А. П. КИСЕЛЁВ

ГЕОМЕТРИЯ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СТЕРЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК ДЛЯ IX—X КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Под редакцией и с дополнением проф. Н. А. ГЛАГОЛЕВА

Утверждён Министерством просвещения РСФСР

ИЗДАНИЕ ДВАДЦАТЬ СЕДЬМОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва — 1966

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Вторая часть учебника геометрии А. П. Киселёва — стереометрия — подверглась переработке в том же направлении, что и первая часть книги (планиметрия), а именно в направлении приспособления к программам по геометрии средней школы, в направлении учёта пожеланий компетентных органов и учреждений, высказавшихся относительно структуры и содержания современного учебника геометрии (М. П., группа математики Академии наук, Московское математическое общество, Научно-исследовательский институт средней школы) и, наконец, в направлении учёта современного научного состояния вопросов, излагаемых в курсе элементарной геометрии.

Наиболее существенными моментами в переработке 2-й части являются следующие: перестановка порядка изложения вопросов о перпендикулярности и параллельности прямых и плоскостей в пространстве, что дало возможность значительно упростить доказательство отдельных теорем; сокращение числа теорем о параллельных прямых и плоскостях. При этом второстепенные теоремы, на которые нет ссылок в дальнейшем тексте книги и которые легко могут быть доказаны самими учащимися, перенесены в отдел упражнений; теоремы, утверждающие возможность выполнить то или иное построение, изложены в форме задач на построение (решённых в тексте). Всё это позволило выделить главнейшие моменты во взаимоотношениях параллельности и перпендикулярности в пространстве и сделать этот отдел геометрии более обозримым и более легко воспринимаемым.

Введены задачи на построение в пространстве. Уточнено и несколько упрощено изложение теории измерения объёмов аналогично тому, как это было сделано в первой части для измерения площадей.

Несколько сокращена глава об ортогональных проекциях фигур, и в отдельных местах изложение упрощено и детализировано.

Введены элементы симметрии в пространстве, упрощены и более детально разъяснены отдельные вопросы в статье об аксиомах геометрии за счёт частичного её сокращения.

Моими дополнениями в книге являются следующие параграфы: Задачи на построение в пространстве (§ 6, 7, 19—22, 35—37); Упражнения к главе I (стр. 25); О симметрии в пространстве (§ 99—104); Об ортогональных проекциях плоских фигур (§ 60—66); Построение правильных многогранников (§ 98); Об аксиомах геометрии (дополнение).

Н. Глаголев

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Предварительные замечания

1. В стереометрии изучаются геометрические тела и пространственные фигуры, не все точки которых лежат в одной плоскости. Пространственные фигуры изображаются на чертеже при помощи рисунков, которые производят на глаз приблизительно такое же впечатление, как и сама фигура. Эти рисунки выполняются по определённым правилам, основанным на геометрических свойствах фигур.

Один из способов изображения пространственных фигур на плоскости будет указан в дальнейшем (§ 54—66).

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

2. Изображение плоскости. В обыденной жизни многие предметы, поверхность которых напоминает геометрическую плоскость, имеют форму прямоугольника: переплёт книги, оконное стекло, поверхность письменного стола и т. п. При этом если смотреть на эти предметы под углом и с большего расстояния, то они представляются нам имеющими форму параллелограмма. Поэтому принято изображать плоскость на чертеже в виде параллелограмма[1]. Эту плоскость обычно обозначают одной буквой, например „плоскость M" (черт. 1).

Черт. 1.

3. Основные свойства плоскости. Укажем следующие свойства плоскости, которые принимаются без доказательства, т. е. являются аксиомами:

1) *Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и каждая точка этой прямой принадлежит плоскости.*

2) *Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.*

---

[1] Наряду с указанным изображением плоскости возможно и такое, как на чертежах 15—17 и др. (*Прим. ред.*)

3) *Через всякие три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.*

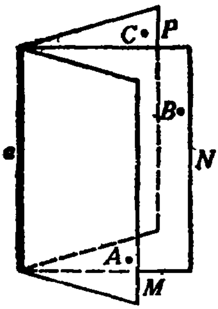
4. **Следствия.** Из последнего предложения можно вывести следствия:

1) *Через прямую и точку вне её можно провести плоскость (и только одну).* Действительно, точка вне прямой вместе с какими-нибудь двумя точками этой прямой составляют три точки, через которые можно провести плоскость (и притом одну).

2) *Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость (и только одну).* Действительно, взяв точку пересечения и ещё по одной точке на каждой прямой, мы будем иметь три точки, через которые можно провести плоскость (и притом одну).

3) *Через две параллельные прямые можно провести только одну плоскость.* Действительно, параллельные прямые, по определению, лежат в одной плоскости; эта плоскость единственная, так как через одну из параллельных и какую-нибудь точку другой можно провести не более одной плоскости.

5. **Вращение плоскости вокруг прямой.** ***Через каждую прямую в пространстве можно провести бесчисленное множество плоскостей.*** В самом деле, пусть дана прямая a (черт. 2). Возьмём какую-нибудь точку A вне её. Через точку A и прямую a проходит единственная плоскость (§ 4). Назовём её плоскостью M. Возьмём новую точку B вне плоскости M. Через точку B и прямую a в свою очередь проходит плоскость. Назовём её плоскостью N. Она не может совпадать с M, так как в ней лежит точка B, которая не принадлежит плоскости M. Мы можем далее взять в пространстве ещё новую точку C вне плоскостей M и N. Через точку C и прямую a проходит новая плоскость. Назовём её P. Она не совпадает ни с M, ни с N, так как в ней находится точка C, не принадлежащая ни плоскости M, ни плоскости N. Продолжая брать в пространстве всё новые и новые точки, мы будем таким путём получать всё новые и новые плоскости, проходящие через данную прямую a. Таких плоскостей будет **бесчисленное множество**. Все эти плоскости можно рассматривать как различные положения одной и той же плоскости, которая **вращается** вокруг прямой a.



Черт. 2.

Мы можем, следовательно, высказать ещё одно свойство плоскости: плоскость может вращаться вокруг всякой прямой, лежащей в этой плоскости.

6. **Задачи на построение в пространстве.** Все построения, которые делались в планиметрии, выполнялись в одной плоскости при помощи чертёжных инструментов. Для построений в пространстве чертёжные инструменты становятся уже непригодными, так как чертить фигуры в пространстве невозможно. Кроме того, при построениях в пространстве появляется ещё новый элемент—**плоскость**, построение которой

в пространстве нельзя выполнять столь простыми средствами, как построение прямой на плоскости.

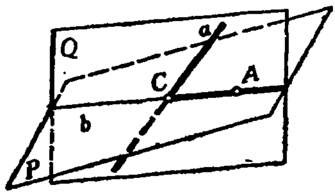
Поэтому при построениях в пространстве необходимо точно *определить, что значит выполнить то или иное построение* и, в частности, что значит построить плоскость в пространстве. Во всех построениях в пространстве мы будем предполагать:

1) что плоскость может быть построена, если найдены элементы, определяющие её положение в пространстве (§ 3 и 4), т. е. что мы умеем построить плоскость, проходящую через три данные точки, через прямую и точку вне её, через две пересекающиеся или две параллельные прямые;

2) что если даны две пересекающиеся плоскости, то дана и линия их пересечения, т. е. что мы умеем найти линию пересечения двух плоскостей;

3) что если в пространстве дана плоскость, то мы можем выполнять в ней все построения, которые выполнялись в планиметрии.

Выполнить какое-либо построение в пространстве — это значит свести его к конечному числу только что указанных основных построений. При помощи этих основных задач можно решать и задачи более сложные.



Черт. 3.

В этих предложениях и решаются задачи на построение в стереометрии.

7. Пример задачи на построение в пространстве. Задача. *Найти точку пересечения данной прямой a* (черт. 3) *с данной плоскостью P.* Возьмём на плоскости P какую-либо точку A. Через точку A и прямую a проводим плоскость Q. Она пересекает плоскость P по некоторой прямой b. В плоскости Q находим точку C пересечения прямых a и b. Эта точка и будет искомой. Если прямые a и b окажутся параллельными, то задача не будет иметь решения.

II. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

Параллельные прямые

8. Предварительное замечание. Две прямые могут быть расположены в пространстве так, что через них нельзя провести плоскость. Возьмём, например (черт. 4), две такие прямые AB и DE, из которых одна пересекает некоторую плоскость P, а другая лежит на ней, но не проходит через точку (C) пересечения первой прямой и плоскости P. Через такие две прямые нельзя провести плоскость, потому что в противном случае через прямую DE и точку C проходили бы две различные плоскости:

Черт 4.