка 0,4 · 0,3 = 0,12.

В этом случае надо быть внимательнее. Прикидка дает, что результат содержит десятые доли, а именно 1 десятую. Такой результат можно получить только при перемещении движка влево, на самом деле движок сдвинут относительно корпуса вправо; делая прикидку, оба множителя взяли по избытку, следовательно, результат прикидки 0,12 больше искомого произведения, то есть $0{,}36 \times \times 0{,}26 \approx 0{,}12$ и потому равен 0,0937.

К делению учащихся подводят аналогично.

Существует другой прием оценки результата. Если оба компонента при умножении или делении имеют такой вид, что целая часть их содержит только одну цифру (отличную от нуля), то результат легко оценить устно.

Пример 4. $2{,}35 \cdot 6{,}49 = 15{,}2$, так как очевидно, что произведение больше 12.

Пример 5. $3{,}75 : 4{,}56 = 0{,}823$, так как очевидно, что целых будет 0.

Поэтому до выполнения действий, приводят все компоненты действий к вышеприведенному виду. Можно назвать его нормальным, табличным (такая форма уже применялась при пользовании таблицами, глава VIII, § 2). Затем выполняются действия.

Пример 6. $65{,}7 \cdot 0{,}0248 = 6{,}57 \cdot 10 \cdot 2{,}48 \cdot 10^{-2} = 18{,}6 \cdot 10^{-1} = = 1{,}86$.

Пример 7. $0{,}748 : 0{,}056 = \dfrac{7{,}48 \cdot 10^{-1}}{5{,}6 \cdot 10^{-2}} = 1{,}36 \cdot 10 = 13{,}6$.

Следует сделать одно замечание относительно действий, когда компонентов действия больше двух. На первых порах приходится подробно записывать результат промежуточных действий, но конечная цель — делать действия, не оценивая промежуточных результатов.

Пример 8. $1{,}35 \cdot 6{,}8 \cdot 0{,}56$.

1) $1{,}35 \cdot 6{,}8 = 9{,}18$; 2) $9{,}18 \cdot 0{,}56 = 5{,}15$.

Так делают на первых порах 2—3 примера. Но затем требуют делать иначе: умножают $1{,}35 \cdot 6{,}8$, против результата устанавливают визир и совмещают с визиром конец основной шкалы движка. На шкале движка находят третий сомножитель 0,56 и под ним на основной шкале корпуса находят цифры произведения: 5—1—5 (или 5—1—4).

Делаем прикидку: $1 \cdot 7 \cdot 0{,}6 = 4{,}2$ и пишем результат 5,15.

Пример 9. $\dfrac{2{,}46 \cdot 0{,}35}{1{,}83} = 0{,}47$ (рис. 122).

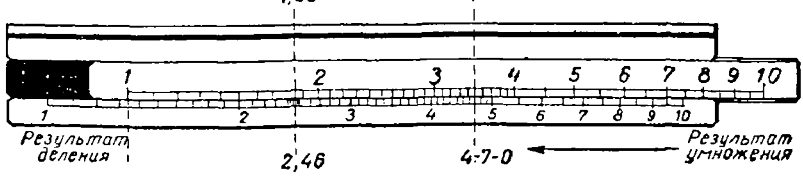


Рис. 122

Против деления 2—4—6 корпуса устанавливают деление движка 1—8—3 (деление) и на движке находят деление, соответствующее числу 3—5. Под ним на корпусе читаем цифры: 4—7—0.

Прикидка: $\frac{2 \cdot 4}{2} = 4.$

Можно применить второй прием.

Пример 10. $\frac{27,8 \cdot 0,88}{0,048} = \frac{2,78 \cdot 10 \cdot 8,8 \cdot 10^{-1}}{4,8 \cdot 10^{-2}} =$

$= \frac{2,78 \cdot 8,8 \cdot 10 \cdot 10^{-1}}{4,8 \cdot 10^{-2}} = 5,09 \cdot 10^2 = 509.$

К таким действиям (без учета промежуточных результатов) следует подходить осторожно, убедившись, что хорошо усвоены умножение и деление двух чисел.

ГЛАВА XII
КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

§ 1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ТЕМЕ

Эта тема в курсе школы-восьмилетки носит характер вспомогательного раздела, цель которого подготовить учащихся к решению квадратных уравнений.

Понятия иррационального числа по новой программе в VIII классе не дается.

Теоремы о квадратных корнях даются для того, чтобы обосновать извлечение квадратного корня из чисел с помощью таблиц и счетной линейки и для простейших тождественных преобразований.

Из тождественных преобразований квадратных корней делаются только такие, которые могут встретиться при решении квадратных уравнений и в некоторых формулах геометрии и физики.

При этом формулы, выражающие корень из произведения и частного, используются также для выполнения несложных упражнений в умножении и делении корней.

Кроме того, рассматривается извлечение кубического корня из чисел, что может понадобится при решении задач в геометрии.

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТОВ ЧИСЕЛ

Ученики умеют возводить числа в квадрат. В VI классе по алгебре они выполняли возведение в степень чисел устно и письменно, в VII классе на уроках геометрии они возводили в степень по таблицам. Новым в VIII классе для них будет приближенное возведение чисел в степень графически и с помощью счетной линейки.

Рассмотрим графическое возведение чисел в степень. Для этой цели по точкам строится график зависимости $y = x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Полезно задать ученикам вопросы (рис. 123).

1) Как расположен график относительно оси OX?

2) Сколько точек графика зависимости $y = x^2$ расположено на оси OX? OY?

3) Почему график расположен над осью OX?

На последний вопрос желательно получить ответ, что при любом значении x y не может иметь отрицательного значения.

4. Пусть $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Как расположены соответствующие им точки графика: а) относительно оси OX; б) относительно оси OY?

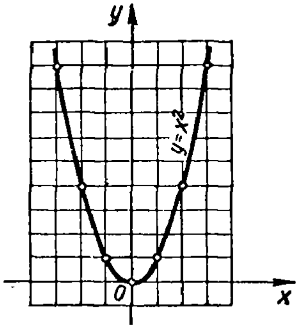


Рис. 123

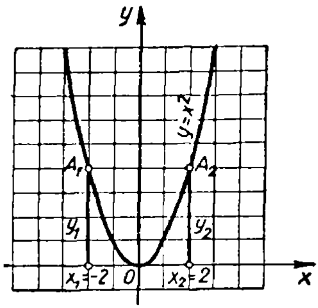


Рис. 124

В этом случае: а) $y_1 = 4$, $y_2 = 4$ (рис. 124), то есть обе точки равноудалены от оси OX; б) поэтому если перегнуть плоскость чертежа по оси OY, то точки x_1 и x_2 совпадут и ордината x_1A_1 пойдет по ординате x_2A_2, а так как они равны, то точки A_1 и A_2 совпадут, *значит*, они симметричны относительно оси OY.

Построенная кривая дает возможность вычислить приближенно квадраты чисел.

Пример 1. *Вычислить* $1{,}48^2$.

На оси OX находим точку $x_1 = 1{,}48$ (рис. 125) и проводим перпендикуляр к оси OX до пересечения с графиком зависимости $y = x^2$.

Длина ординаты дает приближенное значение

$$1{,}48^2 \approx 2{,}19.$$

Пример 2. *Вычислить* $14{,}8^2$.

Имеем по графику $1{,}48 \approx 2{,}19$; $14{,}8$ в 10 раз больше, чем $1{,}48$, следовательно, $14{,}8^2$ будет больше $1{,}48$ в 10^2 раз, поэтому

$$14{,}8^2 \approx 2{,}19 \cdot 100 = 219.$$

Затем в порядке повторения можно сделать упражнения на возведение в степень с помощью таблиц квадратов. Подбор упражнений должен быть последовательный, сперва берутся квадраты чисел, имеющих 2—3 знака, и такие, при возведении которых в квадрат не надо переносить запятую, затем переходят к упражнениям, где следует переносить запятую. Например, сначала берут квадраты чисел типа $1{,}35^2$; $2{,}73^2$; $5{,}7^2$ и др., затем — $13{,}5^2$; $0{,}135^2$ и т. д.

Совершенно новым для учеников VIII класса будет возведение чисел в квадрат с помощью счетной линейки.

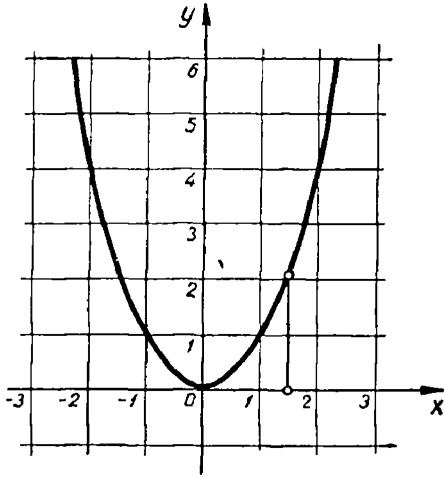


Рис. 125

Учитель сообщает ученикам, что до этого имели дело только со шкалой I (рис. 126), а теперь познакомимся еще со шкалой II, которая имеется и на корпусе и на движке. В отличие от шкалы I на шкале II расположены одна за другой две шкалы: 1-я и 2-я, каждая из них построена как ранее рассмотренная шкала I, но в два раза короче. Шкала II называется ш к а л о й к в а д р а т о в.

Чтобы подвести учеников к возведению чисел в квадрат, на счетной линейке находят квадрат какого-нибудь числа, например 3^2.

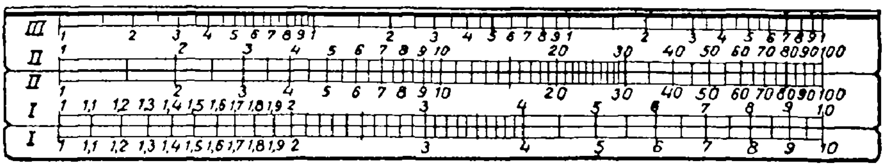


Рис. 126

Устанавливают 3 на шкале I (основной), и визир на шкале II (квадратов) укажет отметку 9. Затем берут еще пример так, чтобы результат получился на 2-й шкале квадратов, например $5^2 = 25$.

Как при умножении и делении, на шкале квадратов определяют цифры результата и уточняют его прикидкой.

Пример 1. *Вычислить* $4{,}75^2$.

$$4{,}75^2 \approx 22{,}6 \mid 5^2 = 25$$

Пример 2. *Вычислить*, $0{,}0314^2$.

$$0{,}0314^2 \approx 0{,}000\,986 \mid 0{,}03^2 = 0{,}0009$$

Пример 3. *Вычислить* $0{,}34^2$.

а) $0{,}34^2 \approx 0{,}116$ | Прикидка $0{,}3^2 = 0{,}09$

Округлили по недостатку, поэтому результат будет больше, чем 0,09 (0,0116 он не может быть, остается 0,116).

б) $0{,}34^2 = (3{,}4 \cdot 10^{-1})^2 \approx 11{,}6 \cdot 10^{-2} = 0{,}116$.

Примечание. Действие возведения в степень на линейке выполнять проще, чем умножение и деление, поэтому некоторые авторы рекомендуют начинать изучение действий на счетной линейке с него.

§ 3. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

Понятие о квадратном корне из положительного числа ученики получают в VII классе на уроках геометрии и там же знакомятся с извлечением квадратных корней по таблицам.

В VIII классе следует:

1) повторить определение квадратного корня;

2) показать, что квадратный корень существует только на множестве неотрицательных чисел;

3) выяснить, что по определению квадратный корень из положительного числа имеет два значения, одно или ни одного, и дать определение арифметического квадратного корня.

Чтобы подвести к определению квадратного корня, возьмем пример, $3^2 = 9$. Ученики устанавливают, что здесь 3 — число, квадрат которого равен 9. После нескольких таких примеров ($5^2 = 25$; $0{,}4^2 = 0{,}16$) дается определение:

число, квадрат которого равен a, называется квадратным корнем из a и обозначается $\sqrt{a}$, где $\sqrt{}$ — знак корня; a — подкоренное число; действие, посредством которого находят значение квадратного корня, — извлечение квадратного корня.

После определения подводят к понятию арифметического корня.

Пример 1. *Какие из следующих корней имеют смысл*: $\sqrt{4}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-25}$, $\sqrt{0}$?

Главное добиться, чтобы ученики поняли, что $\sqrt{-16}$ и $\sqrt{-25}$ не существуют, так как среди известных ученикам чисел не существует таких, квадрат которых равен —16, —25.

Пример 2. *На множестве каких чисел существует* $\sqrt{a}$?

После предыдущих примеров ученики смогут ответить, что $\sqrt{a}$ существует только на множестве неотрицательных чисел (или на множестве положительных чисел и нуля, если им так будет легче ответить).

Пример 3. *Каким может быть по определению значение $\sqrt{25}$? $\sqrt{0}$?*

Учащиеся устанавливают, что $\sqrt{25}$ может иметь два значения: и 5 и -5, так как $5^2 = 25$ и $(-5)^2 = 25$. Одно из этих значений получили на множестве отрицательных чисел.

$\sqrt{0} = 0$, в этом случае квадратный корень имеет одно значение.

Делается вывод: квадратный корень из числа на множестве рациональных чисел может иметь два значения, одно или ни одного.

Затем учитель говорит, что в дальнейшем извлечение квадратного корня будет выполнять только на множестве неотрицательных чисел и дает определение:

Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа называется его неотрицательное значение.

С учащимися договариваются употреблять знак $\sqrt{\ }$ только для арифметических корней и рассматривать извлечение квадратного корня только на множестве неотрицательных чисел. Например, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{4} = 2$ и т. д. При решении квадратного уравнения $x^2 = a$ $(a \geqslant 0)$ получим $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$.

По определению можно записать:

$$(\sqrt{a})^2 = a, \text{ где } a \geqslant 0.$$

Возьмем арифметический корень $\sqrt{a^2}$. Здесь a — любое число, оно может быть и отрицательным и нулем, поэтому, чтобы получить после извлечения корня число положительное или нуль, но не отрицательное, берут

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Приведенное объяснение не полно, так как на самом деле речь идет об извлечении квадратного корня на множестве неотрицательных действительных чисел.

Упражнения на последнюю формулу в VIII классе дают только простейшие, типа $\sqrt{25}$, $\sqrt{(-3)^2}$ и двух следующих:

Пример 1. *Выполнить действие* $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$, *если:* 1) $x > 1$; 2) $x < 1$.

Решение. 1) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x - 1| = x - 1$, так как при $x > 1$ значения $x - 1 > 0$.

2) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$, так как при $x < 1$, $x - 1 < 0$ и потому $|x - 1| = -(x - 1)$.

Пример 2. *Выполнить действия* $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2}$ при $x>0$.

Решение. $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2}=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{x^2}=$ $=|x-2|+|x|=x-2+x=2x-2$.

На внеклассных занятиях можно дать примеры, в которых не даны промежутки значений букв.

Пример 3. *Выполнить действия* $\sqrt{x^2-2x+1}+$ $+\sqrt{x^2-4x+4}$.

Решение. $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-1)^2}+$ $+\sqrt{(x-2)^2}=|x-1|+|x-2|=$

$$=\begin{cases} x-1+x-2=2x-3, & \text{если } x\geqslant 2;\\ x-1-x+2=1, & \text{если } 1\leqslant x<2;\\ -x+1-x+2=-2x+3, & \text{если } x<1.\end{cases}$$

Многочлены $x-1$ и $x-2$ меняют знак первый в точке $x=1$, второй в точке $x=2$. Эти точки разбивают числовую ось на три промежутка. Поэтому получаем три вида ответа, в зависимости от промежутка, в котором находится x. Подчеркивается, что значение суммы одно, но оно зависит от x, то есть ответ один, но может иметь три формы.

§ 4. ПРИБЛИЖЕННЫЙ АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ ИЗ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА. ГРАФИК ЗАВИСИМОСТИ $y=\sqrt{x}$.

Когда подкоренное число не точный квадрат, то значение квадратного корня можно найти только приближенно. Если алгоритм извлечения квадратного корня из чисел не рассматривать, то подбор приближенных значений берет очень много времени. Например, неравенство $1<\sqrt{3}<2$ установить можно быстро, но затем приходится брать квадраты чисел, заключенных между 1 и 2: $1{,}1^2=$ $=1{,}21$; $1{,}2^2=1{,}44$; $1{,}3^2=1{,}69$; $1{,}4^2=1{,}96$; $1{,}5^2=2{,}25$; $1{,}6^2=$ $=2{,}56$; $1{,}7^2=2{,}89$; $1{,}8^2=3{,}24$ и только тогда можно установить, что $1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8$.

Аналогично устанавливается, что $1{,}73<\sqrt{3}<1{,}74$.

Чтобы облегчить нахождение приближенных значений корня, строится график зависимости $y=\sqrt{x}$.

Устанавливается, что по смыслу $x\geqslant 0$, после чего составляют таблицу значений x и y, подбирая значения x так, чтобы легко находить значения y:

x	0	1	2	3	4	9	16
y	0	1	1,4	1,7	2	3	4

Построенный график (рис. 127) используется для упражнений, в которых находят приближенное значение квадратных корней.

Пример. *Найти значение* 4,5.

Учащийся должен: 1) на оси OX найти точку $x_1 = 4{,}5$; 2) найти ординату, соответствующую значению $x_1 = 4{,}5$. Для этого в точке x_1 надо восставить к OX перпендикуляр до пересечения с графиком зависимости $y = \sqrt{x}$, получим отрезок, соответствующий ординате y_1; 3) измерить длину ординаты в том же масштабе, в котором откладывались значения x на оси OX. В данном случае $y_1 \approx 2{,}1$, поэтому $\sqrt{4{,}5} \approx 2{,}1$ (проверка: $2{,}1^2 \approx 4{,}4$, $2{,}2^2 \approx 4{,}8$).

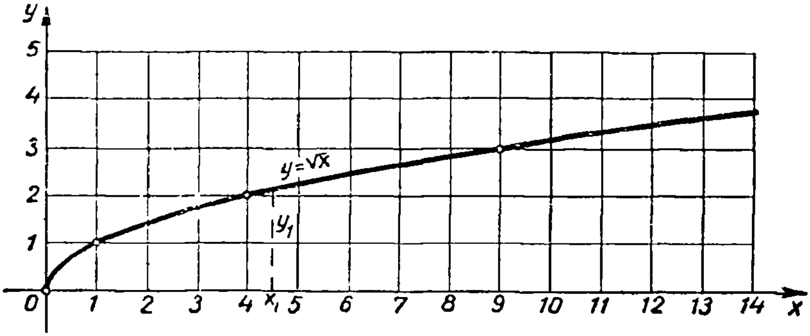


Рис. 127

При таком способе можно находить 2 значащие цифры приближенного значения корня.

Зная, что $\sqrt{4{,}5} \approx 2{,}1$, можно найти $\sqrt{4{,}5 \cdot 100} \approx 21$, или $\sqrt{0{,}045} \approx$ $\approx 0{,}21$, пользуясь правилами, которые применялись в VII классе.

Построенный график зависимости $y = \sqrt{x}$ можно еще рассматривать как подтверждение существования чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ и т. д.

Подбор приближенных значений квадратного корня с помощью таблиц квадратов отнимает много времени, а с помощью графика $y = \sqrt{x}$ он очень не точен. Это время можно использовать, чтобы сообщить ученикам алгоритм извлечения квадратного корня и затем с помощью его находить приближенные значения.

Алгоритм дается до знакомства с таблицами квадратных корней и вычислениями квадратных корней с помощью счетной линейки.

§ 5. КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ ИЗ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ДРОБИ, СТЕПЕНИ

По программе требуется рассмотреть теоремы о корне из произведения, дроби и степени. Эти теоремы в VIII классе проходят до понятия иррационального числа. Поэтому изложение ведется формально, так же как и следующие за ними упражнения на действия с корнями.

Чтобы сделать изложение менее формальным, некоторые учителя говорят учащимся, что числа вида $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ и т. д. относятся к числам *иррациональным*. Этот термин только сообщается, затем говорят, что действия с иррациональными числами выполняются по тем же законам, что и над рациональными.

При доказательстве следующих теорем следует напомнить ученикам, что речь идет об арифметических корнях.

Рассмотрим первую теорему о квадратном корне из произведения. Надо доказать, что $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ (1), где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Можно начать с разбора числового примера.

Пусть дан $\sqrt{9}$. Находя его арифметический квадратный корень, мы должны найти такое неотрицательное число, квадрат которого равен 9. Имеем $3^2 = 9$, следовательно, по определению арифметического квадратного корня $\sqrt{9} = 3$.

Аналогично рассуждают и при доказательстве, что $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \times \sqrt{b}$. Если $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ — квадратный корень из ab, то квадрат $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ должен быть равен подкоренному числу ab.

Действительно,

$$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2 = \underbrace{(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2}_{\text{квадрат произведения чисел}} = \underbrace{ab}_{\text{определение квадратного корня}}.$$

Таким образом, квадрат $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ равен ab, следовательно, по определению квадратного корня

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

Для наглядности можно сделать таблицу:

$3^2 = 9$	$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2 = ab$
$\downarrow$	$\downarrow$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

Далее следует сказать, что теорема доказана для произведения двух сомножителей, но рассуждения останутся те же, если множителей будет больше, поэтому она будет верна для любого числа множителей.

Пример 1. $\sqrt{4\cdot 49\cdot 100} = 2\cdot 7\cdot 10 = 140.$

Пример 2. $\sqrt{25^2-24^2} = \sqrt{(25+24)(25-24)} = \sqrt{49\cdot 1} = 7.$

Теоремы о квадратном корне из дроби и степени доказываются аналогично.

На этих теоремах основаны два преобразования квадратных корней: 1) вынесение множителя из-под знака корня; 2) внесение множителя под знак корня.

Вынесением множителя из-под знака корня иногда можно упростить вычисления с корнями, например, если надо вычислить $\sqrt{32}-\sqrt{8}-\sqrt{2}$, то после упрощения $\sqrt{32}-\sqrt{8}-\sqrt{2}=$ $=4\sqrt{2}-2\sqrt{2}-2=\sqrt{2}$.

Далее по таблицам найдем приближенное значение $\sqrt{2}$.

Можно поставить вопросы, связанные с изменением подкоренного числа.

Пример 1. *Подкоренное число квадратного корня увеличили в 100 раз. Как изменится значение корня?*

Пусть дан $\sqrt{a}$. Увеличив подкоренное число в 100 раз, получим $\sqrt{100a}=10\sqrt{a}$, то есть значение корня увеличилось в 10 раз.

Пример 2. *Подкоренное число квадратного корня уменьшили в 10 000 раз. Как изменилось значение корня?*

Пусть дан $\sqrt{a}$. Уменьшив подкоренное число a в 10 000 раз, получим $\sqrt{\frac{1}{10\,000}}=\frac{\sqrt{a}}{100}$, то есть значение корня уменьшилось в 100 раз.

Целесообразность внесения множителя под знак корня обычно объясняют так. Пусть надо вычислить приближенно с точностью до 0,01 выражение $10\sqrt{7}$. Вычислив $\sqrt{7}$ с точностью до 0,01, получим $\sqrt{7}\approx 2{,}65$; тогда $10\sqrt{7}\approx 10\cdot 2{,}65\approx 26{,}5$. Получим, что результат не соответствует требуемой точности — вычислили с точностью до 0,1. Поэтому приходится вычислять $\sqrt{7}$ с большей точностью, чем 0,01.

Целесообразнее вычислить так: $10\sqrt{7}=\sqrt{700}\approx 26{,}46$.

Но это рассуждение касается только случая, когда, как в данном примере, и 10 и 7-числа точные. Если данные числа приближенные, то результат не зависит от способа вычисления.

Пример. *Вычислить* $a\sqrt{b}$, *если* $a\approx 2{,}5$, $b\approx 3{,}7$.

Решим двумя способами.

1) $a\sqrt{b}\approx 2{,}5\cdot\sqrt{3{,}7}\approx 2{,}5\cdot 2{,}9\underline{2}\approx 4{,}8\underline{0}\approx 4{,}8$ (подчеркнута запасная цифра).

2) $a\sqrt{b}\approx 2{,}5\cdot\sqrt{3{,}7}\approx\sqrt{6{,}2\underline{5}\cdot 3{,}7}\approx\sqrt{23{,}\underline{1}}\approx 4{,}8\underline{0}\approx 4{,}8$.

Во втором случае операций больше, следовательно, это вычисление не рационально.

Во всех упражнениях на упрощения корней в VIII классе вопрос об арифметическом квадратном корне ставится очень узко, в основном ограничиваются решением числовых примеров. Во всех случаях, когда выполняется упрощение квадратных корней, содержащих буквы, уславливаются, что под буквами подразумеваются положительные числа. В противном случае придется значительно углубить изучение темы, что программой VIII класса не предусмотрено. Например, $\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 \cdot a} = a\sqrt{a}$ и знак $|a|$ не ставится, так как считается, что $a > 0$.

Упражнения на действия с корнями до введения понятия иррационального числа должны быть простейшими, типа:

$\sqrt{8} + \sqrt{18}$; $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$; $(\sqrt{3} + 1)^2$ и т. п.

Нецелесообразно вырабатывать навык действий с иррациональными числами, пока не дано определение этих чисел, не определено поле действительных чисел и не определены действия с действительными числами.

Простейшие преобразования корней — средство упростить результат, который может быть получен при решении задач, например, на теорему Пифагора, квадратные уравнения и пр.

§ 6. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА С ПОМОЩЬЮ ТАБЛИЦ И СЧЕТНОЙ ЛИНЕЙКИ

Таблица квадратных корней учащимся знакомы по VII классу. В VIII классе применение таблиц можно сбосновать теоремами о квадратных корнях.

Основная трудность в использовании таблиц состоит в том, что редко встречается случай, когда подкоренное число непосредственно дано в таблице. Обычно приходится представлять подкоренное число в виде смешанного числа, содержащего в целой части одну или две цифры.

Предварительно ученики должны уяснить, из каких степеней 10 можно извлечь точный квадратный корень. Для этого составляют таблицу:

Таблица 44

n	1	2	3	4	5	6
10^n	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
$\sqrt{10^n}$	3,2	10	32	100	320	1000

Вопрос. Из каких степеней 10 извлекается точно квадратный корень? (Из четных.)

Полезно до извлечения квадратного корня выполнить подготовительные упражнения.

Пример 1. *С помощью четных степеней* 10 *представить числа так, чтобы в целой части числа была одна или две цифры:*

356; 0,2785; 5481; 0,0012; 0,00045; 47485.

Решение. $356 = 3 \cdot 10^2$; $0{,}2785 = \frac{27{,}85}{10^2} = 27{,}85 \cdot 10^{-2}$ и т. д.

Назовем такую форму записи числа табличной.

Первый пример дается на случай, когда в целой части подкоренного числа одна или две цифры, потом берут число из трех цифр, из четырех, например, в такой последовательности: 1,8; 1,83; 1,834, делая по 2—3 примера на каждый случай.

Затем переходят к упражнениям, в которых придется предварительно преобразовывать подкоренное число.

Пример 2. $\sqrt{0{,}4835} = \sqrt{\frac{48{,}35}{100}} \approx \frac{6{,}954}{10} = 0{,}6954.$

Пример 3. $\sqrt{483{,}5} = \sqrt{4{,}835 \cdot 100} \approx 2{,}199 \cdot 10 = 21{,}99.$

Помимо такого способа, можно показать, не давая обоснования, разбиение подкоренного числа на грани.

Пример 4. $\sqrt{0',48'35} \approx 0{,}6954.$

Пример 5. $\sqrt{4'83'5} \approx 21{,}99.$

Даже если не применять разбиение на грани как основной прием, то его хорошо сохранить для контроля.

Если же применять, то на упражнениях сначала устанавливают: 1) сколько цифр в целой части числа, если число больше 1;

2) сколько нулей до первой значащей цифры, если число меньше 1.

Основное правило: каждой непустой грани соответствует одна цифра значения корня, каждой пустой грани соответствует 0.

$$\sqrt{\underbrace{5}_{\text{I}}48{,}6} = ??,...;\ \sqrt{\underbrace{31'}_{\text{I}},75} = ?,...;\ \sqrt{0',00'\underbrace{67}_{\text{I}}} = 0{,}0?...$$

Таким образом, по виду подкоренного числа можно судить о положении запятой до извлечения корня.

Если первая непустая грань содержит одну цифру, то в таблице находят подкоренное число в виде, например, 5,486 (1-й случай); если же первая непустая грань содержит две цифры, то в таблице находят подкоренное в виде, например, 31,75 (2-й случай); 67 (3-й случай).

Ученики при нахождении значения квадратного корня по таблицам часто делают следующие ошибки: 1) путают числа с одинаковыми цифрами; например, подкоренное число 108 берут в первой графе, где стоит 10,8; 2) путают графы, соответствующие третьей цифре подкоренного числа.

Первую ошибку помогают устранить вышеприведенные подготовительные упражнения или разбивка подкоренного числа на грани.

Чтобы устранить ошибку второго вида, помогают отыскивать нужную графу левой рукой. Пусть надо найти $\sqrt{19{,}85}$. Безымянный палец левой руки ставят в первой графе N под числом 19 и двигают его, пока он не окажется в графе под цифрой 8. Оставляют безымянный палец на месте, а указательный палец левой руки двигают по той же строке, пока он не окажется в графе поправок под цифрой 5. К числу в графе прибавляют найденную поправку.

В заключение показывают извлечение квадратного корня с помощью счетной линейки. Главное учащиеся должны усвоить, что если в целой части подкоренного числа 1 цифра, то устанавливают подкоренное число на 1-й шкале квадратов (левой), а если 2, то на 2-й (правой). Например, известно, что $\sqrt{9} = 3$, установим визир на 1-й шкале квадратов на 9, тогда на основной шкале визир покажет число 3. Возьмем $\sqrt{16} = 4$, если установить 16 на 1-й шкале квадратов, то на основной шкале ему соответствует число 1—2—6, что неверно; установим 16 на 2-й шкале квадратов, тогда на основной шкале получим число 4, следовательно, 16 надо установить на 2-й шкале квадратов. Отсюда следует правило.

Можно на внеклассных занятиях дать еще один прием извлечения квадратного корня:

1) Имеем $\sqrt{105} = 10 + x$, тогда по определению $x^2 + 20x + 100 = 105$; x^2 мало по сравнению с $20x$ (ведь $x < 1$). Отбросим x^2, тогда $20x \approx 5$ и $x \approx 0{,}25$.

Итак, $\sqrt{105} \approx 10{,}25$. П р о в е р к а. $10{,}25^2 = 105{,}0625$, то есть расхождение получили в пятом знаке.

2) Еще пример: $\sqrt{314} = 18 - x$; $324 - 36x + x^2 = 314$, x^2 мало по сравнению с $36x$; отбросим его, тогда $36x = 10$ и $x = 0{,}28$.

Значит, $\sqrt{314} \approx 17{,}72$. П р о в е р к а. $16{,}72^2 = 313{,}9984$. Расхождение в четвертом знаке.

ГЛАВА XIII

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Частные случаи решения квадратных уравнений, а именно уравнение вида $ax^2 = b$ встречается впервые в VII классе на уроках геометрии. Для решения уравнения $ax^2 = b$ его приводят к виду $x^2 = c$ и затем по таблицам находят положительное значение x.

В VIII классе решаются все виды квадратных уравнений. Для более быстрого овладения навыком решения их необходимо, чтобы учащиеся хорошо знали формулы корней квадратного уравнения и, кроме того, имели твердый навык в действиях с алгебраическими дробями, так как многие уравнения предварительно надо привести к простейшей форме.

В VII классе ученики составляли по условию задачи уравнения, которые приводились к уравнениям первой степени. В этом случае с неизвестным уравнения производились только четыре арифметических действия, следовательно, эти задачи решались и арифметически. В VIII классе круг задач расширяется; при решении этих задач получаются уравнения, простейшая форма которых содержит возведение неизвестного в квадрат, а корень уравнения содержит извлечение квадратного корня. Это операции неарифметические, следовательно, задачи, решаемые по курсу VIII класса, арифметически решить нельзя.

В этой теме вводится зависимость между корнями и коэффициентами квадратного уравнения. В школе теорема Виета на практике применяется мало, но упражнения на нее полезны, как развивающее функциональное мышление учащихся.

На теорему Виета времени отводится мало. Для лучшего усвоения; ее можно дать ученикам сначала пропедевтически. Для этого при решении квадратных уравнений вида $x^2 + px + q = 0$ надо обратить внимание, что $x_1 + x_2 = -p$; $x_1x_2 = q$. Например, решая уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ и получив корни $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, ученикам предлагают найти значения $x_1 + x_2$, x_1x_2 и сопоставить сумму и произведение корней с коэффициентами. В дальнейшем при решении приведенных квадратных уравнений это можно использовать для проверки.

Вопросы исследования квадратных уравнений ставятся в VIII классе узко.

§ 2. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учащиеся VIII класса уже встречались с частными случаями квадратного уравнения, поэтому изложение можно начать с его определения...

Например, написать на доске сперва примеры уравнений первой степени $3x - 5 = 0$, $2x - 8 = 7$ и спросить учащихся, как называются такие уравнения.

Затем такой же вопрос поставить об уравнениях $x^2 - 25 = 0$, $3x^2 = 48$ и др. После определения квадратного уравнения спрашивают, какие члены может содержать уравнение, высшая степень которого вторая. В заключение дается общий вид квадратного уравнения:

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0.$$

При этом договариваются, что многочлен $ax^2 + bx + c$ всегда должен быть расположен по убывающим степеням, что a, b, c— числа. Тогда кратко можно будет говорить: a — первый коэффициент, b — второй коэффициент, c — свободный член. Удобнее, если $a > 0$.

Полезно спросить учеников: может ли первый коэффициент быть равным нулю. На этом дается ответ, что $a \neq 0$, так как если $a = 0$, то уравнение примет вид $bx + c = 0$, то есть получится уравнение первой степени, а не квадратное.

Что касается чисел b и c, то это любые числа, в частности, они могут равняться и нулю, так как при этом уравнение остается квадратным. Отсюда делается вывод, что могут быть неполные квадратные уравнения вида $ax^2 + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 = 0$.

После этого дается решение отдельных видов неполных квадратных уравнений, сперва на частном примере, затем в общем виде.

Например, решают уравнение $x^2 = 4$, $x_{1,2} = \pm 2$.

Учащиеся часто не понимают, почему $\pm$ ставят только в правой части. Можно объяснить на том же примере $x^2 = 4$; $\pm x = \pm 2$. Это дает четыре комбинации знаков, которые сведутся к двум:

$$\left.\begin{array}{l} +x = +2 \\ -x = -2 \end{array}\right\} x_1 = 2; \quad \left.\begin{array}{l} +x = -2 \\ -x = +2 \end{array}\right\} x_2 = -2.$$

Поэтому достаточно писать $x_{1,2} = \pm 2$.

После примеров с числовыми коэффициентами рассматривают уравнения вида $ax^2 + c = 0$.

Задачи с условием, приводимые к решению уравнений вида $ax^2 + c = 0$, часто встречаются в геометрии. Например, катеты прямоугольного треугольника относятся, как $3:4$, гипотенуза равна 60 *мм*. Найти катеты.

Перед решением уравнений вида $ax^2 + bx = 0$ следует поставить вопрос:

Что можно сказать об a и b, если $ab = 0$? (Либо $a = 0$, либо $b = 0$; в частности, может быть $a = b = 0$.)

Сначала решают уравнение с числовыми коэффициентами, например, $5x^2 - 7x = 0$.

При решении уравнение $ax^2 + bx = 0$ приводят к виду $x(ax + b) = 0$; тогда уравнение распадается на два; находим объединение множеств их решений:

$$x_1 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} ax + b = 0 \\ x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{array} \right.$$

Из решения следует, что уравнение имеет только два корня.

В сборниках задач мало упражнений с дробными уравнениями, приводимых к неполным квадратным уравнениям. Учителю приходится составлять для учеников уравнения типа:

1) $\dfrac{x - 0{,}5}{4} - \dfrac{x^2 + 0{,}375}{2x + 1} = -\dfrac{0{,}5}{x + 0{,}5}$;

2) $\dfrac{2x^2 - 7}{5} - \dfrac{(3x - 1)^2}{4} = -1{,}65$;

3) $x - 3 + \dfrac{1}{3a - ax} = \dfrac{ax + 9 - a^{-1}}{x - 3}$;

4) $\dfrac{2x - 7}{7} - \dfrac{10(0{,}1 - 0{,}4x)}{2x - 7} = \dfrac{6}{2x - 7}$.

При изложении теории полных квадратных уравнений имеются две системы:

I. Даются формулы корней квадратных уравнений приведенного вида $x^2 + px + q = 0$ и общего вида $ax^2 + bx + c = 0$. Теорема Виета выводится для уравнения $x^2 + px + q = 0$, формулы разложения квадратного многочлена рассматриваются две: для многочленов $x^2 + px + q$ и $ax^2 + bx + c$.

II. Даются формулы корней квадратных уравнений $ax^2 + bx + c = 0$ и $ax^2 + 2kx + c = 0$. Теорема Виета выводится для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, для разложения на множители квадратного многочлена дается одна формула $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

В дальнейшем изложение будет даваться параллельно для обеих систем под рубриками I и II.

§ 3. СИСТЕМА ФОРМУЛ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

I. Сначала выводится формула корней приведенного квадратного уравнения. Есть два способа вывода этой формулы: а) сводят уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ к виду $(x - m)^2 = n^2$ и решают последнее уравнение, как неполное вида $x^2 = c$; б) разлагают левую часть уравнения $x^2 + px + q = 0$ на множители.

Можно: 1) подобрать примеры уравнений с постепенным усложнением и решать по аналогии с решением неполных квадратных уравнений; 2) выделить из левой части уравнения неполный квадрат по формуле.

В первом случае можно дать уравнения, например, в такой последовательности: $x^2 = 9$; $x^2 - 2x + 1 = 9$; $x^2 - 2x = 8$; $x^2 - 4x - 12 = 0$; затем вывести формулу корней приведенного квадратного уравнения.

Во втором случае возможны две системы изложения (а и б). Рассмотрим их.

Пример 1. *Решить уравнение* $x^2 + 6x + 8 = 0$.

Решение. Выделим из левой части уравнения полный квадрат, пользуясь формулой

$$x^2 + 2hx = (x - h)^2 - h^2 \qquad (1)$$

$$(x - 2)^2 - 4 - 12 = 0;\ (x - 2)^2 - 16 = 0 \mid 2h = -4,\ h = -2$$

Далее возможны два способа решения

а) $(x - 2)^2 = 16$; $x - 2 = \pm 4$; $x_1 = 6$, $x_2 = -2$.

б) $(x - 2)^2 - 4^2 = 0$; $(x - 2 - 4)(x - 2 + 4) = 0$; $(x - 6)(x + 2) = 0$;

уравнение распадается на два уравнения:

$$x - 6 = 0,\ \text{откуда}\ x_1 = 6;$$
$$x + 2 = 0,\ \text{откуда}\ x_2 = -2.$$

После решения нескольких уравнений тем или другим способом (в зависимости от выбранной системы) выводят формулу корней приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

По формуле (1) имеем:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \;\Big|\; 2h = p,\ h = \frac{p}{2}$$

Далее возможны два способа вывода:

а) $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ и если $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqslant 0$, то $x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, откуда $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$;

б) $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right]=0$; если $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\geqslant 0$, то $\left(x+\frac{p}{2}-\right.$ $\left.-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)=0$; уравнение распадается:

$$\left.\begin{aligned} x+\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=0;\ x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \\ x+\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=0;\ x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \end{aligned}\right\}$$

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Из решения следует, что корней два или ни одного (в частности, они могут быть равны).

Способ а) несколько легче усваивается учащимися, зато при способе б) можно сэкономить время и дать сразу формулы для разложения квадратного многочлена на линейные множители. Действительно, сравним левые части уравнений $x^2+px+q=0$ и $\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right]\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right]=0$, последнее можно представить в виде $\left[x-\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\right]$; $\left[x-\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\right]=0$, или $(x-x_1)(x-x_2)=0$.

Левые части уравнений преобразованы тождественно, следовательно, $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$.

После вывода последней формулы тем или другим способом решают приведенные квадратные уравнения уже по формуле, причем полезно подчеркнуть, что эта формула удобна при четном p, а при нечетном лучше пользоваться формулой корней квадратного уравнения общего вида. Затем выводят эту формулу обычным путем.

При решении квадратного уравнения, пользуясь формулой, целесообразно применять запись, рекомендованную в свое время А. И. Гольденбергом.

Пример 2. *Решить уравнение* $4x^2-17x-15=0$.

$$x_{1,2}=\frac{17\pm 23}{8}\ \left|\ \begin{aligned} &b^2-4ac=17^2+4\cdot 4\cdot 15=289+240=529 \\ &\sqrt{529}=23 \end{aligned}\right.$$

По этой записи сразу пишут $x_{1,2}=\frac{17\pm}{8}$ (1), затем справа от вертикальной черты находят подкоренное число и продолжают запись (1).

Особенно эта запись удобна, если коэффициенты решаемого уравнения таковы, что $b^2 - 4a < 0$.

Пример 3. $x^2 - 86x + 1936 = 0$.

Корней нет, так как $\sqrt{-87}$ не имеет смысла $\left| \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 43^2 - 1936 = 1849 - 1936 = -87 \right.$

II. При второй системе формула корней приведенного квадратного уравнения не дается, а выводится формула корней квадратного уравнения общего вида. Начать можно тоже с частного примера.

Пример 4. *Решить уравнение* $5x^2 - 8x + 3 = 0$.

Решение. В этом случае тоже выделяют полный квадрат из левой части уравнения, пользуясь формулой

$$x^2 + 2hx = (x - h)^2 - h^2 \qquad (1)$$

$$5x^2 - 8x + 3 = 5\left(x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{3}{5}\right) = 5\left[\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 - \frac{16}{25} - \frac{3}{5}\right] =$$

$$= 5\left[\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 - \frac{1}{25}\right] \left| \begin{array}{l} 2h = -\frac{8}{5} \\ h = -\frac{4}{5}. \end{array} \right.$$

Аналогично предыдущему имеем две возможности:

1) $5\left[\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 - \frac{1}{25}\right] = 0$; $\quad \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$; $x - \frac{4}{5} = \pm\frac{1}{5}$;

$x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{5}$.

2) $\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0$; $\left[\left(x - \frac{4}{5}\right) - \frac{1}{5}\right]\left[\left(x - \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5}\right] = 0$;

уравнение распадается: $x - \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = 0$, откуда $x_1 = 1$; $x - \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 0$, откуда $x_2 = \frac{3}{5}$.

После нескольких числовых примеров, решенных тем или другим способом, выводится формула корней квадратного уравнения общего вида $ax^2 + bx + c = 0$.

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \quad \left| \quad 2h = \frac{b}{a};\ h = \frac{b}{2a}. \right.$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0;\ a \neq 0, \text{ значит,}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0.$$

1) $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$; если $b^2-4ac\geqslant 0$, то $x+\frac{b}{2a}=$ $=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

2) $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$; если $b^2-4ac\geqslant 0$, то

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]=0.$$

Уравнение распадается на два:

$$\left.\begin{aligned}&\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0, \text{ откуда } x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0; \text{ откуда } x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{aligned}\right\}$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Из вывода следует, что корней будет два или ни одного (в частности, они могут оказаться равными).

При способе б) можно попутно получить формулу разложения квадратного многочлена на множители:

$$ax^2+bx+c=a\left[x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]=$$

$$=a\left[x-\left(\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]\left[x-\left(\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]=$$

$$=\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=$$

$$=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Итак, для уравнения $ax^2+bx+c=0$ получили формулу корней:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{(общая формула).}$$

Учеников предупреждают, что эту формулу применяют для решения уравнения, у которого второй коэффициент нечетный. Решив несколько примеров, выводят формулу корней уравнения с четным коэффициентом второго члена $ax^2 + 2kx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

В дальнейшем все полные квадратные уравнения решают либо по общей, либо по второй формуле.

Пример 6. *Решить уравнение* $19x^2 - 32x + 13 = 0$.

$x_{1,2} = \frac{16 \pm 3}{19}$	$k^2 - ac = 16^2 - 19 \cdot 13 =$
$x_1 = \frac{19}{19} = 1; \quad x_2 = \frac{13}{19}$	$= 256 - 247 = 9$
	$\sqrt{9} = 3.$

Можно отметить, что при второй системе применяются только две формулы, причем все вычисления выполняются по ним рационально.

§ 4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО НЕИЗВЕСТНОЕ В ЗНАМЕНАТЕЛЕ. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Прежде чем переходить к решению квадратных уравнений, содержащих неизвестное в знаменателе дроби, целесообразно повторить теоремы о равносильности уравнений. В VII классе эту тему развить было трудно, так как случаи потери корней уравнения все были связаны с решением уравнений, не имеющих корней.

В VIII классе, повторяя, следует рассмотреть упражнения такого типа.

Пример 1. *Равносильны ли уравнения*: 1) $x^2 = 25$ и $x^2 + \frac{1}{x-3} = 25 + \frac{1}{x-3}$, 2) $x^2 = 25$ и $x^2 + \frac{1}{x-5} = 25 + \frac{1}{x-5}$; 3) $x^2 = 25$ и $\frac{x^2}{x+5} = \frac{25}{x+5}$; 4) $x^2 = 25$ и $\frac{x^2}{x+9} = \frac{25}{x+9}$.

Решение. 1) $x^2 = 25$, следовательно, $x_{1,2} = \pm 5$.

Уравнение $x^2 + \frac{1}{x-3} = 25 + \frac{1}{x-3}$ получено из уравнения $x^2 = 25$ прибавлением к обеим частям по одному и тому же выражению $\frac{1}{x-3}$, которое при $x = \pm 5$ имеет смысл; множества корней уравнений одинаковы; следовательно, они равносильны.

2) $x^2 = 25$, $x_{1,2} = \pm 5$. Но второму уравнению $x^2 + \frac{1}{x-5} = 25 + \frac{1}{x-5}$ удовлетворяет только $x_2 = -5$. Следовательно, множества корней уравнений не одинаковы и потому они неравносильны.

3) Неравносильны. 4) Равносильны.

Пример 2. *Решить уравнение* $\frac{x^2-3}{x-2}=\frac{1}{x-2}$.

$$\frac{x^2-3}{x-2}=\frac{1}{x-2}\ \Big|\ x-2 \qquad (1)$$

$$\frac{(x^2-3)(x-2)}{x-2}=\frac{1\cdot(x-2)}{x-2}; \qquad (2)$$

$$x^2-3=1 \quad (3); \quad x^2=4 \quad (4); \qquad x_{1,2}=\pm 2. \qquad (5)$$

$x_1=2$ непригоден, так как при подстановке в (1) обращает знаменатель в 0;

$x_2=-2$ пригоден, так как при $x_2=-2$ $\frac{(-2)^2-3}{-2-2}=\frac{1}{-2-2}=$ $=\frac{1}{-2-2}$; $\frac{1}{-4}=\frac{1}{-4}$ — равенство верное.

Равносильность нарушена при переходе от уравнения (2) к (3) в момент сокращения дроби на $x-2$.

Приведена подробная запись, преобразование (2) обычно не пишут, а переходят от (1) к (3).

В VIII классе при решении уравнений принято устанавливать область допустимых значений неизвестного. Это подготавливает учеников к отысканию области определения функций.

Запись может быть такой.

Пример 3. *Решить уравнение* $\frac{x}{6}+\frac{x-5}{6-3x}=\frac{x}{2x-4}$.

Найдем простейший общий знаменатель для членов уравнения (пишем справа от вертикальной черты) и допустимые значения x:

$$\frac{x}{6}-\frac{x-5}{3(x-2)}=\frac{x}{2(x-2)}\ \Big|\ 6(x-2),\ x\neq 2$$

$$x(x-2)-2(x-5)=3x;$$

$$x^2-2x-2x+10-3x=0;$$

$$x^2-7x+10=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{7\pm 3}{2}\ \Big|\ b^2-4ac=7^2-4\cdot 10=49-40=9, \quad \sqrt{9}=3$$

$x_1=5$,

$x_2=2$ (непригоден, так как $x\neq 2$).

Ответ. $x=5$.

При решении квадратных уравнений следует обратить внимание на рационализацию решения:

1) применение формулы для уравнения с четным вторым коэффициентом;

2) вычисления подкоренного выражения отдельно (запись А. И. Гольденберга);

3) переносить члены квадратного уравнения так, чтобы первый коэффициент был положителен.

Пример 4. $17x + 24 + (x - 5)^2 = (x - 3)^2 + (x + 4)^2$

Решение. $17x + 24 + x^2 - 10x + 25 = x^2 - 6x + 9 + x^2 + 8x + 16$.

Теперь переносим все члены в правую часть, но пишем ее слева:

$$x^2 - 5x + 24 = 0 \text{ и т. д.}$$

Считают так $+17x$ да $-10x$ будет $+7x$, переносим — будет $-7x$ да $-6x$ будет $-13x$, да $+8x$ будет $-5x$; $+24$ да $+25$ будет $+49$, переносим будет -49, да $+9$ будет -40, да $+16$ будет -24.

4) Ученики, не замечая более простого решения, автоматически приводят уравнение к общему виду.

Пример 5. *Решить уравнение* $(x - 3)^2 = 36$.

Обычно начинают автоматически раскрывать скобки, не замечая, что $x - 3 = \pm 6$, откуда $x_1 = 9$, $x_2 = -3$.

Пример 6 *Решить уравнение* $(x - 2)\ (2x - 3) = 0$.

Ученики часто раскрывают скобки, не замечая, что $x - 2 = 0$, или $2\ x - 3 = 0$, откуда $x_1 = 2$, $x_2 = 1{,}5$.

Причиной служит отсутствие соответствующих упражнений в сборниках задач. Ученикам можно предложить решить рационально следующие уравнения: 1) $(2x - 7)^2 = 9$; 2) $(5x - 8)^2 = (x + 1)^2$; 3) $(3x + 5)\ (x - 1) - (x^2 - 1) = 0$; 4) $(3x - 1)\ (5\ x - 2) - (1 - 3x)\ (x + 4) - 2\ (3x - 1)\ (x - 1) = 0$; 5) $x\ (2 + x) - (2 + x)^2 = 4 - x^2$; 6) $4(x - 5) = (x - 5)^2$.

Программа требует от учеников умения решать квадратные уравнения графически. При этом следует учесть, что ученики VIII класса уже знают графики зависимостей $y = x^2$ и $y = ax + b$. Пользуясь этими графиками, и решают графически квадратные уравнения.

Пример 7. *Решить графически уравнение* $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

Данное уравнение сделаем приведенным и перенесем члены $-\frac{5}{3}x$ и $-\frac{2}{3}$ в правую часть, тогда

$$x^2 = \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Строим графики функций $y = x^2$ и $y = \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$; первый график строится по шаблону, второй по двум точкам:

$$x_1 = 0,\ y_1 = \frac{2}{3};\ \ y_2 = 0,\ \ x_2 = -\frac{2}{5}.$$

Решаем систему уравнений: $\begin{cases} y = x^2; \\ y = \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}. \end{cases}$

Нас интересуют только значения x, соответствующие общим точкам графиков $y = x^2$ и $y = \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$ (рис. 128).

По чертежу находим $x_1 \approx 2$, $x_2 \approx -0{,}3$. Но это приближенно; прежде чем дать ответ, надо сделать проверку:

1) $x_1 = 2$; $3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 2 = 12 - 10 - 2 = 0$, то есть $x_1 = 2$ — корень данного уравнения;

2) $x_2 \approx -0{,}3 : 3\,(-0{,}3)^2 - 5\,(-0{,}3) - 2 = 0{,}27 + 1{,}5 - 2 = -0{,}23$, то есть $x \approx -0{,}3$ — тоже корень уравнения, но приближенный.

Ответ. $x_1 = 2$, $x_2 \approx -0{,}3$.

Может быть учащиеся смогут дать более точное значение второго корня, например $x_2 \approx -0{,}33$, тогда при проверке получим: $3(-0{,}33)^2 - 5(-0{,}33) - 2 \approx -0{,}02$. Значит, $x_2 \approx -0{,}33$ дает более точный результат, чем $x_2 \approx -0{,}3$.

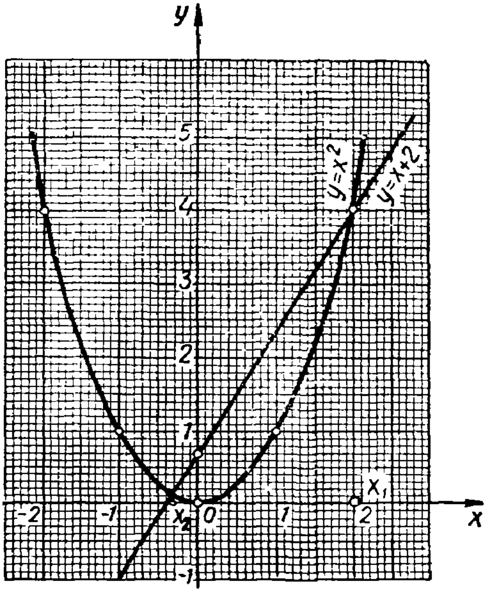


Рис. 128

Следует напомнить, что проверка — органическая часть графического решения всякого уравнения.

Графически следует решить и несколько неполных квадратных уравнений. Например, решение уравнения $x^2 = 2x$ сводят к решению системы $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases}$, а уравнение $x^2 = 4$ к — $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 \end{cases}$.

Квадратные уравнения можно использовать для нахождения наименьшего значения квадратного многочлена.

П р и м е р 8. *Найти наименьшее значение многочлена* $x^2 - 4x$.

Р е ш е н и е. Примем $x^2 - 4x = m$, отсюда получим квадратное уравнение $x^2 - 4x - m = 0$. Решаем его:

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + m}\ .$$

По смыслу $4 + m \geqslant 0$, откуда $m \geqslant -4$. Но m — значение многочлена $x^2 - 4x$ и $m \geqslant -4$, следовательно, наименьшее значение многочлена $x^2 - 4x$ равно -4.

§ 5. ТЕОРЕМА ВИЕТА

Сообразно принятой системе формул корней квадратного уравнения можно дать две формулировки теоремы Виета. Но предварительно остановимся на обратной теореме Виета. Расчленим теорему на условие и заключение.

Условие	Заключение
x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$	$x_1 + x_2 = -p,\ x_1x_2 = q$

Тогда в обратной теореме будет:

Условие	Заключение
$x_1 + x_2 = -p,\ x_1x_2 = q$	x_1x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$

В этом случае обратная теорема формулируется: Если x_1 и x_2 — такие числа, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

В таком виде обратная теорема Виета понадобится только при решении системы уравнений вида $x + y = a,\ \ xy = b$.

Вопрос, давать ли обратную теорему Виета в VIII классе, связан с необходимостью решать упражнения на составление квадратного уравнения по его корням. Пусть, например, даны корни квадратного уравнения $x_1 = 2$, $x_2 = 5$. Надо составить уравнение. По условию x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения, то есть известно, что это корни квадратного уравнения, например, $x^2 + px + q = 0$. Остается найти p и q, а это находим по прямой теореме Виета: $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 + x_2 = 2 + 5 = 7$, $x_1x_2 = 2 \cdot 5 = 10$, следовательно, $p = -7$, $q = 10$, а искомое уравнение $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Надобность в обратной теореме возникла бы, если бы не было сказано, что x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения.

Таким образом, необходимости в обратной теореме в VIII классе нет. Ее лучше ввести в дальнейшем при решении систем уравнений вида $x + y = a$, $xy = b$.

В связи с принятой системой формул корней квадратного уравнения изложение теоремы Виета может быть следующим.

Теорема Виета дается для приведенного квадратного уравнения. Первый раз ее можно дать как задачу: x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Найти $x_1 + x_2$ и x_1x_2.

Применяя ее к квадратному уравнению общего вида, ученик представляет уравнение в уме в виде приведенного.

П р и м е р 1. *Найти сумму и произведение корней следующих уравнений*: 1) $x^2 - 3x + 2 = 0$; 2) $3x^2 - 2x - 1 = 0$; 3) $5x^2 - 10x + 3 = 0$.

Р е ш е н и е. 1) $x^2 - 3x + 2 = 0$ — квадратное уравнение приведенное, поэтому $x_1 + x_2 = 3$, $x_1x_2 = 2$;

2) $3x^2 - 2x - 1 = 0$ — квадратное уравнение общего вида, теорема Виета распространяется только на приведенные квадратные уравнения; поэтому делим устно обе части уравнения на 3 и получаем: что $x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$, $x_1x_2 = -\frac{1}{3}$.

В основном по теореме Виета решают упражнения:

1) на составление квадратных уравнений по данным корням его;

2) на составление квадратных уравнений, корни которых связаны определенным условием с корнями данного квадратного уравнения;

3) на вычисление значений выражений, симметричных относительно корней данного квадратного уравнения.

П р и м е р 2. *Составить квадратное уравнение, зная его корни* 2 и $-\frac{1}{3}$.

Р е ш е н и е. Будем искать квадратное уравнение в виде $x^2 + px + q = 0$, где $p = ?$ $q = ?$

По условию $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, тогда $x_1 + x_2 = 2 + \left(-\frac{1}{3}\right) = 1\frac{2}{3}$, $x_1x_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$.

По теореме Виета $p = -1\frac{2}{3}$, $q = -\frac{2}{3}$ и потому искомое уравнение будет: $x^2 - 1\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = 0$, или $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

П р и м е р 3. *Не решая уравнения* $2x^2 - 13x + 7 = 0$, *составить другое, корни которого в три раза больше корней данного.*

Р е ш е н и е. Имеем $x_1 + x_2 = \frac{13}{2}$, $x_1 x_2 = \frac{7}{2}$. Обозначим корни нового уравнения через x_{I} и x_{II}. По условию $x_{\text{I}} = 3x_1$, $x_{\text{II}} = 3x_2$. Имеем: $x_{\text{I}} + x_{\text{II}} = 3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2) = 3 \cdot \frac{13}{2} = \frac{39}{2}$;

$x_{\text{I}}x_{\text{II}} = 3x_1 \cdot 3x_2 = 9x_1x_2 = 9 \cdot \frac{7}{2} = \frac{63}{2}$. Тогда искомое уравнение будет $x^2 - \frac{39}{2}x + \frac{63}{2} = 0$, или $2x^2 - 39x + 63 = 0$.

От сильного ученика можно потребовать устного решения примера. Действительно, $x_1 + x_2 = -p$, каждое слагаемое x_1 и x_2 умножается на 3, следовательно, и p умножится на 3, то есть второй коэффициент данного уравнения должен быть умножен на 3; $x_1x_2 = q$, здесь каждый множитель умножается на 3, следовательно, произведение и q множится на 9. Поэтому уравнение будет $2x^2 - 39x + 63 = 0$.

По теореме Виета полезны упражнения на вычисление значений симметрических функций его корней.

Пример 4. *Не решая уравнений, найти сумму обратных величин его корней*: а) $x^2 + 5x + 6 = 0$; б) $7x^2 + 3 = 51x$; в) $25x^2 - 7x - 1 = 0$; г) $5x^2 - 21 + 0{,}1$.

Пример 5. *Не решая уравнения* $1{,}5x^2 - 4{,}5x + 1 = 0$, *найти*: а) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1$; б) $x_1^2 + x_2^2$.

Пример 6. *Не решая уравнения* $1{,}5x^2 - 4{,}5x + 1$, *найти*: а) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; б) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; в) $x_1^3 + x_2^3$.

Пример 7. x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2 - 2x - 9 = 0$. *Найти значение* $x_1^3 + x_2^3$ (не решая уравнения).

Решение. Имеем $x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$, $x_1x_2 = -3$. Надо найти значение выражения $x_1^3 + x_2^3$, для этого данное выражение надо представить в виде выражения, содержащего только $x_1 + x_2$ и x_1x_2. В высшей алгебре доказывается, что симметрические функции можно выражать через простейшие симметрические функции. Учитель должен знать, что выражение $x_1^3 + x_2^3$ симметрично относительно x_1 и x_2 (при перестановке x_1 и x_2 выражение $x_1^3 + x_2^3$ переходит в тождественное ему выражение $x_2^3 + x_1^3$) и потому может быть выражено через простейшие симметрические функции, для квадратного многочлена это будут $x_1 + x_2$ и x_1x_2.

Учащимся теоретическая часть не сообщается, а просто показывают, как выразить $x_1^3 + x_2^3$ через $x_1 + x_2$ и x_1x_2. Например, возьмем $(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3$, отсюда $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$, или, учитывая данные значения, $x_1^3 + x_2^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3 \cdot (-3) \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} + 6 = 6\frac{8}{27}$.

Ознакомление учащихся с упражнениями последнего типа служит подготовкой к решению систем симметрических уравнений. Поэтому в VIII классе они полезны только как развивающий материал, но не применимый на практике.

Существуют другие приемы составления квадратных уравнений по данным корням.

Пример. *Корни квадратного уравнения равны* 5 и $-\frac{3}{2}$. *Составить уравнение.*

Решение. 1) Уравнение должно иметь вид: $x^2 + px + q = 0$. 5 и

$-\frac{3}{4}$ — корни его, следовательно, по определению

$$5^2+5p+q=0,\quad \left(\frac{-3}{4}\right)^2-\frac{3}{4}p+q=0.$$

Решаем систему

$$\begin{array}{r|l} 5p+q=-25 & 1 \\ -\frac{3}{4}p+q=-\frac{9}{16} & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$5\frac{3}{4}p=-24\frac{7}{16};\ p=-\frac{391\cdot 4}{16\cdot 23}=-\frac{17}{4}=-4\frac{1}{4}.$$

$$q=-25-5p=-25+21\frac{1}{4}=-3\frac{3}{4}=-\frac{15}{4}.$$

Итак, уравнение будет $x^2-\frac{17}{4}x-\frac{15}{4}=0$, или $4x^2-17x-15=0$.

2) 5 и $-\frac{3}{4}$ — корни уравнения, поэтому уравнение будет:

$$(x-5)\left(x+\frac{3}{4}\right)=0.$$

Действительно, $x=5$ и $x=-\frac{3}{4}$ удовлетворяют этому уравнению.

Остается упростить:

$$x^2-\frac{17}{4}x-\frac{15}{4}x=0;\ 4x^2-17x-15=0.$$

II. При второй системе применяются только формула корней для квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом и общая формула корней квадратного уравнения. Поэтому формулировка теоремы Виета дается для уравнения общего вида:

Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

Дано. x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Доказать. $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

Доказательство. Имеем $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; (1)

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \quad (2)$$

Почленно складываем равенства (1) и (2):

$$x_1+x_2=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}.$$

Почленно умножаем равенства (1) на (2):

$$x_1x_2=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

Упражнения решаются те же, что и при первой системе. Во второй системе будет меньше ошибок при применении теоремы Виета (не будет ошибки, когда теорему Виета применяют к уравнению вида $ax^2 + bx + c = 0$), но вызовет больше затруднений составление квадратного уравнения по данным корням его.

Пример 8. *Составить квадратное уравнение по данным корням.*

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{6}.$$

Решение. x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения, возьмем его в форме $ax^2 + bx + c = 0$ (1).

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$ (2)

Находим: $x_1 + x_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \quad x_1x_2 = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{9}.$

По (2): $-\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \ \frac{c}{a} = -\frac{1}{9}$. Отсюда $b = -\frac{a}{2}, \quad c = -\frac{a}{9}$.

Подставим значения b и c в (1):

$$ax^2 - \frac{a}{2}x - \frac{a}{9} = 0, \ a \neq 0,$$

отсюда при $a=1$ получаем простейшее уравнение $18x^2 - 9x - 2 = 0$.

Вообще, уравнений, удовлетворяющих условию задачи, неограниченно много, они получаются при других значениях $a \neq 0$.

§ 6. РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО МНОГОЧЛЕНА НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

В программе говорится о квадратном трехчлене $ax^2 + bx + c$. Пожалуй, лучше говорить о квадратном многочлене, так как частные случаи его ax^2, $ax^2 + c$ не трехчлены, первый — одночлен, второй — двучлен.

Независимо от системы изложения сначала дается понятие о корне многочлена.

Возьмем квадратный многочлен $2x^2 - 2x - 4$ и составим таблицу его значений:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$2x^2 - 2x - 4$	8	0	-4	-4	0	8	20

Обращают внимание учеников на то, что значение x, при котором *многочлен обращается в нуль, называется* корнем многочлена.

Далее можно сказать, что корни данного многочлена мы нашли, составляя таблицу, и спросить учеников, нельзя ли указать алгоритм, как найти корни многочлена $2x^2 - 2x - 4$, не составляя таблицы. Они скажут сами или с помощью учителя, что найти корни многочлена $2x^2 - 2x - 4$, то есть значения x, при которых этот многочлен равен нулю, можно. Для этого надо составить уравнение

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

и найти его корни $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

При этом следует подчеркнуть, что многочлен $2x^2 - 2x - 4$ может принимать бесконечное множество значений; мы приравняли его к нулю, чтобы найти корни.

Можно спросить: сколько корней имеет квадратный многочлен? Почему? (О т в е т. Два, один или ни одного.)

Рассмотрим обе системы изложения.

I. Выводится формула $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ (1). Пользуясь этой формулой, выполняют ряд упражнений. Затем выводится формула $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (2).

Типовой ошибкой учащихся при этой системе будет следующая: ученики, привыкнув к формуле (1), забывают, пользуясь общей формулой (2), ставить коэффициент a. Они дают такое разложение $2x^2 - 10x + 12 = (x - 2)(x - 3)$.

II. Дается только одна формула для общего случая. Ее можно получить попутно при выводе формулы решений уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ способом разложения левой части на множители. Если формула корней этого уравнения была выведена иначе, то придется формулу разложения квадратного трехчлена вывести.

Возьмем квадратный многочлен $ax^2 + bx + c$ (1). Пусть x_1 и x_2 — его корни, то есть такие значения x_1 и x_2, при которых $ax^2 + bx + c = 0$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, отсюда

$$b = -a(x_1 + x_2),\quad c = ax_1x_2.$$

Подставим значения b и c в многочлен (1) и разложим его на множители:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = a[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2] =$$
$$= a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = a(x - x_1)(x - x_2),\ \text{то есть}$$
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Ученики должны понимать, что $ax^2 + bx + c$ — квадратный многочлен относительно x, $a(x - x_1)(x - x_2)$ — его разложение и x_1 и x_2 — корни многочлена.

Разлагают многочлен, пользуясь формулой, поэтому заучивать словесную формулировку вряд ли надо. От учащихся требуют только понимание ее.

Имея только одну формулу, ученики не забывают ставить коэффициент a.

Пример. *Разложить на линейные множители* $3x^2 - 7x - 40$.

Имеем: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Находим корни многочлена $3x^2 - 7x - 40$; для этого составляем уравнение:

$$3x^2 - 7x - 40 = 0.$$

Отсюда $x_{1,2} = \frac{7 \pm 23}{6}$ | $b^2 - 4ac = 7^2 + 4 \cdot 3 \cdot 40 = 49 + 480 = 529$
$\sqrt{529} = 23$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -\frac{8}{3}$$

По формуле разложения квадратного многочлена:

$$3x^2 - 7x - 40 = 3(x - 5)\left(x + \frac{8}{3}\right).$$

Далее можно упростить, перемножая 3 и $x + \frac{8}{3}$;

$$3x^2 - 7x - 40 = (x - 5)(3x + 8).$$

В работе используют краткую запись, пояснения делают у доски устно. Например, в данном случае записывают так:

$$3x^2 - 7x - 40 = 3(x - 5)\left(x + \frac{8}{3}\right) = (x - 5)(3x + 8);$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

$3x^2 - 7x - 40 = 0$ | $b^2 - 4ac = 7^2 + 4 \cdot 3 \cdot 40 = 49 + 480 = 529$

$x_{1,2} = \frac{7 \pm 23}{6}$ | $\sqrt{529} = 23$

$x_1 = 5, \ x_2 = -\frac{8}{3}$

В частности, формулу $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ можно иногда применять и для разложения многочленов степени выше второй. Возьмем многочлен $A = 2a^3 - 3a^2 - 4a^2b + 5ab + 2b^2$. Данный многочлен по букве b второй степени и это дает возможность применить формулу. Найдем корни b_1 и b_2 многочлена A:

$$2b^2 - (4a^2 - 5a)b + (2a^3 - 3a^2) = 0;$$

$b_{1,2} = \frac{(4a^2 - 5a) \pm a(4a - 7)}{4}$ | $D = (4a^2 - 5a)^2 - 8(2a^3 - 3a^2) = a^2(4a - 7)^2$

$$b_1 = 2a^2 - 3a; \quad b_2 = \frac{a}{2}, \text{ поэтому}$$

$$M = 2(b - 2a^2 + 3a)\left(b - \frac{a}{2}\right) = (2b - a)(b - 2a^2 + 3a).$$

§ 7. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В VIII КЛАССЕ

В VIII классе ограничиваются решением систем двух уравнений с двумя неизвестными, из которых одно квадратное, другое — первой степени.

Решают такие системы способом подстановки, обоснование равносильности систем уравнений ведется, как в VII классе.

Пример. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} 2x + 3y = 8; \\ 3x^2 - 2xy + y^2 = 3. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} y = \dfrac{8-2x}{3} \\ 3x^2 - 2xy + y^2 = 3 \end{cases} (1) \quad \begin{cases} y = \dfrac{8-2x}{3} \\ 3x^2 - \dfrac{2x(8-2x)}{3} + \dfrac{(8-2x)^2}{9} = 3. \end{cases} (2)$$

Все пары значений x и y, которые удовлетворяют уравнениям системы (1), удовлетворяют и уравнениям системы (2), так как при этом $y = \frac{8-2x}{3}$.

Обратно, все пары значений x и y, которые удовлетворяют уравнениям системы (2), удовлетворяют и уравнениям системы (1), так как при этом $\frac{8-2x}{3} = y$. Следовательно, системы (1) и (2) равносильны.

$$\begin{cases} y = \dfrac{8-2x}{3}; \\ 27x^2 - 48x + 12x^2 + 64 - 32x + 4x^2 - 27 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{8-2x}{3} \\ 43x^2 - 80x + 37 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{8-2x}{3} \\ x_{1,2} = \dfrac{40 \pm 3}{43} \end{cases} \quad \left| \begin{aligned} k^2 - ac &= 40^2 - 43 \cdot 37 = \\ &= 1600 - 1591 = 9 \end{aligned} \right.$$

Второе уравнение системы распадается на два, поэтому и система распадается на две:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{8-2x}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{37}{43} \\ y = \dfrac{8-2x}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{8-2\cdot 1}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{37}{43} \\ y = \dfrac{8-2\cdot\frac{37}{43}}{3} \end{cases} \qquad \frac{8-2\cdot\frac{37}{43}}{3} = \frac{8-1\frac{31}{43}}{3} = \frac{6\frac{12}{43}}{3} = 2\frac{4}{43}.$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{37}{43} \\ y = 2\dfrac{4}{43} \end{cases}$$

Такая запись подробна и отражает то, что делают при решении системы, но она громоздка. Можно записать решение короче:

Решение II. $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x^2 - 2xy + y^2 = 3 \end{cases} \quad \Big| \; y = \dfrac{8-2x}{3}$

$$\frac{3x^2 - 2x(8-2x)}{3} + \frac{(8-2x)^2}{9} = 3;$$

$$27x^2 - 48x + 12x^2 + 64 - 32x + 4x^2 - 27 = 0;$$

$$43x^2 - 70x + 37 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{40 \pm 3}{43} \quad \Big| \; k^2 - ac = 40^2 - 43\cdot 37 = 1600 - 1591 = 9$$

$$x_1 = 1, \quad y_1 = \frac{8-2\cdot 1}{3} = 2;$$

$$x_2 = \frac{37}{43}, \quad y_2 = \frac{8-2\cdot\frac{37}{43}}{3} = \frac{8-1\frac{31}{43}}{3} = \frac{6\frac{12}{43}}{3} = 2\frac{4}{43}.$$

Равносильность не нарушена. Ответ. $(1;\ 2)$ и $\left(\dfrac{37}{43};\ 2\dfrac{4}{43}\right)$.

Сильным ученикам следует давать задачи, в которых надо проявить изобретательность. Например:

Задача 1. *В прямоугольнике разность сторон 23 см, а площадь 420 см^2. Найти его периметр, не находя отдельно сторон.*

Р е ш е н и е. Пусть стороны x *см* и y *см*, тогда

$$\begin{cases} xy = 420 \\ x - y = 23 \end{cases} \quad \Bigg| \; (x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy, \; x+y > 0 \Rightarrow$$

$$x + y = \sqrt{(x-y)^2 + 4xy} = \sqrt{23^2 + 4 \cdot 420} = 47\,(см) \Rightarrow P = 94 \text{ см}.$$

З а д а ч а 2. *Изобразить на координатной плоскости все решения системы уравнения:*

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 - 4x + 4y = 0; \\ x^2 + xy - 2y^2 - 5x + 5y = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 - 4x + 4y = 0 \\ x^2 + xy - 2y^2 - 5x + 5y = 0 \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}$$

$$-3xy + 3y^2 + 6x - 6y = 0; \; (x - y)(y - 2) = 0;$$

а) $x - y = 0$.

В этом случае $y = x$ и оба уравнения системы обращаются в тождества: $2x^2 - x^2 - x^2 - 4x + 4x = 0; \; 0 = 0$

$$x^2 + x^2 - 2x^2 - 5x + 5x = 0; \; 0 = 0$$

$$(x \text{ — любое число}, \; y = x).$$

Решений бесконечное множество.

б) $\begin{cases} y = 2; \\ 2x^2 - xy - y^2 - 4x + 4y = 0. \end{cases}$

$$2x^2 - 2x - 4 - 4x + 8 = 0; \; x^2 - 3x + 2 = 0; \; x_1 = 1, \; x_2 = 2.$$

Дает еще два решения (1, 2), (2, 2).

Графически всем решениям системы соответствует точка A (1,2) и прямая $y = x$ [она включает и точку B (2,2)].

ГЛАВА XIV. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В этой теме учащиеся знакомятся с приложениями методов алгебры к решению разнообразных задач, причем круг задач, которые можно решить с помощью алгебры, значительно шире, чем в арифметике, так как с помощью арифметики решаются только те задачи, где зависимости содержат четыре действия: сложение, вычитание, умножение и деление. С помощью алгебры можно решать задачи, где зависимости содержат шесть действий.

Трудность этой темы состоит в том, что алгебраический метод решения задач определяется в самых общих чертах и в каждой конкретной задаче требуется осмысленно применить этот метод При этом учащиеся должны хорошо знать зависимости между различными величинами.

В основном изучение приемов составления уравнений по условию задачи приходится на VII класс, в VIII классе только расширяется тематика задач, решение их приводится к решению квадратных уравнений.

В VII и VIII классах, после того как изучена тема «Составление уравнений», тренировка в решении задач ведется в течение всего года, учитель включает в домашние задания соответствующие задачи, кроме того, решение задач с помощью составления уравнений вновь рассматривается при изучении систем уравнений.

Очевидно, что при подборе задач нужно соблюдать принцип постепенного нарастания трудности. Тематика задач носит несколько условный характер, выбор практических задач ограничен.

Решение задачи на составление уравнения по условию состоит из следующих частей: 1) составление уравнения; 2) решение уравнения; 3) проверка решения; 4) исследование решения.

§ 2. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ

Задачи, решаемые в VI классе, подбираются такие, в которых легко получить уравнение.

Когда в VII классе приступают к решению задач методом составления уравнений, то учащиеся отчасти подготовлены к теме, они знают, что надо выбрать неизвестное и,пользуясь условием задачи, составить уравнение.

Для составления уравнений применимы следующие приемы:

I. Выделяют взаимозависимые величины, входящие в условие задачи, и обозначают их через неизвестное и данные; затем по условию задачи устанавливают зависимость между этими величинами и составляют уравнение.

II. Аналитико-синтетический метод.

Наиболее распространенный способ состоит в том, что задачи делят по типам: на движение, на стоимость, на работу, на проценты и т. д. и показывают, как решать задачи данного типа. Для этого дают образец составления уравнения по условию задачи в классе. На дом задают задачу, подобную сделанной в классе, так чтобы ее не трудно было решить по аналогии. Ученики постепенно осваивают, как составлять уравнение по условию задачи. Установочные задачи нового типа решаются в классе в большинстве случаев с большой помощью учителя, задающего наводящие вопросы. Например, пусть первый раз в VII классе решается задача на движение.

Задача 1. *Связной из пункта A должен был доставить донесение в пункт B. Весь путь туда и обратно он проехал за* $14\frac{1}{2}$ *ч, причем от A до B он проезжал по 30 км в час, а обратно от B до A по 28 км в час. Определить расстояние от A до B.*

Учитель обычно вызывает ученика к доске и решение идет по вопросам:

Что примем за неизвестное? (За x *км* примем расстояние от A до B.)

Почему? (Потому что это требуется определить.)

Мы теперь имеем расстояние x *км* и скорости 30 *км/ч* и 28 *км/ч*. Что можно выразить (найти)? (Время, за которое связной проедет x *км* от A до B и от B до A.)

Чему равно время движения от A до B? $\left(\frac{x}{30}\ ч.\right)$

Чему равно время движения от B до A? $\left(\frac{x}{28}\ ч.\right)$

Что мы знаем про $\frac{x}{30}$ *ч* и $\frac{x}{28}$ *ч*? (Известно, что все время движения равно $14\frac{1}{2}$ *ч*, или сумма $\frac{x}{30}$ и $\frac{x}{28}$ равна $14\frac{1}{2}$).

Что теперь можно сделать? (Можно составить уравнение.) Появляется запись

$$\frac{x}{30}+\frac{x}{28}=14\frac{1}{2}.$$

Вопросы, конечно, могут быть изменены. Например, третий вопрос, явно подсказывающий, можно задать иначе: расстояние AB равно x *км*, что еще известно по условию задачи? Ученики могут сказать, что известны скорости (это хороший ответ), тогда дальше можно продолжать составление, как сделано выше. Если же скажут, что известно время движения $14\frac{1}{2}$ часов, то придется ответить, что это данное учитывать рано, так как скорость движения за это время менялась, и связать путь $2x$ со временем $14\frac{1}{2}$ часов нельзя. Тогда останется выбрать первый вариант.

Как видно, в составлении уравнения по условию задачи можно выделить следующие этапы:

1) выбор неизвестного;

2) обозначение всех величин, входящих в условие, через неизвестное и данные (кроме одного);

3) взяв неиспользованные данные, составляют уравнение.

Собственно к этому учащиеся прибегали и раньше в VI классе, только теперь в задачах встречаются более сложные зависимости.

Составление уравнения, направляемое вопросами учителя, записывается в той же последовательности:

1) расстояние от A до B x *км*

$$\left.\begin{array}{l} \text{2) время движения от } A \text{ до } B \ \frac{x}{30}\ ч \\ \text{3) время движения от } B \text{ до } A \ \frac{x}{28}\ ч \end{array}\right\} \text{сумма } 14\frac{1}{2}\ ч$$

Уравнение $\frac{x}{30}+\frac{x}{28}=14\frac{1}{2}$.

Аналогично подробно рассматривается решение задач на составление уравнений, представляющих какую-либо новизну по входящим величинам или по моменту составления.

При составлении уравнения всегда необходимо требовать от учеников, чтобы они объяснили момент составления уравнения. В данной задаче они до составления уравнения должны сказать (при решении у доски) или записать (при решении в тетради), что по условию сумма $\frac{x}{30}$ и $\frac{x}{28}$ часов равна $14\frac{1}{2}$ часов.

Интересный метод изучения этой темы предложен С. С. Бронштейном. Он аналогичен аналитическому методу решения задач в арифметике. К сожалению, С. С. Бронштейн несколько осложнил применение метода требованием отыскивать по условию задачи равные величины, тогда как часто встречаются случаи сумм и разностей одноименных величин.

Проще требовать, чтобы ученик искал в условии задачи зависимости, которые дали бы возможность установить равенство между одноименными величинами.

Составление уравнения складывается из следующих элементов:

1) анализ зависимостей между величинами (краткая запись условия, использование, где возможно, графика);

2) выбор неизвестного;

3) выражение величин, входящих в найденные зависимости, через неизвестное и данные;

4) составление уравнения, пользуясь одной из найденных зависимостей.

Рассмотрим этот процесс на примере.

Задача 2. *Велосипедист ехал от пункта А до пункта В со скоростью 12 км в час. Обратно от В до А он проезжал в каждый час на 4 км больше и потому затратил на путь от В до А на 1 час меньше, чем от А до В. Найти расстояние между пунктами А и В.*

Решение.

1) Анализ зависимостей. В условии задачи даны разности времен и скоростей, но можно считать, что скорость для обратного пути от B до A известна: она равна 16 *км/ч*, значит, в условии задачи основная зависимость — разность времен движения велосипедиста от A до B и от B до A, а именно

(время от A до B) — (время от B до A) $= 1$ *ч* (1).

2) Выбор неизвестного. Здесь, очевидно, надо принять расстояние $AB = x$ *км* (2).

3) Выражение величин, входящих в зависимость (1), через данные и x.

По условию задачи в зависимости (1) речь идет о времени движения от A до B и от B до A, находим их:

время движения от A до B — $\frac{x}{12}$ часов (3);

время движения от B до A — $\frac{x}{16}$ часов (4).

4) Составление уравнения.

Полученные выражения (3) и (4) подставим в равенство (1) и получим уравнение

$$\frac{x}{12} - \frac{x}{16} = 1.$$

Затем надо решить уравнение и проверить решение по условию задачи.

Очень полезно при составлении уравнений использовать, где возможно, графические иллюстрации. В данной задаче можно изобразить путь в виде отрезка AB (рис. 129), ему соответствует x *км*; векторами показать скорость движения туда и обратно. Тогда на чертеже будут наглядно показаны два компонента движения, а

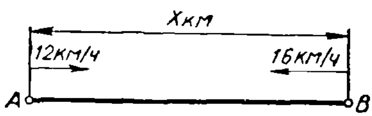


Рис. 129

это подскажет, что надо искать третий компонент — время, которое потребуется на движение от A до B и обратно.

Задача 3. *Два экскаватора вырыли котлован для колхозной электростанции за 24 дня. Первый экскаватор один мог бы выполнить эту работу в $1\frac{1}{2}$ раза скорее, чем один второй. За сколько дней каждый из экскаваторов мог бы выполнить один всю эту работу?*

1) Анализ зависимостей. Здесь две зависимости:

$$\frac{\text{Время II}}{\text{Время I}} = 1{,}5 \quad (1).$$

(Работа I за 24 часа) + (работа II за 24 часа) = (вся работа) (2).

Примем зависимость (2) за условие, по которому можно составить уравнение.

2) Выбор неизвестного.

Время I — x дней, тогда время II — $\frac{3}{2}x$ дней.

3) Выражение величин, входящих в равенство (2).

По условию (2) надо выразить работу экскаваторов за 24 дня.

Примем всю работу за 1, тогда I экскаватор за 1 день выполнит $\frac{1}{x}$ работы, а II — $\frac{2}{3x}$ работы, а за 24 дня I выполнит $\frac{24}{x}$ работы (3), а II — $\frac{48}{3x} = \frac{16}{x}$ работы (4).

4) Составление уравнения.

Подставим выражения (3) и (4) в равенство (2) и получим уравнение[1] $\frac{24}{x} + \frac{16}{x} = 1$.

Затем уравнение решают и проверяют решение.

Достоинством аналитического метода решения является то, что ученики более сознательно ведут составление уравнения. В самом деле, в задаче 2 из равенства (1) следует, что надо искать время движения от A до B и от B до A; в задаче 3 следует по равенству (2) искать работу, сделанную I и II экскаватором за 24 дня.

Отметим, что анализ зависимостей, данных в условии задачи, в некоторых случаях бывает затруднителен и потому нельзя считать указанный прием за универсальный. Дело в том, что в начале

---

[1] Можно было составить уравнение, пользуясь тем, что два экскаватора вместе за 1 день делают $\frac{1}{24}$ работы, тогда получили бы уравнение $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{24}$, но это уравнение соответствует лишь случаю, когда работают одновременно оба экскаватора, поэтому учащихся в VII классе лучше приучить составлять уравнение на работу, как дано в тексте.

составления уравнения ученики не всегда видят эту зависимость. Но для большего числа задач стабильного сборника задач он применим. Некоторые методисты возражают, что найти и выразить зависимость, по которой составляется уравнение, это так же трудно, как составить уравнение, и потому метод анализа не устраняет трудность составления уравнения, а только заменяет ее. Но ведь учащихся в арифметике до решения задачи приучали делать краткую запись условия задачи. Установление зависимостей по условию задачи в алгебре — та же краткая запись условия.

Кроме того, для составления уравнения мы обязательно должны использовать эту или равносильную ей зависимость, как единственное средство решения задачи. Поэтому речь идет лишь о том, когда — раньше или позже — следует выяснить зависимость, которая дает возможность составить уравнение.

На первых порах метод составления уравнения играет большую роль в усвоении учениками решения задач. Затем по мере накопления опыта значение метода уменьшается и в VIII классе вопрос о решении типичных задач вызывает уже меньше затруднений.

К недостаткам рассмотренного метода относится то, что много времени уходит на запись. Но запись анализа целесообразно применять только на первых шагах обучения составлению уравнений, затем ученики привыкают в типовых задачах находить нужные зависимости для составления уравнения и надобность в обременительных записях анализа (1) пропадает, но зато приходится обосновывать момент составления уравнения.

Чтобы несколько сократить запись анализа, некоторые учителя вводят краткие обозначения, часть которых стандартна. Например, в задаче 2 можно зависимость (1) написать так: $t_{AB} - t_{BA} = 1$ (*ч*) или в задаче 3 обозначить A_1 — работа I за 24 часа, аналогично A_2 — работа II за 24 часа, 1 — вся работа, тогда зависимости запишутся так:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{3}{2} \ (1) \text{ и } A_1 + A_2 = 1 \ (2).$$

При решении трудных задач анализ применяется редко, для их решения указать какие-либо методы затруднительно.

В VIII классе составлению уравнений по условию задачи отводится много времени, но приемы составления остаются те же, только расширяется тематика задач.

Возьмем пример более сложной задачи.

Задача 4. *Бригада лесорубов должна была по плану заготовить в несколько дней 216 $м^3$ дров. Первые три дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготовляла больше на 8 $м^3$. Сколько дров в день должна была заготовлять бригада по плану?*

Из условия следует, что $T_{план} - T_{факт} = 1$.

Пусть бригада заготовила в день x $м^3$ дров по плану, тогда $T_{план} = \frac{216}{x}$ дней.

Но на самом деле она заготовляла 3 дня по плану и заготовила $3x$ $м^3$. Тогда $T_{факт}$ складывается из 3 дней работы по плану и дней, в которые она выполняла по $(x+8)$ $м^3$. Чтобы найти число этих дней, надо число кубометров дров, заготовленных в эти дни, поделить на дневную производительность $(x+8)$ $м^3$. После 3 дней работы бригаде осталось заготовить $(232—3x)$ $м^3$ и это она сделала за $\frac{232-3x}{x+8}$ дней.

Следовательно, $T_{факт} = 3 + \frac{232-3x}{x+8}$, и по зависимости (1) получим уравнение:

$$\frac{216}{x} - \left(3 + \frac{232-3x}{x+8}\right) = 1.$$

§ 3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ СПОСОБЫ ВЫБОРА НЕИЗВЕСТНОГО

Во всех рассматриваемых нами задачах при составлении уравнений за неизвестное принималось искомое. Это можно считать общим правилом. Но требовать от учеников всегда за неизвестное брать то, что требуется найти в вопросе задачи, нельзя. Есть много задач, в которых рационально брать за неизвестное вспомогательную величину.

Учащиеся обычно начинают составлять уравнение, взяв за x то, что требуется найти в вопросе задачи. Но может случиться, что составление уравнения в этом случае идет трудно, тогда ученик может принять за x другую величину, о которой говорится в условии задачи.

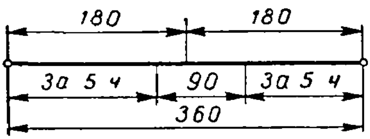


Рис. 130

Рассмотрим, какие имеются возможности в выборе неизвестного при решении задачи.

З а д а ч а 1. *Два поезда выходят из двух городов, расстояние между которыми равно 360 км, и идут навстречу друг другу. Они могут встретиться на середине пути, если второй поезд выйдет со станции на 1,5 часа раньше первого. Если же они выйдут со станции одновременно, то через 5 часов расстояние между ними будет равно 90 км. Найти скорость каждого поезда.*

1) А н а л и з з а в и с и м о с т е й.

На пути в 180 *км* (рис. 130).

$T_{II} - T_{I} = 1{,}5$ (часа) (1)

За 5 часов

$S_{I} + S_{II} = 270$ *км* (2).

Вариант а

2) Выбор неизвестного

Примем скорость I за x *км/ч*, тогда по зависимости (1) можно найти скорость II окольным путем, а именно I пройдет 180 *км* за $\frac{180}{x}$ *ч*, а II потратит на этот путь на 1,5 *ч* больше, то есть $\frac{180}{x}+\frac{3}{2}=\frac{3x+360}{2x}$ (*ч*), значит, его скорость равна:
$$\frac{180\cdot 2x}{3(x+120)}=\frac{120x}{x+120}\ (км/ч).$$

3) Выражение величин, входящих в равенство (2).

По (2) нужно выразить пути I и II поездов за 5 *ч*, они будут равны $5x$ *км* и $\frac{120x\cdot 5}{x+120}$ *км*, откуда по (2) уравнение будет:
$$5x+\frac{600x}{x+120}=270.$$

Вариант б

2) Выбор неизвестного

Примем время движения I на 180 *км* за x часов, тогда II пройдет тот же путь за $(x+1,5)$ *ч*, значит, скорость I будет $\frac{180}{x}$ *км/ч*, II — $\frac{180}{x+1,5}$ *км/ч*.

3) Выражение величин, входящих в равенство (2).

Выражаем для (2) пути за 5 *ч*, они равны $\frac{180\cdot 5}{x}$ *км* и $\frac{180\cdot 5}{x+1,5}$ *км*, значит, по (2) уравнение будет:
$$\frac{900}{x}+\frac{900}{x+1,5}=270.$$

Очевидно, что составление в случае варианта *б* идет значительно проще, причем не только потому, что в этом варианте короче запись; главное в том, что гораздо проще выражаются скорости обоих поездов. Незначительная потеря во времени, получаемая в варианте от того, что после того, как найден x, надо вычислить скорости по формулам $\frac{180}{x}$ и $\frac{180}{x+1,5}$, целиком покрывается простотой составления уравнения.

Отсюда можно сделать заключение, что в некоторых задачах, когда трудно составить уравнение, рационально через x обозначить не искомое из вопроса задачи, а вспомогательное неизвестное.

Чем руководствоваться при выборе вспомогательного неизвестного? Проанализируем, почему труден вариант а. По вопросу задачи надо найти скорость каждого поезда, но прямой зависимости между скоростями не дано, поэтому если принять скорость одного поезда за x, то трудно выразить скорость другого, а для времени такая зависимость в условии задачи есть и потому здесь целесообразно принять за x время движения одного из поездов. Аналогично определяется выбор вспомогательного неизвестного и в других задачах, то есть целесообразно за x принимать величину, наиболее удобно связанную с другими величинами условия задачи.

З а д а ч а 2. *С двух аэродромов вылетают одновременно навстречу друг другу вертолет и учебный самолет. К моменту встречи вертолет прошел на 100 км меньше самолета. Остальной путь самолет покрывает за 1 ч 20 мин, а вертолет за 3 ч. Найти расстояние между аэродромами.*

Р е ш е н и е.

А н а л и з з а в и с и м о с т е й. Пусть A — аэродром вертолета, B — самолета (рис. 131). В задаче две зависимости: одна очевидная, другая содержится в скрытой форме, а именно:

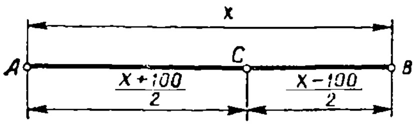


Рис. 131

1) (путь самолета до встречи) — (путь вертолета до встречи) = 100 *км* (1), или $BC - AC = 100$ *км* (1a).

2) Самолет и вертолет вылетели одновременно, поэтому время полета самолета до встречи равно времени полета вертолета до встречи (2).

В а р и а н т I.

1) В ы б о р н е и з в е с т н о г о.

Пусть расстояние $AB = x$ *км*, что соответствует вопросу задачи.

2) В ы р а ж е н и е в е л и ч и н, в х о д я щ и х в о (2).

Чтобы найти в (2) время движения самолета и вертолета до встречи, надо знать их скорости и пройденные пути.

Имеем для пути $BC - AC = 100$ и $BC + AC = x$, откуда

$$AC = \frac{x+100}{2}\ (км),\quad BC = \frac{x-100}{2}\ (км).$$

По условию самолет прошел путь $CB = \frac{x-100}{2}$ (*км*) за $1\frac{1}{3}$ *ч*, а вертолет — $CA = \frac{x+100}{2}$ (*км*) за 3 *ч*, значит, их скорости будут: самолета $\frac{3(x-100)}{8}$ *км/ч*, вертолета $\frac{x+100}{6}$ *км/ч*. Остается найти для (2) время до встречи.

У самолета оно будет равно $\frac{x+100}{2} : \frac{3(x-100)}{8} = \frac{4(x+100)}{3(x-100)}$ (*ч*),

у вертолета — $\frac{x-100}{2} : \frac{x+100}{6} = \frac{3(x-100)}{x+100}$ (*ч*).

По (2):

$$\frac{4(x+100)}{3(x-100)} = \frac{3(x-100)}{x+100}.$$

Отсюда $4(x+100)^2 = 9(x-100)^2$; $2(x+100) = \pm 3(x-100)$.

1) $2(x+100) = 3(x-100)$; $2x+200 = 3x-300$; $x = 500$ *км*.

2) $\frac{2(x+100)}{+} = -\frac{3(x-100)}{+}$, по смыслу числа $x+100$ и $x-100$ положительны, следовательно, второе уравнение — неверное равенство (по смыслу x).

Остается проверить решение $AB = 500$ *км*.

В этом варианте учащихся затрудняет выразить через x пути, пройденные до встречи.

Вариант II. Пусть расстояние $BC = x$ *км*, тогда $AC = (x + 100)$ *км* (рис. 132). Далее составление идет в том же порядке, но находят $x = 200$ *км*. Поэтому после проверки решения надо найти весь путь $2x + 100 \Big|_{x=200} = 500$ (*км*).

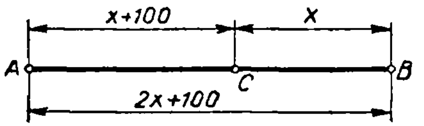


Рис. 132

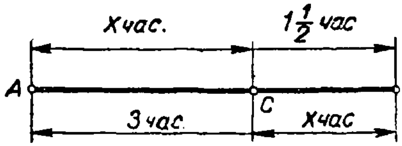


Рис. 133

Вариант III. Можно привести еще один вариант составления уравнения.

Аэроплан и вертолет вылетели из конечных пунктов одновременно, следовательно, их время до встречи одинаковое, обозначим через x *ч* (рис. 133).

Отметим на чертеже время полета после встречи; сверху для аэроплана, внизу для вертолета.

Аэроплан летит с постоянной скоростью, поэтому пройденные им пути пропорциональны протекшему времени, то есть

$\frac{AC}{CB} = \frac{x}{1\frac{1}{3}}$ (1).

Аналогично получим для вертолета $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{x}$ (2).

Сравнивая (1) и (2), получим:

$$\frac{x}{1\frac{1}{3}} = \frac{3}{x}, \text{ откуда } x^2 = 4,\ x = \pm 2.$$

$$x = 2;\ x = -2 \text{ (непригодно по смыслу).}$$

Но теперь придется еще найти длину пути AB.

Вертолет летел от B до C 2 *ч*, от C до A — 3 *ч*, причем путь CA больше пути BC на 100 *км*, а по времени на $3-2 = 1$ (*ч*), следовательно, скорость вертолета 100 *км/ч*, а путь $AB = 100 \cdot 5 = 500$ (*км*).

§ 4. ОФОРМЛЕНИЕ ЗАПИСИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Когда ученики привыкнут к составлению уравнений и прорешают в классе основные типы задач, подробная запись анализа будет занимать все меньше и меньше места. Поэтому, как правило, запись решения задач на составление уравнений дается только с момента выбора неизвестного. Существует три типа записи: 1) запись-перечень этапов составления уравнения; 2) развернутая запись, когда учитель требует связного, по возможности литературного изложения составления уравнения; 3) табличная запись.

Рассмотрим их на примерах.

Задача. *Колхоз должен был засеять 200 га к определенному сроку, но он засевал ежедневно на 5 га больше, чем намечалось по плану, и потому закончил сев на 2 дня раньше срока. Во сколько дней был закончен сев?*

I. Запись-перечень.

Закончили сев за x дней.

Намечали засеять за $(x+2)$ дня.

В день засевали по $\frac{200}{x}$ *га*.

В день намечали засевать по плану $\frac{200}{x+2}$ *га*.

По условию задачи в день засевали на 5 *га* больше, чем по плану, значит, $\frac{200}{x}$ больше, чем $\frac{200}{x+2}$, на 5, откуда

$$\frac{200}{x} - \frac{200}{x+2} = 5.$$

II. Развернутая запись.

Пусть сев закончили за x дней, тогда по плану следовало кончить сев за $(x+2)$ дня. В день засевали по $\frac{200}{x}$ *га*, а по плану следовало засевать $\frac{200}{x+2}$ *га*.

По условию задачи в день засевали на 5 *га* больше, чем намечалось по плану, то есть $\frac{200}{x}$ больше $\frac{200}{x+2}$ на 5, откуда

$$\frac{200}{x} - \frac{200}{x+2} = 5.$$

III. Табличная запись

Таблица 45

	Число дней	*Га* в день	
Фактически	x	$\frac{200}{x}$	больше на 5
По плану	$x+2$	$\frac{200}{x+2}$	

$$\frac{200}{x}-\frac{200}{x+2}=5.$$

Сравним три записи. Наиболее удобна табличная запись: она наглядна, требует меньше времени для составления уравнения и ясно выражает процесс составления уравнения. Поэтому для экономии времени целесообразно в классе и дома записывать решение при помощи таблиц, а примерно одну десятую часть решенных задач записывать более подробно. Есть возражение, что табличная запись — схема; это верно, но и все другие записи решения задач также схематичны, особенно запись-перечень.

Табличная запись удобна своей компактностью. Но чтобы ее применить, ученики должны хорошо представлять себе, какие величины понадобятся при составлении уравнения. Поэтому пользоваться ею приходится на более позднем этапе изучения темы, когда ученики освоятся с составлением уравнений, будут уметь решать основные типы задач. Решая первые задачи нового типа в VII классе, приходится вначале пользоваться записью-схемой (вариант I), а решив две-три однотипные задачи, можно переходить к табличной записи. Сначала решают задачу с записью по схеме I, а потом учитель показывает, как ее можно оформить в виде таблицы III.

В VIII классе большей частью применяют табличную запись, но для задач трудных и новых по типу, в которых ученики при составлении уравнения испытывают затруднения, требовать от них определенной формы записи нецелесообразно.

В заключение следует сказать, что табличная запись не всегда приемлема. Она хороша только тогда, когда речь идет о двух-трех однородных величинах (две скорости, два пути, две цены и т. д.), которые по условию задачи сравниваются. Но если сравнения нет, то такая запись нерациональна.

Во всех приведенных записях наиболее трудно дается ученикам объяснение заключительного этапа составления уравнения, поэтому учитель должен уделить этому особое внимание.

В работах на экзаменах в VIII классе разрешается любая форма записи, но обязательно надо обосновать составление уравнения.

§ 5. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Многие авторы пытались провести классификацию задач, решаемых с помощью составления уравнений.

Одни из авторов делят задачи на типы по содержанию: задачи на движение, задачи на работу, задачи на смеси и т. д. Другие, как это сделано в книге А. Н. Барсукова «Уравнения первой степени в средней школе», делят эти задачи на типы по виду получаемых уравнений: $ax + b = c$, $ax + b = cx + d$, $ax + b = m(cx + d)$ и т. д. В этом случае в одну группу попадают задачи, где для составления уравнения используется время (частные от деления пути на скорость), цена (частные от деления стоимости на число купленных единиц товара), работа (частные от всей работы на время) и т. д. Несмотря на внешнюю стройность последней классификации, она в школе не привилась, и учителя стихийно делят задачи на типы, где основой классификации является определенная зависимость. Так утвердились термины: *задачи на движение, задачи на работу, задачи на цены и стоимость, на смеси* и т. д.

Система (первая или вторая) в подборе задач необходима, так как приходится на первых порах изучать на одном уроке задачи одного типа (на движение, на работу и др.), чтобы на первых шагах изучения темы бóльшая часть учеников могла самостоятельно решать некоторые задачи по аналогии с уже решенными.

§ 6. ПРОВЕРКА РЕШЕНИЯ

Проверка решения соответствует доказательству в решении задач на построение. Проверка решения проводится по условию задачи, а не по составленному уравнению, так как при составлении можно получить неверное уравнение, а решив его верно и проверив корни, мы установим только, что они удовлетворяют уравнению. На практике часто ведется проверка по условию так, что фактически производится подстановка найденных корней в составленное уравнение. Вернемся к задаче, рассмотренной в предыдущем параграфе. Решим полученное уравнение:

$$\frac{200}{x} - \frac{200}{x+2} = 5 \ (1), \text{ или } \frac{40}{x} - \frac{40}{x+2} = 1;$$

$$40(x + 2 - x) = x(x + 2), \quad x^2 + 2x - 80 = 0, \quad \text{откуда} \quad x_1 = 8.$$

$x_2 = -10$ (непригодно по смыслу задачи).

В практике школ часто встречается такая проверка:

1) $\frac{200}{8} = 15$ (*га*) засевали в день фактически;

2) $8 + 2 = 10$ (дней) надо было засевать по плану;

3) $\frac{200}{10} = 20$ (*га*), надо было засевать по плану в день;

4) $20-15 = 5$ (*га*), что соответствует условию задачи, значит, найденное значение $x = 8$ соответствует условию задачи.

Рассмотрим сделанную проверку: $\frac{200}{8}$ и $\frac{200}{10}$ — результаты подстановки значения $x = 8$ в первое и второе слагаемые левой части уравнения (1). Значит, фактически в этом случае проверка по условию свелась к подстановке значения корня $x = 8$ в уравнение (1).

Чтобы этого избежать, желательно проверять так, чтобы в последнем вопросе проверки бралась та зависимость, которая не использована при составлении уравнения. В данном случае уравнение (1) было составлено по разности *га/день*, значит, в последнем действии проверки надо получить разность дней.

Проверка:

1) $\frac{200}{8} = 15$ (*га*) засевалось в день фактически;

2) $15 + 5 = 20$ (*га*) должны были засевать в день по плану;

3) $\frac{200}{20} = 10$ (дней) предполагалось сеять по плану;

4) $10-8 = 2$ (дня), что соответствует условию задачи.

Значит, $x = 8$ соответствует условию задачи.

Ученики часто затрудняются сделать такую проверку. Здесь может помочь табличная запись составления уравнения. Вернемся к таблице:

Таблица 46

	Число дней	*га* в день	
Фактически	x ⟶	$\frac{200}{x}$	больше на 5 дней
По плану	$x+2$ ⟵	$\frac{200}{x+2}$	

Стрелка показывает, в каком порядке надо вести последнюю проверку.

Рассмотрим еще пример проверки решения одной задачи.

Задача 2. *Два каменщика, из которых второй начинает работу $1\frac{1}{2}$ днями позже первого, могут выложить стену за 7 дней. За сколько дней каждый из них отдельно мог бы выложить эту стену, если известно, что второй каменщик может выполнить эту работу на 3 дня скорее, чем первый?*

Таблица 47

	Время работы одного каменщика	Работа за 1 день	Сделал работы фактически	
I кам.	x дней →	1 →	$\frac{7}{x}$	В месте I
II кам.	(x — 3 дня) ←	$\frac{1}{x-3}$ ←	$\frac{5,5}{x-3}$	

Тогда уравнение будет:

$$\frac{7}{x}+\frac{5,5}{x-3}=1, \text{ откуда}$$

$$12,5x-21=x^2-3x \text{ и } 2x^2-31x+42=0$$

$$x_{1,2}=\frac{31\pm 25}{4} \quad \Bigg| \quad b^2-4ac=31^2-4\cdot 2\cdot 42=961-336=625$$

$$\sqrt{625}=25$$

$$x_1=14$$

$x_2=1\frac{1}{2}$ (непригодно, так как по смыслу $x>3$).

1) $\frac{1}{14}$ — часть работы делает I в день;

2) $\frac{1}{14}\cdot 7=\frac{1}{2}$ часть работы тот же каменщик за 7 дней;

3) $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ — часть работы делал II за $5\frac{1}{2}$ дней;

4) $\frac{1}{2}:5\frac{1}{2}=\frac{1}{11}$ — всей работы выполнил II за 1 день;

5) $1:\frac{1}{11}=11$ (дней) — за это время II каменщик сделал бы всю работу;

6) $11-8=3$ (дня), что соответствует условию задачи.

Ответ. Первый каменщик сделает один всю работу за 14 дней, второй за 11 дней.

Во всех случаях, где можно составить таблицу, последняя не только упрощает составление уравнения, но и помогает найти путь при проверке решения.

Когда же таблица при составлении уравнения неприменима, учащийся должен сам найти такой порядок проверки, при котором нет прямой подстановки значения корня в составленное уравнение. Практически ученик должен, взяв найденные значения неизвестного и часть данных, решить новую арифметическую задачу и получить значение одного из данных, не использованного при проверке.

Рассмотренная проверка является желательной, но если ученик проверку сделал в том же порядке, как составил уравнение, то отметка не понижается.

§ 7. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

В основном при исследовании решений уравнений рассматривается случай, когда условие задачи содержит буквенные данные (параметры). Но элемент исследования содержится и в задачах только с числовыми данными.

В задаче § 6 было отброшено положительное решение $x_2 = 1\frac{1}{2}$, так как в этом случае число дней $x - 3$ приняло бы отрицательное значение. Это был элемент исследования, который состоит здесь в установлении пригодности полученного корня.

Полезно решение задачи увязывать с исследованием, а не откладывать его на конец.

З а д а ч а. *Из двух пунктов А и В, расстояние между которыми 24 км, отправлены одновременно два автомобиля навстречу друг другу. После их встречи автомобиль, вышедший из А, приходит в В через 16 мин, а другой автомобиль приходит в А через 4 мин (скорость автомобилей постоянна). Сколько километров прошел каждый до встречи?*

Т а б л и ц а 48

	Путь до встречи	Скорость	Время до встречи	
I автомобиль	x *км*	$\frac{15(24-x)}{4}$ *км/ч*	$\frac{4x}{15(24-x)}$ *ч*	Равны
II автомобиль	$(24-x)$ *км*	15 *км/ч*	$\frac{24-x}{15x}$ *ч*	

Уравнение будет:

$$\frac{4x}{15(24-x)} = \frac{24-x}{15x}, \text{ отсюда}$$

$$4x^2 = (24-x)^2;\ 2x = \pm(24-x).$$

Следовательно, решение — объединение множеств корней двух уравнений $2x = 24-x$ (1) и $2x = -(24-x)$ (2).

Но по смыслу задачи $x>0$; $24-x>0$. Так как в уравнении (2) $2x > 0$; $-(24-x) < 0$, то уравнение (2) непригодно, значит, остается только уравнение (1), из которого находим $x = 8$. Здесь исследование в процессе решения устранило постороннее решение в более ранней стадии, чем обычно, и не пришлось искать второй корень, который оказался бы отрицательным.

В основном при постановке вопроса об исследовании решения уравнения подразумевается исследование решения задач на составление уравнений, в условии которых содержатся буквенные данные, но этот вопрос в VIII классе не рассматривается.

§ 8. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ РЕШЕНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В том случае, когда учитель при решении арифметической задачи не видит арифметического решения, он может для себя решить задачу алгебраическим способом, введя x и составив уравнение. Причем, составляя уравнение и решая его, надо действия между данными и искомыми только обозначать, но не выполнять, тогда найденное для x числовое выражение будет записью решения этой задачи и решающему останется только подобрать вопросы. Правда, практически это может оказаться нелегкой задачей. Рассмотрим пример.

Задача. *Для экскурсии надо собрать деньги. Если каждый экскурсант внесет по 75 коп., то на расходы не хватит 4,4 руб.; если каждый внесет по 80 коп., то останется 4,4 руб. Сколько человек принимает участие в экскурсии?*

Пусть x экскурсантов; тогда, внеся по 0,75 руб., они соберут $0{,}75\,x$ руб., а надо $(0{,}75\,x + 4{,}4)$ руб. Если они внесут по 0,8 руб., то соберут $0{,}8\,x$ руб., а надо $(0{,}8x - 4{,}4)$ руб.

$$0{,}8x + 4{,}4 = 0{,}75x + 4{,}4, \text{ откуда}$$

$$x = \frac{4{,}4 + 4{,}4}{0{,}8 - 0{,}75}.$$

Значит, эта арифметическая задача содержит 3 вопроса.

Остается подобрать вопросы к действиям 1) $4{,}4 + 4{,}4$; 2) $0{,}8 - 0{,}75$; 3) $\frac{8{,}8}{0{,}05}$. Вопросы будут:

1) Чему равна разность между собранными деньгами во втором и первом случаях?

$$4{,}4 + 4{,}4 = 8{,}8 \text{ (руб.)}.$$

2) Чему равна разность во взносах каждого экскурсанта во втором и первом случаях?

$$0{,}8 - 0{,}75 = 0{,}05 \text{ (руб.)}.$$

3) Сколько было экскурсантов?

$$8{,}8 : 0{,}05 = 198 \text{ (чел.)}.$$

ГЛАВА XV

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

§ 1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ТЕМЕ

В теме «Функции и графики» систематизируются и уточняются представления, накопленные в процессе решения упражнений на функциональную зависимость. Идея переменной величины появляется с введения букв, так как сами символы: a, b, c, ..., x, y — переменные, в отличие от постоянных символов 1, $\frac{3}{4}$ и др.

В VIII классе вводится термин *переменная величина*, кроме того доказывают, что график линейной функции — прямая, и экспериментально устанавливают, что графики функций $y = ax^2 + bx + c$ и $y = ax^2$ имеют одинаковую форму.

Тематика упражнений по теме довольно широкая, но охватить ее смогут только те учителя, которые научат учеников применять ускоренные приемы построения графиков. При этом учителю следует экономить время, используя разграфленные в клетку классные доски, шаблоны и пр.

Заранее учителю необходимо продумать терминологию; например, употреблять ли термины максимум, минимум, интервал, отрезок, аргумент.

§ 2. ПОСТОЯННЫЕ И ПЕРЕМЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В VIII классе можно привести много знакомых ученикам примеров постоянных и переменных величин. Так, можно взять следующие формулы:

1) $P = 4a$ — формула периметра квадрата со стороной a;

2) $S = \pi r^2$ — формула площади круга радиуса r;

3) $Q = cmt$ — формула количества теплоты, которую нужно затратить, чтобы нагреть на $t°$ m *Г* вещества с удельной теплоемкостью c *кал/Г*.

Легко установить, что в этих зависимостях величины a, r, t, m, P, s, Q могут принимать различные значения, а числа 4 и π, c данного вещества (в узких пределах изменения температуры) не меняются. Также не меняется, например, сумма внутренних углов треугольника, девятиугольника, внешних углов многоугольника.

Можно взять и другие примеры. В учебнике алгебры Н. А. Барсукова приведен опыт с надуваемым резиновым шаром. При этом меняются размеры шара, толщина его оболочки, вес шара, но вес оболочки остается неизменным.

Возьмем треугольник ABC, в котором основание AC закреплено в точках A и C, а точка B движется по прямой $MN \parallel AC$ (рис. 134), тогда будут меняться длины сторон AB и CB, все углы, медианы, биссектрисы; не меняются основание AC, соответствующая ему высота, а следовательно, и площадь $\triangle ABC$ и сумма внутренних углов его.

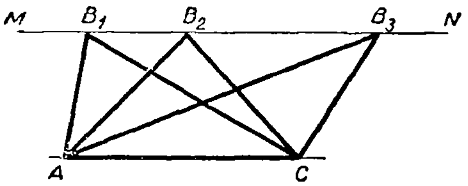


Рис. 134

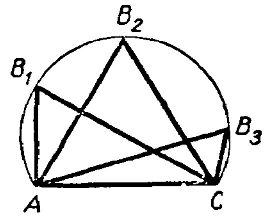


Рис. 135

Но если при неподвижном основании AC точка B будет двигаться по дуге AC окружности (рис. 135), занимая положения B_1, B_2, B_3 и т. д., то не будут меняться только основание AC, угол B и сумма внутренних углов в треугольнике, все остальные элементы изменяются. После нескольких таких примеров вводится понятие постоянных и переменных величин.

Следует подчеркнуть, что все числа — постоянные величины.

§ 3. НЕЗАВИСИМАЯ ПЕРЕМЕННАЯ, ФУНКЦИЯ

Первоначально понятие функции как аналитического выражения сложилось в первой половине XVIII века в связи с бурным развитием производительных сил. Термин ф у н к ц и я ввел И. Бернулли в 1718 году. Л. Эйлер предложил в 1748 году определение функции как аналитического выражения.

В общем виде определение функции было дано Н. И. Лобачевским в 1834 году. Приводим его в современной формулировке:

«Если каждому допустимому значению переменной величины x соответствует определенное значение переменной величины y, то x называется независимой переменной, а y — функцией от x».

В этой формулировке слово «соответствует» не говорит о виде зависимости переменных величин. Оно может быть задано описанием; например, чтобы находить последовательные цифры при извлечении квадратного корня из положительного числа, имеется определенный алгоритм. По установленным правилам определяется цена телеграммы, железнодорожного билета, профсоюзного взноса и т. д. Правило может носить и эмпирический характер; например, говоря о температуре в зависимости от времени, надо только фиксировать в нужный момент показание термометра, как это делается термографом.

Понятия соответствия и однозначного аналитического выражения функции не противопоставляются, второе просто частный случай первого.

Соответственно можно к понятию функции подвести: 1) рассматривая однозначные аналитические выражения зависимостей; 2) дав примеры соответствия между величинами, не записанные аналитически.

1) У учеников VIII класса накопился большой запас функциональных зависимостей, которые выражены аналитически. Из алгебры VII класса им известны аналитические выражения зависимостей $y = ax$, $y = \frac{a}{x}$, $y = ax + b$; из геометрии известны формулы площадей и объемов, в которых зависимость выражена тоже аналитически.

Поэтому, используя опыт учеников, наиболее просто подвести их к понятию функции, рассматривая аналитические выражения известных зависимостей. Например, можно взять формулу $y = 4x$, где x — сторона квадрата, y — его периметр, и установить, что 4— постоянная величина, а x и y — переменные. Подчеркнуть, что каждому значению x соответствует определенное значение y. В частности, можно составить таблицу пар соответствующих значений x и y.

Рассмотрев еще две-три известные зависимости ($C = 2\pi r$, $S = 3t$ или др.), можно дать определение независимой переменной и функции.

Подчеркивается, что в зависимостях рассматриваются те и только те пары значений переменных, которые удовлетворяют этой зависимости.

При таком введении функции у учеников может возникнуть представление, что функция — аналитическое выражение.

2) Рассмотрим зависимости, заданные не аналитически. Например, можно взять результат наблюдения температуры воздуха:

6 часов: $-2°$	10 часов: $+3°$	14 часов: $+8°$
7 часов: $0°$	11 часов: $+5°$	15 часов: $+8{,}6°$
8 часов: $+1°$	12 часов: $+6{,}5°$	16 часов: $+7°$
9 часов: $+1{,}5°$	13 часов: $+7{,}5°$	17 часов: $+5°$

Рассматривают пары значений времени и температуры и устанавливают, что каждому значению времени наблюдения соответствует определенное значение температуры. В заключение учитель говорит, что в данном случае температура — функция времени. Термин определяют после нескольких примеров. Например: длина стального стержня — функция температуры, давление столба масла на 1 $см^2$ площади — функция высоты столба.

После примеров дают определение функции и независимой переменной и т. д.

На внеклассных занятиях можно дать понятие о функции как о соответствии элементов двух множеств.

Предварительно останавливаются на примере соответствия между x и y, где $x \in M$, $y \in N$ и $x \Longrightarrow y$. Возьмем таблицу:

множество M

x	1	2	3	4	5	6	. . .
y	2	4	6	8	10	12	. . .

множество N

Здесь $x \in M$, $y \in N$ и $x \Longrightarrow y$, а именно $y=2x$. Вообще если $x \in M$, $y \in N$ и каждому значению x соответствует определенное значение y, то y называется функцией от x.

Опыт показывает, что уже в VIII классе можно ввести символ $f(x)$. Например, берут функции $y = 2x$, $y = x^2$, $y = \frac{6}{x}$. Подчеркивают, что здесь даны конкретные зависимости между x и y. Если же только хотят сказать, что y зависит от x, то пишут $y = f(x)$.

Эту запись удобно применять, когда надо найти значение функции. Пусть надо найти значение функции $f(x) = 2x^2 - 3$ при $x = 5$, тогда символ $f(5)$ показывает эту операцию.

Вводя определение функции и независимой переменной, многие отождествляют понятия независимой переменной и аргумента, но они совпадают только в простейших случаях.

Так, в тригонометрии все авторы называют аргументом синуса то, что стоит за знаком синуса. Например, в функции $y = \sin 3x$ аргумент синуса — $3x$, а независимая переменная x; аналогично в формуле $\sin(5x + \alpha)$ ученики согласно формулировке теоремы о синусе суммы двух углов говорят «синус первого аргумента...» и т. д., то есть аргумент $5x$, а не x. В данном случае имеем сложные функции $y = \sin 3x$, $y = \sin(5x + \alpha)$.

Поэтому вообще можно в VIII классе не употреблять термин а р г у м е н т, а ограничиться термином н е з а в и с и м а я п е р е м е н н а я. Кстати, на оси абсцисс всегда откладываются значения независимой переменной.

Дав определение функции и независимой переменной, можно показать виды выражения функциональной зависимости. В первую очередь показывается аналитический способ как наиболее знакомый учащимся, затем табличный, описательный и, наконец, графический.

Примером табличного значения функции будет зависимость точки кипения воды от атмосферного давления:

Давление (*мм*)	300	350	400	450	500	550	600	650	700
Температура (°C)	75,8	79,6	83,0	85,8	88,5	91,2	93,5	95,7	97,6

Приведем еще пример зависимости длины пружины от растягивающей ее силы (данные получены эмпирическим путем):

Растягивающая сила (*кГ*)	0	5	10	15	20	25
Длина пружины (*см*)	13,0	14,2	15,4	16,6	17,8	19,0

При табличном задании функции можно находить и промежуточные значения переменных с помощью линейного интерполирования, но приближенно.

Многие приборы записывают непрерывно показания графически, например, термографы, барографы, сейсмографы, кардиографы и др.

В качестве примера хорошо продемонстрировать учащимся запись барографа или термографа. На рисунке 136 дан график изменения давления с 0 часов ночи до 12 часов дня.

Если функция задана графически, то можно решить все те упражнения, которые решаются при аналитичес-

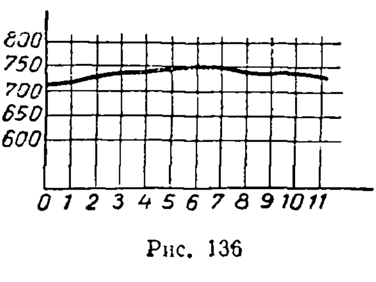


Рис. 136

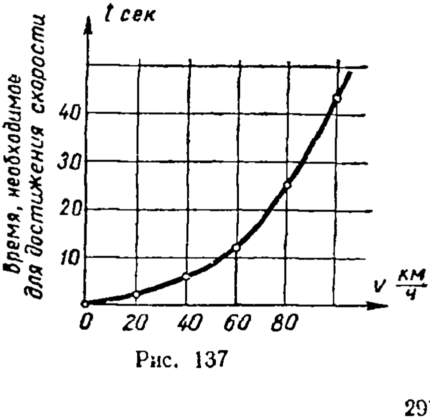


Рис. 137

ком задании ее, только ответы получим приближенные.

Например, на графике (рис. 137) дана зависимость между скоростью автомобиля «Победа» и наименьшим временем, необходимым для достижения этой скорости. По графику видно, что, трогаясь с места, «Победа» может достигнуть скорости 50 *км/ч* через 8 *сек*. Обратно, если известно, что «Победа» тронулась с места, то через 10 *сек* ее наибольшая скорость может быть равна 52 *км/ч*.

В связи с аналитическим способом задания функции вводится понятие области определения функции.

Ученики к этому понятию подготовлены. Начиная с VI класса они начали устанавливать значения букв, при которых данное выражение не имеет смысла, потом стали искать допустимые значения букв, входящих в данное выражение.

Новым будут термины интервал, отрезок. Учитель объясняет термины, дает записи интервала $a < x < b$, для отрезка $a \leqslant x \leqslant b$. Иллюстрирует их на оси OX.

На первых порах отыскание области определения связывают с изображением ее на числовой оси.

Пример 1. *При каких значениях x следующие функции не имеют смысла:*

1) $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = \frac{1}{x-3}$? *Отметить соответствующие им точки на графике.*

Решение. 1) При $x = 0$ функция $y = \frac{1}{x}$ не имеет смысла, так как деление на 0 невыполнимо.

2) При $x = 3$.

Пример 2. *Найти область определения следующих функций:*

$$1)\ y = 2x;\ y = \frac{1}{x};\ 3)\ y = \frac{1}{x-5};\ 4)\ y = x - 3.$$

Решение. 1) В действиях, которые надо выполнить над числами 2 и x, отсутствует деление и извлечение квадратного корня, поэтому область определения — любое число.

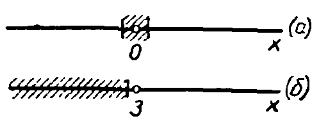


Рис. 138

2) В действиях есть деление на переменную величину x, при $x = 0$ деление невыполнимо. На числовой оси x-ов (рис. 138*а*) надо исключить из всех точек оси единственную $x = 0$. При всех остальных значениях x выражение $\frac{1}{x}$ имеет смысл. Поэтому область определения функции $y = \frac{1}{x}$ будет вся ось x-ов без точки $x = 0$, то есть $x \neq 0$.

3) Знаменатель выражения $x - 5$ обращается в нуль при $x = 5$,

поэтому эту точку надо исключить, следовательно, область определения $x \neq 5$.

4) Извлечение квадратного корня невыполнимо из отрицательного числа; исключим те значения x (рис. 138, *б*), при которых $x-3<0$, то есть $x<3$.

Поэтому область определения функции $y = x - 3$ будет $x \geqslant 3$.

Обращаясь к графическому заданию функций, полезно дать упражнения по готовым графикам с целью повторить рассмотренное в VII классе чтение графиков.

Пример 1. *По графику температуры за сутки* (*рис.* 139)

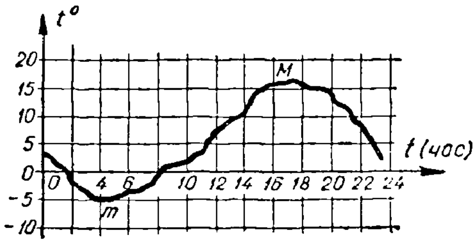


Рис. 139

указать, в какое время суток температура: 1) была наименьшей; 2) была наибольшей; 3) была ниже нуля; 4) была выше нуля; 5) поднималась; 6) опускалась.

При ответе ученик должен: 1) найти наинизшую точку графика и затем показать на оси OX соответствующее время.

3) Найти участок графика, где кривая находится ниже оси OX, и отметить значения $2\frac{1}{2} < t < 8$.

5) Найти участок графика от точки m до точки M, а затем на оси OX найти соответствующие им значения t: $5 < t < 17$.

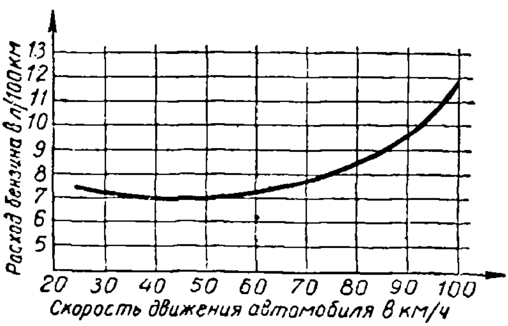


Рис. 140

В технике употребляются графики, в которых берется не вся ось x-ов или y-ов, а только часть ее.

Пример 2. *По графику экономической характеристики автомобиля «Москвич-402»* (*рис. 140*) (*то есть график зависимости расхода бензина от скорости*) *сказать, при какой скорости расход бензина на каждые* 100 *км будет наименьшим.*

Ученик по графику должен найти наименьшее значение расхода бензина, а затем найти на оси OX соответствующее значение скорости.

Чтобы не терять времени на уроке, для таких упражнений следует заранее подготовить таблицы с графиками.

Можно предложить ряд упражнений на отыскание функциональной зависимости между переменными величинами в аналитической форме, если дана их табличная зависимость.

Пример 3.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	2	3	4	5	?	?

$y = ?$
$x = ?$

Вопросы.

Сравните соответствующие значения y и x. (y больше x на 1.)

Что надо написать в пропущенных местах? (6 и 7.)

Что надо сделать с x, чтобы получить y? (К x прибавить 1.)

Как написать формулу, связывающую y и x? ($y = x + 1$.) Аналогично находят, что $x = y - 1$.

Пример 4.

x	0	1	2	3	4	5
y	0	2	4	6	8	?

$y = ?$
$x = ?$

Здесь ученики по вопросам должны установить:

1) 2 больше 1, 4 больше 2 и т. д. в два раза; 2) $x = 5$ соответствует $y = 10$; 3) чтобы получить значение y, надо соответствующее значение x умножить на 2, значит, $y = 2x$.

Дополнительный вопрос: как называется такая зависимость?

Путем аналогичных рассуждений устанавливается, что $x = \frac{y}{2}$.

Подобные упражнения развивают догадку, интуицию, но несколько условны, так как для отыскания зависимости дается только несколько пар значений независимого переменного и функции.

В последнем примере было дано 6 пар значений x и y. Значит, можно было определить зависимость в виде многочлена 6-й степени:

$$y = x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F. \qquad (1)$$

Каждая пара из шести данных значений удовлетворяет уравнению (1), следовательно, после подстановки этих значений в (1) получаем систему шести линейных уравнений, из которой находим значения коэффициентов A, B, ... и определяем зависимость.

При изучении рядов в курсах математического анализа тоже часто задают ряды в виде суммы трех-четырех членов и символа продолжения их до бесконечности, а не формулой любого члена. Делают это потому, что умение

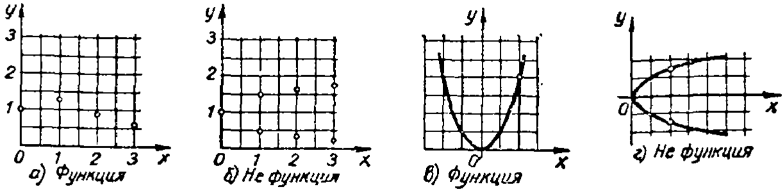


Рис. 141

найти формулу любого члена ряда более полезно, чем строгое задание ряда формулой любого члена.

В США по экспериментальной программе понятие функции дается на седьмом году обучения. Функция определяется как множество упорядоченных пар, удовлетворяющих заданному условию, что отражают и в записи. Например, $\{(x, y)|y = x^2\}$ — запись функции как множества упорядоченных пар (x, y), заданной уравнением $y = x^2$. В данном определении подчеркнуто, что каждому значению x соответствует только одно определенное значение y. В качестве иллюстрации даются графики (рис. 141). Первые два графика даны на декартовом множестве $M \times M$, где $M = \{(0, 1, 2, 3\}$, последние два на декартовом множестве $R \times R$, где R — множество рациональных чисел.

§ 4. ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = ax$ и $y = ax + b$

В VII классе ученики строили графики функции вида $y = ax$ по точкам и эмпирическим путем установили, что график — прямая линия.

В VIII классе основная задача изучения графиков функций $y = ax$ и $y = ax + b$ — обосновать, что их графики — прямые линии; к этому времени восьмиклассники знакомы с подобием треугольников и с тригонометрическими функциями острого угла.

До построения графика функции $y = ax$ можно аналитически установить, возрастающая это функция или убывающая. Предварительно дается определение возрастающей (убывающей) функции.

Функция называется возрастающей (убывающей), если большему значению независимой переменной соответствует большее (меньшее) значение функции.

Затем по графику (рис. 142) показывают, что $x_1 < x_2$ соответствует $y_1 < y_2$, то есть большему значению независимой переменной x соответствует большее значение функции y. Следовательно, в интервале от x_1 до x_2 функция y возрастает. Но $x_3 < x_4$, а $y_3 > y_4$, то есть в интервале от x_3 до x_4 большему значению независимой переменной x соответствует меньшее значение y, следовательно, в этом промежутке функция y убывает.

Пусть $x_1 < x_2$; при x_1 $y_1 = ax_1$ (1), при x_2 $y_2 = ax_2$ (2). Вычтем уравнение (1) из (2):

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1).$$

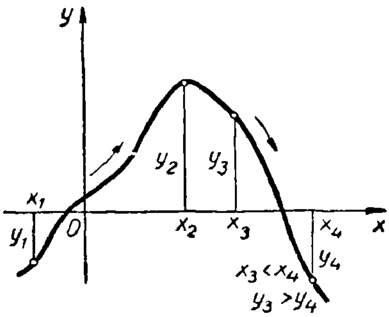


Рис. 142

По условию $x_1 < x_2$ и потому $x_2 - x_1 > 0$.

Поэтому 1) при $a > 0$ $y_2 - y_1 > 0$ и $y_2 > y_1$;

2) при $a < 0$ $y_2 - y_1 < 0$ и $y_2 < y_1$.

Следовательно, при $a > 0$ функция $y = ax$ — возрастающая, при $a < 0$ — убывающая.

Аналогично рассматривается возрастание и убывание функции $y = ax + b$.

В VIII классе доказывается, что график функции $y = ax$ — прямая. Смысл доказательства состоит в том, что по двум парам значений x и y, удовлетворяющих уравнению $y = ax$, строят прямую и доказывают, что любая третья точка этой прямой удовлетворяет уравнению $y = ax$.

Возьмем случай, когда $a > 0$.

Берут две точки, удовлетворяющие уравнению $y = ax$.

Пусть $x_1 = 0$, тогда $y_1 = 0$; пусть $x_2 = 1$, тогда $y_2 = a$. Через две точки (O, O) и A $(1, a)$ проводим прямую OA. Пусть M (x, y) — любая точка прямой OA, докажем, что ее координаты удовлетворяют условию $y = ax$.

$\triangle OMM_1 \backsim \triangle OAA_1$ (рис. 143), отсюда $\frac{M_1M}{A_1A} = \frac{OM_1}{OA_1}$ или $\frac{y}{a} = \frac{x}{1}$, $y = ax$. Но точка M — любая, следовательно, доказано, что координаты каждой точки прямой OA удовлетворяют условию $y = ax$.

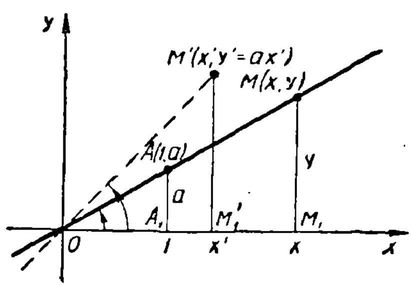


Рис. 143

Остается доказать, что все точки, координаты которых удовлетворяют условию $y = ax$, лежат на прямой OA.

Пусть точка M' имеет абсциссу x', тогда ее ордината $y' = ax'$. Соединим точку M' отрезком с началом координат O и сравним тангенсы $\angle MOM_1$ и $\angle M'OM_1'$:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\angle MPM_1 &= \frac{M_1M}{OM_1} = \frac{y}{x} = a \\ \operatorname{tg}\angle M'OM'_1 &= \frac{MM}{OM_1} = \frac{y}{x} = a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle MOM_1 = \angle M'OM'_1,$$

то есть точка M' с координатами $(x';\ y' = ax')$ лежит на той же прямой OA; следовательно, все точки, координаты которых удовлетворяют условию $y = ax$, лежат на прямой OA.

Окончательно заключаем, что график функции $y = ax$ есть прямая, которая проходит через начало координат и точку $(1,\ a)$. Затем можно подчеркнуть, что $a = \frac{y}{y} = \operatorname{tg}\alpha$, и дать понятие об угловом коэффициенте графика $y = ax$.

Затем устанавливают, что график функции $y = ax + b$ — прямая.

Приведем вопросы, на которые должен уметь отвечать ученик по графику функции $y = ax + b$: 1) по данному значению x найти значение y; 3) по данному значению y найти значение x; 3) указать значения x, при которых $y = 0$, $y > 0$, $y < 0$; 4) указать значения x, при которых функция возрастает, убывает, имеет наибольшее, наименьшее значение.

Целесообразно иногда изменять форму вопросов, например:

З а д а ч а. *Дана функция* $y = m\,(x-2) + 1$, *где* m *может принимать все значения, отличные от нуля.*

1) Взять $m = 1$ и $m = 2$, начертить графики этих функций и найти их точку пересечения.

2) Доказать, что все графики функций вида $y = m\,(x-2) + 1$ проходят через эту точку пересечения.

Р е ш е н и е. 1) При $m = 1$ $y = x - 1$, при $m = 2$ $y = 2x - 3$. Чертим график. Точку пересечения находим, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x - 1; \\ y = 2x - 3; \end{cases} \text{ отсюда } 2x - 3 = x - 1;\ x = 2,\ y = 1.$$

2) Точка пересечения $M\ (2,\ 1)$, подставим ее координаты в уравнение $y = m\ (x-2) + 1$:

$1 = m\ (2-2) + 1$; $1 = 1$. M лежит на графике функции $y = m\,(x - 2) + 1$.

Помимо упражнений на построение графиков и простейшее исследование функций, можно предложить задачи на составление функциональных зависимостей. Например:

1) *Один катет прямоугольного треугольника равен 2, другой переменный —* x. *Выразить площадь* (y) *этого треугольника в зависимости от катета* x. *Построить график этой функции.*

2) *Основания трапеции x и 3. Выразить расстояние (y) между серединами диагоналей, как функцию от x. Построить график этой функции.*

При каком значении x расстояние между серединами диагоналей равно 1?

3) *Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля в 2% и 4%. Из этого лома получают сплав, содержащий 265% никеля. Выразить зависимость (формулой и графиком) между весами лома одного (y) и другого сорта (x), идущими на приготовление сплава.*

Решение. 2%-й стали взяли y, 4%-й — x, тогда получили $x + y$ стали с содержанием никеля 2,5%. Подсчитаем количество никеля в ней. В y содержится 0,02 y никеля, в x — 0,04 x, а в $x + y$ 0,025 $(x + y)$. Следовательно, $0{,}02\,x + 0{,}04\,y = 0{,}025\,(x + y)$. Отсюда получим зависимость (множим на 200): $4x + 8y = 5x + 5y$; $3y = x$ и $y = \frac{1}{3}x$.

4) *В треугольнике ABC биссектрисы углов B и C пересекаются в точке O. Выразить угол BOC (y) как функцию угла A (x).*

В практике встречаются случаи, когда по эмпирическим данным надо установить зависимость между величинами.

Например, опытным путем установлено, сколько грамм йодистого калия растворяется в одном и том же количестве воды в зависимости от температуры:

$t°$	0	20	40	60	80	100
m (г)	128	145	161	176	192	208

На координатной плоскости по табличным данным наносят соответствующие точки (рис. 144); они почти все (1-я, 3-я, 4-я и 6-я) располагаются на одной прямой. Это дает основание считать приближенно график за прямую, а зависимость за линейную.

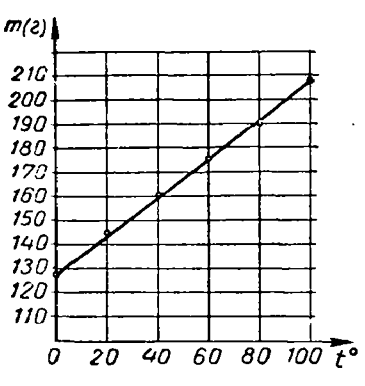


Рис. 144

Практически с некоторым приближением зависимость m от t имеет вид:

$$m \approx at + b \qquad (1).$$

Найдем приближенно a и b. Для этого подставим в (1) пары значений m и t. Например, возьмем первую и шестую пары:

$$\begin{cases} 128 \approx a \cdot 0 + b; \\ 208 \approx a \cdot 60 + b. \end{cases}$$

Отсюда $b \approx 128$; $208 \approx 100\,a + 128$, $100a \approx 80$, $a \approx 0{,}8$.
Значит, $m \approx 0{,}8\,t + 128$.
Проверим по 3-й паре значений:

$$161 \approx 0{,}8 \cdot 40 + 128 = 32 + 128 = 160.$$

Расхождение получилось в последней цифре, что для практики вполне пригодно.

График функции $y = ax$ можно использовать для построения простейших номограмм.

§ 5. ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = ax^2$

К графику функции $y = ax^2 + bx + c$ учащихся подводят постепенно, рассматривая последовательно графики функций $y = x^2$, $y = ax^2$, $y = ax^2 + c$, $y = a(x - m)^2$, $y = a(x - m)^2 + n$.

Цель изложения — показать, что графики всех этих функций, начиная с $y = ax^2$, одна и та же кривая, но сдвинутая относительно координатных осей. Рассмотрим графики этих функций.

I. График функции $y = x^2$ учащимся уже известен. Предполагается им вновь построить график по точкам и установить его свойства.

Напоминают, что график функции $y = x^2$ — парабола. До построения графика можно исследовать функцию $y = x^2$ и установить, что x^2 при всех значениях x будет положительным и $y = 0$ лишь при одном значении x, а именно при $x = 0$. На доске можно показать это так:

$$y = \underline{\;x^2\;}$$
$$+;\,0$$

Значение y — множество положительных чисел и нуль. В этом множестве нет наибольшего числа, а наименьшее равно 0. Значит, функция не имеет наибольшего значения, а наименьшее значение есть, именно при $x = 0$, $y_{наим} = 0$.

Затем строится график функции $y = -x^2$.

Предварительное исследование показывает, что при всех значениях x $x^2 > 0$, а потому $-x^2 < 0$, то есть $-x^2$ может принимать только отрицательные значения и 0. На доске можно записать наглядно:

$$y = - \underline{\;x^2\;}$$
$$0;\,-$$

Аналогично предыдущему устанавливают, что из всех значений $-x^2$ наибольшее значение 0, следовательно, функция $y = -x^2$ принимает при $x = 0$ наибольшее значение $y_{наиб} = 0$. Затем составляется сравнительная таблица значений

$$y = x^2 \text{ и } y = -x^2:$$

Таблица 49

x	-2	-1	0	1	2	Вывод
$y = x^2$	4	1	0	$+1$	4	соответствующие значения x^2 и $-x^2$ противоположны
$y = -x^2$	-5	-1	0	-1	-4	

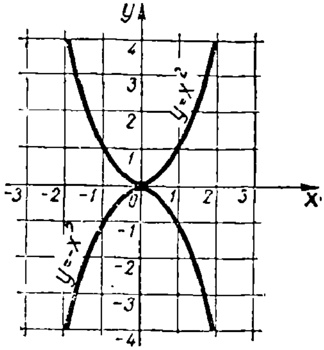


Рис. 145

Вопрос. Что можно сказать о значениях функций $y = x^2$ и $y = -x^2$, соответствующих одинаковым значениям x? (Они противоположны.)

Сравнение графиков функции $y = x^2$ и $y = -x^2$ показывает, что их ветви направлены в противоположные стороны и симметричны относительно оси OX (рис. 145).

II. График функции $y = ax^2$ сравнивают с графиком функции $y = x^2$. Например, сравним графики функций $y = 2x^2$, $y = -2x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$ с графиком функции $y = x^2$. Для этого составим таблицу:

Таблица 50

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9	
$x = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18	В два раза больше (при $x \neq 0$)
$k = -2x^2$	-18	-8	-2	0	-8	-8	-18	Противоположны по знаку
$x = \frac{1}{2}x^2$	$4{,}5$	2	$0{,}5$	0	$0{,}5$	2	$4{,}5$	В два раза меньше (при $x \neq 0$)

Еще до построения графиков можно заметить, что при одних и тех же значениях x соответствующие ординаты графиков функций $y = 2x^2$ в два раза больше, а $y = \frac{1}{2}x^2$ в два раза меньше соответствующих ординат графика функции $y = x^2$. Значения соответствующих ординат функций $y = -2x^2$ и $2y = 2x^2$ равны по абсолютной величине, противоположны по знаку.

После этого чертят графики этих функций (рис. 146). По сравнению с графиком функции $y = x^2$ график функции $y = 2x^2$ растянут вдоль оси (ординаты в два раза больше), а график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ сжат по оси OY (ординаты в два раза меньше). Ветвь графика $y = -2x^2$ направлена в противоположную сторону по сравнению с направлением ветви графика $y = 2x^2$.

График функции $y = ax^2$ имеет следующие свойства:

1) Симметричен относительно оси OY.

Это легко доказать. Пусть x_1 — абсцисса графика $y = ax^2$ $(x_1 > 0)$, тогда ей соответствует ордината $y_1 = ax_1^2$ (рис. 147). Возьмем точку с абсциссой $x_2 = -x_1$, тогда ей соответствует ордината $y_2 = a(-x_1)^2 = ax_1^2$, поэтому $y_2 = y_1$.

Перегнув координатную плоскость по оси OY, легко доказать, что точки A_1 (x_1, y_1) и A_2 (x_2, y_2) совпадут, откуда следует, что точки A_1 и A_2 симметричны относительно оси OY, но точка A_1 (x_1, y_1) — любая точка графика, следовательно, график функции $y = ax^2$ симметричен относительно оси OY.

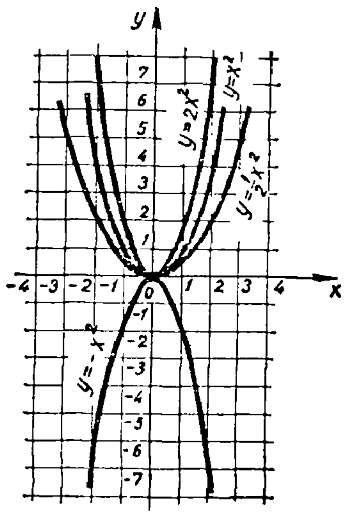


Рис. 146

2) Вершина параболы расположена в начале координат.

Имеем: $y = \underbrace{\underbrace{a}_{+}\ \underbrace{x^2}_{+,\,0}}_{+,\,0}$; $\quad y = \underbrace{\underbrace{a}_{-}\ \underbrace{x^2}_{+,\,0}}_{-,\,0}$

Следовательно, функция $y = ax^2$ в точке $x_1 = 0$ принимает при $a > 0$ наименьшее значение $y_{наим} = 0$, а при $a < 0$ — наибольшее значение $y_{наиб} = 0$.

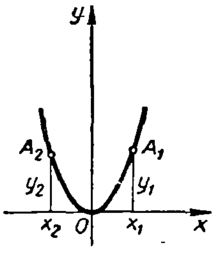


Рис. 147

Это и определяет вершину (0, 0) параболы $y = ax^2$.

3) При $a > 0$ и $x \neq 0$ парабола $y = ax^2$ расположена выше оси OX, при $a < 0$ — ниже.

При построении графика функции $y = ax^2$ учащиеся часто допускают следующие ошибки:

1) часть параболы при вершине O чертят как острие (рис. 148);

2) чертят график так (рис. 149), что получаются точки перегиба, например точки A и B.

Для ускорения вычерчивания графика функции $y = ax^2$ употребляют шаблоны графиков наиболее часто встречающихся функций: $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 3x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$ (рис. 150).

Для черчения в тетрадях шаблоны делают в масштабе 1 *см* = = 1 ед., для черчения по классной доске — 1 *дм* = 1 ед. Изготовляют их из картона, а для классной доски — из фанеры. На каждом шаблоне должна быть показана ось симметрии, это поможет точнее чертить графики. Можно сделать комбинированный шаблон (рис. 151).

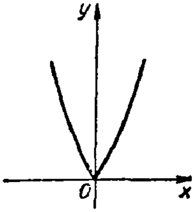


Рис. 148

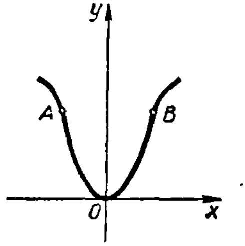


Рис. 149

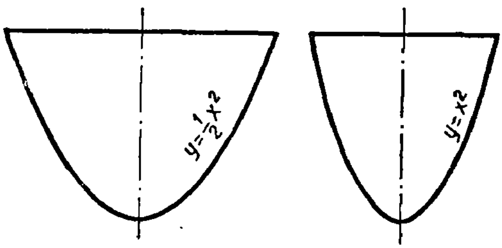


Рис. 150

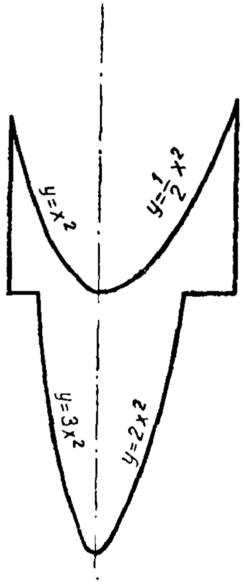


Рис. 151

§ 6. ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = ax^2 + c$

График функции $y = ax^2 + c$, построенный по точкам, сравнивают с графиком функции $y = ax^2$ и показывают, что их графики одинаковы по форме, но различно расположены на координатной плоскости. Трудность, которая возникает при объяснении, состоит в том, что заключение основывают на параллельном переносе, который восьмиклассникам неизвестен.

Прежде чем приступить к изучению графиков функций $y = ax^2 + c$, $y = ax^2 + bx + c$, полезно проделать подготовительные упражнения.

Пример 1. *Дана точка (x, y), где $x > 0$, $y > 0$. Как расположены по отношению к данной следующие точки: $(-x, y)$; $(-x, -y)$; $(x, y + 2)$; $(x, y-1)$; $(x, -y)$; $(x-2, y)$; $(x+4, y)$?*

Пример 2. *Как расположены по отношению к точке (x, y)* следующие точки: $(-x, y)$; $(-x, -y)$; $(x, y + a)$; $(x + a, y)$; $(x+a, y + b)$?

Предварительно исследуют изменение функции $y = ax^2 + c$. Пусть $a > 0$. При всех значениях x $x^2 \geqslant 0$, тогда

$$y = \underbrace{ax^2}_{+;\ 0} + c, \quad a > 0.$$

Наименьшее значение $ax^2 + c$ $y_{\text{наим}} = c$.

$$y = \underbrace{ax^2}_{-;\ 0} + c, \ a < 0; \text{ при } x = 0 \ y_{\text{наиб}} = c.$$

Для сравнения графиков функций $y = ax^2 + c$ и $y = ax^2$ находят ординаты для одного и того же значения $x = x_1$, тогда соответствующие значения ординат будут $y_1 = ax_2^2 + c$ и $y_1 = ax_1^2$; их разность $(ax_1^2 + c) - ax^2_1 = c$, то есть все точки графика функции $y = ax^2 + c$ смещены параллельно оси OY относительно соответствующих точек параболы $y = ax^2$ вверх на c, если $c > 0$ и вниз на $|c|$, если $c < 0$.

В данном случае сделан перенос параболы на $|c|$ параллельно оси OY. В учебниках алгебры VIII класса это преобразование дается догматически, считается, что ученики воспримут его интуитивно, как очевидное.

В VIII классе можно попробовать (в качестве эксперимента) дать подтверждение того, что график функции $y = ax^2 + c$ имеет форму параболы $y = ax^2$. Рассмотрим несколько способов.

1) Эмпирический способ.

Этот способ более всего соответствует духу новой программы восьмилетней школы.

Чтобы показать равенство (совмещение или наложение) графиков функций $y = ax^2 + c$ и $y = ax^2$, возьмем две функции, например $y = x^2$ и $y = x^2 - 2$, и начертим их графики с наиболее возможной точностью (рис. 152).

Затем скопируем на прозрачную бумагу параболу $y = x^2$ и, смещая копию вдоль оси OY на 2 единицы вниз, убеждаемся в совмещении копии параболы $y = x^2$ с параболой $y = x^2 - 2$, после чего делается заключение об их равенстве.

Способ эмпирический, поэтому о равенстве говорить можно с некоторой приближенностью.

Главное — подчеркнуть, что график функции $y = ax^2 + c$ — парабола, причем такая же, что и $y = ax^2$.

2) Не сложно для учеников VIII класса дать следующий способ сравнения графиков функции $y = x^2$ и $y = x^2 - 2$ (или других функций вида $y = ax^2$ и $y = ax^2 + c$).

Начертим график функции $y = x^2$ (рис. 153) и возьмем на нем точку O — вершину и произвольную точку M. Затем сдвинем эту параболу параллельно оси OY вниз на отрезок длиной в 2 единицы так, чтобы ось симметрии параболы $y = x^2$ скользила вниз по оси OY. Можно использовать шаблон параболы $y = x^2$ и наглядно показать смещение на доске. Пусть точка O займет положение O_1,

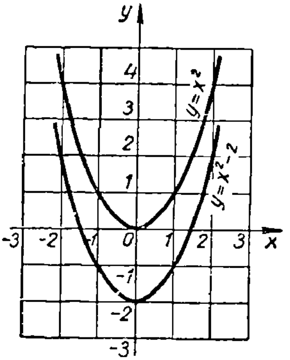


Рис. 152

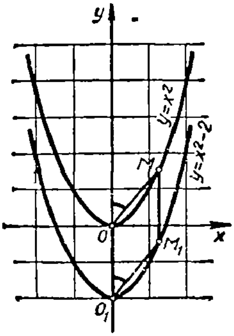


Рис. 153

а точка M — M_1, причем $OO_1 = 2$. Соединим точки M и M_1 отрезком. При движении парабола $y = x^2$ не менялась, поэтому $O_1M_1 = OM$ (1) и $\angle YO_1M_1 = \angle YOM$ (2). Из (2) следует, что $O_1M_1 \parallel OM$ (3); а из (1) и (3) следует, что четырехугольник OMM_1O_1— параллелограмм. Значит, $MM_1 \parallel OO_1$ и $MM_1 = 2$. Но M — произвольная точка параболы $y = x^2$, следовательно, при таком смещении параболы каждая ее точка сдвинулась параллельно оси OY на 2 единицы.

В данном случае рассмотрена не прямая теорема о том, что параболы $y = x^2$ и $y = x^2 - 2$ имеют одну и ту же форму, но обратная. Установили, что при сдвиге вершины параболы $y = x^2$ вдоль оси OY на 2 единицы каждая точка параболы $y = x^2$ переместилась параллельно оси OY на 2 единицы.

3) Строгое доказательство того, что график функции $y = ax^2 + c$ есть парабола, равная параболе $y = ax^2$, основано на переносе осей координат. Оно несложно, но против него можно возразить, что перенос осей координат программой не предусмотрен. Но также не предусмотрен программой VIII класса и параллельный перенос графика, на который ссылаются в учебниках алгебры.

Пусть в системе координат XOY даны графики функций $y = ax^2$ (I) и $y = ax^2 + c$ (II), где $a > 0$, $c > 0$ и O' — нижняя точка графика функции $y = ax^2 + c$. Перенесем ось OX параллельно в положение $O'X'$ (рис. 154).

Начертим отдельно координатную плоскость (рис. 155) и возьмем на ней произвольно точку M. Пусть в системе координат XOY точка M имела координаты (x, y), а в системе XOY — (x', y'), тогда, очевидно, $x = x'$, $y = y' + c$.

В старой системе координат XOY имеем зависимость $y = ax^2 + c$, а в новой системе получим $y' + c = ax'^2 + c$, откуда $y' = ax'^2$,

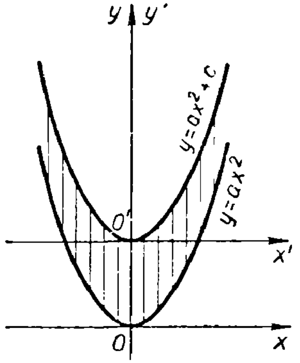


Рис. 154

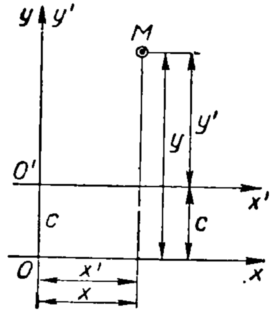


Рис. 155

следовательно, график функции $y = ax^2 + c$ имеет ту же форму, что и парабола $y = ax^2$, только смещен параллельно оси OY относительно нее вверх на c единиц.

Можно попробовать обойти применение формул $x = x'$, $y = y' + c$ и ограничиться следующим рассуждением. Перенесем

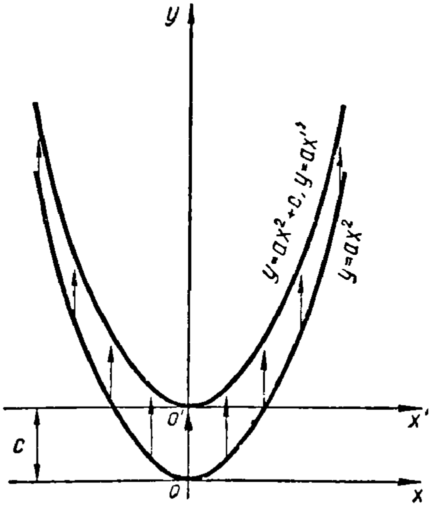


Рис. 156

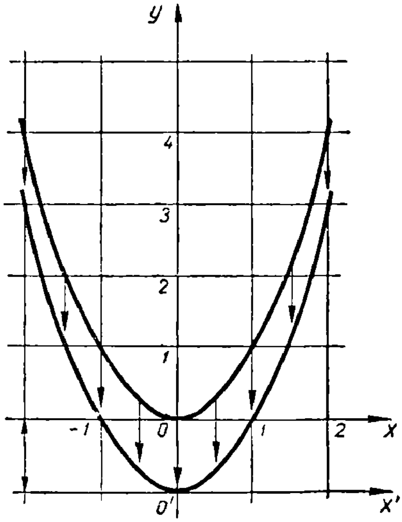


Рис. 157

(рис. 156) ось OX вверх на c, тогда все ординаты точек графика функции $y = ax^2 + c$ уменьшатся на c и получим при новом положении оси абсцисс $O'X'$ график функции $y = ax'^2$, а его форма известна.

Таким образом, можно показать, что графики функций $y = ax^2$ и $y = ax^2 + c$ имеют одну и ту же форму параболы и равны между собой. При смещении не графика, а оси OX график, очевидно, не меняется.

Ученикам объясняют это на частном примере.

П р и м е р. *Построить графики функций* $y = x^2$ и $y = x^2 - 1$.

Таблица 51

x	-2	-1	0	1	2	
$x = x^2$	4	1	0	1	4	
$x = x^2 - 1$	3	0	-1	0	3	меньше на 1

Перенесем ось OX на 1 вниз в положение $X'O'$ (рис. 157), тогда геометрически все ординаты функции $y = x^2 - 1$ увеличатся на 1: $(x^2 - 1) + 1 = x^2$ и получим график новой функции (по системе $X'O'Y$) $y = x'^2$. Переносили ось, а не график, следовательно, форма графиков функций $y = x^2 - 1$ и $y = x^2$ одинаковая.

§ 7. ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = a(x - m)^2$

График функции $y = a\,(x - m)^2$ тоже сравнивают с графиком функции $y = ax^2$ с целью показать, что они имеют одинаковую форму, но различно расположены на координатной плоскости.

Можно предварительно установить, что

$$\overset{+;\;+;\;0}{\underset{+;\;0}{y = a(x - m)^2}}\;;\qquad \overset{-;\;+;\;0}{\underset{-;\;0}{y = a(x - m)^2}}$$

и сделать заключение, что при $a > 0$ y имеет при $x = m$ наименьшее значение $y_{наим} = 0$, а при $a < 0$ наибольшее значение $y_{наиб} = 0$.

Для сравнения графиков функций $y = ax^2$ и $y = a\,(x - m)^2$ найдем значения этих функций.

Рассмотрим на частном примере.

П р и м е р. *Сравнить значения функций* $y = x^2$ *и* $y = (x - 1)^2$.

Таблица 52

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$x = x^2$	9	4	1	0	1	4	9	16	...
$x = (x-1)^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	...

Из таблицы следует, что значения функций $y = x^2$ и $y = (x-1)^2$ будут совпадать не при одинаковых значениях x.

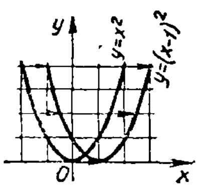


Рис. 158

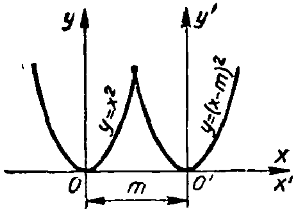


Рис. 159

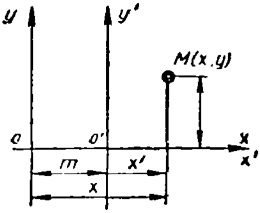


Рис. 160

Если взять значения x для функции $y = (x-1)^2$ на 1 больше, чем для функции $y = x^2$, то получим точки графика $y = (x-1)^2$, имеющие такие же ординаты, причем точки будут сдвинуты относительно графика $y = x^2$ вправо на 1 (рис. 158). Полезно на чертеже показать смещение точек параболы стрелками.

При сравнении графиков функций $y = x^2$ и $y = (x-1)^2$ можно поступить, как при сравнении графиков функций $y = x^2$ и $y = x^2 - 1$.

1) При эмпирическом методе копию графика $y = x^2$ двигают так, что его вершина движется по оси OX, а ось ее симметрии остается параллельной оси OY. Копия параболы $y = x^2$ совместится с графиком функции $y = (x - 1)^2$, после чего делается заключение об их равенстве.

2) Для строгого доказательства того, что парабола $y = ax^2$ и график $y = a\,(x - m)^2$ имеют одинаковую форму, можно поступить так (рис. 159).

Перенесем начало координат O в точку O'; пусть новая система координат будет $X'O'Y'$.

Возьмем точку M. Пусть в старой системе XOY ее координаты будут (x, y), в новой системе $X'\ O'\ Y'$ (x', y') (рис. 160). Тогда $x = x' + m$, $y = y'$ и в новой системе координат $X'\ O'\ Y'$ $y = a\ (x - m)^2$ примет вид: $y' = a(x')^2$.

Отсюда заключаем, что форма графика функций $y = a\ (x - m)^2$ и $y = ax^2$ одинаковая, но график первой функции смещен относительно графика второй функции на m единиц параллельно оси OX.

§ 8. ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = ax^2 + bx + c$

Функцию $y = ax^2 + bx + c$ приводят к виду $y = a(x - m)^2 + n$ и делают краткое исследование

$$\begin{array}{c} +; \quad 0; \; + \\ y = \underbrace{a\,(x - m)^2}_{} + n. \\ +;\; 0 \quad \text{при } a > 0 \\ -;\; 0 \quad \text{при } a < 0 \end{array}$$

Отсюда следует заключение, что функция имеет наименьшее значение при $a > 0$ и наибольшее при $a < 0$. Затем говорят о смещении графика относительно осей координат и делают заключение, что график $y = ax^2 + bx + c$ — парабола, равная параболе $y = ax^2$.

В этом случае необходимо отвести достаточно времени упражнениям на выделение полного квадрата из квадратного многочлена.

Пример. *Выделить полный квадрат из многочлена* $3x^2 - 8x + 5$.

Решение. Вариант 1. $3x^2 - 8x + 15 = 3\left(x^2 + \frac{8}{3} + 5\right) = 3\left[x^2 - 2x\cdot\frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 5\right] = 3\left[\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$.

Вариант 2. $3x^2 - 8x + 15 = 3\left(x^2 - \frac{8}{3}x + 5\right) = 3\left[\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} + 5\right] = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$.

$$x^2 - 2hx = (x + h)^2 - h^2$$
$$2h = -\frac{8}{3},$$
$$h = \frac{4}{3}.$$

Вариант 3. Можно использовать метод неопределенных коэффициентов.

$$3x^2 - 8x + 15 = A(x - m)^2 + n.$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях:

x^2	$3 = A$	$A = 3$
x	$-8 = 2Am$	$-8 = -6m, \; m = \frac{4}{3}$
x^0	$15 = Am^2 + n$	$15 = 3\cdot\frac{16}{9} + n; \; n = -\frac{1}{3}$

$$3x^2 - 8x + 5 = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}.$$

Последний способ хорошо показать на занятиях математического кружка.

Проще найти вершину параболы следующим приемом.

П р и м е р 2. *Найти вершину параболы* $y = x^2 - 2x - 3$.

Р е ш е н и е. Находим точки, в которых парабола $y = x^2 - 2x - 3$ пересекает ось OX (корни функции). В этих точках $y = 0$, тогда $x^2 - 2x - 3 = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Ось симметрии AM параболы $y = x^2 - 2x - 3$ (рис. 161) проходит через ее вершину. Симметричные точки параболы, например точки B_1 и B_2, имеют одинаковые ординаты. Точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$ имеют одинаковые ординаты $y_1 = y_2 = 0$, поэтому они симметричны относительно оси параболы AM и для вершины $x_в = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-p}{2}$, то есть $x_в = -\frac{-2}{2} = 1$, тогда $y_в = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$.

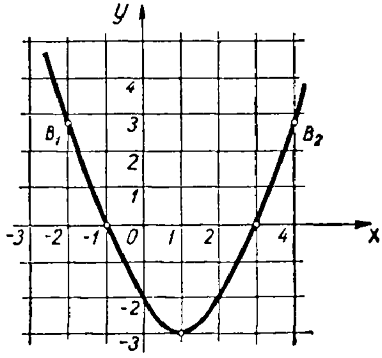


Рис. 161

В этом примере многочлен $x^2 - 2x - 3$ имел действительные корни, но указанный способ применим во всех случаях.

П р и м е р 3. *Найти вершину параболы* $y = 4x^2 - 4x + 1$.

Р е ш е н и е. $y = 0$, тогда $4x^2 - 4x + 1 = 0$, $x_{1,2} = \frac{1}{2}$.

В этом случае $x_в = \frac{1}{2}$, $y_в = 0$. Если неясно, почему $y_в = 0$, то можно сделать вычисление $y_в = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$.

П р и м е р 4. *Найти вершину параболы* $y = 3x^2 - 2x + 1$.

Р е ш е н и е. $y = 0$, тогда $3x^2 - 2x + 1 = 0$, но корней нет, значит, парабола не пересекает ось OX.

В этом случае найдем точки ее пересечения не с осью OX, а с прямой, параллельной оси OX $y = a$. Выбираем a так, чтобы a равнялось свободному члену многочлена $3x^2 - 2x + 1$, т. е. $a = 1$. Соответственно получим прямую $y = 1$ (рис. 162).

Находим точки пересечения параболы $y = 3x^2 - 2x + 1$ с прямой $y = 1$, для этого составим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 2x + 1; \\ y = 1; \end{cases}$$

$$1 = 3x^2 - 2x + 1;\ 3x^2 - 2x = 0;\ x(3x - 2) = 0;$$

$$x_1 = 0_1,\ x_2 = \frac{2}{3}.$$

Получили две точки параболы $y = 3x^2 - 2x + 1$ $(0;\ 1)$ и $\left(\frac{2}{3};\ 1\right)$.

Их ординаты равны, поэтому они симметричны относительно оси и $x_в = \frac{0 + \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$,

$$y_в = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

Значит, вершина параболы M имеет координаты $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

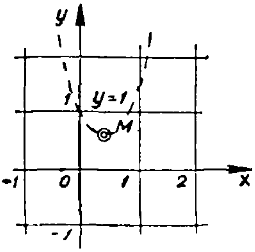


Рис. 162

Рассмотрим на примерах построение графика функции $y = ax^2 + bx + c$.

Способы построения выбирают в соответствии с той целью, для которой строят график. Например, если надо провести исследование квадратной функции на возрастание, убывание, то находят координаты вершины параболы; если же надо провести исследование на знак, найти интервалы знакопостоянства, то надобность в отыскании вершины параболы отпадает и можно ограничиться отысканием точек пересечения параболы с осью OY. Также существенно число точек, по которым строится график функции. При графическом решении уравнения $x^3 - 3x = 1$ понадобится более точное построение графиков функций $y = x^3$ и $y = 3x + 1$. Для этого придется обратить внимание на аккуратность построения, а при исследовании на знак функции $y = 3x^2 - x$ достаточно найти точки пересечения параболы $y = 3x^2 - x$ с осью OX и от руки провести параболу.

Строят график функции $y = ax^2 + bx + c$ по точкам, причем стараются выбрать не случайные точки, а наиболее характерные. Ученикам следует разъяснить, что в предыдущих случаях рассматривали смещение параболы $y = ax^2$ с целью показать, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола, равная параболе $y = ax^2$, но смещенная вдоль осей координат.

Рассмотрим построение графика функции $y = ax^2 + bx + c$ на частных примерах.

Пример 5. *Построить график функции* $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$.

Решение. Выделим полный квадрат из многочлена:

$$\frac{1}{2}x^2 - x + 1 = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2) = \frac{1}{2}[x^2 - 2x \cdot 1 + 1 - 1 + 2] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x-1)^2 + 1\right] = \frac{1}{2}\underbrace{(x-1)^2}_{0 \text{ при } x=1} + \frac{1}{2}.$$

+; 0

1) Находим вершину параболы.

При $x = 1$ $y = \frac{1}{2}$, поэтому вершина параболы — точка $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

2) Делаем вывод, что ось параболы проходит через точку $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

3) Находим несколько точек, *симметричных относительно оси* параболы:

x	-1	0	1	2	3
y	$2\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$2\frac{1}{2}$

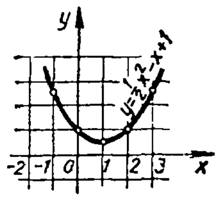


Рис. 163

По полученным пяти точкам чертим график (рис. 163).

Для более точного построения графика функции $y = ax^2 + bx + c$ находят, кроме вершины параболы, еще точки пересечения ее с осями (если они существуют).

Пример 5. *Построить график функции* $y = 2x^2 + x - 1$.

Решение. 1) $y = 0$, тогда $2x^2 + x - 1 = 0$, отсюда $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

$$2)\ x_в = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + \frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4};$$

$y_в = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = -1\frac{1}{8}$ вершина имеет координаты $\left(-\frac{1}{4}; -1\frac{1}{8}\right)$.

Составляем таблицу:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y	5	0	-1	$-1\frac{1}{8}$	-1	0	2

В таблице взяли семь граф (можно меньше или больше); сперва в средней графе ставят координаты вершины параболы, затем точки пересечения с осью OX и остальные. В заключение по точкам строят график (рис. 164).

Помимо стандартных упражнений, можно предложить графически решить системы уравнений вида:

$$\begin{cases} y = x^2; \\ 2x - y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 2; \\ y = x^2 + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 2; \\ y = -x^2 + 5 \end{cases} \text{ и т. д.}$$

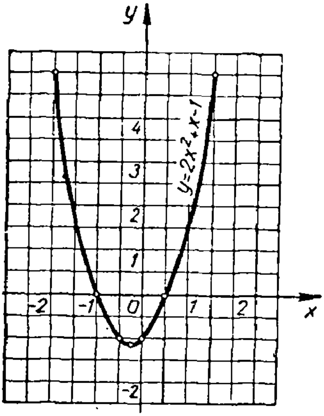


Рис. 164

§ 9. УПРАЖНЕНИЯ НА ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ

Исследование функций в VIII классе ведется примерно по следующей схеме:

1) находят область определения функции;

2) находят промежутки, в которых значения функции положительны, отрицательны; точки, в которых функция равна нулю;

3) находят наибольшее или наименьшее значение ее;

4) находят интервалы, в которых функция возрастает, убывает.

До исследования функции $y = ax^2 + bx + c$ на знак полезно проделать следующие упражнения.

Пример 1. *Дан график функции* $y = f(x)$ (рис. 165).

По графику учащиеся отвечают на следующие (примерные) вопросы:

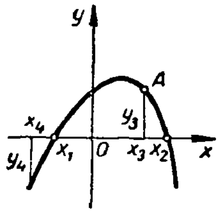


Рис. 165

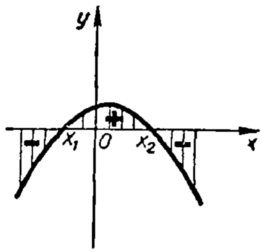


Рис. 166

Что можно сказать о значении функции y в точках x_1 и x_2? (Ответ. $y = 0$.)

Что можно сказать о значении функции в точке x_3? x_4?

При ответе ученики должны показать ординату, соответствующую точке x_3. Для этого в точке x_3 восставляют перпендикуляр до пересечения с графиком в точке A, получают ординату y_3. Установив, что ордината расположена выше оси OX, отвечают на вопрос и говорят, что в точке x_3 $y > 0$ (или $y_3 > 0$).

Аналогично устанавливают, что в точке x_4 $y < 0$.

Показать на графике (рис. 166) части, для которых $y>0$, $y<0$.

Ученики находят участки графика, расположенные выше оси OX, ниже оси OX; каждый из этих участков ученик должен показать указкой.

Для большей наглядности полезно провести ординаты для этих участков графиков (на чертеже они выглядят как вертикальные штрихи).

Затем можно вернуться к примеру и поставить вопрос, в каких промежутках $y > 0$, $y < 0$?

Чтобы ответить на последний вопрос, все подготовлено предыдущими вопросами. Остается только зафиксировать, что $y > 0$ при $x < x_1$ и $x_2 < x$; а $y < 0$ при $x_1 < x < x_2$.

После усвоения учениками, как находить промежутки, в которых $y = 0$, $y > 0$, $y < 0$, можно перейти к исследованию функций.

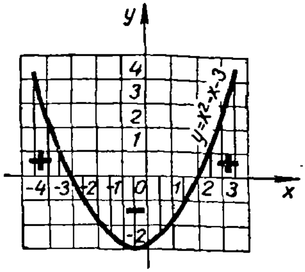


Рис. 167

Пример 2. *Исследовать функцию* $y = x^2 + x - 6$ *на знак.*

Решение. Найдем корни функции $y = x^2 + x - 6$, то есть значения x, при которых y равен нулю.

Итак, $y = 0$, на этом основании составляем уравнение

$$x^2 + x - 6 = 0, \text{ откуда } x_1 = -3, \ x_2 = 2.$$

Для исследования на знак надо знать только точки, в которых y меняет знак ($y = 0$). Поэтому график можно провести от руки (рис. 167). Он принципиально верен, но начерчен с большим приближением, что на знаке функции не скажется.

Полезно провести вертикальные штрихи, которые будут соответствовать ординатам.

Ученикам можно предложить:

Показать участки графика, в которых $y > 0$. Как расположены на этих участках ординаты, соответствующие значениям y? (Ординаты расположены над осью OX.)

При этом на чертеже ученик должен показать, как он понимает, что говорит.

Показать на чертеже промежутки, в которых $y > 0$.

Ученик должен показать на оси OX эти промежутки (слева направо до точки $x_1 = -3$, затем справа от точки $x_2 = 2$).

Сказать, при каких значениях x $y > 0$.

Остается только записать, что в первом случае $x < -3$, во втором $2 < x$.

Аналогично рассматривается промежуток, в котором $y < 0$. Ученики показывают на чертеже часть графика и выделяют соответствующий отрезок оси OX, а затем записывают нужный интервал $-3 < x < 2$.

До упражнения на исследование квадратных функций на возрастание, убывание полезно провести ряд подготовительных упражнений по готовым графикам.

Пример 3. *Показать промежутки, в которых функция y возрастает, и промежутки, на которых y убывает* (рис. 168).

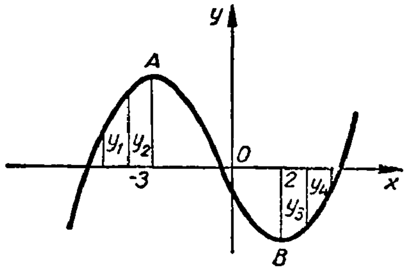


Рис. 168

1. Сравнить по величине ординаты y_1 и y_2 · ($y_2 > y_1$, так как конец ординаты y_2 выше конца ординаты y_1; ученик показывает это на графике.)

2. Сравнить по величине ординаты y_3 и y_4 · ($y_4 > y_3$ по той же причине.)

3. Найти и показать участки графика, на которых при движении слева направо линия графика поднимается вверх. Сказать, как изменяется функция на этом участке.

Ученики должны научиться находить такие участки графика и показывать их, двигая указкой (карандашом) по графику. В данном случае надо показать, что слева до точки A и правее точки B кривая идет вверх. При этом ученики должны понимать, что на этих участках функция возрастает.

4. Найти и показать участки графика, на которых кривая идет вниз. Что можно сказать об изменении функции на этом участке? Ответ аналогичен предыдущему.

После усвоения, как понимать геометрически возрастание и убывание функции, окончательно выясняется вопрос.

5. При каких значениях x данная функция возрастает, убывает? (y возрастает при $x < -3$, $2 < x$; y убывает при $-3 < x < 2$.)

6. Что можно сказать о поведении функции в точке A, в точке B? (В точке A функция меняет возрастание на убывание, в точке B — убывание на возрастание.)

За первичными упражнениями следуют упражнения на исследование квадратных функций на возрастание, убывание и наибольшее и наименьшее значение функции.

Пример 4. *Исследовать функцию $y = -5x^2 + 6x - 4$ на возрастание, убывание и наибольшее, наименьшее значение.*

Решение. Вопрос о наибольшем и наименьшем значении можно решить аналитически. Для этого выделим полный квадрат из многочлена:

$$x^2 + 2hx = (x+h)^2 - h^2 \quad \Big| \; 2h = -\frac{6}{5},\; h = -\frac{3}{5}$$

$$-5x^2 + 6x - 4 = -5\left(x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{4}{5}\right) = -5\left[\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{9}{25} + \frac{4}{5}\right] =$$

$$= -5\left[\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{11}{25}\right] = -5(x - 0{,}6)^2 - 2{,}2.$$

Выражение $-5\ (x - 0{,}6)^2$ принимает наибольшее значение 0 при $x = 0{,}6$, следовательно, функция $y = -5x^2 + 6x - 4$ имеет наибольшее значение $y_{\text{наиб}} = -2{,}2$ при $x = 0{,}6$.

Функция $y = -5x^2 + 6x - 4$ наименьшего значения не имеет.

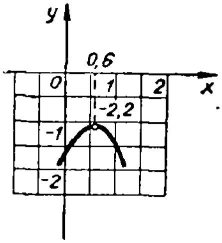


Рис. 169

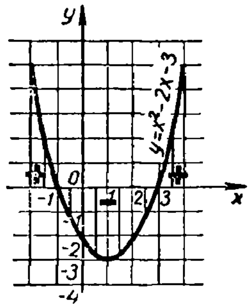


Рис. 170

Вершина параболы $y = -5x^2 + 6x - 4$ имеет координаты $(0{,}6;\ -2{,}2)$, кривая расположена ниже оси OX. Ученики от руки проводят принципиально верный график (рис. 169) и отвечают на вопрос о возрастании, убывании функции.

1) Находят участок графика, на котором функция возрастает, и указывают, что y возрастает при $x < 0{,}6$;

2) Находят участок графика, на котором функция убывает, затем фиксируют, что y бывает при $0{,}6 < x$.

В случае полного исследования функции $y = ax^2 + bx + c$ приходится находить и корни функции и вершину параболы.

Пример 5. *Исследовать по графику функцию* $y = x^2 - 2x - 3$.

Решение. 1) Находим корни функции.

$$y = 0;\quad x^2 - 2x - 3 = 0;\quad x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

2) Находим вершину параболы.

$$x_{\text{в}} = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{p}{2} = 1,\quad y_{\text{в}} = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4,$$

то есть координаты вершины будут $(1,\ -4)$.

Чертим график от руки (рис. 170).

Исследование. 1) $y > 0$ при $x < -1$, $3 < x$;
$y < 0$ при $-1 < x < 3$.

в этом случае $x = -1$, значит, $-1 - \frac{p}{2} = 0$ (1). При этом значении $x = -1$ функция принимает наибольшее значение 4, значит,

$$\frac{p^2}{4} + q = 4.$$

Итак, получили систему уравнений:

$$\begin{cases} -1 - \frac{p}{2} = 0; \\ \frac{p^2}{4} + q = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} p = -2; \\ q = 3. \end{cases}$$

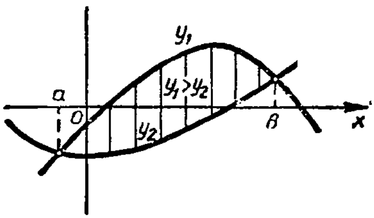


Рис. 173

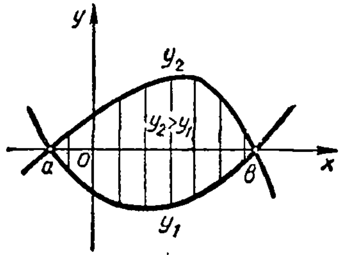


Рис. 174

Можно предложить задачи на составление функциональной зависимости и отыскание наибольшего или наименьшего значения.

Задача 3. *Периметр прямоугольника равен 12 см. Выразить площадь (у) прямоугольника как функцию его основания (х) и построить график. Ответить на вопрос: а) Чему равна площадь треугольника, когда основание равно 2? б) Чему равно основание, когда площадь равна 5 см^2? в) Чему равна наибольшая площадь прямоугольника? Какой это прямоугольник?*

Задача 4. *Участок должен иметь форму прямоугольника и одной стороной примыкает к дому. Найти наибольшую площадь участка, который можно огородить, имея материал на 32 м ограды?*

Полезно дать упражнения на графическое решение нелинейных неравенств.

Начать лучше с примеров, в которых даны графики каких-то двух функций, и ставится вопрос о том, значения какой функции больше в указанных интервалах. Например (рис. 173), ученик должен ответить, что в промежутке $a < x < b$ $y_1 > y_2$, или (рис. 174) в промежутке $a < x < b$ $y_1 < y_2$. Затем берется более сложный случай (рис. 175), предварительно ставится вопрос о точках, в которых $y_1 = y_2$; ученики ответят, что это будет при $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$. Далее установят, что в промежутке $a < x < b$ точки графика y_1 расположены выше соответствующих точек графика функции y_2, значит, в этом промежутке $y_1 > y_2$. Аналогично в промежутке $b < x < c$ $y_1 < y_2$.

Пример 7. *Решить неравенство* $x^2 > \frac{1}{x}$.

Решение. Пусть $y_1 = x^2$, $y_2 = \frac{1}{x}$ (рис. 176).

Найдем точки пересечения графиков этих функций.

В точках пересечения $y_1 = y_2$, значит, $x^2 = \frac{1}{x}$, отсюда $x^3 = 1$ $(x \neq 0)$ и $(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x_1 - 1 = 0$, $x_{2,3}$ не существует.

Отмечаем на оси OX точку $x = 1$, в которой пересекаются графики функций. Выделем интервалы, в которых $y_1 > y_2$:

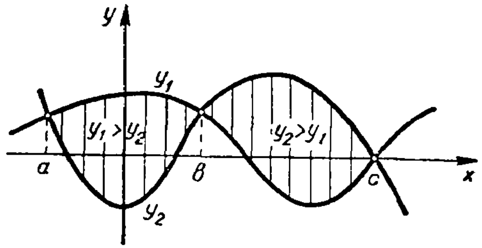


Рис. 175

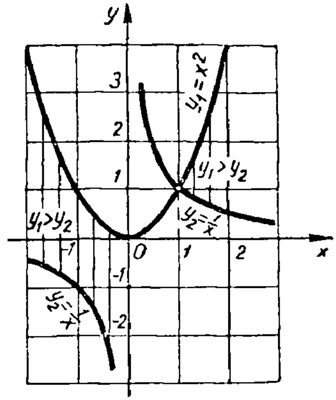


Рис. 176

1) $x < 0$; 2) $1 < x$. Это и есть решение данного неравенства.

Остановимся не некоторых недочетах, допускаемых в преподавании этой темы.

В VIII классе часто употребляют термины *максимум* и *минимум* функции, не разъясняя их. У восьмиклассников может возникнуть представление, что максимум — наибольшее значение функции, а минимум — наименьшее. Учитель должен помнить следующее. Точкой максимума называется точка, в которой функция меняет

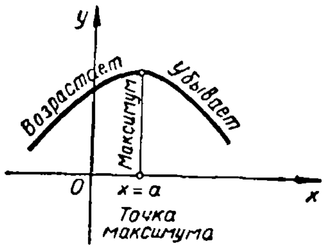


Рис. 177

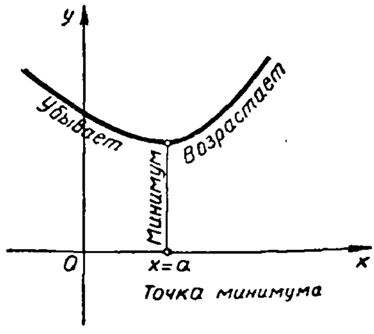


Рис. 178

возрастание на убывание (рис. 177); максимум — значение функции в точке максимума. Аналогично точкой минимума называется точка, в которой функция меняет убывание на возрастание (рис. 178); минимум — значение функции в точке минимума.

Поэтому понимание максимума (минимума) функции как наибольшего (наименьшего) значения ее неверно.

Например, функция $y = x^3 - 3x$ имеет максимум $y = 2$ в точке $x = -1$ и в точке $x = 1$ минимум $y = -2$. Но функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения (рис. 179).

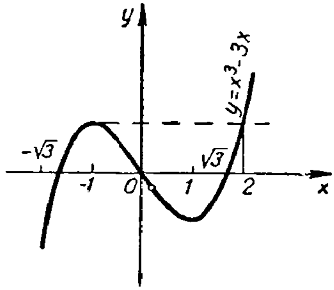


Рис. 179

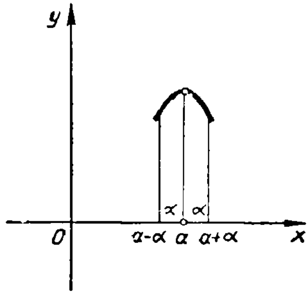


Рис. 180

В дальнейшем если в старших классах будет дано понятие бесконечной малой, то можно будет определить максимум функции, как ее наибольшее значение в окрестности точки. Пусть (рис. 180) α — бесконечно малая, тогда интервал $(a - \alpha;\ a + \alpha)$ — окрестность точки $x = a$, $y = b$ — наибольшее значение функции в окрестности точки $x = a$ есть ее максимум.

§ 10. ПРИЕМЫ, УСКОРЯЮЩИЕ ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Очень часто по теме «Функции и графики» в VIII классе мало решают упражнений. Построение графика квадратной функции, когда приходится предварительно найти характерные точки графика и составить таблицу, требует много времени. В теме основная часть времени затрачивается на изучение построения графиков и их построение, а упражнений, связанных с исследованием функций, решается мало.

Чтобы получить возможность больше делать упражнений, можно графики строить приближенно; стремясь к тому, чтобы они были принципиально верными. Так, в случае если надо исследовать квадратую функцию на знак, достаточно найти корни функции, отметить их на оси OX и начертить от руки параболу. Затем найти знаки функции в полученных промежутках (см. пример в § 9). Аналогично, если надо исследовать квадратную функцию на возрастание, убывание, можно, найдя вершину параболы, от руки провести параболу и, пользуясь схемой графика, ответить на поставленный вопрос.

Значительно ускоряет построение и вычерчивание графиков применение различных шаблонов. Например, найдя корни квадратной функции $y = x^2 - 2x$ $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, устанавливаем шаблон параболы $y = x^2$ так, чтобы ось ее была параллельна оси OY и парабола прошла через точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ (рис. 181). Затем по шаблону чертят параболу.

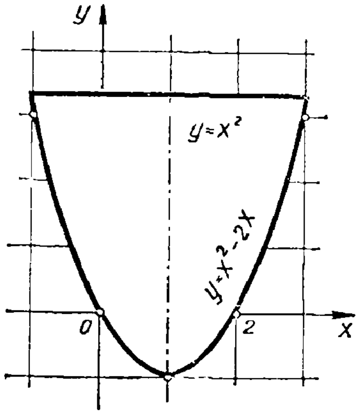


Рис. 181

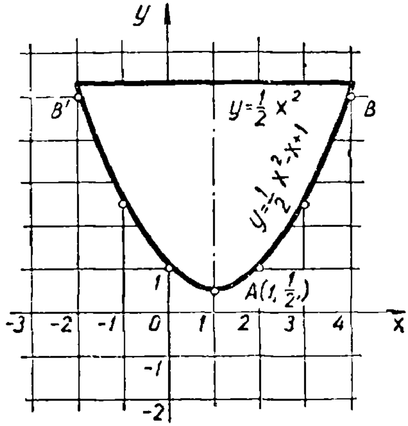


Рис. 182

Можно искать не корни функции, а вершину параболы.

Пример. *Построить график функции* $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

Используем шаблон для построения графика.

В этом случае находим вершину $A(1;\ \frac{1}{2})$ параболы $x = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$, затем накладываем на координатную плоскость шаблон, так, чтобы его вершина совместилась с точкой A, а ось (на шаблоне показана штриховой линией) была параллельна оси OY. Затем по шаблону чертим искомый график (рис. 182). Можно, используя симметрию параболы, применять другие шаблоны (рис. 183), при этом сперва чертят одну половину параболы AB, затем перевертывают шаблон обратной стороной и чертят вторую половину параболы AB_1.

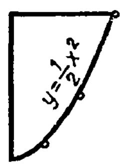


Рис. 183

В частности, предпочтительнее давать упражнения на исследование функций $y = ax^2 + bx + c$ и построение их графиков такие, в которых можно использовать шаблоны, для чего следует выбирать a, равным ± 1, ± 2, ± 3, $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{1}{3}$.

Очень хорошо, если на классной доске нанесена координатная сетка и имеется набор шаблонов для доски (рис. 184).

С помощью трех шаблонов парабол $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 2x^2$ и клетчатой сетки на доске можно:

1) показать свойства квадратной функции;

2) показать положение параболы $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = -x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$ и т. д.;

3) показать положение параболы $y = x^2 - 1$, $y = -x^2 + 1$, $y = 2x^2 - 3$, $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, $y = -2x^2 - 5$ и т. д.;

4) показать положение параболы $y = (x - 1)^2$, $y = (x + 1)^2$, $y = -2(x - 1)^2$, $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$ и т. д.;

5) показать положение параболы $y = (x - 1)^2 - 3$, $y = -(x - 1)^2 + 1$, $y = 2(x - 3)^2 + 1$, $y = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 - 2$ и т. д.

Кроме того, можно сделать еще такие упражнения:

6) показать положение параболы $y = ax^2 + bx + c$, когда корни многочлена различные, одинаковые, нет корней;

7) поместить шаблоны в различные положения (рис. 184) и потребовать от учащихся сказать, при каких значениях x: а) $y = 0$; б) $y > 0$; в) $y < 0$; г) y возрастает; д) y убывает; е) y имеет наи-

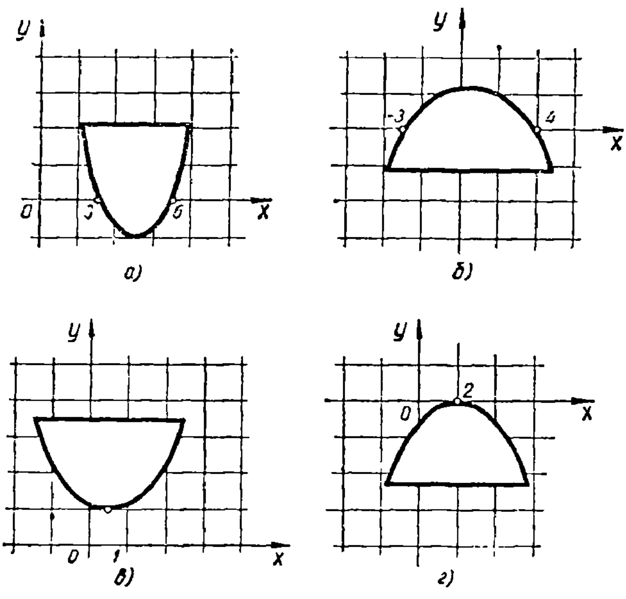


Рис. 184

большее или наименьшее значение; ж) имеют ли функции, представленные графически на рисунке 185, корни, и если да, то сколько.

Очевидно, в этих упражнениях ответы будут приближенными.

Очень хорошо сделать координатную плоскость из жести, разграфить ее, а к каждому шаблону прикрепить 2 магнитика. Тогда шаблоны можно ставить на вертикальной координатной плоскости и они будут удерживаться магнитами.

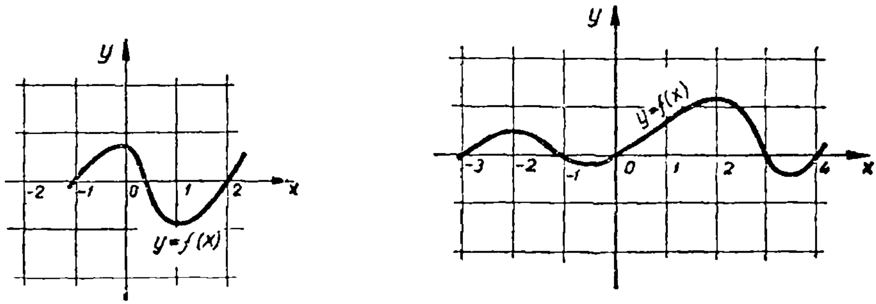


Рис. 185

Ученики не должны забывать и способа построения графиков по точкам. Поэтому наряду с упражнениями, в которых применяются ускоренные приемы построения, следует давать и упражнения, в которых требуется построить график по точкам. Например, построить график функции $y = x^3 - 3x$ на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $y = \frac{1}{x^2 - 2x}$ в интервале $0 < x < 2$ и т. п.

§ 11. ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = x^3$. ВОЗВЕДЕНИЕ ЧИСЕЛ В КУБ

Для построения графика функции $y = x^3$ можно сделать небольшое исследование:

1) Если $x = 0$, то $y = 0$
2) Если $x < 0$, то $y < 0$
3) Если $x > 0$, то $y > 0$

Следовательно, график пройдет через начало координат; при $x < 0$ он расположен ниже оси OX, при $x > 0$ — выше.

Составим таблицу:

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

Затем чертим график (рис. 186).

С помощью этого графика можно приближенно находить кубы чисел. Например, $0{,}6^3 \approx 0{,}22$; если же надо получить 60^3, то $60^3 \approx$ $\approx (0{,}6 \cdot 100)^3 = 0{,}22 \cdot 1\,000\,000 = 220\,000$.

Возведение чисел в куб по таблицам аналогично возведению в квадрат, только надо помнить, что с увеличением числа N в 10 раз его куб будет $(10\,N)^3 = 1000\,N^3$, то есть увеличивается в 1000 раз и т. д.

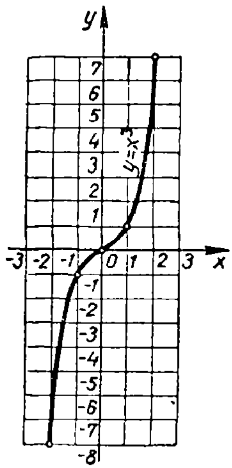


Рис. 186

Возведение в куб чисел на счетной линейке аналогично возведению чисел в квадрат. Ознакомление со шкалой кубов не представляет труда, но обращают внимание учеников на то, что шкала кубов делится на три части; будем в дальнейшем называть их первой, второй и третьей (или левой, средней, правой).

Пример. *Найти* $2{,}3^3$.

На основной шкале находим цифры данного числа 2—3, устанавливаем визир против этого числа и на шкале кубов (второй) находим цифры искомого куба 1—2—2. Прикидка дает $2^3 = 8$, следовательно, $2{,}3^3 \approx 12{,}2$.

§ 12. ГРАФИК ФУНКЦИИ $y=\sqrt[3]{x}$. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КУБИЧЕСКОГО КОРНЯ ИЗ ЧИСЛА

Раньше был определен только квадратный корень из числа. К кубическому корню из числа можно подвести учеников, решая задачу.

Задача. *Объем куба равен* 1000 $м^3$. *Найти его ребро.*

Решение. Пусть ребро куба равно x, тогда по условию $x^3 = 1000$. Здесь x — число, куб которого равен 1000. Подбор дает $x = 10$ ($м$).

Затем дается определение кубического корня из числа и вводится запись кубического корня.

В данной задаче $x = \sqrt[3]{1000} = 10$.

Извлечение кубического корня из числа по таблицам проводится аналогично извлечению из чисел квадратного корня, отличие состоит в том, что при изменении подкоренного числа в 1000 раз его корень изменится в 10 раз и т. д.

Проще извлечение квадратного корня выполняется на счетной линейке. При этом полезно подкоренное число разбивать на грани и договориться устанавливать на линейке подкоренное число на первой, второй или третьей шкале кубов в зависимости от того, одна, две или три цифры имеется в первой грани подкоренного числа. Причем каждой грани подкоренного числа соответствует цифра корня, пустой грани соответствует нуль.

Пример. $\sqrt[3]{\underbrace{1}_{\text{1 цифра}}'600}\approx 11{,}7$; $\sqrt[3]{\underbrace{16}_{\text{2 цифры}}'000}\approx 25{,}2$;

$$\sqrt[3]{\underbrace{160}_{\text{3 цифры}}'000}\approx 54{,}3.$$

Полезно до извлечения корня дать упражнения в разбивке на грани и установления числа цифр до или после запятой.

Пример 2. *Показать: 1) сколько цифр в первой грани, 2) точкой разряд цифр, полученных после извлечения корня:*

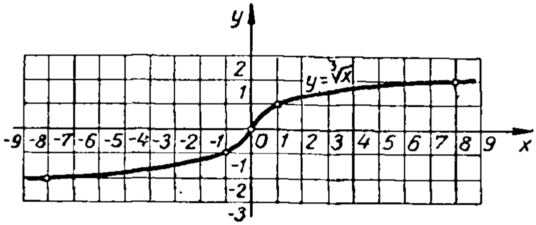


Рис. 187

$$\sqrt[3]{37{,}5};\ \sqrt[3]{8249};\ \sqrt[3]{0{,}0175};\ \sqrt[3]{0{,}2179};$$

$$\sqrt[3]{\underbrace{37}_{\text{2 ц.}},5}\approx .,;\ \sqrt[3]{\underbrace{8}_{\text{1 ц.}}'240}\approx ..,;\ \sqrt[3]{0',\underbrace{017}_{\text{2 ц.}}'5}\approx 0,.;\ \sqrt[3]{0',\underbrace{217}_{\text{3 ц.}}'9}\approx 0,.$$

Умея извлекать кубические корни, можно построить график функции $y=\sqrt[3]{x}$ (рис. 187).

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$-1{,}6$	$-1{,}44$	$-1{,}26$	-1	0	1	$1{,}26$	$1{,}44$	$1{,}6$

Упражнения по графику выполняются обычные: по данному значению x находят значение y и обратно.

§ 13. УПРАЖНЕНИЯ, В КОТОРЫХ ИСПОЛЬЗУЮТСЯ ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

Сюда относятся различные упражнения на графическое решение уравнений, систем уравнений, решение прикладных задач, связанных с техникой, физикой, геометрией и др.

Задача. *Решить уравнение* $x^3-3x=1$.

Решение. Вариант 1. Представим уравнение в виде $x^3=3x+1$ и приведем его решение к графическому решению системы уравнений:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$$

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

x	0	$-\frac{1}{3}$
y	1	0

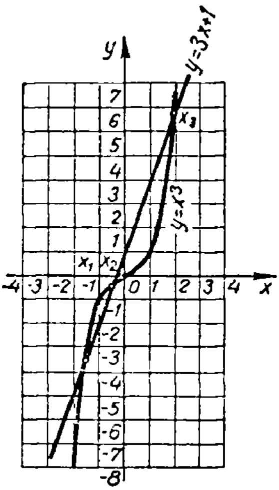


Рис. 188

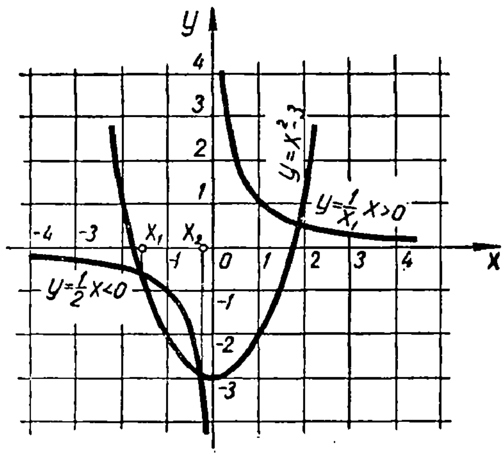


Рис. 189

В этом случае приходится очень аккуратно строить графики (рис. 188), чтобы убедиться, что точек пересечения будет три: $x_1 \approx -1{,}5$, $x_2 \approx -0{,}4$, $x_3 \approx 1{,}9$.

Вариант 2. Можно поделить обе части уравнения на x (здесь $x \neq 0$): $x^2 - 3 = \frac{1}{x}$ и привести решение уравнения к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3; \\ y = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Этот способ дает возможность использовать шаблоны графиков функций $y = x^2$ и $y = \frac{1}{x}$ (рис. 189).

Кстати, в последнем случае можно было на разграфленной части классной доски установить два шаблона и найти абсциссы точек пересечения.

Это уравнение можно быстро решить (и по аналогии другие) следующим путем.

Берется шаблон параболы $y = x^2$ и гиперболы $y = \frac{1}{x}$, начерченные на прозрачной бумаге (например, восковке); на координатную плоскость кладут в нужном положении параболу и на нее гиперболу. Затем находят абсциссы их точек пересечения, которую на прозрачной бумаге видно. Таким способом можно решать и другие уравнения.

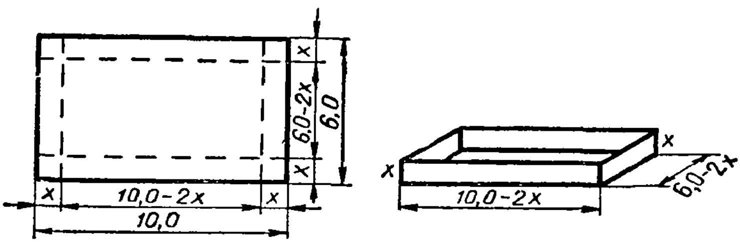


Рис. 190

При повторении можно дать и некоторые приложения обратной пропорциональности в физике по курсу VIII класса. Приведем пример на закон Ома.

Напряжение в цепи 120 вольт. Выразить зависимость между силой тока I и сопротивлением цепи R. Построить график этой зависимости.

По закону Ома $I = \frac{v}{R}$, здесь $I = \frac{120}{R}$. Остается построить график.

На графики даются обычные упражнения: найти значение одной переменной по данному значению другой и т. д.

Графики можно применять и к решению более сложных вопросов.

З а д а ч а. *Прямоугольный лист железа имеет размеры* $10{,}0 \times \times 6{,}0$ *дм. Из него сделана открытая сверху коробка в форме прямоугольного параллелепипеда. Какую высоту должна иметь эта коробка, чтобы в нее можно было налить наибольшее количество воды?*

Р е ш е н и е. Пусть (рис. 190) пунктиром показана линия сгиба данного листа железа. Примем за x *дм* ширину загибаемой полосы железа, тогда размеры основания параллелепипеда будут

$$(10 - 2x)\ \text{дм},\ (6{,}0 - 2x)\ \text{дм},\ \text{а высота}\ x\ \text{дм}.$$

Тогда переменный объем коробки будет:

$$V = (10 - 2x)(6,0 - 2x)x = 4x^3 - 32x^2 + 60x.$$

По смыслу $x > 0$; $10 - 2x < 0$; $6,0 - 2x > 0$, следовательно,

$$0 < x < 3.$$

Построим график полученной функции.
Составим таблицу значений V для $0 < x < 3$.

x	0	1	2	3
V	0	32	24	0

Наибольшее значение может быть при $x \approx 1$.
Уточним таблицу:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
V	0	$22\frac{1}{2}$	32	$31\frac{1}{2}$	24	0

По таблице и графику видно (рис. 191), что наибольшее значение V принимает между 1 и $1\frac{1}{2}$. Приняв $x = 1$, получим, что при такой высоте коробка приближенно будет иметь наиболее выгодную форму, а $V_{наиб} \approx 32$ $дм^3$.

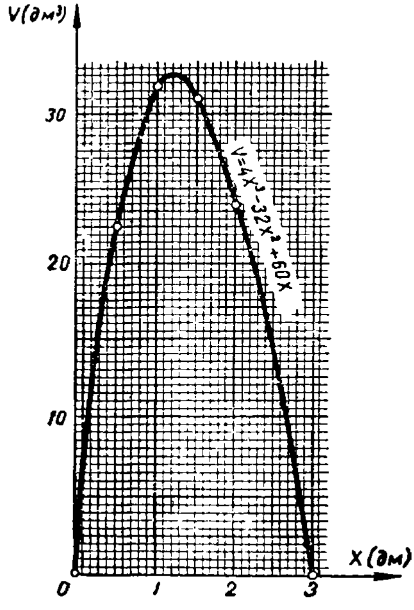


Рис. 191

Теоретически точкой максимума будет $x \approx \frac{8 - \sqrt{19}}{3} \approx 1,2$.

В этом случае $V_{max} \approx 4 \cdot 1,2^3 - 32 \cdot 12^2 + 60 \cdot 1,2 \approx 6,87 -$

$$- 46,4 + 72,0 \approx 32,5 \approx 33 \quad (дм^3).$$

Результат, полученный нами, очень близок к теоретическому, расхождение получилось только во втором знаке, что, учитывая данные, вполне допустимо.

При построении графиков ученики испытывают затруднения, когда аналитическое выражение функций содержит знак абсолютной величины и когда функция задана несколькими аналитическими выражениями.

Предварительно можно предложить в системе координат XOY показать точки M (1, 3) и M' (1, $|3|$), N (3, —2) и N' (3, $|-2|$). Ученики по чертежу устанавливают (рис. 192), что точки M и M' совпадают, а N и N' симметричны относительно оси OX.

Вывод: при замене ординаты точки ее абсолютной величиной получим: 1) ту же точку, если ордината неотрицательна; 2) точку, симметричную данной, относительно оси OX, если ордината отрицательна.

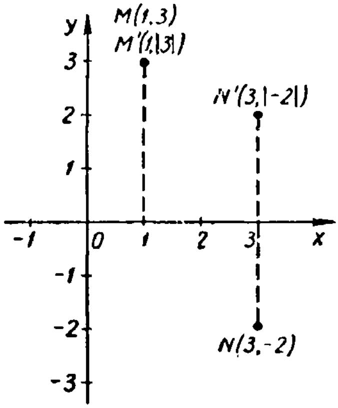


Рис. 192

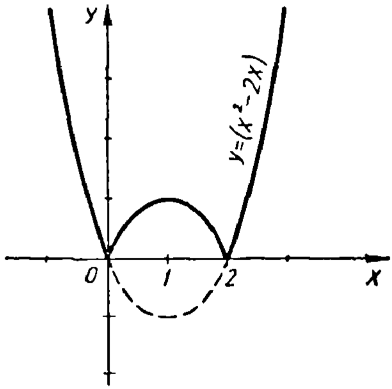


Рис. 193

Вообще о точках M (a, b) и M' $(a, |b|)$ можно сказать, что: 1) M' и M совпадают, если $b > 0$; 2) M' и M симметричны относительно оси OX, если $b < 0$.

Затем переходят к построению графиков.

Пример 1. *Построить график функции* $y = |x^2 - 2x|$.

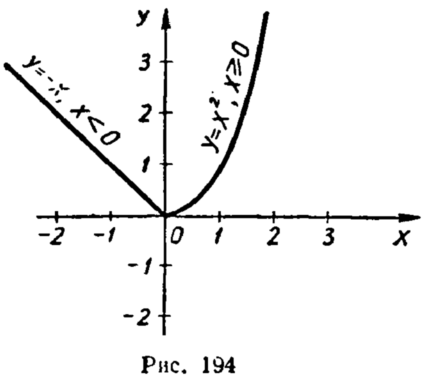


Рис. 194

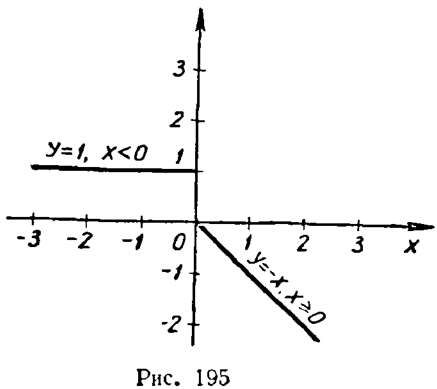


Рис. 195

Р е ш е н и е. Строится график функции $y = x^2 - 2x$ (рис. 193). При переходе от $x^2 - 2x$ к $|x^2 - 2x|$ все точки графика, имеющие положительные ординаты, останутся на месте; все точки графика, имеющие отрицательные ординаты, заменятся им симметричными относительно оси OX.

Первоначально график функции $y = x^2 - 2x$ чертят пунктиром, выделяют участки, на которых $y > 0$, $y < 0$. Затем устанавливают вид графика функции $y = |x^2 - 2x|$ и обводят его.

В заключение следует дать примеры функций, заданных несколькими аналитическими выражениями, например,

$y = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geqslant 0 \end{cases}$ (рис. 194); $y = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -x, & x \geqslant 0 \end{cases}$ (рис. 195) и т. д.

БИБЛИОГРАФИЯ

Александров В., Преподавание начал алгебры в VI классе средней школы и развитие математического мышления на уроках алгебры. Диссертация, М., 1956.

Александров П. С., Колмогоров А. Н., Алгебра, Учпедгиз, М., 1939.

Андронов И. К., Арифметика, Учпедгиз, М., 1962.

Adler J., The new mathematics. New — Jork, 1958.

Арсентьев П. В., Географическая карта на уроках математики, «Математика в школе», 1963, № 5.

Артемов А. К., О производственных экскурсиях, «Математика в школе», 1956, № 5.

Барсуков А. Н., Алгебра, Учебник для 6—8 классов, Учпедгиз, М., 1964.

Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я., Симметрические многочлены и элементарная алгебра, «Математика в школе», 1964, № 2.

Бондарев А. Л., Общее учение об уравнениях в средней школе, Краснодар, 1958.

Богуславский И. П., Кратковременные письменные и устные контрольные работы, «Математика в школе», 1960, № 3.

Брадис В. М. Методика преподавания математики в средней школе, Учпедгиз, М., 1951.

Брадис В. М., Истомина Н. С., Маркушевич А. И., Сикорский К. П., Алгебра, Учпедгиз, М., 1960.

Breard C. Cours de Mathematiques. Paris.

Бронштейн С. С., Алгебра и ее преподавание в семилетней школе, Учпедгиз, М., 1946.

Бронштейн С. С., Методика алгебры, Учпедгиз, М., 1935.

Бурбаки Н., Очерки по истории математики. Перевод с французского Башмаковой Н. Г., ИЛ, М., 1963.

Вейцман Б. И., Об оценке результата вычислений на логарифмической линейке, «Математика в школе», 1964, № 2.

Вилейтнер Г., Хрестоматия по истории математики, 1935 (перевод с немецкого Юшкевича П. С. и Юшкевича А. П.), ОНТИ, М.—Л., 1935.

Германович П. Ю., Математические викторины, Учпедгиз, М., 1959.

Гибш И. А., Методика обучения алгебре в VI классе восьмилетней школы, изд. АПН, М., 1963.

Глейзер Г. И., История математики в школе, Учпедгиз, М., 1964.

Гнеденко Б. В., Роль математики в развитии техники и производства, «Математика в школе», 1962, № 1.

Гнеденко Б. В., Очерки по истории математики в России, ОГИЗ, М. — Л., 1946.

Гончаров В. Л., Начальная алгебра, изд. АПН, М., 1955.

Гурский И. П., Функции и построение графиков, Учпедгиз, М., 1961.

Депман И. Я., История арифметики, Учпедгиз, М., 1959.

Драганов И. К., Манев М., Дериманов С. Д., «Приложение на математиката в срадните и предмети и в практиката», София, 1962 (на болгарском языке).

Кольман Э. Я., История математики в древности, Физматгиз, М., 1961.

Кочнев М. С., Зачетная система учета знаний учащихся, «Математика в школе», 1962, № 3.

Ланков А. В., К истории развития передовых идей в русской методике математики, М., 1951.

Ларичев П. А., Сборник задач и упражнений по алгебре, ч. 1 и 2, Учпедгиз, М., 1964.

Лихачева О., Методика формирования основных понятий алгебры у учащихся VI класса (диссертация), Л., 1953.

Lebosse C., Hemery C. Algebra, arithmetiques et geometrie, 1963.

Майер Р. А., Из опыта изучения свойств функций в восьмилетней школе, М., 1963.

Маслова Г. Г., О программированном обучении в преподавании математики, Учпедгиз, М., 1964.

«Методика преподавания математики в восьмилетней школе», под общей редакцией С. Е. Ляпина, Учпедгиз, М., 1964.

Мрочек В., Филлипович Ф., Педагогика математики, 1910.

Муравин К. С., Крейдлин Е. Г., Сборник задач по алгебре для восьмилетней школы, Учпедгиз, М., 1964.

Никитин В. В., Рупасов К. А., Определение математических понятий в средней школе, Учпедгиз, М., 1963.

Новоселов С. И., Алгебра и элементарные функции, Учпедгиз, М., 1956.

Nunn. The Teaching of algebra, London, 1919.

Оконь В., Процесс обучения, Учпедгиз, М., 1962 (перевод с польского).

Орловский А. Д., Отрицательные числа и методика их преподавания в средней школе (диссертация), Киев, 1955.

Пиаже Ж., Дьердонне Ж. и др., Преподавание математики, Учпедгиз, М., 1960 (перевод с французского).

«Повышение эффективности обучения в начальной школе», под ред. В. В. Давыдова и Я. А. Пономарева, М., 1963.

Пойа Д., Как решить задачу (перевод с английского), Учпедгиз, М., 1959.

Полозова Н. Н., Сборник упражнений и задач по алгебре, Учпедгиз, Л., 1949.

Правоторова В. Н., Пути повышения эффективности урока, «Математика в школе», 1962, № 3.

Потоцкий М. В., О педагогических основах обучения математике, Учпедгиз, М., 1963.

Радчук П. К., О применении зачетной системы учета знаний учащихся в средней школе, «Математика в школе», 1962, № 3

Скобелев Г. Н., Проверка знаний учащихся на уроках математики в средней школе, Учпедгиз, М., 1962.

Степанова А. Л., Об эксперименте по программированному обучению, «Математика в школе», 1964, № 2.

Тарский А., Введение в логику и методологию дедуктивных наук, М., 1948 (перевод).
Теплов Л., Очерки о кибернетике, изд. «Московский рабочий», М., 1963.
Трублицкий М. Н., Контрольные работы на перфокартах, «Математика в школе», 1963, № 5.
Фадеев Д. К., Соминский И. С., Алгебра, изд. «Советская наука», М., 1964.
Хабиб Р. А., О математических диктантах, «Математика в школе», 1961, № 4.
Чистяков И. И., Методика алгебры, Учпедгиз, М., 1934.
Schaaf W. L. Basic concepts of elementary mathematics.
Шкарин А. Б., Федяков А. М., Сандлер Б. Г., Алгебраические задачи в технике, Учпедгиз, М., 1962.
Шрамко О. С., О преподавании математики в V—VI классах, «Математика в школе», 1962, № 3.
Штейнгауз Г., Сто задач, Физматгиз, М., 1959 (перевод с польского).
Юнг В. А., Как преподавать математику, М.—Пг., 1923.
Van Engen H., Hartung M. L. and other. Seeiung through mathematics. Chicago.
Стройк Д. Я., Краткий очерк истории математики, изд. «Наука», М., 1965.
Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж., Введение в конечную математику, изд. «Мир», М., 1965.

СОДЕРЖАНИЕ

Константин Сергеевич Барыбин

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ АЛГЕБРЫ

Редактор *А. А. Свечников.* Художник *И. А. Тарасов.* Художественный редактор *В. С. Эрденко.* Технический редактор *В. Ф. Егорова.* Корректор *Т. Н. Смирнова.*

Сдано в набор 6/II 1965 г. Подписано к печати 2/VII 1965 г. $60\times90^1/_{16}$. Печ. л. 21,5. Уч.-изд. л. 18,8. Тираж 112000 экз. (Пл. 1965 г. № 206.) А 10442. Заказ № 241.

Издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по печати. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по печати, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена без переплета 51 к., переплет 10 к.