А. П. КИСЕЛЁВ

ГЕОМЕТРИЯ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СТЕРЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК ДЛЯ IX—X КЛАССОВ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Под редакцией и с дополнением
проф. Н. А. ГЛАГОЛЕВА

Утверждён
Министерством просвещения РСФСР

ИЗДАНИЕ ДВАДЦАТЬ СЕДЬМОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва — 1966

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Вторая часть учебника геометрии А. П. Киселёва — стереометрия — подверглась переработке в том же направлении, что и первая часть книги (планиметрия), а именно в направлении приспособления к программам по геометрии средней школы, в направлении учёта пожеланий компетентных органов и учреждений, высказавшихся относительно структуры и содержания современного учебника геометрии (М. П., группа математики Академии наук, Московское математическое общество, Научно-исследовательский институт средней школы) и, наконец, в направлении учёта современного научного состояния вопросов, излагаемых в курсе элементарной геометрии.

Наиболее существенными моментами в переработке 2-й части являются следующие: перестановка порядка изложения вопросов о перпендикулярности и параллельности прямых и плоскостей в пространстве, что дало возможность значительно упростить доказательство отдельных теорем; сокращение числа теорем о параллельных прямых и плоскостях. При этом второстепенные теоремы, на которые нет ссылок в дальнейшем тексте книги и которые легко могут быть доказаны самими учащимися, перенесены в отдел упражнений; теоремы, утверждающие возможность выполнить то или иное построение, изложены в форме задач на построение (решённых в тексте). Всё это позволило выделить главнейшие моменты во взаимоотношениях параллельности и перпендикулярности в пространстве и сделать этот отдел геометрии более обозримым и более легко воспринимаемым.

Введены задачи на построение в пространстве. Уточнено и несколько упрощено изложение теории измерения объёмов аналогично тому, как это было сделано в первой части для измерения площадей.

Несколько сокращена глава об ортогональных проекциях фигур, и в отдельных местах изложение упрощено и детализировано.

Введены элементы симметрии в пространстве, упрощены и более детально разъяснены отдельные вопросы в статье об аксиомах геометрии за счёт частичного её сокращения.

Моими дополнениями в книге являются следующие параграфы: Задачи на построение в пространстве (§ 6, 7, 19—22, 35—37); Упражнения к главе I (стр. 25); О симметрии в пространстве (§ 99—104); Об ортогональных проекциях плоских фигур (§ 60—66); Построение правильных многогранников (§ 98); Об аксиомах геометрии (дополнение).

Н. Глаголев

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Предварительные замечания

1. В стереометрии изучаются геометрические тела и пространственные фигуры, не все точки которых лежат в одной плоскости. Пространственные фигуры изображаются на чертеже при помощи рисунков, которые производят на глаз приблизительно такое же впечатление, как и сама фигура. Эти рисунки выполняются по определённым правилам, основанным на геометрических свойствах фигур.

Один из способов изображения пространственных фигур на плоскости будет указан в дальнейшем (§ 54—66).

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

2. Изображение плоскости. В обыденной жизни многие предметы, поверхность которых напоминает геометрическую плоскость, имеют форму прямоугольника: переплёт книги, оконное стекло, поверхность письменного стола и т. п. При этом если смотреть на эти предметы под углом и с большего расстояния, то они представляются нам имеющими форму параллелограмма. Поэтому принято изображать плоскость на чертеже в виде параллелограмма[1]. Эту плоскость обычно обозначают одной буквой, например „плоскость M“ (черт. 1).

Черт. 1.

3. Основные свойства плоскости. Укажем следующие свойства плоскости, которые принимаются без доказательства, т. е. являются аксиомами:

1) *Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и каждая точка этой прямой принадлежит плоскости.*

2) *Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.*

---

[1] Наряду с указанным изображением плоскости возможно и такое, как на чертежах 15—17 и др. (*Прим. ред.*)

3) *Через всякие три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.*

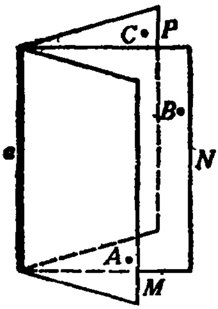
4. Следствия. Из последнего предложения можно вывести следствия:

1) *Через прямую и точку вне её можно провести плоскость (и только одну).* Действительно, точка вне прямой вместе с какими-нибудь двумя точками этой прямой составляют три точки, через которые можно провести плоскость (и притом одну).

2) *Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость (и только одну).* Действительно, взяв точку пересечения и ещё по одной точке на каждой прямой, мы будем иметь три точки, через которые можно провести плоскость (и притом одну).

3) *Через две параллельные прямые можно провести только одну плоскость.* Действительно, параллельные прямые, по определению, лежат в одной плоскости; эта плоскость единственная, так как через одну из параллельных и какую-нибудь точку другой можно провести не более одной плоскости.

5. Вращение плоскости вокруг прямой. ***Через каждую прямую в пространстве можно провести бесчисленное множество плоскостей.*** В самом деле, пусть дана прямая a (черт. 2). Возьмём какую-нибудь точку A вне её. Через точку A и прямую a проходит единственная плоскость (§ 4). Назовём её плоскостью M. Возьмём новую точку B вне плоскости M. Через точку B и прямую a в свою очередь проходит плоскость. Назовём её плоскостью N. Она не может совпадать с M, так как в ней лежит точка B, которая не принадлежит плоскости M. Мы можем далее взять в пространстве ещё новую точку C вне плоскостей M и N. Через точку C и прямую a проходит новая плоскость. Назовём её P. Она не совпадает ни с M, ни с N, так как в ней находится точка C, не принадлежащая ни плоскости M, ни плоскости N. Продолжая брать в пространстве всё новые и новые точки, мы будем таким путём получать всё новые и новые плоскости, проходящие через данную прямую a. Таких плоскостей будет **бесчисленное множество.** Все эти плоскости можно рассматривать как различные положения одной и той же плоскости, которая **вращается** вокруг прямой a.



Черт. 2.

Мы можем, следовательно, высказать ещё одно свойство плоскости: плоскость может вращаться вокруг всякой прямой, лежащей в этой плоскости.

6. Задачи на построение в пространстве. Все построения, которые делались в планиметрии, выполнялись в одной плоскости при помощи чертёжных инструментов. Для построений в пространстве чертёжные инструменты становятся уже непригодными, так как чертить фигуры в пространстве невозможно. Кроме того, при построениях в пространстве появляется ещё новый элемент—**плоскость**, построение которой в пространстве нельзя выполнять столь простыми средствами, как построение прямой на плоскости.

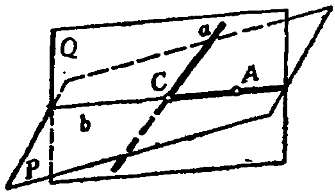
Поэтому при построениях в пространстве необходимо точно о п р е д е л и т ь, ч т о з н а ч и т в ы п о л н и т ь т о и л и и н о е п о с т р о е н и е и, в частности, что значит построить плоскость в пространстве. Во всех построениях в пространстве мы будем предполагать:

1) что плоскость может быть построена, если найдены элементы, определяющие её положение в пространстве (§ 3 и 4), т. е. что мы умеем построить плоскость, проходящую через три данные точки, через прямую и точку вне её, через две пересекающиеся или две параллельные прямые;

2) что если даны две пересекающиеся плоскости, то дана и линия их пересечения, т. е. что мы умеем найти линию пересечения двух плоскостей;

3) что если в пространстве дана плоскость, то мы можем выполнять в ней все построения, которые выполнялись в планиметрии.

В ы п о л н и т ь к а к о е - л и б о п о с т р о е н и е в п р о с т р а н с т в е — э т о з н а ч и т с в е с т и е г о к к о н е ч н о м у ч и с л у т о л ь к о ч т о у к а з а н н ы х о с н о в н ы х п о с т р о е н и й. При помощи этих основных задач можно решать и задачи более сложные.



Черт. 3.

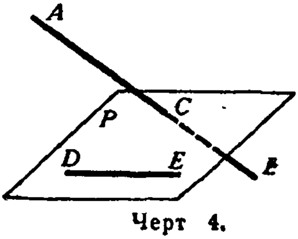
В этих предложениях и решаются задачи на построение в стереометрии.

7. Пример задачи на построение в пространстве. З а д а ч а. *Найти точку пересечения данной прямой a* (черт. 3) *с данной плоскостью P.* Возьмём на плоскости P какую-либо точку A. Через точку A и прямую a проводим плоскость Q. Она пересекает плоскость P по некоторой прямой b. В плоскости Q находим точку C пересечения прямых a и b. Эта точка и будет искомой. Если прямые a и b окажутся параллельными, то задача не будет иметь решения.

II. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

Параллельные прямые

8. Предварительное замечание. Две прямые могут быть расположены в пространстве так, что через них нельзя провести плоскость.



Черт 4.

Возьмём, например (черт. 4), две такие прямые AB и DE, из которых одна пересекает некоторую плоскость P, а другая лежит на ней, но не проходит через точку (C) пересечения первой прямой и плоскости P. Через такие две прямые нельзя провести плоскость, потому что в противном случае через прямую DE и точку C проходили бы две различные плоскости:

одна P, пересекающая прямую AB, и другая, содержащая её, а это невозможно (§ 3).

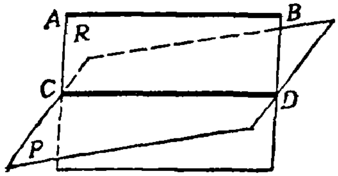
Две прямые, не лежащие в одной плоскости, конечно, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали; однако их не называют параллельными, оставляя это название для таких прямых, которые, находясь в одной плоскости, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются **скрещивающимися.**

Прямая и плоскость, параллельные между собой

9. **Определение.** Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, называются **параллельными,** если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

10. Теорема. ***Если прямая*** (AB, черт. 5) ***параллельна какой-нибудь прямой*** (CD), ***расположенной в плоскости*** (P), ***то она параллельна самой плоскости.***



Черт. 5.

Проведём через AB и CD плоскость R и предположим, что прямая AB где-нибудь пересекается с плоскостью P. Тогда точка пересечения, находясь на прямой AB, должна принадлежать также и плоскости R, на которой лежит прямая AB, в то же время точка пересечения, конечно, должна принадлежать и плоскости P. Значит, точка пересечения, находясь одновременно и на плоскости R и на плоскости P, должна лежать на прямой CD, по которой пересекаются эти плоскости; следовательно, прямая AB пересекается с прямой CD. Но это невозможно, так как по условию $AB \parallel CD$. Значит, нельзя допустить, чтобы прямая AB пересекалась с плоскостью P, и потому $AB \parallel P$.

11. Теорема. ***Если плоскость*** (R, черт. 5) ***проходит через прямую*** (AB), ***параллельную другой плоскости*** (P), ***и пересекает эту плоскость, то линия пересечения*** (CD) ***параллельна первой прямой*** (AB).

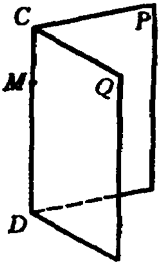
Действительно, во-первых, прямая CD лежит в одной плоскости с прямой AB, во-вторых, эта прямая не может пересечься с прямой AB, потому что в противном случае прямая AB пересекалась бы с плоскостью P, что невозможно.

12. Следствие 1. *Если прямая* (AB, черт. 6) *параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей* (P и Q), *то она параллельна линии их пересечения* (CD).

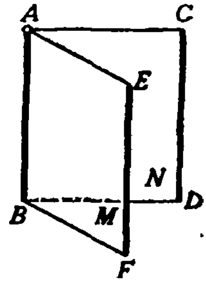
Проведём плоскость через AB и какую-нибудь точку M прямой CD. Эта плоскость должна пересечься с плоскостями P и Q по прямым, параллельным AB и проходящим через точку M. Но через точку M можно провести только одну прямую, параллельную AB; значит, две линии пересечения проведённой плоскости с плоскостями P и Q должны слиться в одну прямую. Эта прямая, находясь одновременно на плоскости P и на плоскости Q, должна совпадать с прямой CD, по которой плоскости P и Q пересекаются; значит, $CD \parallel AB$.

13. Следствие 2. ***Если две прямые*** (AB и CD, черт. 7) ***параллельны третьей прямой*** (EF), ***то они параллельны между собой.***

Проведём плоскость M через параллельные прямые AB и EF. Так как $CD \parallel EF$, то $CD \parallel M$ (§ 10).



Черт. 6.



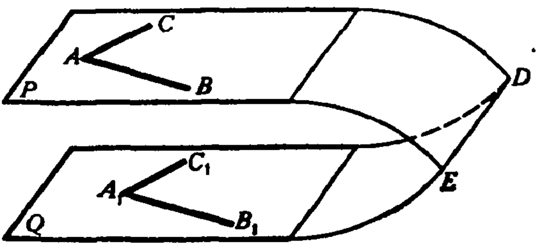
Черт. 7.

Проведём также плоскость N через CD и некоторую точку A прямой AB. Так как $EF \parallel CD$, то $EF \parallel N$. Значит, плоскость N должна пересечься с плоскостью M по прямой, параллельной EF (§ 11) и в то же время проходящей через точку A. Но в плоскости M через A проходит единственная прямая, параллельная EF, именно прямая AB. Следовательно, плоскость N пересекается с M по прямой AB; значит, $CD \parallel AB$.

Параллельные плоскости

14. Определение. Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

15. Теорема. ***Если две пересекающиеся прямые*** (AB и AC, черт. 8) ***одной плоскости*** (P) ***соответственно параллельны двум прямым*** (A_1B_1 и A_1C_1) ***другой плоскости*** (Q), ***то эти плоскости параллельны.***



Черт. 8

Прямые AB и AC параллельны плоскости Q (§ 10).

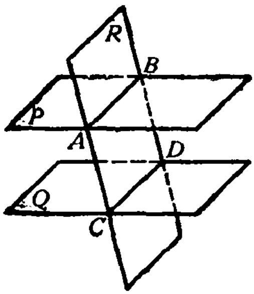
Допустим, что плоскости P и Q пересекаются по некоторой прямой DE (черт. 8). В таком случае $AB \parallel DE$ и $AC \parallel DE$ (§ 11).

Таким образом, в плоскости P через точку A проходят две прямые AB и AC, параллельные прямой DE, что невозможно. Значит, плоскости P и Q не пересекаются.

16. Теорема. ***Если две параллельные плоскости*** (P и Q, черт. 9) ***пересекаются третьей плоскостью*** (R), ***то линии пересечения*** (AB и CD) ***параллельны.***

Действительно, во-первых, прямые AB и CD находятся в одной плоскости (R); во-вторых, они не могут пересечься, так как в противном случае пересекались бы плоскости P и Q, что противоречит условию.

17. Теорема. ***Отрезки параллельных прямых*** (AC и BD, черт. 9), ***заключённые между параллельными плоскостями*** (P и Q), ***равны.***

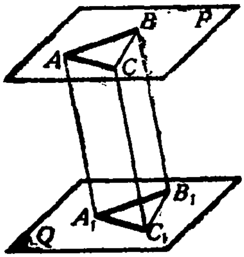


Черт. 9.

Через параллельные прямые AC и BD проведём плоскость R; она пересечёт плоскости P и Q по параллельным прямым AB и CD; следовательно, фигура $ABDC$ есть параллелограмм, и потому $AC = BD$.

18. Теорема. ***Два угла*** (BAC и $B_1A_1C_1$, черт. 10) ***с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны и лежат в параллельных плоскостях*** (P и Q).

Что плоскости P и Q параллельны, было доказано выше (§ 15); остаётся доказать, что углы A и A_1 равны.



Черт. 10.

Отложим на сторонах углов произвольные, но равные отрезки $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$ и проведём прямые AA_1, BB_1, CC_1, BC и B_1C_1. Так как отрезки AB и A_1B_1 равны и параллельны, то фигура ABB_1A_1 есть параллелограмм; поэтому отрезки AA_1 и BB_1 равны и параллельны. По той же причине равны и параллельны отрезки AA_1 и CC_1; следовательно, $BB_1 \parallel CC_1$ и $BB_1 = CC_1$. Поэтому $BC = B_1C_1$ и $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (по трём сторонам); значит, $\angle A = \angle A_1$.

Задачи на построение

19. *Через точку* (A, черт. 11), *расположенную вне данной прямой* (a), *в пространстве провести прямую, параллельную данной прямой* (a).

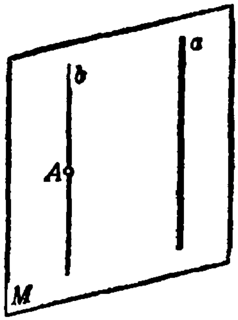
Решение. Через прямую a и точку A проводим плоскость M. В этой плоскости строим прямую b, параллельную прямой a.

Задача имеет единственное решение. В самом деле, искомая прямая должна лежать с прямой a в одной плоскости. В этой же плоскости должна находиться точка A, через которую проходит искомая прямая. Значит, эта плоскость должна совпадать с M. Но в плоскости M через точку A можно провести только одну прямую, параллельную прямой a.

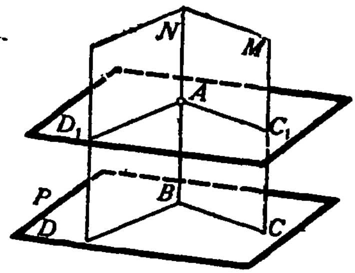
20. *Через данную точку* (A, черт. 12) *провести плоскость, параллельную данной плоскости* (P), *не проходящей через точку* A.

Решение. Проводим на плоскости P через какую-либо точку B две какие-либо прямые BC и BD. Построим две вспомогательные плоскости: плоскость M — через точку A и прямую BC и плоскость N — через точку A и прямую BD. Искомая плоскость, параллельная плоскости P, должна пересечь плоскость M по прямой, параллельной

BC, а плоскость N—по прямой, параллельной BD (§ 16). Отсюда вытекает такое построение: через точку A проводим в плоскости M прямую $AC_1 \| BC$, а в плоскости N прямую $AD_1 \| BD$.



Черт. 11.



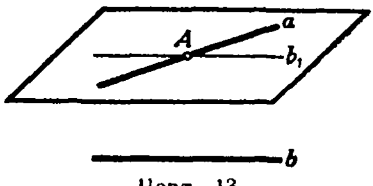
Черт. 12.

Через прямые AC_1 и AD_1 проводим плоскость Q. Она и будет искомой. В самом деле, стороны угла D_1AC_1, расположенного в плоскости Q, параллельны сторонам угла DBC, расположенного в плоскости P. Следовательно, $Q \| P$.

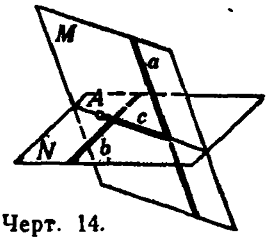
Так как в плоскости M через точку A можно провести лишь одну прямую, параллельную BC, а в плоскости N через точку A лишь одну прямую, параллельную BD, то задача имеет единственное решение. Следовательно, через каждую точку пространства можно провести единственную плоскость, параллельную данной плоскости.

21. *Через данную прямую* (a, черт. 13) *провести плоскость, параллельную другой данной прямой* (b).

Решение. 1-й случай. Прямые a и b не параллельны. Через какую-нибудь точку A прямой a проводим прямую b_1, параллельную b; через прямые a и b_1 проводим плоскость. Она и будет искомой (§ 10). Задача имеет в этом случае единственное решение.



Черт. 13.



Черт. 14.

2-й случай. Прямые a и b параллельны. В этом случае задача неопределённа: всякая плоскость, проходящая через прямую a, будет параллельна прямой b.

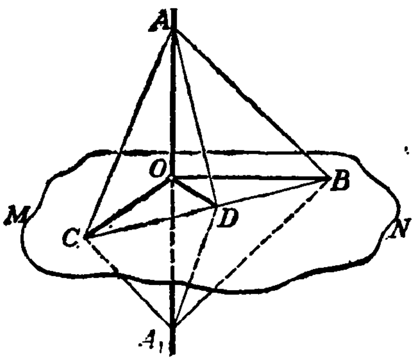
22. Пример более сложной задачи на построение. *Даны две скрещивающиеся прямые* (a и b, черт. 14) *и точка A, не лежащая ни на одной из данных прямых. Провести через точку A прямую, пересекающую обе данные прямые* (a и b).

Решение. Так как искомая прямая должна проходить через точку A и пересекать прямую a, то она должна лежать в плоскости, проходящей через прямую a и точку A (так как две её точки должны лежать в этой плоскости: точка A и точка пересечения с прямой a). Совершенно так же убеждаемся, что искомая прямая должна лежать в плоскости, проходящей через точку A и прямую b. Следовательно, она должна служить линией пересечения этих двух плоскостей. Отсюда такое построение. Через точку A и прямую a проводим плоскость M; через точку A и прямую b проводим плоскость N. Берём прямую c пересечения плоскостей M и N. Если прямая c не параллельна ни одной из данных прямых, то она пересечётся с каждой из данных прямых (так как с каждой из них она лежит в одной плоскости: a и c лежат в плоскости M, b и c — в плоскости N). Прямая c будет в этом случае искомой. Если же $a \| c$ или $b \| c$, то задача не имеет решения.

III. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННЫЕ К ПЛОСКОСТИ

Поставим задачу определить, в каком случае прямая может считаться перпендикулярной к плоскости. Докажем предварительно следующее предложение:

23. Теорема. ***Если прямая*** (AA_1, черт. 15), ***пересекающаяся с плоскостью*** (MN), ***перпендикулярна к каким-нибудь двум прямым*** (OB и OC), ***проведённым на этой плоскости через точку пересечения*** (O) ***данной прямой и плоскости, то она перпендикулярна и ко всякой третьей прямой*** (OD), ***проведённой на плоскости через ту же точку пересечения*** (O).



Черт. 15.

Отложим на прямой AA_1 произвольной длины, но равные отрезки OA и OA_1 и проведём на плоскости какую-нибудь прямую, которая пересекала бы три прямые, исходящие из точки O, в каких-нибудь точках C, D и B. Эти точки соединим с точками A и A_1. Мы получим тогда несколько треугольников. Рассмотрим их в такой последовательности.

Сначала возьмём треугольники ACB и A_1CB; они равны, так как у них CB — общая сторона, $AC = A_1C$, как наклонные к прямой AA_1, одинаково удалённые от основания O перпендикуляра OC; по той же причине $AB = A_1B$. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle ABC = \angle A_1BC$.

После этого перейдём к треугольникам ADB и A_1DB; они равны, так как у них DB — общая сторона, $AB = A_1B$ и $\angle ABD = \angle A_1BD$. Из равенства этих треугольников выводим, что $AD = A_1D$.

Теперь возьмём треугольники AOD и A_1OD; они равны, так как имеют соответственно равные стороны. Из их равенства выводим, что

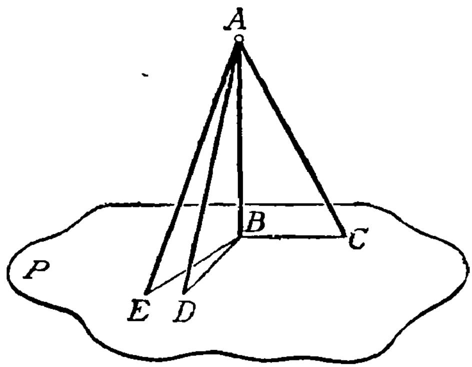
$\angle AOD = \angle A_1OD$; а так как эти углы смежные, то, следовательно, $AA_1 \perp OD$.

24. Определение. Прямая называется **перпендикулярной к плоскости,** если она, пересекаясь с этой плоскостью, образует прямой угол с каждой прямой, проведённой на плоскости через точку пересечения. В этом случае говорят также, что плоскость перпендикулярна к прямой.

Из предыдущей теоремы (§ 23) следует, что прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум прямым, лежащим в данной плоскости и проходящим через точку пересечения данной прямой и плоскости.

Прямая, пересекающая плоскость, но не перпендикулярная к ней, называется **наклонной** к этой плоскости. Точка пересечения прямой с плоскостью называется **основанием** перпендикуляра или наклонной.

25. Сравнительная длина перпендикуляра и наклонных [1]**.** Когда из одной точки A (черт. 16) проведены к плоскости перпендикуляр AB и наклонная AC, условимся называть **проекцией** наклонной на плоскость P отрезок BC, соединяющий основание перпендикуляра и основание наклонной. Таким образом, отрезок BC есть проекция наклонной AC, отрезок BD есть проекция наклонной AD и т. д.



Черт. 16.

26. Теорема. ***Если из одной и той же точки** (A, черт. 16), **взятой вне плоскости** (P), **проведены к этой плоскости перпендикуляр** (AB) **и какие-нибудь наклонные** (AC, AD, AE, ...), **то:***

1) ***две наклонные, имеющие равные проекции, равны;***

2) ***из двух наклонных та больше, проекция которой больше.***

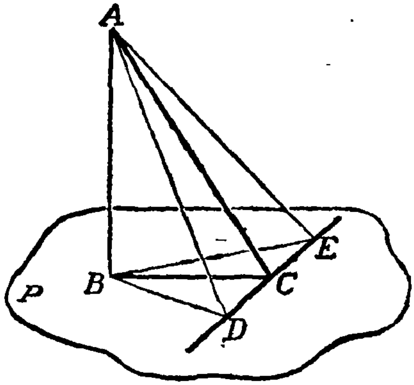
Вращая прямоугольные треугольники ABC и ABD вокруг катета AB, мы можем совместить их плоскости с плоскостью $\triangle ABE$. Тогда все наклонные будут лежать в одной плоскости с перпендикуляром, а все проекции расположатся на одной прямой. Таким образом, доказываемые теоремы приводятся к аналогичным теоремам планиметрии.

Замечание. Так как AB есть катет прямоугольного треугольника, а каждая из наклонных AC, AD, AE, ... есть гипотенуза, то **перпендикуляр AB меньше всякой наклонной;** значит, перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, есть наименьший из всех

[1] Для краткости термины „перпендикуляр" и „наклонная" употребляются вместо „отрезок перпендикуляра, ограниченный данной точкой и основанием перпендикуляра", и „отрезок наклонной, ограниченный данной точкой и основанием наклонной".

отрезков, соединяющих данную точку с любой точкой плоскости, и потому он принимается за меру **расстояния** точки A от плоскости P.

27. Обратные теоремы. ***Если из одной и той же точки, взятой вне плоскости, проведены перпендикуляр и какие-нибудь наклонные, то:*** 1) ***равные наклонные имеют равные проекции;*** 2) ***из двух проекций та больше, которая соответствует большей наклонной.***



Черт. 17.

Доказательство (от противного) предоставляем самим учащимся.

Приведём ещё следующую теорему о перпендикулярах, которая понадобится нам впоследствии.

28. Теорема. ***Прямая*** (DE, черт. 17), ***проведённая на плоскости*** (P) ***через основание наклонной*** (AC) ***перпендикулярно к её проекции*** (BC), ***перпендикулярна и к самой наклонной.***

Отложим произвольные, но равные отрезки CD и CE и соединим прямолинейными отрезками точки A и B с точками D и E. Тогда будем иметь: $BD = BE$, как наклонные к прямой DE, одинаково удалённые от основания C перпендикуляра BC; $AD = AE$, как наклонные к плоскости P, имеющие равные проекции BD и BE. Вследствие этого $\triangle ADE$ равнобедренный, и потому его медиана AC перпендикулярна к основанию DE.

Эта теорема носит название теоремы о трёх перпендикулярах. Действительно, в ней говорится о связи, соединяющей следующие три перпендикуляра: 1) AB к плоскости P, 2) BC к прямой DE и 3) AC к той же прямой DE.

29. Обратная теорема. ***Прямая*** (DE, черт. 17), ***проведённая на плоскости*** (P) ***через основание наклонной*** (AC) ***перпендикулярно к этой наклонной, перпендикулярна и к её проекции.***

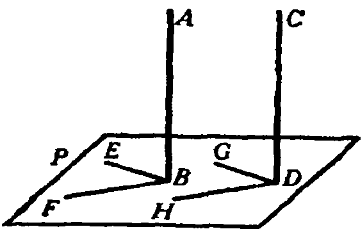
Сделаем те же построения, что и при доказательстве прямой теоремы. Отложим произвольные, но равные отрезки CD и CE и соединим прямолинейными отрезками точки A и B с точками D и E, тогда будем иметь: $AD = AE$, как наклонные к прямой DE, одинаково удалённые от основания C перпендикуляра AC; $BD = BE$, как проекции равных наклонных AD и AE. Вследствие этого $\triangle BDE$ равнобедренный, и потому его медиана BC перпендикулярна к основанию DE.

IV. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬЮ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬЮ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

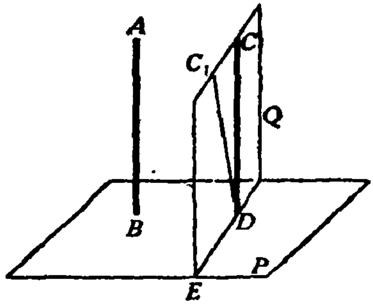
30. Предварительное замечание. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве и перпендикулярность прямой к плоскости находятся в некоторой зависимости. Именно наличие параллельности одних элементов влечёт за собой перпендикулярность других, и, обратно, из перпендикулярности одних элементов можно сделать заключение о параллельности других. Эта связь между параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей в пространстве выражается следующими теоремами.

31. Теорема. ***Если плоскость*** (P, черт. 18) ***перпендикулярна к одной из параллельных прямых*** (AB), ***то она перпендикулярна и к другой*** (CD).

Проведём через точку B на плоскости P две какие-нибудь прямые BE и BF, а через точку D проведём прямые DG и DH, соответственно параллельные прямым BE и BF. Тогда будем иметь: $\angle ABE = \angle CDG$ и $\angle ABF = \angle CDH$, как углы с параллельными сторонами. Но углы ABE и ABF прямые, так как $AB \perp P$, значит, углы CDG и CDH также прямые (§ 18). Следовательно, $CD \perp P$ (§ 24).



Черт. 18.



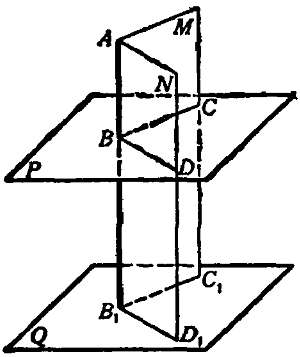
Черт. 19.

32. Обратная теорема. ***Если две прямые*** (AB и CD, черт. 19) ***перпендикулярны к одной и той же плоскости*** (P), ***то они параллельны.***

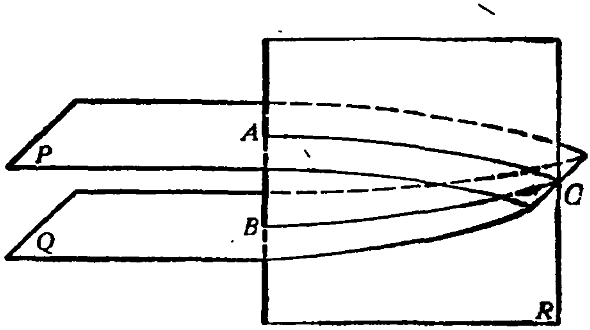
Предположим противное, т. е. что прямые AB и CD не параллельны. Проведём тогда через точку D прямую, параллельную AB. При нашем предположении это будет какая-нибудь прямая DC_1, не сливающаяся с DC. Согласно прямой теореме прямая DC_1 будет перпендикулярна к плоскости P. Проведём через CD и C_1D плоскость Q и возьмём линию её пересечения DE с плоскостью P. Так как (на основании предыдущей теоремы) $C_1D \perp P$, то $\angle C_1DB$ прямой, а так как по условию $CD \perp P$, то $\angle CDE$ также прямой. Таким образом, окажется, что в плоскости Q к прямой DE из одной её точки D восставлены два перпендикуляра DC и DC_1. Так как это невозможно, то нельзя допустить, чтобы прямые AB и CD были не параллельны.

33. Теорема. ***Если прямая*** (BB_1, черт. 20) ***перпендикулярна к одной из параллельных плоскостей*** (P), ***то она перпендикулярна и к другой*** (Q).

Проведём через прямую BB_1 какие-нибудь две плоскости M и N, каждая из которых пересекается с P и Q по параллельным прямым: одна — по параллельным прямым BC и B_1C_1, другая — по параллельным прямым BD и B_1D_1. Согласно условию прямая BB_1 перпендикулярна к прямым BC и BD; следовательно, она также перпендикулярна к параллельным им прямым B_1C_1 и B_1D_1, а потому перпендикулярна и к плоскости Q, на которой лежат прямые B_1C_1 и B_1D_1.



Черт. 20.



Черт. 21.

34. Обратная теорема. ***Если две плоскости*** (P и Q, черт. 21) ***перпендикулярны к одной и той же прямой*** (AB), ***то они параллельны.***

Предположим противное, т. е. что плоскости P и Q пересекаются. Возьмём на линии их пересечения какую-нибудь точку C и проведём плоскость R через C и прямую AB. Плоскость R пересечёт плоскости P и Q соответственно по прямым AC и BC. Так как $AB \perp P$, то $AB \perp AC$, и так как $AB \perp Q$, то $AB \perp BC$. Таким образом, в плоскости R мы будем иметь два перпендикуляра к прямой AB, проходящих через одну и ту же точку C, перпендикуляры AC и BC. Так как это невозможно, то предположение, что плоскости P и Q пересекаются, неверно. Значит, они параллельны.

Задачи на построение

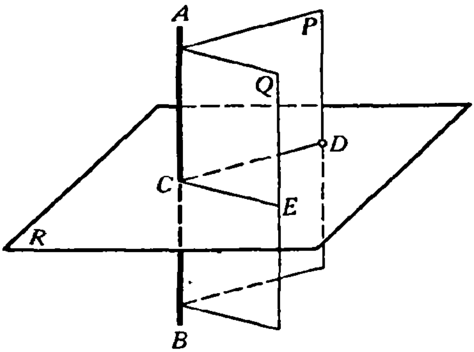
35. *Через данную точку (C) в пространстве провести плоскость, перпендикулярную к данной прямой (AB)* (черт. 22).

Решение. 1-й случай. Данная точка C лежит на прямой AB (черт. 22).

Проведём через прямую AB какие-нибудь две плоскости P и Q. Искомая плоскость должна пересекать эти плоскости по прямым, перпендикулярным к прямой AB (§ 24). Отсюда построение: через AB

проводим две произвольные плоскости P и Q. В каждой из этих плоскостей восставляем перпендикуляр к прямой AB в точке C (в плоскости P — перпендикуляр CD, в плоскости Q — перпендикуляр CE). Плоскость, проходящая через прямые CD и CE, есть искомая.

2-й случай. Данная точка D не лежит на прямой AB (черт. 22). Через точку D и прямую AB проводим плоскость P и в этой плоскости строим прямую DC, перпендикулярную к AB. Через прямую AB проводим произвольно вторую плоскость Q и в этой плоскости строим прямую CE, перпендикулярную к AB. Искомая плоскость должна пересечь плоскости P и Q по прямым, перпендикулярным к AB. Отсюда построение: через точку D проводим в плоскости P прямую DC, перпендикулярную к AB. Прямая DC пересечёт прямую AB в некоторой точке C.



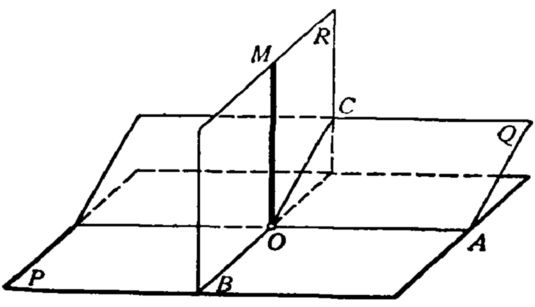
Черт. 22.

Через точку C проводим в плоскости Q прямую CE перпендикулярно к AB. Плоскость, проходящая через прямые CD и CE, — искомая.

Так как в каждой из плоскостей P и Q через данную точку можно провести лишь одну прямую, перпендикулярную к данной, то задача в обоих случаях имеет одно решение, т. е. через каждую точку в пространстве можно провести лишь одну плоскость, перпендикулярную к данной прямой.

36. *Через данную точку* (O) *пространства провести прямую, перпендикулярную к данной плоскости* (P).

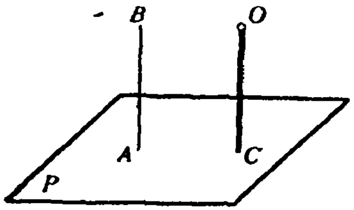
1-й случай. Точка O лежит на плоскости P (черт. 23). Проведём на плоскости P через точку O две какие-либо взаимно перпендикулярные прямые OA и OB. Проведём, далее, через прямую OA какую-либо новую плоскость Q и на этой плоскости Q построим прямую OC, перпендикулярную к OA. Через прямые OB и OC проведём новую плоскость R и построим в ней прямую OM, перпендикулярную к OB. Прямая OM и будет искомым перпендикуляром к плоскости P.



Черт. 23

Действительно, так как $OA \perp OB$ и $OA \perp OC$, то прямая AO перпендикулярна к плоскости R и, следовательно, $OA \perp OM$. Таким образом, мы видим, что $OM \perp OA$ и $OM \perp OB$; следовательно, OM перпендикулярна к плоскости P.

2-й случай. Точка O не лежит на плоскости P (черт. 24). Возьмём на плоскости P какую-нибудь точку A и выполним для неё предыдущее построение. Мы получим тогда прямую AB, перпендикулярную к плоскости P. После этого через точку O проводим прямую, параллельную AB. Эта прямая и будет искомой (§ 31).

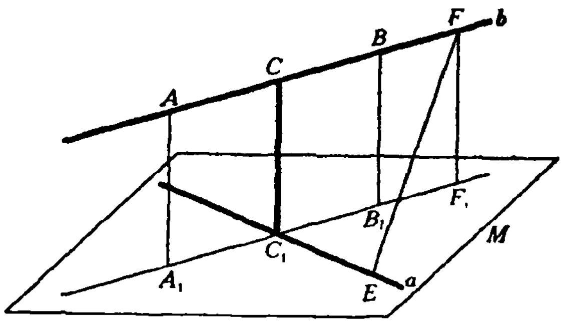


Черт. 24.

Задача в обоих случаях имеет одно решение. В самом деле, так как два перпендикуляра к одной и той же плоскости *параллельны*, то через одну и ту же точку O нельзя провести двух перпендикуляров к плоскости P. Следовательно, через каждую точку в пространстве можно провести одну и только одну прямую, перпендикулярную к данной плоскости.

37. Пример более сложной задачи. *Даны две скрещивающиеся прямые* (a и b, черт. 25). *Построить прямую, пересекающую обе данные прямые и перпендикулярную к ним обеим.*

Решение. Проведём через прямую a плоскость M, параллельную прямой b (§ 21). Из двух каких-нибудь точек прямой b опустим перпендикуляры AA_1 и BB_1 на плоскость M Соединим точки A_1 и B_1 отрезком прямой



Черт. 25

и найдём точку C_1 пересечения прямых A_1B_1 и a. Через точку C_1 проведём прямую, перпендикулярную к плоскости M. Предоставляем самим учащимся доказать, что эта прямая: 1) пересечётся с прямой b в некоторой точке C и 2) будет перпендикулярна как к прямой a, так и к прямой b.

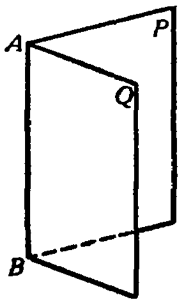
Прямая CC_1 будет, следовательно, искомой прямой.

Заметим, что отрезок CC_1 меньше всех других отрезков, которые можно получить, соединяя точки прямой a с точками прямой b. В самом деле, возьмём на прямой a какую-нибудь точку E и на прямой b какую-нибудь точку F, соединим эти точки отрезком прямой и докажем, что $EF > CC_1$. Опустим из точки F перпендикуляр FF_1 на плоскость M. Тогда будем иметь: $EF > FF_1$ (§ 26). Но $FF_1 = CC_1$, следовательно, $EF > CC_1$. На этом основании длина отрезка CC_1 называется кратчайшим расстоянием между данными прямыми a и b.

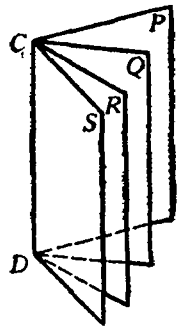
V. ДВУГРАННЫЕ УГЛЫ, УГОЛ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ, УГОЛ ДВУХ СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ, МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

Двугранные углы

38. Определения. Часть плоскости, лежащая по одну сторону от какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, называется **полуплоскостью**. Фигура, образованная двумя полуплоскостями (P и Q, черт. 26), исходящими из одной прямой (AB), называется **двугранным углом**. Прямая AB называется **ребром**, а полуплоскости P и Q — сторонами или **гранями** двугранного угла.



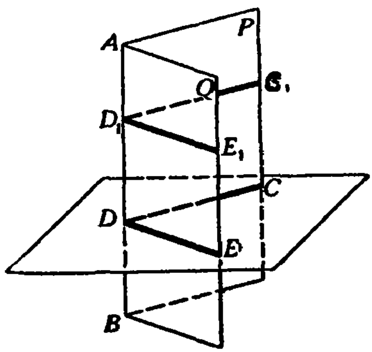
Черт. 26.



Черт. 27.

Такой угол обозначается обыкновенно двумя буквами, поставленными у его ребра (двугранный угол AB). Но если при одном ребре лежат несколько двугранных углов, то каждый из них обозначают четырьмя буквами, из которых две средние стоят при ребре, а две крайние — у граней (например, двугранный угол $SCDR$) (черт. 27).

Если из произвольной точки D ребра AB (черт. 28) проведём на каждой грани по перпендикуляру к ребру, то образованный ими угол CDE называется **линейным углом** двугранного угла.



Черт 28.

Величина линейного угла не зависит от положения его вершины на ребре. Так, линейные углы CDE и $C_1D_1E_1$ равны, потому что их стороны соответственно параллельны и одинаково направлены.

Плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру, так как она содержит две прямые, перпендикулярные к нему. Поэтому для получения линейного угла достаточно грани данного двугранного угла пересечь плоскостью, перпендикулярной к ребру, и рассмотреть получившийся в этой плоскости угол.

39. Равенство и неравенство двугранных углов. Два двугранных угла считаются **равными**, если они при вложении могут совместиться; в противном случае тот из двугранных углов считается меньшим, который составит часть другого угла.

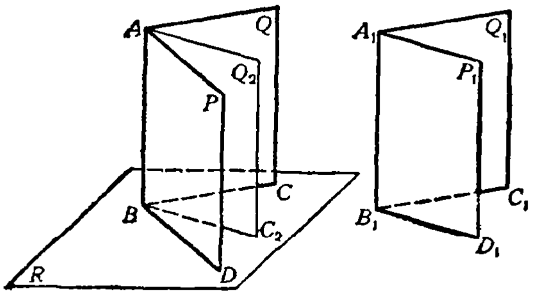
Подобно углам в планиметрии, двугранные углы могут быть **смежные, вертикальные** и пр.

Если два смежных двугранных угла равны между собой, то каждый из них называется **прямым двугранным углом.**

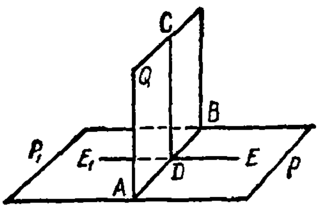
Теоремы. 1) ***Равным двугранным углам соответствуют равные линейные углы.***

2) ***Большему двугранному углу соответствует больший линейный угол.***

Пусть $PABQ$ и $P_1A_1B_1Q_1$ (черт. 29)—два двугранных угла. Вложим угол A_1B_1 в угол AB так, чтобы ребро A_1B_1 совпало с ребром AB и грань P_1 с гранью P. Тогда если эти двугранные углы равны, то грань Q_1 совпадёт с гранью Q; если же угол A_1B_1 меньше угла AB, то грань Q_1 займёт некоторое положение внутри двугранного угла, например Q_2.



Черт. 29.



Черт. 30.

Заметив это, возьмём на общем ребре какую-нибудь точку B и проведём через неё плоскость R, перпендикулярную к ребру. От пересечения этой плоскости с гранями двугранных углов получатся линейные углы. Ясно, что если двугранные углы совпадут, то у них окажется один и тот же линейный угол CBD; если же двугранные углы не совпадут, если, например, грань Q_1 займёт положение Q_2, то у большего двугранного угла окажется больший линейный угол (именно: $\angle CBD > \angle C_2BD$).

40. Обратные теоремы. 1) ***Равным линейным углам соответствуют равные двугранные углы.***

2) ***Большему линейному углу соответствует больший двугранный угол.***

Эти теоремы легко доказываются от противного.

41. Следствия. 1) *Прямому двугранному углу соответствует прямой линейный угол, и обратно.*

Пусть (черт. 30) двугранный угол $PABQ$ прямой. Это значит, что он равен смежному углу $QABP_1$. Но в таком случае линейные углы CDE и CDE_1 также равны; а так как они смежные, то каждый из них должен быть прямой. Обратно, если равны смежные линейные углы CDE и CDE_1, то равны и смежные двугранные углы, т. е. каждый из них должен быть прямой.

2) *Все прямые двугранные углы равны*, потому что у них равны линейные углы.

Подобным же образом легко доказать, что:

3) *Вертикальные двугранные углы равны.*

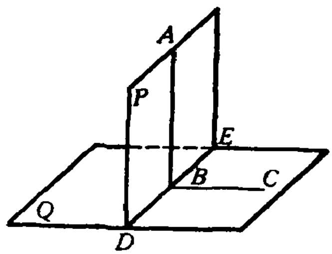
4) *Двугранные углы с соответственно параллельными и одинаково* (или противоположно) *направленными гранями равны.*

5) Если за единицу двугранных углов возьмём такой двугранный угол, который соответствует единице линейных углов, то можно сказать, что *двугранный угол измеряется его линейным углом.*

Перпендикулярные плоскости

42. Определение. Две плоскости называются **взаимно перпендикулярными**, если, пересекаясь, они образуют прямые двугранные углы.

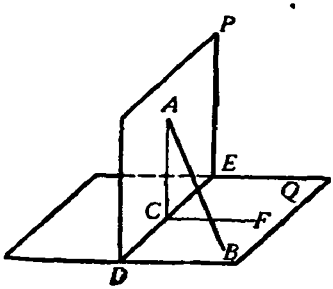
43. Теорема (выражающая признак перпендикулярности двух плоскостей). ***Если плоскость*** (P, черт. 31) ***проходит через перпендикуляр*** (AB) ***к другой плоскости*** (Q), ***то она перпендикулярна к этой плоскости.***



Черт. 31.

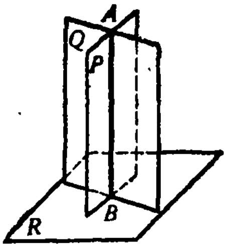
Пусть DE будет линия пересечения плоскостей P и Q. На плоскости Q проведём $BC \perp DE$. Тогда угол ABC будет линейным углом двугранного угла $PDEQ$. Так как прямая AB по условию перпендикулярна к Q, то $AB \perp BC$; значит, угол ABC прямой, а потому и двугранный угол прямой, т. е. плоскость P перпендикулярна к плоскости Q.

44. Теорема. ***Если две плоскости*** (P и Q, черт. 31) ***взаимно перпендикулярны и к одной из них*** (к Q) ***проведён перпендикуляр*** (AB), ***имеющий общую точку*** (A) ***с другой плоскостью*** (P), ***то этот перпендикуляр весь лежит в этой плоскости*** (P).



Черт. 32.

Предположим, что перпендикуляр AB не лежит в плоскости P (как изображено на черт. 32). Пусть DE будет линия пересечения плоскостей P и Q. На плоскости P проведём прямую $AC \perp DE$, а на плоскости Q проведём прямую $CF \perp DE$. Тогда угол ACF, как линейный угол прямого двугранного угла, будет прямой. Поэтому линия AC, образуя прямые углы с DE и CF, будет перпендикуляром к плоскости Q. Мы будем иметь тогда два перпендикуляра, опущенные из одной и той же точки A на



Черт. 33.

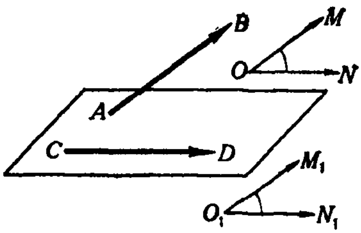
плоскость Q, именно AB и AC. Так как это невозможно (§ 36), то допущение неверно; значит, перпендикуляр AB лежит в плоскости P.

45. Следствие. *Линия пересечения* AB (черт. 33) *двух плоскостей* (P и Q), *перпендикулярных к третьей плоскости* (R), *есть перпендикуляр к этой плоскости.*

Действительно, если через какую-нибудь точку A линии пересечения плоскостей P и Q проведём перпендикуляр к плоскости R, то этот перпендикуляр согласно предыдущей теореме должен лежать и в плоскости Q, и в плоскости P, значит, он сольётся с AB.

Угол двух скрещивающихся прямых

46. Определение. Углом двух скрещивающихся прямых (AB и CD, черт. 34), для которых дано положение и направление, называется угол (MON), который получится, если из произвольной точки пространства (O) проведём полупрямые (OM и ON), соответственно параллельные данным прямым (AB и CD) и одинаково с ними направленные.



Черт. 34.

Величина этого угла не зависит от положения точки O, так как если построим указанным путём угол $M_1O_1N_1$ с вершиной в какой-нибудь другой точке O_1, то $\angle MON = \angle M_1O_1N_1$, потому что эти углы имеют соответственно параллельные и одинаково направленные стороны.

Угол, образуемый прямой с плоскостью

47. Проекция точки и прямой на плоскость. Мы говорили ранее (§ 25), что когда из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонная, то проекцией этой наклонной на плоскость называется отрезок, соединяющий основание перпендикуляра с основанием наклонной. Дадим теперь более общее определение проекции.

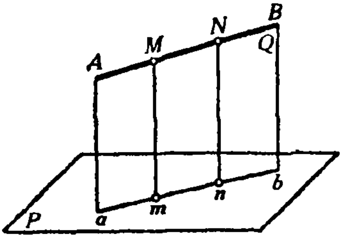
1) *Ортогональной (или прямоугольной) проекцией какой-нибудь точки на данную плоскость* (например, точки M на плоскость P, черт. 35) *называется основание* (m) *перпендикуляра, опущенного на эту плоскость из взятой точки.*

2) *Ортогональной проекцией какой-нибудь линии на плоскость называется геометрическое место проекций всех точек этой линии.*

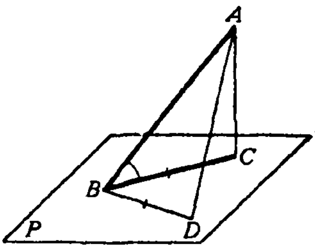
В частности, если проектируемая линия есть прямая (например, AB, черт. 35), не перпендикулярная к плоскости (P), то проекция её на эту плоскость есть также прямая. В самом деле, если мы через прямую AB и перпендикуляр Mm, опущенный на плоскость проекций из какой-нибудь одной точки M этой прямой, проведём плоскость Q, то эта плоскость должна быть перпендикулярна к плоскости P; поэтому перпендикуляр, опущенный на плоскость P из любой точки прямой AB (например, из точки N), должен лежать в этой плоскости Q (§ 44) и, следовательно, проекции всех точек прямой AB должны лежать на прямой ab, по которой пересекаются плоскости P и Q. Обратно, всякая точка этой прямой ab есть проекция какой-нибудь точки прямой AB, так как перпендикуляр, восставленный из любой точки прямой ab, лежит на плоскости Q и, следовательно, пересекается с AB в некоторой точке. Таким образом, прямая ab представляет собой геометрическое место проекций всех точек данной прямой AB и, следовательно, есть её проекция.

Для краткости речи вместо „ортогональная проекция“ мы будем говорить просто „проекция“.

48. Угол прямой с плоскостью. *Углом прямой* (AB, черт. 36) *с плоскостью* (P) в том случае, когда прямая наклонна к плоскости,



Черт. 35.



Черт. 36.

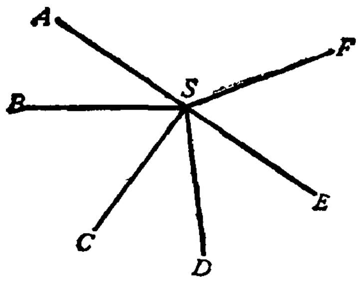
называется *острый угол* (ABC), *составленный этой прямой с её проекцией на плоскость.*

Угол этот обладает тем свойством, что он есть наименьший из всех углов, которые наклонная образует с прямыми, проведёнными на плоскости P через основание наклонной. Докажем, например, что угол ABC меньше угла ABD. Для этого отложим отрезок $BD = BC$ и соединим D с A. У треугольников ABC и ABD две стороны одного равны соответственно двум сторонам другого, но третьи стороны не равны, а именно: $AD > AC$ (§ 26). Вследствие этого угол ABD больше угла ABC.

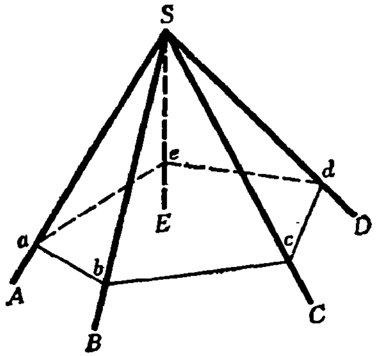
Многогранные углы

49. Определения. Возьмём несколько углов (черт. 37): ASB, BSC, CSD, которые, примыкая последовательно один к другому, расположены в одной плоскости вокруг общей вершины S. Повернём плоскость угла ASB вокруг общей стороны SB так, чтобы эта плоскость составила некоторый двугранный угол с плоскостью BSC. Затем, не изменяя получившегося двугранного угла, повернём его вокруг прямой SC

так, чтобы плоскость BSC составила некоторый двугранный угол с плоскостью CSD. Продолжим такое последовательное вращение вокруг каждой общей стороны. Если при этом последняя сторона SF совместится с первой стороной SA, то образуется фигура (черт. 38), которая называется **многогранным углом.** Углы ASB, BSC, ... называются **плоскими углами** или **гранями,** стороны их SA, SB, ... называются



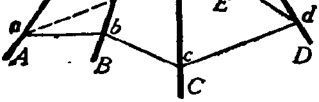
Черт. 37.



Черт. 38.

рёбрами, а общая вершина S — **вершиной** многогранного угла. Каждое ребро является вместе с тем ребром некоторого двугранного угла; поэтому в многогранном угле столько двугранных углов и столько плоских, сколько в нём всех рёбер. Наименьшее число граней в многогранном угле — три; такой угол называется **трёхгранным.** Могут быть углы четырёхгранные, пятигранные и т. д.

Многогранный угол обозначается или одной буквой S, поставленной у вершины, или же рядом букв $SABCDE$, из которых первая обозначает вершину, а прочие — рёбра по порядку их расположения.



Черт. 39.

Многогранный угол называется **выпуклым,** если он весь расположен по одну сторону от плоскости каждой из его граней, неограниченно продолженной. Таков, например, угол, изображённый на чертеже 38. Наоборот, угол на чертеже 39 нельзя назвать выпуклым, так как он расположен по обе стороны от грани ASB или от грани BSC.

Если все грани многогранного угла пересечём плоскостью, то в сечении образуется многоугольник ($abcde$). В выпуклом многогранном угле этот многоугольник тоже выпуклый.

Мы будем рассматривать только выпуклые многогранные углы.

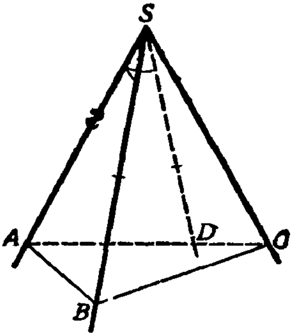
50. Теорема. ***В трёхгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов.***

Пусть в трёхгранном угле $SABC$ (черт. 40) наибольший из плоских углов есть угол ASC. Отложим на этом угле угол ASD, равный углу ASB, и проведём какую-нибудь прямую AC, пересекающую SD в некоторой точке D. Отложим $SB = SD$.

Соединив B с A и C, получим $\triangle ABC$, в котором

$$AD + DC < AB + BC.$$

Треугольники ASD и ASB равны, так как они содержат по равному углу, заключённому между равными сторонами; следовательно, $AD = AB$. Поэтому, если в выведенном неравенстве отбросить равные слагаемые AD и AB, получим, что $DC < BC$. Теперь замечаем, что у треугольников SCD и SCB две стороны одного равны двум сторонам другого, а третьи стороны не равны; в таком случае против большей из этих сторон лежит больший угол; значит,



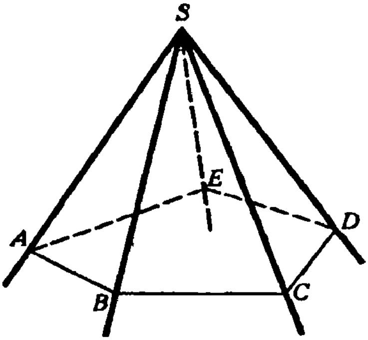
Черт. 40.

$$\angle CSD < \angle CSB.$$

Прибавив к левой части этого неравенства угол ASD, а к правой равный ему угол ASB, получим то неравенство, которое требовалось доказать:

$$\angle ASC < \angle CSB + \angle ASB.$$

Мы доказали, что даже наибольший плоский угол меньше суммы двух других углов. Значит, теорема доказана.



Черт. 41.

Следствие. Отнимем от обеих частей последнего неравенства по углу ASB или по углу CSB; получим:

$$\angle ASC - \angle ASB < \angle CSB;$$
$$\angle ASC - \angle CSB < \angle ASB.$$

Рассматривая эти неравенства справа налево и приняв во внимание, что угол ASC как наибольший из трёх углов больше разности двух других углов, мы приходим к заключению, что в трёхгранном угле каждый плоский угол больше разности двух других углов.

51. Теорема. ***В выпуклом многогранном угле сумма всех плоских углов меньше 4d.***

Пересечём грани (черт. 41) выпуклого угла $SABCDE$ какой-нибудь плоскостью; от этого в сечении получим выпуклый n-угольник $ABCDE$.

Применяя теорему предыдущего параграфа к каждому из трёхгранных углов, вершины которых находятся в точках A, B, C, D и E, находим:

$$\angle ABC < \angle ABS + \angle SBC; \quad \angle BCD < \angle BCS + \angle SCD \text{ и т. д.}$$

Сложим почленно все эти неравенства. Тогда в левой части получим сумму всех углов многоугольника $ABCDE$, которая равна $2dn-4d$, а в правой — сумму углов треугольников ABS, SBC и т. д., кроме тех углов, которые лежат при вершине S. Обозначив сумму этих последних углов буквой x, мы получим после сложения:

$$2dn - 4d < 2dn - x.$$

Так как в разностях $2dn-4d$ и $2dn-x$ уменьшаемые одинаковы, то, чтобы первая разность была меньше второй, необходимо, чтобы вычитаемое $4d$ было больше вычитаемого x; значит, $4d > x$, т. е. $x < 4d$.

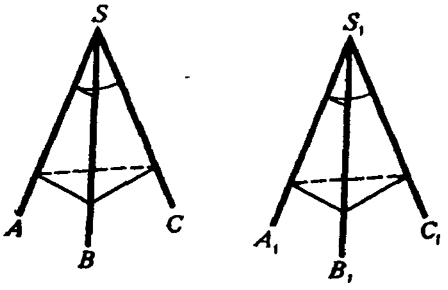
Простейшие случаи равенства трёхгранных углов

52. Теоремы. ***Трёхгранные углы равны, если они имеют:***

1) ***по равному двугранному углу, заключённому между двумя соответственно равными и одинаково расположенными плоскими углами,***

или 2) ***по равному плоскому углу, заключённому между двумя соответственно равными и одинаково расположенными двугранными углами.***

1) Пусть S и S_1 — два трёхгранных угла (черт. 42), у которых $\angle ASB = \angle A_1S_1B_1$, $\angle ASC = \angle A_1S_1C_1$ (и эти равные углы одинаково расположены) и двугранный угол AS равен двугранному углу A_1S_1. Вложим угол S_1 в угол S так, чтобы у них совпали точки S_1 и S, прямые S_1A_1 и SA и плоскости $A_1S_1B_1$ и ASB. Тогда ребро S_1B_1 пойдёт по SB (в силу равенства углов $A_1S_1B_1$ и ASB), плоскость $A_1S_1C_1$ пойдёт по ASC (по равенству двугранных углов) и ребро S_1C_1 пойдёт по ребру SC (в силу равенства углов $A_1S_1C_1$ и ASC). Таким образом, трёхгранные углы совместятся всеми своими рёбрами, т. е. они будут равны.

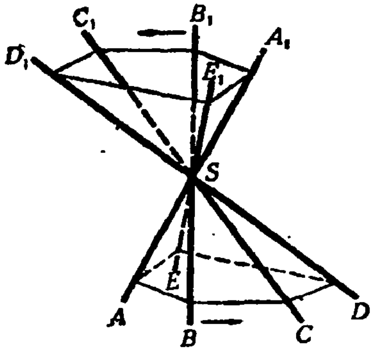


Черт. 42.

2) Второй признак, подобно первому, доказывается вложением.

53. Симметричные многогранные углы. Как известно, вертикальные углы равны, если речь идёт об углах, образованных прямыми или плоскостями. Посмотрим, справедливо ли это утверждение применительно к углам многогранным.

Продолжим (черт. 43) все рёбра угла $SABCDE$ за вершину S, тогда образуется другой многогранный угол $SA_1B_1C_1D_1E_1$, который можно назвать **вертикальным** по отношению к первому углу. Нетрудно видеть, что у обоих углов равны соответственно и плоские углы, и двугранные, но те и другие расположены в обратном порядке. Действительно, если мы вообразим наблюдателя, который смотрит извне многогранного угла на его вершину, то рёбра SA, SB, SC, SD, SE будут казаться ему расположенными в направлении против движения часовой стрелки, тогда как, смотря на угол $SA_1B_1C_1D_1E_1$, он видит рёбра SA_1, SB_1, ... расположенными по движению часовой стрелки.



Черт. 43.

Многогранные углы с соответственно равными плоскими и двугранными углами, но расположенными в обратном порядке вообще не могут совместиться при вложении; значит, они не равны. Такие углы называются **симметричными** (относительно вершины S). Подробнее о симметрии фигур в пространстве будет сказано ниже.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать теоремы:

1. Две плоскости, параллельные третьей, параллельны между собой.

2. Все прямые, параллельные данной плоскости и проходящие через одну точку, лежат в одной плоскости, параллельной данной.

3. Дана плоскость P и параллельная ей прямая a. Доказать, что все точки прямой a находятся на одинаковом расстоянии от плоскости P.

4. Доказать, что все точки одной из двух параллельных плоскостей находятся на одинаковом расстоянии от другой плоскости.

5. Две плоскости, проходящие через две данные параллельные прямые и не параллельные между собой, пересекаются по прямой, параллельной данным прямым.

6. Если прямая a параллельна какой-либо прямой b, лежащей на плоскости M, то всякая плоскость, проходящая через a, пересекает плоскость M по прямой, параллельной b, или по прямой b.

7. Если прямая a параллельна плоскости M, то всякая прямая, проходящая через точку, лежащую в плоскости M, и параллельная прямой a, лежит в плоскости M.

8. Если даны две скрещивающиеся прямые a и b и через первую проведена плоскость, параллельная второй, а через вторую — плоскость, параллельная первой, то эти две плоскости параллельны.

9. Все прямые, проходящие через какую-нибудь точку на прямой a и перпендикулярные к этой прямой, лежат в одной плоскости, перпендикулярной к a.

10. Если плоскость и прямая перпендикулярны к одной прямой, то они параллельны.

11. Если прямая a, параллельная плоскости M, пересекает прямую b, перпендикулярную этой плоскости, то прямые a и b перпендикулярны.

Задачи на построение

12. Через данную точку провести плоскость, параллельную двум данным прямым a и b.

13. Через данную точку провести прямую, параллельную данной плоскости и пересекающую данную прямую.

14. Построить прямую, пересекающую две данные прямые и параллельную третьей данной прямой.

15. Построить какую-либо прямую, пересекающую две данные прямые и параллельную данной плоскости (задача неопределённая).

16. Построить какую-либо прямую, пересекающую три данные прямые (задача неопределённая).

17. Через данную точку провести прямую, перпендикулярную двум данным скрещивающимся прямым.

18. Через данную прямую провести плоскость, перпендикулярную к данной плоскости.

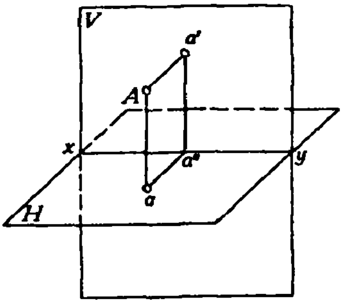
19. Даны плоскость M и прямая $a \| M$. Через прямую a провести плоскость, пересекающую плоскость M под данным углом.

20. Дана плоскость M и две точки A и B по одну сторону от неё. Найти на плоскости M такую точку C, чтобы сумма $AC + BC$ была наименьшей.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ, ОТРЕЗКА И ФИГУРЫ

54. Изображение точки при помощи проекции на две плоскости. Вообразим плоскости проекций, горизонтальную H и вертикальную V, пересекающиеся под прямым углом по прямой xy, которую мы будем называть осью **проекций** (черт. 44). Плоскости эти образуют четыре двугранных угла, из которых мы для простоты будем рассматривать только один, именно передний верхний. Положим, что внутри этого угла расположена какая-нибудь точка A. Опустим из неё перпендикуляры на плоскости H и V. Тогда мы получим на этих плоскостях проекции точки A, именно: a есть **горизонтальная** проекция, a' — **вертикальная** (проекции эти называются **ортогональными**, так как они получаются опусканием перпендикуляра на плоскость).



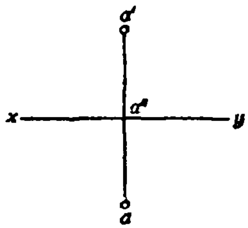
Черт. 44.

Обыкновенно каждая из этих проекций обозначается малой буквой одного наименования с той большой буквой, которая обозначает проектируемую точку, причём буква, обозначающая вертикальную проекцию, берётся со знаком наверху. Перпендикуляры, с помощью которых получаются проекции точки, называются **проектирующими перпендикулярами:** Aa — горизонтально-проектирующий перпендикуляр, Aa' — вертикально-проектирующий перпендикуляр.

Если через эти перпендикуляры проведём плоскость, то она должна быть перпендикулярной к плоскости H и к плоскости V (§ 43); следовательно, должна быть перпендикулярна и к оси xy (§ 45), и потому прямые aa'' и $a'a''$, по которым эта плоскость пересекается с плоскостями H и V, будут перпендикулярны к оси xy; следовательно, они образуют линейный угол двугранного угла, составленного плоскостями

H и *V*, и так как этот двугранный угол прямой, то и линейный его угол должен быть прямым. Таким образом, четырёхугольник $Aaa''a'$ будет прямоугольником, плоскость которого перпендикулярна к оси *xy*.

Заметив это, повернём горизонтальную полуплоскость *H* вокруг оси *xy* на 90° книзу; тогда она совпадёт с нижней вертикальной полуплоскостью, образуя с верхней вертикальной полуплоскостью одну вертикальную плоскость. При этом точки a'' и a' останутся на своих местах, а точка *a* займёт положение ниже оси *xy* и расположится на продолжении перпендикуляра $a'a''$ на расстоянии $a''a$, равном Aa'. Мы получим тогда развёрнутый чертёж 45, который впредь будем называть **эпюром**; чертёж этот состоит из прямой *xy*, изображающей ось проекций, и двух точек, расположенных на одном перпендикуляре к оси *xy*; нижняя точка есть горизонтальная проекция, а верхняя — вертикальная проекция точки *A*.

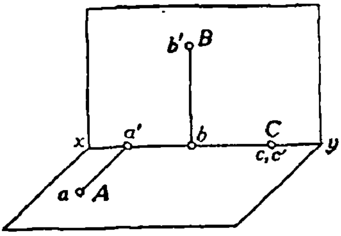


Черт. 45.

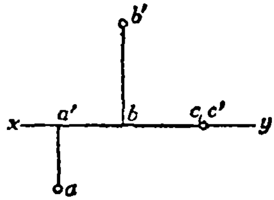
Конечно, всякой точке *A*, взятой внутри двугранного угла (черт. 44), соответствуют на эпюре две вполне определённые точки *a* и *a'*, расположенные на одном перпендикуляре к оси *xy*. Обратно, всяким двум точкам эпюра *a* и *a'*, расположенным на одном перпендикуляре к оси *xy* (точка *a* ниже *xy*, а точка *a'* выше *xy*), соответствует одна определённая точка *A* внутри двугранного угла. Чтобы получить эту точку, мы должны вообразить, что нижняя половина эпюра вращением вокруг оси *xy* снова повёрнута на 90° кверху и затем из точек *a* и *a'* восстановлены перпендикуляры к плоскостям образовавшегося двугранного угла; пересечение этих перпендикуляров и определит точку *A*.

55. Частные случаи. Из чертежей 46 и 47 видно, что если:

1) точка *A* лежит на горизонтальной плоскости, то её вертикальная проекция *a'* лежит на оси *xy*, а горизонтальная совпадает с самой точкой;



Черт. 46.

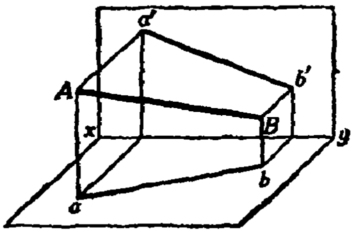


Черт. 47.

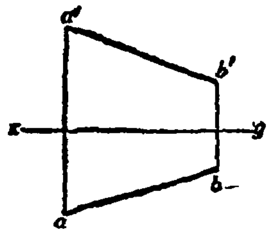
2) точка *B* расположена на вертикальной плоскости, то её горизонтальная проекция лежит на оси *xy*, а вертикальная совпадает с самой точкой;

3) точка *C* лежит на оси *xy*, то обе её проекции совпадают с самой точкой.

56. Изображение прямой. Мы уже видели (§ 47), что если проектируемая линия прямая, то и проекция её должна быть прямой линией. Значит, отрезок прямой, соединяющей точки A и B (черт. 48), изобразится на эпюре (черт. 49) отрезками ab и $a'b'$, из которых первый есть горизонтальная проекция, а второй—вертикальная проекция отрезка AB. Таким образом, чтобы получить проекцию неограниченной прямой на какую-нибудь плоскость, достаточно найти проекцию на эту плоскость двух её точек и через эти проекции провести прямую.

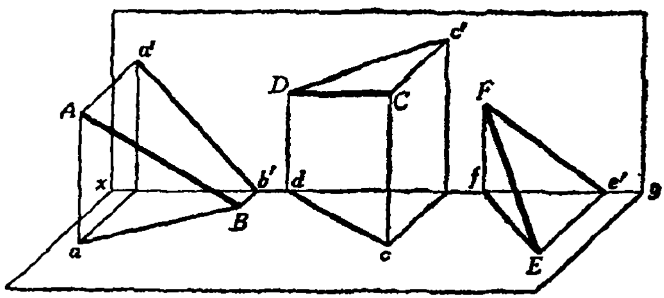


Черт. 48.



Черт. 49.

Проекции прямой можно получить ещё иначе, а именно: мы можем провести через эту прямую две плоскости: одну—перпендикулярную к горизонтальной плоскости проекций (она называется **горизонтально-проектирующей плоскостью**) и другую—перпендикулярную к вертикальной плоскости проекций (*она называется* **вертикально-проектирующей плоскостью**). Пересечение этих плоскостей с плоскостями проекции даст проекции ab и $a'b'$.



Черт. 50.

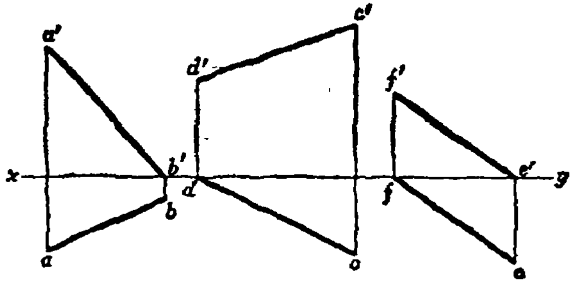
Заметим, что если отрезок прямой обозначен буквами AB, то его проекции обозначаются ab (горизонтальная) и $a'b'$ (вертикальная); если неограниченная прямая обозначена одной буквой, например K, то проекции её обозначаются тоже одной буквой (малой) k (горизонтальная) и k' (вертикальная).

57. Частные случаи. 1) Один конец отрезка AB лежит на горизонтальной плоскости.

2) Один конец отрезка CD лежит на вертикальной плоскости.

3) Отрезок EF упирается своими концами в плоскости проекций.

Эти три случая изображены в перспективном виде на чертеже 50 и проекциями на эпюре на чертеже 51.

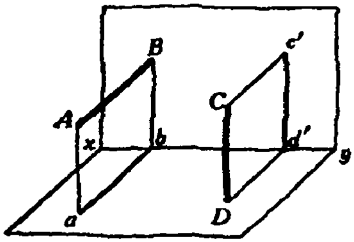


Черт. 51.

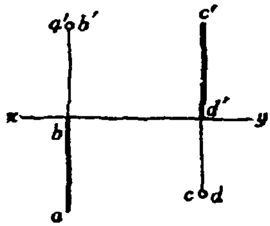
4) Отрезок AB перпендикулярен к вертикальной плоскости проекций и упирается в неё (черт. 52 и 53).

5) Отрезок CD перпендикулярен к горизонтальной плоскости и упирается в неё (черт. 52 и 53).

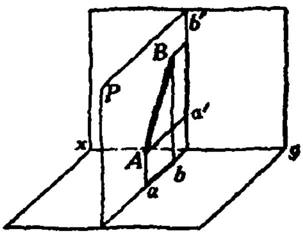
6) Отрезок AB лежит в некоторой плоскости P, перпендикулярной к оси xy. Тогда обе проектирующие плоскости совпадают с плоскостью P и потому на эпюре ab, $a'b'$ расположены на одном перпендикуляре к оси xy (черт. 54 и 55).



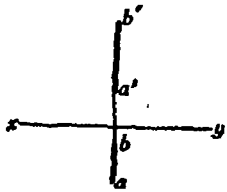
Черт. 52.



Черт. 53.



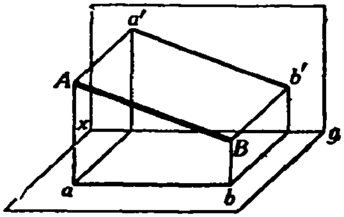
Черт. 54.



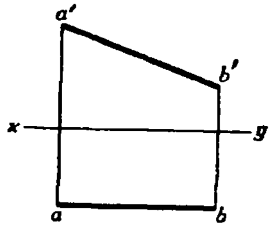
Черт. 55.

7) Отрезок AB параллелен вертикальной плоскости. Тогда его горизонтальная проекция параллельна оси xy (черт. 56 и 57), а вертикальная проекция равна и параллельна AB.

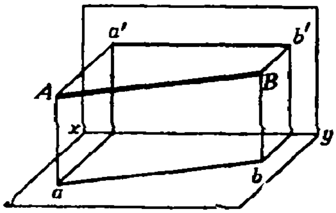
8) Отрезок AB параллелен горизонтальной плоскости (черт. 58 и 59); тогда его вертикальная проекция параллельна оси xy, а горизонтальная проекция равна и параллельна самому отрезку AB.



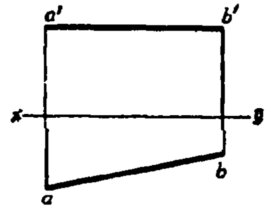
Черт. 56.



Черт. 57.

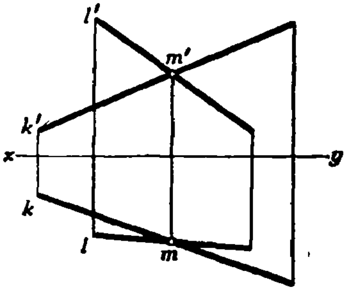


Черт. 58.

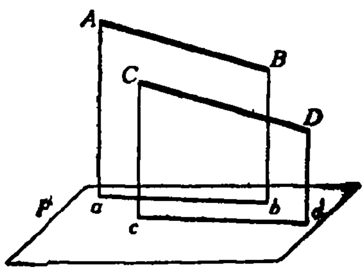


Черт. 59.

58. Проекция пересекающихся прямых. Очевидно, что если две прямые (K и L) пересекаются, то пересекаются также и их одноимённые проекции (черт. 60), причём точки пересечения m и m' лежат на одном перпендикуляре к оси xy. Обратно, если одноимённые проекции двух прямых пересекаются, причём точки пересечения лежат на одном перпендикуляре к оси xy, то и сами прямые пересекаются, так



Черт. 60.



Черт. 61.

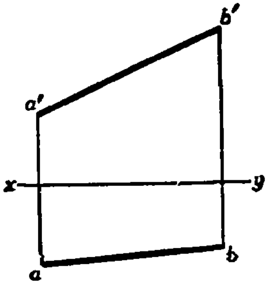
как точка (m, m'), определяемая точками пересечения проекций, принадлежит обеим прямым.

59. Проекции параллельных прямых параллельны. Действительно если $AB \| CD$ (черт. 61), то стороны углов BAa и DCc параллельны и потому проектирующие плоскости также параллельны (§ 15), а параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью (P) по параллельным прямым (ab и cd) (§ 16).

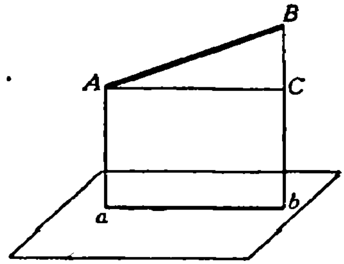
60. Изображениями прямых с помощью двух её проекций на две взаимно перпендикулярные плоскости можно пользоваться для решения различных задач, касающихся положения прямых в пространстве.

Рассмотрим несколько примеров таких задач.

Задача 1. *На эпюре даны проекции ab и $a'b'$ некоторого отрезка AB* (черт. 62). *Определить действительную величину этого отрезка.*



Черт. 62.



Черт. 63.

Первый способ решения. Чтобы легче было вообразить положение отрезка в пространстве, возьмём перспективное изображение отрезка AB и его горизонтальной проекции ab (черт. 63), т. е. такое изображение, которым мы пользовались в первой главе.

Четырёхугольник $ABba$ представляет собой прямоугольную трапецию с прямыми углами при точках a и b. Проведя в этой трапеции прямую AC, параллельную ab, получим прямоугольный треугольник ABC.

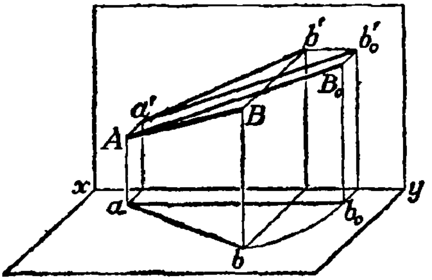
В этом треугольнике отрезок AB является гипотенузой, катет AC, очевидно, равен горизонтальной проекции ab отрезка AB. Эта проекция на эпюре задана. Катет BC равен разности отрезков Bb и Aa.

Отрезки Bb и Aa на эпюре также даны; именно они равны соответственно расстояниям точек b' и a' от оси xy, следовательно, и разность их также можно найти на эпюре. Она равна разности расстояний точек b' и a' от оси xy. Отсюда следует: чтобы найти действительную длину отрезка AB, нужно построить прямоугольный треугольник, одним из катетов которого служит горизонтальная проекция ab искомого отрезка, а другим — отрезок, равный разности расстояний вертикальных проекций a' и b' концов отрезка от оси xy. Гипотенуза этого треугольника и даёт действительную длину отрезка AB.

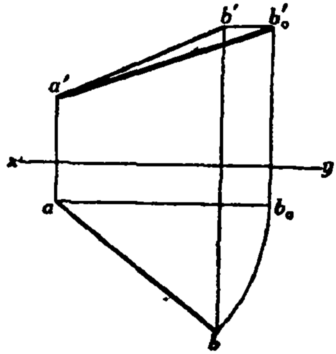
Второй способ. Представим себе, что отрезок AB в пространстве неизменно скреплён с прямой Aa, и будем вращать отрезок AB около этой прямой до тех пор, пока он не станет параллелен вертикальной плоскости проекций (черт. 64).

При этом его вертикальная проекция будет давать его действительную длину.

При таком вращении отрезка AB его проекции ab и $a'b'$ на эпюре будут меняться. Но его угол наклона к прямой Aa не будет меняться, а следовательно, не будет меняться и длина его горизонтальной проекции (меняется только её направление). Значит, при этом вращении отрезка его горизонтальная проекция изменится так, что точка a на эпюре остаётся неподвижной, а точка b перемещается по дуге окружности. Когда отрезок AB станет параллелен вертикальной плоскости, его горизонтальная проекция сделается па-



Черт. 64.

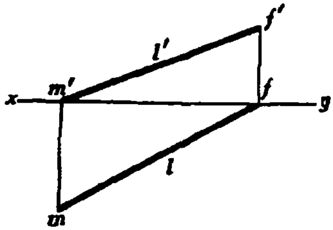


Черт. 65.

раллельной оси xy. Вертикальная проекция $a'b'$ при вращении также меняется, но так как расстояние точки B от горизонтальной плоскости остаётся неизменным, то расстояние точки b' от оси xy также не будет меняться. Отсюда следует, что точка b' будет перемещаться по прямой, параллельной оси xy. Из сказанного следует, что можно получить на эпюре проекции отрезка AB, после его поворота вокруг оси Aa, с помощью следующего построения (черт. 65): описываем дугу окружности с центром в точке a радиусом, равным ab, и находим точку её пересечения b_0 с прямой, параллельной оси xy и проходящей через точку a; через b' проводим прямую, параллельную оси xy, и продолжаем её до пересечения в некоторой точке b_0' с перпендикуляром к оси xy, проведённым через точку b_0. Отрезки ab_0 и $a'b_0'$ будут проекциями отрезка AB после поворота. Его вертикальная проекция $a'b_0'$ будет при этом давать действительную длину отрезка AB.

61. Задача 2. *На эпюре даны проекции l и l' некоторой прямой* (черт. 66). *Найти точки пересечения этой прямой с плоскостями проекций (эти точки называются* следами *прямой на плоскостях проекций).*

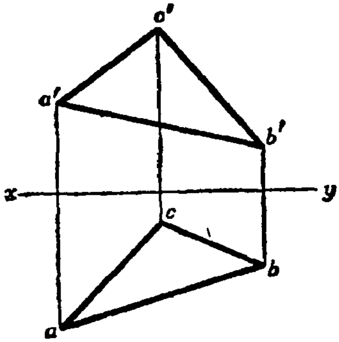
Решение. Точка встречи данной прямой с вертикальной плоскостью имеет своей горизонтальной проекцией точку на оси xy. С другой стороны, горизонтальная проекция этой точки должна лежать на прямой l. Следовательно, для нахождения на эпюре вертикального следа прямой продолжаем её горизонтальную проекцию l до встречи в точке f с осью xy. Точка f будет горизонтальной проекцией искомого вертикального следа. Чтобы найти его вертикальную проекцию, восставим в точке f перпендикуляр к оси xy и продолжим его до пересечения в точке f' с прямой l'. Эта точка f' и будет искомой вертикальной проекцией вертикального следа, она, очевидно, совпадает с самим вертикальным следом. Таким же путём найдём и горизонтальный след прямой: продолжаем l' до встречи в точке m' с осью xy, в точке m' восставляем перпендикуляр к оси xy до встречи в точке m с прямой l; точка m искомая.



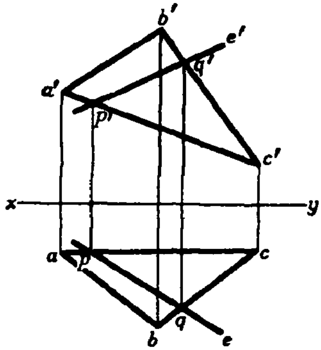
Черт. 66.

62. Проекция треугольника. Если в пространстве дан треугольник, то можно построить горизонтальные и вертикальные проекции его вершин и сторон. На эпюре получается, таким образом, два треугольника, которые служат горизонтальной и вертикальной проекциями данного треугольника в пространстве.

Если форма и положение треугольника в пространстве не указаны заранее, то проекции его вершин можно задавать произвольно, соблю-



Черт. 67.



Черт. 68.

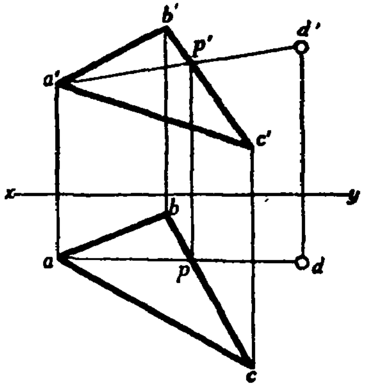
дая лишь условие, чтобы вертикальная и горизонтальная проекции одной и той же вершины лежали на одном перпендикуляре к оси xy. Действительно, положение плоскости в пространстве вполне определяется положением трёх её точек, которые можно брать в пространстве совершенно произвольно, лишь бы они не располагались на одной прямой.

На чертеже 67 представлены проекции некоторого треугольника ABC. Пользуясь этими проекциями, можно на эпюре решать различные задачи, касающиеся положения треугольника в пространстве.

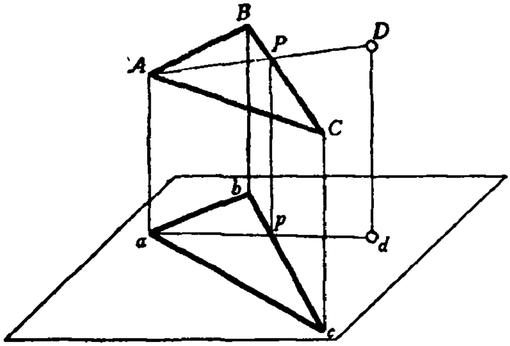
63. Задача 1. *Даны проекции abc и $a'b'c'$ треугольника* (черт. 68). *Построить на эпюре вертикальную проекцию прямой, лежащей в плоскости этого треугольника, горизонтальная проекция которой задана.*

Р е ш е н и е. Пусть прямая e есть заданная горизонтальная проекция, она встречает прямые ac и bc соответственно в точках p и q. Так как эта прямая проведена в плоскости треугольника ABC, то она пересекается со сторонами AC и BC в точках, для которых p и q служат горизонтальными проекциями. Для получения вертикальных проекций тех же точек, очевидно, следует из точек p и q опустить перпендикуляры на ось xy и продолжить их до встречи в точках p' и q' соответственно с прямыми $a'c'$ и $b'c'$. Прямая $p'q'$ есть искомая вертикальная проекция прямой, лежащей в плоскости данного треугольника.

64. З а д а ч а 2. *На эпюре даны проекции abc и $a'b'c'$ треугольника ABC* (черт. 69). *Кроме того, дана горизонтальная проекция*



Черт. 69.



Черт. 70

d точки D, лежащей в плоскости этого треугольника. Построить вертикальную проекцию этой точки.

Р е ш е н и е. Соединив точки d и a, мы получим горизонтальную проекцию ad прямой, лежащей в плоскости треугольника ABC и соединяющей точку D с вершиной A (черт. 70). Точка p, в которой прямая ad встречает bc, есть горизонтальная проекция точки пересечения P прямой AD со стороной BC (черт. 70).

На прямой $b'c'$ находим вертикальную проекцию p' той же точки, опустив из p перпендикуляр на ось. Далее, проводим прямую $a'p'$ и на ней таким же способом находим искомую вертикальную проекцию d' точки D (черт. 69).

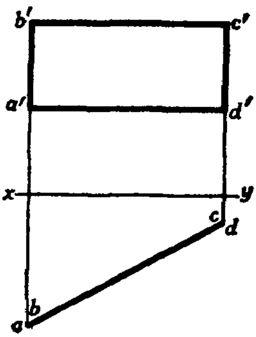
65. Проекции многоугольников. При построении проекций многоугольника уже нельзя произвольно задавать проекции его вершин. Если взять произвольные горизонтальные проекции вершин многоугольника, то из вертикальных их проекций произвольно (но на одном перпендикуляре с соответствующими горизонтальными проекциями) можно взять только три. Действительно, эти три вертикальные проекции вместе с горизонтальными вполне определяют плоскость, в которой лежит многоугольник.

Поэтому вертикальные проекции остальных вершин следует брать так, чтобы они служили проекциями точек, лежащих в этой плоскости.

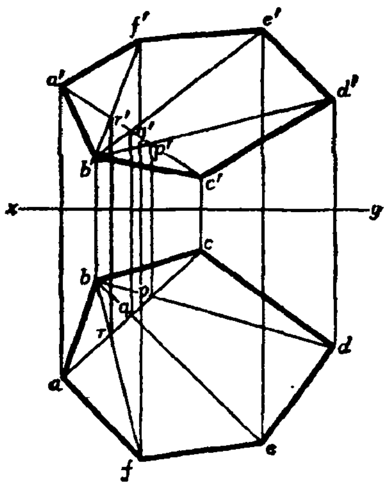
На чертеже 71 даны проекции прямоугольника, лежащего в плоскости, перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекций, имеющего две вертикальные стороны.

На чертеже 72 представлено построение проекций шестиугольника, причём горизонтальные проекции a, b, c, d, f его вершин взяты произвольно.

Вертикальные проекции a', b', c' выбраны на перпендикулярах к оси проекций, проведённых через точки a, b, c. При этом точку a' *можно брать где угодно на перпендикуляре к оси проекций, проведённом через* a, точку b' — где угодно на перпендикуляре к оси, проведённом через b,



Черт. 71.



Черт. 72.

и точку c' — где угодно на перпендикуляре к оси, проведённом через c. Вертикальные проекции остальных вершин можно построить, применяя способ, указанный в § 64. Соединив точки a, b и c, получим горизонтальные проекции двух сторон шестиугольника (ab и bc) и одной его диагонали (ac). Соединив точки a', b' и c', получим вертикальные проекции тех же сторон ($a'b'$ и $b'c'$) и той же диагонали ($a'c'$). Соединим после этого точку b с горизонтальными проекциями d, e и f остальных вершин шестиугольника. Точки пересечения прямых bd, be и bf с прямой ac обозначим соответственно через p, q и r. Проведя через точки p, q и r прямые, перпендикулярные к оси проекций, продолжим их до пересечения с прямой $a'c'$, тогда мы получим на этой прямой вертикальные проекции p', q' и r' точек пересечения трёх диагоналей шестиугольника с четвёртой, для которой вертикальной проекцией служит прямая $a'c'$. Вертикальные проекции этих трёх диагоналей мы получим, соединяя точки p', q' и r'

с точкой b. Если теперь продолжить прямую $b'p'$, а через точку d провести прямую, перпендикулярную к оси проекций, до пересечения с прямой $b'p'$, то точка пересечения этих прямых d' будет служить вертикальной проекцией четвёртой вершины шестиугольника. Таким же образом, продолжая прямые $b'q'$ и $b'r'$ и опуская из точек e и f перпендикуляры на ось проекций, найдём вертикальные проекции e' и f' пятой и шестой вершин шестиугольника. Соединив последовательно точки a', b', c', d', e', f', получим искомую вертикальную проекцию шестиугольника.

66. Замечание. Метод изображения фигур и тел в ортогональных проекциях на две плоскости был разработан французским учёным Гаспаром Монжем (1745—1818). Гаспар Монж был крупнейшим французским геометром конца XVIII и начала XIX в. Во время французской революции был одним из основателей знаменитой политехнической школы, созданной конвентом. Метод Монжа в настоящее время является одним из основных в той области геометрии, которая разрабатывает методы изображения геометрических тел на плоскости и носит название **начертательной геометрии.** Метод Монжа имеет широкое применение в технике при вычерчивании проектов сооружений, планов зданий, частей и деталей машин и т. д. При этом методе построения на эпюре выполняются иногда по сложным правилам, пользоваться которыми можно, лишь хорошо усвоив главные факты и предложения стереометрии. Поэтому в учебниках геометрии, как и в настоящей книге, при изображении геометрических фигур и тел применяются упрощённые рисунки.

Эти рисунки представляют собой проекции изучаемых фигур, но не на две плоскости, а лишь на одну, именно на плоскость чертежа.

Как следует из всего предыдущего, одна такая проекция ещё не определяет ни положения фигуры в пространстве, ни её точных размеров, но она даёт ясное представление о виде изучаемой фигуры. Этого представления достаточно, чтобы, основываясь на общих теоремах стереометрии, изучать свойства геометрических фигур и тел.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

МНОГОГРАННИКИ

1. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД И ПИРАМИДА

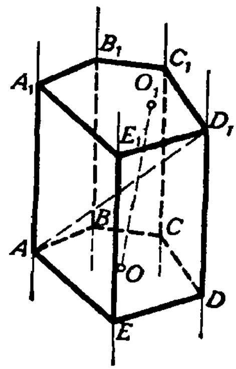
67. Многогранник. Многогранником называется тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Общие стороны смежных многоугольников называются **рёбрами** многогранника. Многоугольники, которые ограничивают многогранник, называются его **гранями.** Грани многогранника, сходящиеся в одной точке, образуют многогранный угол; вершины таких многогранных углов называются **вершинами многогранника.** Прямые, соединяющие две *какие-нибудь* вершины, не лежащие на одной грани, называются **диагоналями** многогранника.

Мы будем рассматривать только **выпуклые** многогранники, т. е. такие, которые расположены по одну сторону от плоскости каждой из его граней.

Наименьшее число граней в многограннике — четыре; такой многогранник получается от пересечения трёхгранного угла какой-нибудь плоскостью.

68. Призма. Призмой называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани — параллелограммы.

Чтобы показать возможность существования такого многогранника, возьмём (черт. 73) какой-нибудь многоугольник $ABCDE$ и через его вершины проведём ряд параллельных прямых, не лежащих в его плоскости. Взяв затем на одной из этих прямых произвольную точку A_1, проведём через неё плоскость, параллельную плоскости $ABCDE$; через каждые две соседние параллельные прямые также проведём плоскости. Пересечение всех этих плоскостей определит многогранник $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, удовлетворяющий определению призмы. Действительно, параллельные плоскости $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ пересекаются боковыми плоскостями по параллельным прямым (§ 16); поэтому фигуры AA_1E_1E, EE_1D_1D и т. д. — параллелограммы. С другой стороны, у многоугольников $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ равны соответственно стороны (как противоположные стороны параллелограммов) и углы (как углы с параллельными и одинаково направленными сторонами); следовательно, эти многоугольники равны.



Черт. 73.

Многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$, лежащие в параллельных плоскостях, называются **основаниями** призмы, перпендикуляр OO_1, опущенный из какой-нибудь точки одного основания на плоскость другого, называется **высотой** призмы. Параллелограммы AA_1B_1B, BB_1C_1C и т. д. называются **боковыми гранями** призмы, а их стороны AA_1, BB_1 и т. д., соединяющие соответственные вершины оснований, — **боковыми рёбрами.** У призмы все боковые рёбра равны, как отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями.

Отрезок прямой, соединяющий какие-нибудь две вершины, не прилежащие к одной грани, называется **диагональю** призмы. Таков, например, отрезок AD_1 (черт. 73).

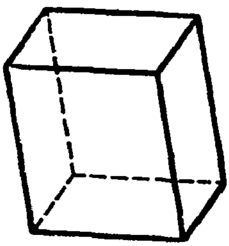
Плоскость, проведённая через какие-нибудь два боковых ребра, не прилежащих к одной боковой грани призмы (например, через рёбра AA_1 и CC_1, черт. 73), называется **диагональной плоскостью** (на чертеже не показанной).

Призма называется **прямой** или **наклонной,** смотря по тому, будут ли её боковые рёбра перпендикулярны или наклонны к основаниям. У прямой призмы боковые грани — прямоугольники. За высоту такой призмы можно принять боковое ребро.

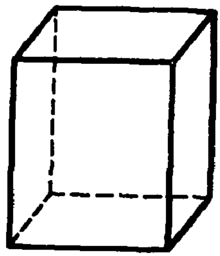
Прямая призма называется **правильной**, если её основания — правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани — равные прямоугольники.

Призмы бывают треугольные, четырёхугольные и т. д., смотря по тому, что является основанием: треугольник, четырёхугольник и т. д.

69. Параллелепипед. П а р а л л е л е п и п е д о м называют призму, у которой основаниями служат параллелограммы (рис. 74).



Черт. 74.



Черт. 75.

Параллелепипеды, как и всякие призмы, могут быть прямые и наклонные. Прямой параллелепипед называется **прямоугольным**, если его основание—прямоугольник (черт.75).

Из этих определений следует:

1) у параллелепипеда все шесть граней — параллелограммы;

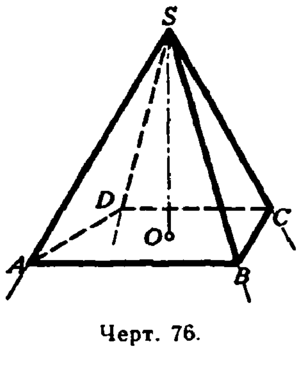
2) у прямого параллелепипеда четыре боковые грани — прямоугольники, а два основания — параллелограммы;

3) у прямоугольного параллелепипеда все шесть граней — прямоугольники.

Три ребра прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, называются его **измерениями**; одно из них можно рассматривать как длину, другое — как ширину, а третье — как высоту.

Прямоугольный параллелепипед, имеющий равные измерения, называется **кубом**. У куба все грани — квадраты.

70. Пирамида. П и р а м и д о й называется многогранник, у которого одна грань, называемая основанием, есть какой-нибудь многоугольник, а все остальные грани, называемые боковыми,— треугольники, имеющие общую вершину.



Черт. 76.

Чтобы получить пирамиду, достаточно какой-нибудь многогранный угол S (черт.76) пересечь произвольной плоскостью $ABCD$ и взять отсечённую часть $SABCD$.

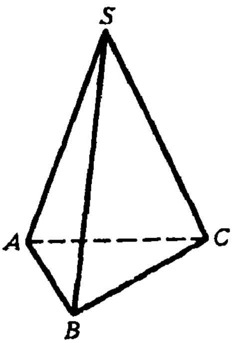
Общая вершина S боковых треугольников называется **вершиной** пирамиды, а перпендикуляр SO, опущенный из вершины на плоскость основания,— **высотой** её.

Обыкновенно, обозначая пирамиду *буквами*, *пишут сначала* ту, которой обозначена вершина, например $SABCD$ (черт. 76).

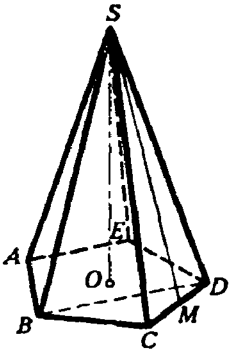
Плоскость, проведённая через вершину пирамиды и через какую-нибудь диагональ основания (например, через диагональ BD, черт. 78), называется **диагональной плоскостью**.

Пирамиды бывают треугольные, четырёхугольные **и т. д., смотря** по тому, что является основанием — треугольник, четырёхугольник и т. д. Треугольная пирамида (черт. 77) называется иначе **тетраэдром;** все четыре грани у такой пирамиды — треугольники.

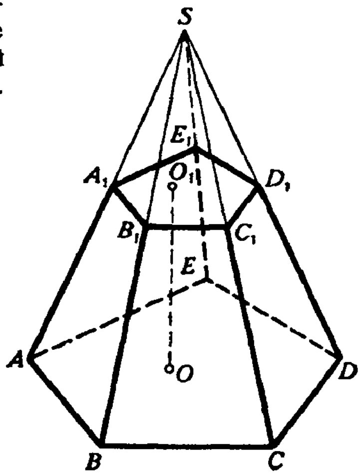
Пирамида называется **правильной** (черт. 78), если, во-первых, её основание есть правильный многоугольник и, во-вторых, высота проходит через центр этого многоугольника. В правильной пирамиде все боковые рёбра равны между собой (как наклонные с равными проекциями).



Черт. 77.



Черт 78.



Черт. 79.

Поэтому все боковые грани правильной пирамиды суть равные равнобедренные треугольники. Высота SM (черт. 78) каждого из этих треугольников называется **апофемой.** Все апофемы в правильной пирамиде равны.

71. Усечённая пирамида. Часть пирамиды (черт. 79), заключённая между основанием ($ABCDE$) и секущей плоскостью ($A_1B_1C_1D_1E_1$), параллельной основанию, называется **усечённой пирамидой.** Параллельные грани называются **основаниями,** а отрезок перпендикуляра OO_1, опущенного из какой-нибудь точки O_1 основания $A_1B_1C_1D_1E_1$ на другое основание,— **высотой** усечённой пирамиды. Усечённая пирамида называется **правильной,** если она составляет часть правильной пирамиды.

Свойства граней и диагоналей параллелепипеда

72. Теорема. ***В параллелепипеде:***

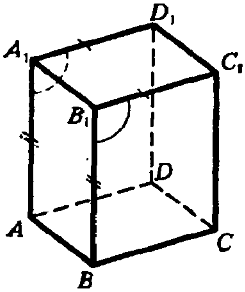
1) ***противоположные грани равны и параллельны;***

2) ***все четыре диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.***

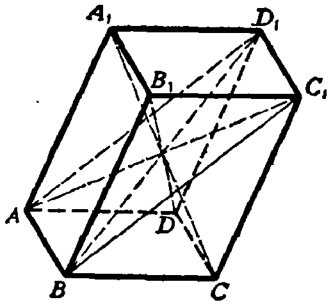
1) Грани (черт. 80) BB_1C_1C и AA_1D_1D параллельны, потому что две пересекающиеся прямые BB_1 и B_1C_1 одной грани параллельны двум пересекающимся прямым AA_1 и A_1D_1 другой (§ 15); эти грани

и равны, так как $B_1C_1 = A_1D_1$, $B_1B = A_1A$ (как противоположные стороны параллелограммов) и $\angle BB_1C_1 = \angle AA_1D_1$.

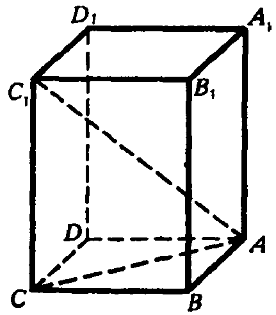
2) Возьмём (черт. 81) какие-нибудь две диагонали, например AC_1 и BD_1, и проведём вспомогательные прямые AD_1 и BC_1. Так как рёбра AB и D_1C_1 соответственно равны и параллельны ребру DC, то они равны и параллельны между собой; вследствие этого фигура AD_1C_1B есть параллелограмм, в котором прямые C_1A и BD_1 — диагонали, а в параллелограмме диагонали делятся в точке пересечения пополам. Возьмём теперь одну из этих диагоналей, например AC_1, с третьей диагональю, положим, с B_1D. Совершенно так же мы



Черт. 80.



Черт. 81.



Черт. 82.

можем доказать, что они делятся в точке пересечения пополам. Следовательно, диагонали B_1D и AC_1 и диагонали AC_1 и BD_1 (которые мы раньше брали) пересекаются в одной и той же точке, именно в середине диагонали AC_1. Наконец, взяв эту же диагональ AC_1 с четвёртой диагональю A_1C, мы также докажем, что они делятся пополам. Значит, точка пересечения и этой пары диагоналей лежит в середине диагонали AC_1. Таким образом, все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной и той же точке и делятся этой точкой пополам.

73. Теорема. ***В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали*** (AC_1, черт. 82) ***равен сумме квадратов трёх его измерений.***

Проведя диагональ основания AC, получим треугольники AC_1C и ACB. Оба они прямоугольные: первый потому, что параллелепипед прямой и, следовательно, ребро CC_1 перпендикулярно к основанию; второй потому, что параллелепипед прямоугольный и, значит, в основании его лежит прямоугольник. Из этих треугольников находим:

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 \quad \text{и} \quad AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Следовательно,

$$AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Следствие. *В прямоугольном параллелепипеде все диагонали равны.*

Свойства параллельных сечений в пирамиде

74. Теоремы. ***Если пирамида*** (черт. 83) ***пересечена плоскостью, параллельной основанию, то:***

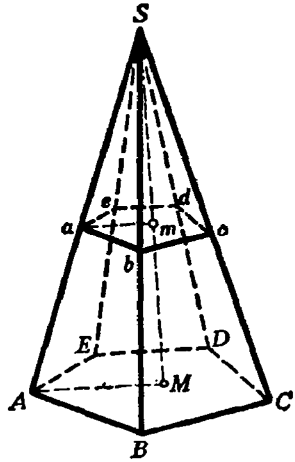
1) ***боковые рёбра и высота делятся этой плоскостью на пропорциональные части;***

2) ***в сечении получается многоугольник*** ($abcde$), ***подобный основанию;***

3) ***площади сечения и основания относятся, как квадраты их расстояний от вершины.***

1) Прямые ab и AB можно рассматривать как линии пересечения двух параллельных плоскостей (основания и секущей) третьей плоскостью ASB; поэтому $ab \parallel AB$ (§ 16). По этой же причине $bc \parallel BC$, $cd \parallel CD$, ... и $am \parallel AM$; вследствие этого

$$\frac{Sa}{aA} = \frac{Sb}{bB} = \frac{Sc}{cC} = \ldots = \frac{Sm}{mM}.$$



Черт. 83.

2) Из подобия треугольников ASB и aSb, затем BSC и bSc и т. д. выводим:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BS}{bS}; \quad \frac{BS}{bS} = \frac{BC}{bc},$$

откуда

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}.$$

Так же

$$\frac{BC}{bc} = \frac{CS}{cS}; \quad \frac{CS}{cS} = \frac{CD}{cd}, \text{ откуда } \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}.$$

Так же докажем пропорциональность остальных сторон многоугольников $ABCDE$ и $abcde$. Так как, сверх того, у этих многоугольников равны соответственные углы (как образованные параллельными и одинаково направленными сторонами), то они подобны.

3) Площади подобных многоугольников относятся, как квадраты сходственных сторон; поэтому

$$\frac{\text{площадь } ABCDE}{\text{площадь } abcde} = \frac{AB^2}{ab^2} = \left(\frac{AB}{ab}\right)^2,$$

но

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AS}{aS} = \frac{MS}{mS},$$

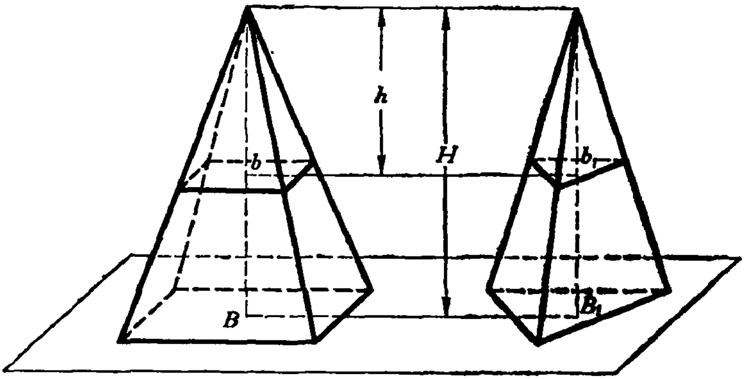
значит,

$$\frac{\text{площадь } ABCDE}{\text{площадь } abcde} = \left(\frac{MS}{mS}\right)^2 = \frac{MS^2}{mS^2}.$$

75. Следствие. *У правильной усечённой пирамиды верхнее основание есть правильный многоугольник, подобный нижнему основанию, а боковые грани суть равные и равнобочные трапеции* (черт. 83).

Высота любой из этих трапеций называется **апофемой** правильной усечённой пирамиды.

76. Теорема. ***Если две пирамиды с равными высотами рассечены на одинаковом расстоянии от вершины плоскостями, параллельными основаниям, то площади сечений пропорциональны площадям оснований.***



Черт. 84.

Пусть (черт. 84) B и B_1 — площади оснований двух пирамид, H — высота каждой из них, b и b_1 — площади сечений плоскостями, параллельными основаниям и удалёнными от вершин на одно и то же расстояние h.

Согласно предыдущей теореме мы будем иметь:

$$\frac{b}{B}=\frac{h^2}{H^2} \text{ и } \frac{b_1}{B_1}=\frac{h^2}{H^2},$$

откуда

$$\frac{b}{B}=\frac{b_1}{B_1} \text{ или } \frac{b}{b_1}=\frac{B}{B_1}.$$

77. Следствие. Если $B=B_1$, то и $b=b_1$, т. е. ***если у двух пирамид с равными высотами основания равновелики, то равновелики и сечения, равноотстоящие от вершины.***

Боковая поверхность призмы и пирамиды[1]

78. Теорема. ***Боковая поверхность призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.***

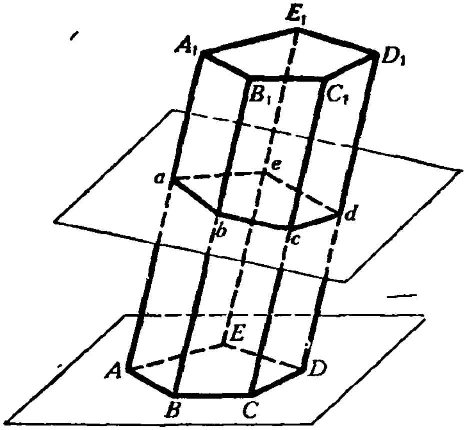
---

[1] В § 78—81, а также и в дальнейшем ради краткости термин „боковая поверхность“ употребляется вместо „площадь боковой поверхности“.

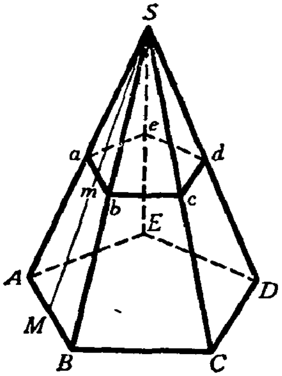
Перпендикулярным сечением (черт. 85) называется многоугольник $abcde$, получаемый от пересечения призмы плоскостью, перпендикулярной к боковому ребру. Стороны этого многоугольника перпендикулярны к ребрам (§ 31, 24).

Боковая поверхность призмы представляет собой сумму площадей параллелограммов; в каждом из них за основание можно взять боковое ребро, а за высоту — сторону перпендикулярного сечения. Поэтому боковая поверхность призмы равна: $AA_1 \cdot ab + BB_1 \cdot bc + CC_1 \cdot cd + DD_1 \cdot de + EE_1 \cdot ea = (ab + bc + cd + de + ea) \cdot AA_1$.

79. Следствие. ***Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту*** потому, что в такой



Черт. 85.



Черт. 86.

призме за перпендикулярное сечение можно взять само основание, а боковое ребро её равно высоте.

80. Теорема. ***Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению периметра основания на половину апофемы.***

Пусть (черт. 86) $SABCDE$ — правильная пирамида и SM — её апофема. Боковая поверхность этой пирамиды есть сумма площадей равных равнобедренных треугольников. Площадь одного из них, например ASB, равна $AB \cdot \frac{1}{2} SM$. Если всех треугольников n, то боковая поверхность равна: $AB \cdot \frac{1}{2} SM \cdot n = AB \cdot n \cdot \frac{1}{2} SM$, где $AB \cdot n$ есть периметр основания, а SM — апофема.

81. Теорема. ***Боковая поверхность правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров обоих оснований на апофему.***

Боковая поверхность правильной усечённой пирамиды есть сумма площадей равных трапеций. Площадь одной трапеции, например

$AabB$ (черт. 86), равна $\frac{1}{2}(AB+ab)\cdot Mm$. Если число всех трапеций есть n, то боковая поверхность равна:

$$\frac{AB+ab}{2}\cdot Mm\cdot n=\frac{AB\cdot n+ab\cdot n}{2}\cdot Mm,$$

где $AB\cdot n$ и $ab\cdot n$ суть периметры нижнего и верхнего оснований.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Высота прямой призмы, основание которой есть правильный треугольник, равна 12 *м*, сторона основания 3 *м*. Вычислить полную поверхность призмы.

2. Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна 1714 *м*², а неравные стороны основания равны 25 *м* и 14 *м*. Вычислить боковую поверхность и боковое ребро.

3. В прямоугольном параллелепипеде с квадратным основанием и высотой h проведена секущая плоскость через два противоположных боковых ребра. Вычислить полную поверхность параллелепипеда, зная, что площадь сечения равна S.

4. Правильная шестиугольная пирамида имеет сторону основания a и высоту h. Вычислить боковое ребро, апофему, боковую поверхность и полную поверхность.

5. Вычислить полную поверхность и высоту треугольной пирамиды, у которой каждое ребро равно a.

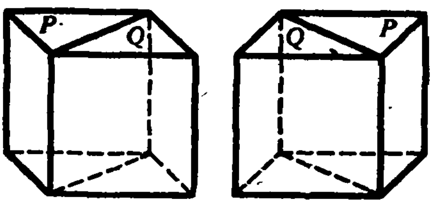
6. Правильная шестиугольная пирамида, у которой высота 25 *см*, а сторона основания 5 *см*, рассечена плоскостью, параллельной основанию. Вычислить расстояние этой плоскости от вершины пирамиды, зная, что площадь сечения равна $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ *см*².

7. Высота усечённой пирамиды с квадратным основанием равна h, сторона нижнего основания a, а верхнего b. Найти полную поверхность усечённой пирамиды.

8. Высота усечённой пирамиды равна 6, а площади оснований 18 и 8. Пирамида рассечена плоскостью, параллельной основаниям и делящей высоту пополам. Вычислить площадь сечения.

II. ОБЪЁМ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ

82. Основные допущения в объёмах. Величина части пространства, занимаемого геометрическим телом, называется **объёмом** этого тела.



Черт. 87.

Мы ставим задачу—найти для этой величины выражение в виде некоторого числа, измеряющего эту величину. При этом мы будем руководствоваться следующими исходными положениями.

1) *Равные тела имеют равные объёмы.*

2) *Объём какого-нибудь тела* (например, каждого параллелепипеда, изображённого на черт. 87), *состоящего из частей* (P и Q), ***равен сумме объёмов этих частей.***

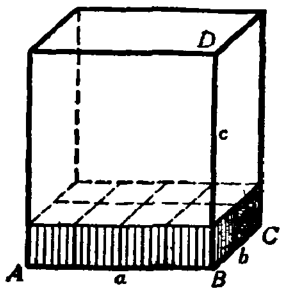
Два тела, имеющие одинаковые объёмы, называются равновеликими.

83. Единица объёма. За единицу объёмов при измерении их берут объём такого куба, у которого каждое ребро равно линейной единице. Так, употребительны кубические метры ($м^3$), кубические сантиметры ($см^3$) и т. д.

Объём параллелепипеда

84. Теорема. ***Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.***

В таком кратком выражении теорему эту надо понимать так: число, выражающее объём прямоугольного параллелепипеда в кубической единице, равно произведению чисел, выражающих три его измерения в соответствующей линейной единице, т. е. в единице, являющейся ребром куба, объём которого принят за кубическую единицу. Так, если x есть число, выражающее объём прямоугольного параллелепипеда в кубических сантиметрах, и a, b и c — числа, выражающие три его измерения в линейных сантиметрах, то теорема утверждает, что $x = abc$.



Черт. 88.

При доказательстве рассмотрим особо следующие три случая:

1) Измерения выражаются целыми числами.

Пусть, например, измерения будут (черт. 88): $AB = a$, $BC = b$ и $BD = c$, где a, b и c — какие-нибудь целые числа (например, как изображено у нас на чертеже: $a = 4$, $b = 2$ и $c = 5$). Тогда основание параллелепипеда содержит ab таких квадратов, из которых каждый представляет собой соответствующую квадратную единицу. На каждом из этих квадратов, очевидно, можно поместить по одной кубической единице. Тогда получится слой (изображённый на чертеже), состоящий из ab кубических единиц. Так как высота этого слоя равна одной линейной единице, а высота всего параллелепипеда содержит c таких единиц, то внутри параллелепипеда можно поместить c таких слоёв. Следовательно, объём этого параллелепипеда равен abc кубических единиц.

2) Измерения выражаются дробными числами.

Пусть измерения параллелепипеда будут:

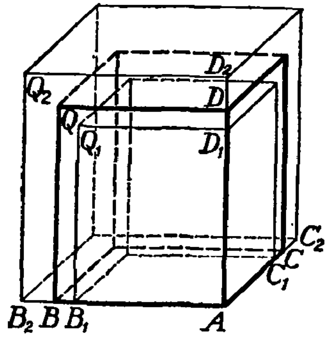
$$\frac{m}{n}, \ \frac{p}{q}, \ \frac{r}{s}$$

(некоторые из этих дробей могут равняться целому числу).

Приведя дроби к одинаковому знаменателю, будем иметь:

$$\frac{mqs}{nqs}, \ \frac{pns}{nqs}, \ \frac{rnq}{nqs}.$$

Примем $\frac{1}{nqs}$ долю линейной единицы за новую (вспомогательную) единицу длины. Тогда в этой новой единице измерения данного параллелепипеда выразятся целыми числами, а именно: mqs, pns и rnq, и потому по доказанному (в случае 1) объём параллелепипеда равен произведению $(mqs)\cdot(pns)\cdot(rnq)$, если измерять этот объём новой кубической единицей, соответствующей новой линейной единице. Таких кубических единиц в одной кубической единице, соответствующей прежней линейной единице, содержится $(nqs)^3$; значит, новая кубическая единица составляет $\frac{1}{(nqs)^3}$ прежней. Поэтому объём параллелепипеда, выраженный в прежних единицах, равен:



Черт. 89.

$$\frac{1}{(nqs)^3}\cdot(mqs)(pns)(rnq)=$$

$$=\frac{mqs}{nqs}\cdot\frac{pns}{nqs}\cdot\frac{rnq}{nqs}=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}.$$

3) Измерения выражаются иррациональными числами.

Пусть у данного параллелепипеда (черт. 89), который для краткости мы обозначим одной буквой Q, измерения будут:

$$AB=\alpha;\quad AC=\beta;\quad AD=\gamma,$$

где все числа α, β и γ или только некоторые из них иррациональные.

Каждое из чисел α, β и γ может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби. Возьмём приближённые значения этих дробей с n десятичными знаками сначала с недостатком, а затем с избытком. Значения с недостатком обозначим α_n, β_n, γ_n, значения с избытком α_n', β_n', γ_n'. Отложим на ребре AB, начиная от точки A, два отрезка $AB_1=\alpha_n$ и $AB_2=\alpha_n'$. На ребре AC от той же точки A отложим отрезки $AC_1=\beta_n$ и $AC_2=\beta_n'$ и на ребре AD от той же точки—отрезки $AD_1=\gamma_n$ и $AD_2=\gamma_n'$.

При этом мы будем иметь:

$$AB_1 < AB < AB_2;\quad AC_1 < AC < AC_2;\quad AD_1 < AD < AD_2.$$

Построим теперь два вспомогательных параллелепипеда; один (обозначим его Q_1) с измерениями AB_1, AC_1 и AD_1 и другой (обозначим его Q_2) с измерениями AB_2, AC_2 и AD_2. Параллелепипед Q_1 будет весь помещаться внутри параллелепипеда Q, а параллелепипед Q_2 будет содержать внутри себя параллелепипед Q.

По доказанному (в случае 2) будем иметь:

$$\text{объём } Q_1=\alpha_n\beta_n\gamma_n, \tag{1}$$

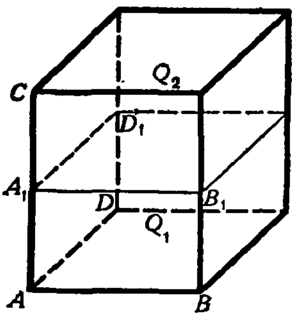
$$\text{объём } Q_2=\alpha_n'\beta_n'\gamma_n', \tag{2}$$

причём объём $Q_1 <$ объёма Q_2.

Начнём теперь увеличивать число n. Это значит, что мы берём приближённые значения чисел α, β, γ всё с большей и большей степенью точности. Посмотрим, как при этом изменяются объёмы параллелепипедов Q_1 и Q_2.

При неограниченном возрастании n объём Q_1, очевидно, увеличивается и в силу равенства (1) при беспредельном увеличении n имеет своим пределом предел произведения $(\alpha_n\beta_n\gamma_n)$. Объём Q_2, очевидно, уменьшается и в силу равенства (2) имеет пределом предел произведения $(\alpha'_n\beta'_n\gamma'_n)$. Но из алгебры известно, что оба произведения $\alpha_n\beta_n\gamma_n$ и $\alpha'_n\beta'_n\gamma'_n$ при неограниченном увеличении n имеют общий предел, который является произведением иррациональных чисел $\alpha\beta\gamma$.

Этот предел мы и принимаем за меру объёма параллелепипеда Q: объём $Q=\alpha\beta\gamma$. Можно доказать, что определённый таким образом объём удовлетворяет тем условиям, которые установлены для объёма (§ 82). В самом деле, при таком определении объёма равные параллелепипеды, очевидно, имеют равные объёмы. Следовательно, первое условие (§ 82) выполняется. Разобьём теперь данный параллелепипед Q плоскостью, параллельной его основанию, надвое: Q_1 и Q_2 (черт. 90). Тогда будем иметь:



Черт. 90

объём $Q=AB\cdot AC\cdot AD$,

объём $Q_1=AB\cdot AA_1\cdot AD$,

объём $Q_2=A_1B_1\cdot A_1C\cdot A_1D_1$.

Складывая почленно два последних равенства и замечая, что $A_1B_1=AB$ и $A_1D_1=AD$, получим объём Q_1+объём $Q_2=AB\cdot AA_1\cdot AD+AB\cdot A_1C\cdot AD=$ $=AB\cdot AD\,(AA_1+A_1C)=AB\cdot AD\cdot AC$, отсюда получаем:

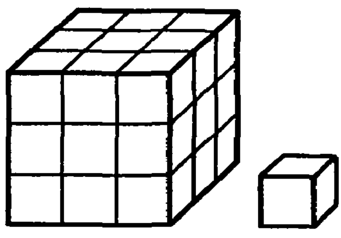
$$\text{объём } Q_1+\text{объём } Q_2=\text{объёму } Q.$$

Следовательно, и второе условие § 82 тоже выполняется, если параллелепипед складывать из двух частей, полученных разрезанием его плоскостью, параллельной одной из граней.

85. Следствие. Пусть измерения прямоугольного параллелепипеда, служащие сторонами его основания, выражаются числами a и b, а третье измерение (высота) — числом c. Тогда, обозначая объём его в соответствующих кубических единицах буквой V, можем написать:

$$V=abc.$$

Так как произведение ab выражает площадь основания, то можно сказать, что ***объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.***

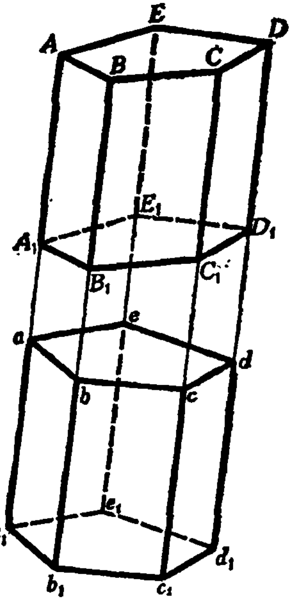


Черт. 91

Замечание. Отношение двух кубических единиц разных названий равно третьей степени отношения тех линейных единиц, которые служат рёбрами для этих кубических единиц. Так, отношение кубического метра к кубическому дециметру равно 10^3, т. е. 1000. Поэтому, например, если мы имеем куб с ребром длиной a линейных единиц и другой куб с ребром длиной $3a$ линейных единиц, то отношение их объёмов будет равно 3^3, т. е. 27, что ясно видно из чертежа 91.

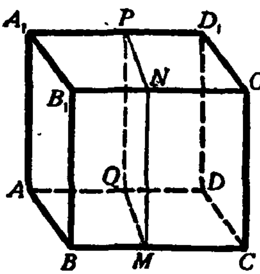
86. Лемма. ***Наклонная призма равновелика такой прямой призме, основание которой равно перпендикулярному сечению наклонной призмы, а высота — её боковому ребру.***

Пусть дана наклонная призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (черт. 92). Продолжим все её боковые рёбра и боковые грани в одном направлении.



Черт. 92.

Возьмём на продолжении одного какого-нибудь ребра произвольную точку a и проведём через неё перпендикулярное сечение $abcde$. Затем, отложив $aa_1 = AA_1$, проведём через a_1 перпендикулярное сечение $a_1b_1c_1d_1e_1$. Так как плоскости обоих сечений параллельны, то $bb_1 = cc_1 = dd_1 = ee_1 = aa_1 = AA_1$ (§ 17). Вследствие этого многогранник a_1d, у которого за основания приняты проведённые нами сечения, есть прямая призма, о которой говорится в теореме. Докажем, что данная наклонная призма равновелика этой прямой. Для этого предварительно убедимся, что многогранники aD и a_1D_1 равны. Основания их $abcde$ и $a_1b_1c_1d_1e_1$ равны как основания призмы a_1d; с другой стороны, прибавив к обеим частям равенства $A_1A = a_1a$ по одному и тому же отрезку прямой A_1a, получим: $aA = a_1A_1$; подобно этому $bB = b_1B_1$, $cC = c_1C_1$ и т. д. Вообразим теперь, что многогранник aD вложен в многогранник a_1D_1 так, что основания их совпали; тогда боковые рёбра, будучи перпендикулярны к основаниям и соответственно равны, также совпадут; поэтому многогранник aD совместится с многогранником a_1D_1; значит, эти тела равны. Теперь заметим, что если к прямой призме a_1d добавим многогранник aD, а к наклонной призме A_1D добавим многогранник a_1D_1, равный aD, то получим один и тот же многогранник a_1D. Из этого следует, что две призмы A_1D и a_1d равновелики.



Черт. 93.

87. Теорема. ***Объём параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.***

Ранее мы доказали эту теорему для параллелепипеда прямоугольного, теперь докажем её для параллелепипеда прямого, а потом и наклонного.

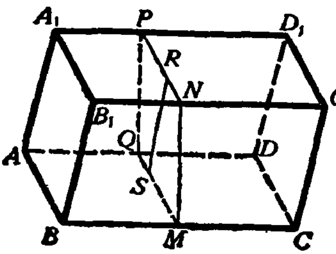
1) Пусть (черт. 93) AC_1 — прямой параллелепипед, т. е. такой, у которого основание $ABCD$ — какой-нибудь параллелограмм, а все боковые грани — прямоугольники. Возьмём в нём за основание боковую грань AA_1B_1B; тогда параллелепипед будет н а-

клонный. Рассматривая его как частный случай наклонной призмы, мы на основании леммы предыдущего параграфа можем утверждать, что этот параллелепипед равновелик такому прямому параллелепипеду, у которого основание есть перпендикулярное сечение $MNPQ$, а высота BC. Четырёхугольник $MNPQ$ — прямоугольник, потому что его углы служат линейными углами прямых двугранных углов; поэтому прямой параллелепипед, имеющий основанием прямоугольник $MNPQ$, должен быть прямоугольным и, следовательно, его объём равен произведению трёх его измерений, за которые можно принять отрезки MN, MQ и BC. Таким образом,

$$\text{объём } AC_1 = MN \cdot MQ \cdot BC = MN \cdot (MQ \cdot BC).$$

Но произведение $MQ \cdot BC$ выражает площадь параллелограмма $ABCD$, поэтому

$$\text{объём } AC_1 = (\text{площади } ABCD) \cdot MN = (\text{площади } ABCD) \cdot BB_1.$$



Черт. 94.

2) Пусть (черт. 94) AC_1 — наклонный параллелепипед. Он равновелик такому прямому, у которого основанием служит перпендикулярное сечение $MNPQ$ (т. е. перпендикулярное к рёбрам AD, BC, ...), а высотой — ребро BC. Но, по доказанному, объём прямого параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту; значит,

$$\text{объём } AC_1 = (\text{площади } MNPQ) \cdot BC.$$

Если RS есть высота сечения $MNPQ$, то площадь $MNPQ = MQ \cdot RS$, поэтому

$$\text{объём } AC_1 = MQ \cdot RS \cdot BC = (BC \cdot MQ) \cdot RS.$$

Произведение $BC \cdot MQ$ выражает площадь параллелограмма $ABCD$; следовательно, объём $AC_1 = (\text{площади } ABCD) \cdot RS$.

Остаётся теперь доказать, что отрезок RS представляет собой высоту параллелепипеда. Действительно, сечение $MNPQ$, будучи перпендикулярно к рёбрам BC, B_1C_1, ..., должно быть перпендикулярно к граням $ABCD$, BB_1C_1C, ..., проходящим через эти рёбра (§ 43). Поэтому если мы из точки S восставим перпендикуляр к плоскости $ABCD$, то он должен лежать весь в плоскости $MNPQ$ (§ 44) и, следовательно, должен слиться с прямой SR, лежащей в этой плоскости и перпендикулярной к MQ. Значит, отрезок SR есть высота параллелепипеда. Таким образом, объём и наклонного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

Следствие. Если V, B и H суть числа, выражающие в соответствующих единицах объём, площадь основания и высоту параллелепипеда, то можно написать:

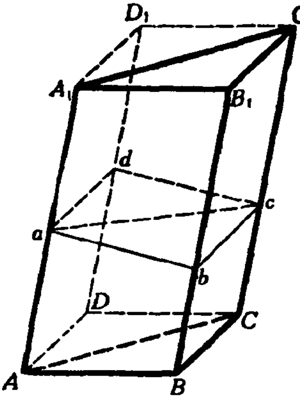
$$V = BH.$$

Объём призмы

88. Т е о р е м а. ***Объём призмы равен произведению площади основания на высоту.***

Сначала докажем эту теорему для т р е у г о л ь н о й призмы, а потом и для м н о г о у г о л ь н о й.

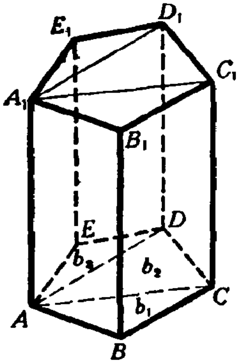
1) Проведём (черт. 95) через ребро AA_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельную грани BB_1C_1C, а через ребро CC_1 — плоскость, параллельную грани AA_1B_1B; затем продолжим плоскости обоих оснований призмы до пересечения с проведёнными плоскостями. Тогда мы получим параллелепипед BD_1, который диагональной плоскостью AA_1C_1C делится на две треугольные призмы (из них одна есть данная). Докажем, что эти призмы равновелики. Для этого проведём перпендикулярное сечение $abcd$. В сечении получится параллелограмм, который диагональю ac делится на два равных треугольника. Данная призма равновелика такой прямой призме, у которой основание есть $\triangle\ abc$, а высота — ребро AA_1 (§ 86). Другая треугольная призма равновелика такой прямой, у которой основание есть $\triangle\ abc$, а высота — ребро AA_1. Но две прямые призмы с равными основаниями и равными высотами равны (потому что при вложении они совмещаются), значит, призмы $ABCA_1B_1C_1$ и $ADCA_1D_1C_1$ равновелики. Из этого следует, что объём данной призмы составляет п о л о в и н у объёма параллелепипеда BD_1; поэтому, обозначив высоту призмы через H, получим:



Черт. 95.

$$\text{объём треугольной призмы} = \frac{(\text{площади } ABCD)\cdot H}{2} = \frac{\text{площади } ABCD}{2}\cdot H = (\text{площади } ABC)\cdot H.$$

2) Проведём через ребро AA_1 многоугольной призмы (черт. 96) диагональные плоскости AA_1C_1C и AA_1D_1D. Тогда данная призма рассечётся на несколько треугольных призм. Сумма объёмов этих призм составляет искомый объём. Если обозначим площади их оснований через b_1, b_2, b_3, а общую высоту через H, то получим: объём многоугольной призмы $= b_1\cdot H + b_2\cdot H + b_3\cdot H = (b_1 + b_2 + b_3)\cdot H =$ (площади $ABCDE$) $\cdot\ H$.



Черт. 96.

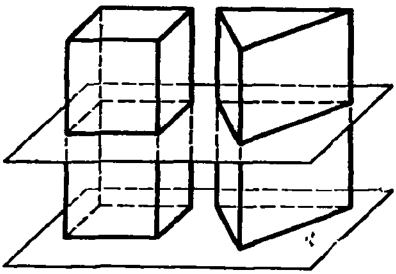
С л е д с т в и е. Если V, B и H будут числа, выражающие в соответствующих единицах объём, площадь основания и высоту призмы, то, по доказанному, можно написать:

$$V = BH.$$

89. Принцип Кавальери. Итальянский математик XVII в. Кавальери высказал без доказательства следующее утверждение:

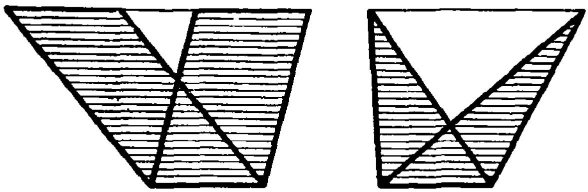
Если два тела (ограниченные плоскостями или кривыми поверхностями — всё равно) *могут быть помещены в такое положение, при котором всякая плоскость, параллельная какой-нибудь данной плоскости и пересекающая оба тела, даёт в сечении с ними равновеликие фигуры, то объёмы таких тел одинаковы.*

Это предложение может быть строго доказано, но доказательство его выходит за пределы элементарной математики, и потому мы ограничимся проверкой его на отдельных примерах.



Черт. 97.

Условиям принципа Кавальери удовлетворяют, например, две прямые призмы (треугольные или многоугольные — всё равно) с равновеликими основаниями и равными высотами (черт. 97). Такие призмы, как мы знаем, равновелики. Вместе с тем, если поставим такие призмы основаниями на какую-нибудь плоскость, то всякая плоскость, параллельная основаниям и пересекающая одну из призм, пересечёт и другую, причём в сечениях получатся равновеликие фигуры, так как фигуры эти равны основаниям, а основания равновелики. Значит, принцип Кавальери подтверждается в этом частном случае.



Черт. 98.

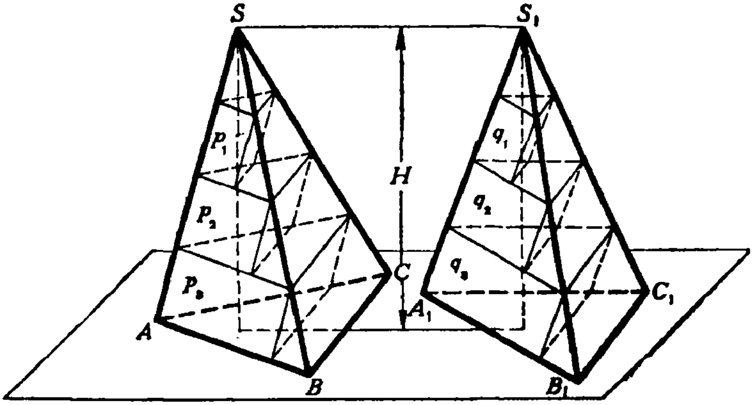
Принцип этот подтверждается также и в планиметрии в применении к площадям, а именно: *если две фигуры могут быть помещены в такое положение, что всякая прямая, параллельная какой-нибудь данной прямой, пересекающая обе фигуры, даёт в сечении с ними равные отрезки, то такие фигуры равновелики* Примером могут служить два параллелограмма или два треугольника с равными основаниями и равными высотами (черт. 98).

Объём пирамиды

90. Лемма. ***Треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами равновелики.***

Доказательство наше будет состоять из трёх частей. В первой части мы докажем равновеликость не самих пирамид, а вспомогательных тел, составленных из ряда треугольных призм, поставленных друг на друга. Во второй части мы докажем, что объёмы этих вспомогательных тел при увеличении числа составляющих их призм приближаются к объёмам пирамид как угодно близко. Наконец, в третьей части мы убедимся, что сами пирамиды должны быть равновелики.

I. Вообразим, что пирамиды поставлены основаниями на некоторую плоскость (как изображено на черт. 99), тогда их вершины будут находиться на одной прямой, параллельной плоскости оснований, и высота пирамид может быть изображена одним и тем же отрезком прямой H. Разделим эту высоту на какое-нибудь целое число n равных частей (например, на 4, как это указано на чертеже) и через точки деления проведём ряд плоскостей, параллельных плоскости оснований. Плоскости эти, пересекаясь с пирамидами, дают в сечениях ряд треугольников, причём треугольники пирамиды S будут равновелики соответствующим треугольникам пирамиды S_1 (§ 77). Поставим внутри каждой пирамиды ряд таких призм, чтобы верхними основаниями у них были треугольники сечений, боковые рёбра были параллельны ребру SA в одной пирамиде и ребру S_1A_1 в другой, а высота каждой призмы



Черт. 99.

равнялась бы $\frac{H}{n}$. Таких призм в каждой пирамиде окажется $n-1$; они образуют собой некоторое ступенчатое тело, объём которого, очевидно, меньше объёма той пирамиды, в которой призмы построены. Обозначим объёмы призм пирамиды S по порядку, начиная от вершины, буквами $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{n-1}$, а объёмы призм пирамиды S_1 — также по порядку от вершины буквами $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{n-1}$; тогда, принимая во внимание, что у каждой пары соответствующих призм (у p_1 и q_1, у p_2 и q_2 и т. д.) основания равновелики и высоты равны, мы можем написать ряд равенств:

$$p_1 = q_1, \ p_2 = q_2, \ p_3 = q_3, \ \ldots, \ p_{n-1} = q_{n-1}.$$

Сложив все равенства почленно, найдём:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1} = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_{n-1}. \qquad (1)$$

Мы доказали, таким образом, что объёмы построенных нами вспомогательных ступенчатых тел равны между собой (при всяком числе n, на которое мы делим высоту H).

II. Обозначив объёмы пирамид S и S_1 соответственно буквами V и V_1, положим, что

$$V-(p_1+p_2+p_3+\ldots+p_{n-1})=x$$

и

$$V_1-(q_1+q_2+q_3+\ldots+q_{n-1})=y,$$

откуда

$$p_1+p_2+p_3+\ldots+p_{n-1}=V-x$$

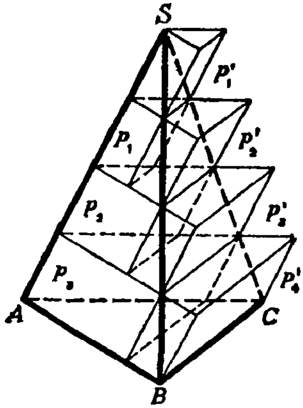
и

$$q_1+q_2+q_3+\ldots+q_{n-1}=V_1-y.$$

Тогда равенство (1) мы можем записать так:

$$V-x=V_1-y. \quad (2)$$

Предположим теперь, что число n равных частей, на которое мы делим высоту H, неограниченно возрастает; например, предположим, что, вместо того чтобы делить высоту на 4 равные части, мы разделим её на 8 равных частей, потом на 16, на 32 и т. д., и пусть каждый раз мы строим указанным образом ступенчатые тела в обеих пирамидах. Как бы ни возросло число призм, составляющих ступенчатые тела, равенство (1), а следовательно, и равенство (2) остаются в полной силе. При этом объёмы V и V_1, конечно, не будут изменяться, тогда как величины x и y, показывающие, на сколько объёмы пирамид превосходят объёмы соответствующих ступенчатых тел, будут, очевидно, всё более и более уменьшаться. Докажем, что величины x и y могут сделаться как угодно малы (другими словами, что они стремятся к нулю). Это достаточно доказать для какой-нибудь одной из двух величин x и y, например для x.



Черт. 100.

С этой целью построим для пирамиды S (черт. 100) ещё другой ряд призм, который составит тоже ступенчатое тело, но по объёму большее пирамиды. Призмы эти мы построим так же, как строили внутренние призмы, с той только разницей, что треугольники сечений мы теперь примем не за верхние основания призм, а за нижние. Вследствие этого мы получим теперь ряд призм, которые некоторой своей частью будут выступать из пирамид наружу, и потому они образуют новое ступенчатое тело с объёмом, бо́льшим, чем объём пирамиды. Таких призм будет теперь не $n-1$, как внутренних призм, а n. Обозначим их объёмы по порядку, начиная от вершины, буквами: $p'_1, p'_2, p'_3, \ldots, p'_{n-1}, p'_n$. Рассматривая чертёж, мы легко заметим, что

$$p'_1=p_1, p'_2=p_2, p'_3=p_3, \ldots, p'_{n-1}=p_{n-1}.$$

Поэтому

$$(p'_1+p'_2+p'_3+\ldots+p'_{n-1}+p'_n)-(p_1+p_2+p_3+\ldots+p_{n-1})=p'_n.$$

Так как

$$p'_1+p'_2+p'_3+\ldots+p'_{n-1}+p'_n>V,$$

а

$$p_1+p_2+p_3+p_4+\ldots+p_{n-1}<V,$$

то

$$V-(p_1+p_2+p_3+\ldots+p_{n-1})<p'_n,$$

т. е.

$$x<p'_n.$$

Но $p'_n=$ площади $ABC\cdot\frac{H}{n}$ (если ABC есть основание); поэтому

$$x<\text{площади } ABC\cdot\frac{H}{n}.$$

При неограниченном возрастании числа n величина $\frac{H}{n}$, очевидно, может быть сделана как угодно малой (стремится к нулю). Поэтому и произведение: площадь $ABC\cdot\frac{H}{n}$, в котором множимое не изменяется, а множитель стремится к нулю, тоже стремится к нулю, и так как положительная величина x меньше этого произведения, то она и подавно стремится к нулю.

То же самое рассуждение можно было бы повторить и о величине y.

Мы доказали, таким образом, что при неограниченном увеличении числа призм объёмы вспомогательных ступенчатых тел приближаются к объёмам соответствующих пирамид как угодно близко.

III. Заметив это, возьмём написанное выше равенство (2) и придадим ему такой вид:

$$V-V_1=x-y. \qquad (3)$$

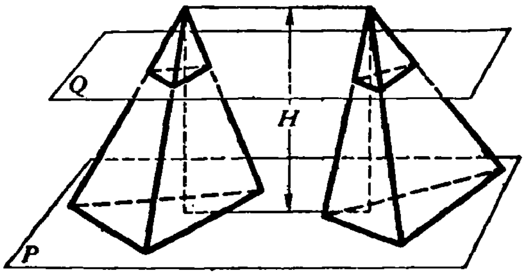
Докажем теперь, что это равенство возможно только тогда, когда $V=V_1$ и $x=y$. Действительно, разность $V-V_1$, как всякая разность постоянных величин, должна равняться постоянной величине, разность же $x-y$, как всякая разность между переменными величинами, стремящимися к нулю, должна или равняться некоторой переменной величине (стремящейся к нулю), или равняться нулю. Так как постоянная величина не может равняться переменной, то из двух возможностей надо оставить только одну: разность $x-y=0$; но тогда $V=V_1$ и $x=y$.

Мы доказали, таким образом, что рассматриваемые пирамиды равновелики [1].

---

[1] Необходимость столь сложного доказательства этой теоремы объясняется тем фактом, что два равновеликих тела нельзя так легко преобразовывать одно в другое, как это можно было делать с равновеликими многоугольниками на плоскости. Именно, если даны два равновеликих многогранника, то в общем случае оказывается невозможным разбить один из них на

Доказанная лемма очень просто выводится также из принципа Кавальери. Действительно, вообразим, что две пирамиды с равновеликими основаниями и разными высотами поставлены основаниями на какую-нибудь плоскость P (черт. 101), тогда всякая секущая плоскость Q, параллельная P, даёт в сечении с пирамидами треугольники равновеликие (§ 77); следовательно, пирамиды эти удовлетворяют условиям принципа Кавальери, и потому объёмы их должны быть одинаковы. Но это доказательство нельзя считать строгим, так как принцип Кавальери нами не был доказан.

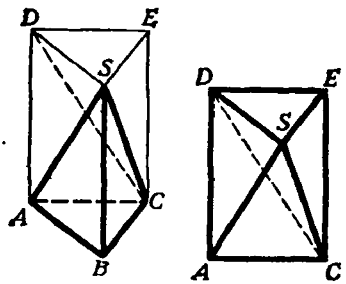


Черт. 101.

91. Теорема. ***Объём пирамиды равен произведению площади её основания на треть её высоты.***

Сначала докажем эту теорему для пирамиды треугольной, а затем и многоугольной.

1) На основании треугольной пирамиды $SABC$ (черт. 102) построим такую призму $SABCDE$, у которой высота равна высоте пирамиды, а одно боковое ребро совпадает с ребром SB. Докажем, что объём пирамиды составляет третью часть объёма этой призмы. Отделим от призмы данную пирамиду. Тогда останется четырёхугольная пирамида $SADEC$ (которая для ясности изображена отдельно). Проведём в ней секущую плоскость через вершину S и диагональ основания DC. Получившиеся от этого две треугольные пирамиды имеют общую вершину S и равные основания DEC и DAC, лежащие в одной плоскости; значит, согласно доказанной выше лемме пирамиды эти равновелики. Сравним одну из них, именно $SDEC$, с данной пирамидой. За основание пирамиды $SDEC$ можно взять $\triangle SDE$; тогда вершина её будет в точке C и высота равна высоте данной пирамиды. Так как $\triangle SDE = \triangle ABC$, то согласно той же лемме пирамиды $SDEC$ и $SABC$ равновелики.



Черт. 102.

Призма $ABCDES$ нами разбита на три равновеликие пирамиды: $SABC$, $SDEC$ и $SDAC$. (Такому разбиению, очевидно, можно подвергнуть всякую треугольную призму. Это является одним из важных свойств треугольной призмы.) Таким образом, сумма объёмов трёх пирамид, равновеликих данной, составляет объём призмы;

такие части (даже при помощи дополнений), из которых можно было бы составить другой. В частности, это невозможно для двух произвольных треугольных пирамид с равновеликими основаниями и равными высотами.

следовательно,

$$\text{объём } SABC = \frac{1}{3} \text{ объёма } SDEABC = \frac{(\text{площади } ABC) \cdot H}{3} =$$

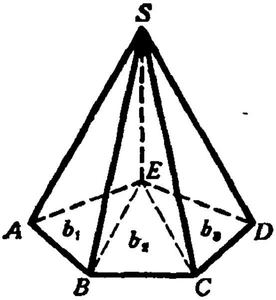
$$= (\text{площади } ABC) \cdot \frac{H}{3},$$

где H есть высота пирамиды.

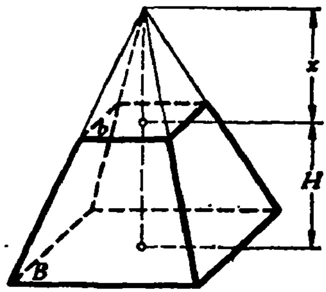
2) Через какую-нибудь вершину E (черт. 103) основания многоугольной пирамиды $SABCDE$ проведём диагонали EB и EC. Затем через ребро SE и каждую из этих диагоналей проведём секущие плоскости. Тогда многоугольная пирамида разобьётся на несколько треугольных, имеющих высоту, общую с данной пирамидой. Обозначив площади оснований треугольных пирамид через b_1, b_2, b_3 и высоту через H, будем иметь:

$$\text{объём } SABCDE = \frac{1}{3} b_1 \cdot H + \frac{1}{3} b_2 \cdot H + \frac{1}{3} b_3 \cdot H =$$

$$= (b_1 + b_2 + b_3) \cdot \frac{H}{3} = (\text{площади } ABCDE) \cdot \frac{H}{3}.$$



Черт. 103.



Черт. 104.

Следствие. Если V, B и H означают числа, выражающие в соответствующих единицах объём, площадь основания и высоту какой угодно пирамиды, то

$$V = \frac{1}{3} BH.$$

92. Теорема. ***Объём усечённой пирамиды равен сумме объёмов трёх пирамид, имеющих высоту, одинаковую с высотой усечённой пирамиды, а основаниями: одна — нижнее основание данной пирамиды, другая — верхнее основание, а площадь основания третьей пирамиды равна среднему геометрическому площадей верхнего и нижнего оснований.***

Пусть площади оснований усечённой пирамиды (черт. 104) будут B и b, высота H и объём V (усечённая пирамида может быть треугольная или многоугольная — всё равно). Требуется доказать, что

$$V=\frac{1}{3}BH+\frac{1}{3}bH+\frac{1}{3}H\sqrt{Bb}=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb}),$$

где $\sqrt{Bb}$ есть среднее геометрическое между B и b. Для доказательства на меньшем основании поместим малую пирамиду, дополняющую данную усечённую пирамиду до полной. Тогда объём усечённой пирамиды V мы можем рассматривать как разность двух объёмов полной пирамиды и верхней дополнительной.

Обозначив высоту дополнительной пирамиды буквой x, мы найдём, что

$$V=\frac{1}{3}B(H+x)-\frac{1}{3}bx=\frac{1}{3}(BH+Bx-bx)=\frac{1}{3}[BH+(B-b)x].$$

Для нахождения высоты x воспользуемся теоремой § 74, согласно которой мы можем написать уравнение:

$$\frac{B}{b}=\frac{(H+x)^2}{x^2}.$$

Для упрощения этого уравнения извлечём из обеих частей его арифметический квадратный корень:

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}}=\frac{H+x}{x}.$$

Из этого уравнения (которое можно рассматривать как пропорцию) получим:

$$x\sqrt{B}=H\sqrt{b}+x\sqrt{b},$$

откуда

$$(\sqrt{B}-\sqrt{b})x=H\sqrt{b},$$

и, следовательно,

$$x=\frac{H\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}.$$

Подставив это выражение в формулу, выведенную нами для объёма V, найдём:

$$V=\frac{1}{3}\left[BH+\frac{(B-b)H\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}\right].$$

Так как $B-b=(\sqrt{B}+\sqrt{b})(\sqrt{B}-\sqrt{b})$, то по сокращении дроби на разность $\sqrt{B}-\sqrt{b}$ получим:

$$V=\frac{1}{3}[BH+(\sqrt{B}+\sqrt{b})H\sqrt{b}]=\frac{1}{3}(BH+H\sqrt{Bb}+bH)=$$

$$=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb}),$$

т. е. получим ту формулу, которую требовалось доказать.

III. ПОДОБИЕ МНОГОГРАННИКОВ

93. Определение. Два многогранника называются **подобными**, если они имеют соответственно равные многогранные углы и соответственно подобные грани. Соответственные элементы подобных многогранников называются **сходственными**.

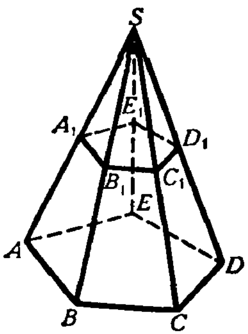
Из этого определения следует, что в подобных многогранниках:

1) двугранные углы соответственно равны и одинаково расположены, потому что многогранные углы равны;

2) сходственные рёбра пропорциональны, потому что в каждых двух подобных гранях отношение сходственных рёбер одно и то же и в каждом многограннике соседние грани имеют по общему ребру.

Возможность существования подобных многогранников доказывается следующей теоремой.

94. Теорема. ***Если в пирамиде проведём*** (черт. 105) ***секущую плоскость*** ($A_1B_1C_1D_1E_1$) ***параллельно основанию, то отсечём от неё другую пирамиду*** ($SA_1B_1C_1D_1E_1$), ***подобную данной.***



Черт. 105.

Так как $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$ и т. д., то боковые грани двух пирамид подобны; основания их также подобны (§ 74). Остаётся доказать равенство многогранных углов. Угол S у обеих пирамид общий; трёхгранные углы A_1, B_1, C_1, ... равны соответственно углам A, B, C, ..., потому что у каждой пары этих углов имеется по одному и тому же двугранному углу, расположенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными плоскими углами; так, у углов A и A_1 один и тот же двугранный угол (с ребром AS) лежит между равными плоскими углами: $SA_1E_1 = SAE$ и $SA_1B_1 = SAB$.

95. Теорема. ***Поверхности подобных многогранников относятся, как квадраты сходственных рёбер.***

Пусть P_1, P_2, P_3, ..., P_n означают площади отдельных граней одного из подобных многогранников, а p_1, p_2, p_3, ..., p_n — площади сходственных граней другого; положим ещё, что L и l будут длины двух каких-нибудь сходственных рёбер. Тогда вследствие подобия сходственных граней и пропорциональности всех сходственных рёбер будем иметь:

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{L^2}{l^2}; \quad \frac{P_2}{p_2} = \frac{L^2}{l^2}; \quad \frac{P_3}{p_3} = \frac{L^2}{l^2}; \quad \ldots; \quad \frac{P_n}{p_n} = \frac{L^2}{l^2},$$

откуда по свойству ряда равных отношений получим:

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n} = \frac{L^2}{l^2}.$$

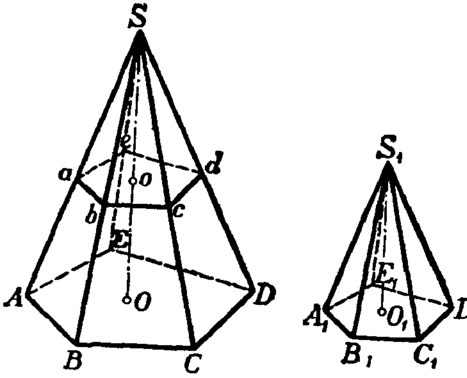
96. Теорема. ***Объёмы подобных многогранников относятся, как кубы сходственных рёбер.***

Ограничимся доказательством этой теоремы только для подобных пирамид. Пусть (черт. 106) пирамиды $SABCDE$ и $S_1A_1B_1C_1D_1E_1$ подобны. Вложим вторую пирамиду в первую так, чтобы у них совпали равные многогранные углы S и S_1.

Тогда основание

$$A_1B_1C_1D_1E_1$$

займёт некоторое положение $abcde$, причём стороны ab, bc, ...будут соответственно параллельны сторонам AB, BC, ... (вследствие того, что соответствующие плоские углы трёхгранных углов A и A_1, B и B_1 и т. д. равны). Поэтому плоскость $abcde$ параллельна $ABCDE$. Пусть SO и So—высоты двух пирамид. Тогда объём $SABCDE =$ (площади $ABCDE$) $\cdot \frac{1}{3} SO$;



Черт. 106.

объём $Sabcde =$ (площади $abcde$) $\cdot \frac{1}{3} So$.

Следовательно,

$$\frac{\text{объём } SABCDE}{\text{объём } Sabcde} = \frac{\text{площадь } ABCDE}{\text{площадь } abcde} \cdot \frac{SO}{So},$$

но

$$\frac{\text{площадь } ABCDE}{\text{площадь } abcde} = \frac{SO^2}{So^2},$$

поэтому

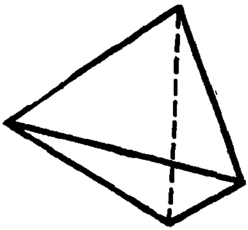
$$\frac{\text{объём } SABCDE}{\text{объём } Sabcde} = \frac{SO^3}{So^3} = \frac{SA^3}{Sa^3}.$$

IV. ПОНЯТИЕ О ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКАХ

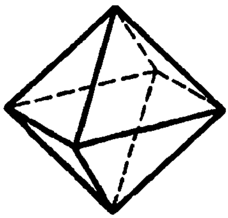
Многогранник называется **правильным**,если все его грани—равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны (таков, например, куб).Из этого определения следует,что в правильных многогранниках равны все плоские углы, все двугранные углы и все рёбра.

97. Перечисление правильных многогранников. Примем во внимание, что в многогранном угле наименьшее число граней три и что сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше $4d$ (§ 51). Каждый угол правильного треугольника равен $\frac{2}{3}d$. Если повторим $\frac{2}{3}d$ слагаемым 3, 4 и 5 раз, то получим суммы, меньшие $4d$, а если повторим $\frac{2}{3}d$ слагаемым 6 раз или более, то получим в сумме $4d$ или более. Поэтому из плоских углов, равных углам правильного треугольника, можно образовать выпуклые многогранные углы только трёх видов: трёхгранные, четырёхгранные и пятигранные. Следовательно, если гранями правильного многогранника служат правильные треугольники, то в вершине многогранника могут сходиться или 3 ребра, или 4 ребра, или 5 рёбер. Соответственно с этим имеется три вида правильных многогранников с треугольными гранями:

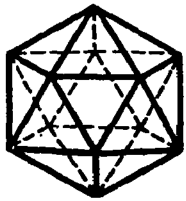
1) Правильный четырёхгранник, или **тетраэдр**, поверхность которого составлена из четырёх правильных треугольников (черт. 107). Он имеет 4 грани, 4 вершины и 6 рёбер.



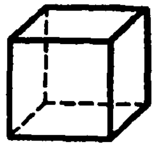
Черт. 107.



Черт. 108.



Черт. 109.



Черт. 110.

2) Правильный восьмигранник, или **октаэдр**, поверхность которого составлена из восьми правильных треугольников (черт. 108). Он имеет 8 граней, 6 вершин и 12 рёбер.

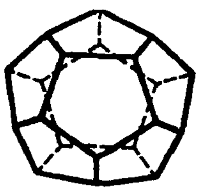
3) Правильный 20-гранник, или **икосаэдр**, образованный двадцатью правильными треугольниками (черт. 109). Он имеет 20 граней, 12 вершин и 30 рёбер.

Угол квадрата равен d, а угол правильного пятиугольника равен $\frac{6}{5}d$; повторяя эти углы слагаемым 3 раза, получаем суммы, меньшие $4d$, а повторяя их 4 раза или более, получаем $4d$ или более. Поэтому из плоских углов, равных углам квадрата или правильного пятиугольника, можно образовать только трёхгранные углы.

А поэтому, если гранями многогранника служат квадраты, то в каждой вершине могут сходиться лишь 3 ребра. Имеется единственный правильный многогранник этого рода—это правильный шестигранник, или **гексаэдр**, или куб (черт. 110). Он имеет 6 граней, 8 вершин и 12 рёбер.

Если гранями правильного многогранника служат правильные пятиугольники, то в каждой вершине могут сходиться лишь 3 ребра.

Существует единственный правильный многогранник этого рода—правильный 12-гранник, или **додекаэдр**. Он имеет 12 граней, 20 вершин и 30 рёбер (черт. 111).



Черт. 111.

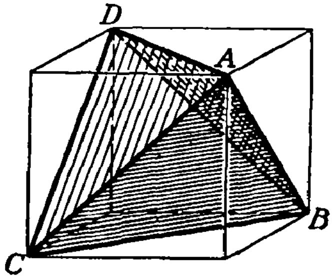
Угол правильного шестиугольника равен $\frac{4}{3}d$, поэтому из таких углов нельзя образовать даже трёхгранного угла. Из углов правильных многоугольников, имеющих более 6 сторон, подавно нельзя образовать никакого выпуклого многогранного угла.

Отсюда следует, что гранями правильного многогранника могут служить *лишь* правильные треугольники, квадраты и правильные пятиугольники.

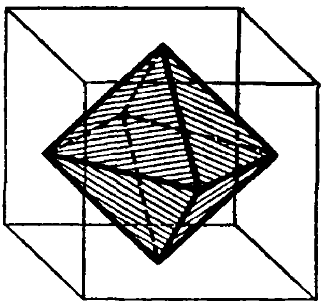
Таким образом, всего может существовать лишь пять видов правильных многогранников, указанных выше.

98. Построение правильных многогранников. Изложенные выше рассуждения о возможных видах правильных многогранников доказывают, что может существовать не более пяти видов правильных многогранников.

Но из этих рассуждений еще не вытекает, что все эти пять видов правильных многогранников действительно существуют, т. е. что



Черт. 112.



Черт. 113.

можно проведением плоскостей в пространстве осуществить построение каждого из этих пяти возможных правильных многогранников. Чтобы убедиться в существовании всех правильных многогранников, достаточно указать способ построения каждого из них. Способ построения куба указать весьма легко. Действительно, берём произвольную плоскость P и в ней какой-либо квадрат; через стороны этого квадрата проводим плоскости, перпендикулярные к плоскости P. Таких плоскостей будет четыре. Далее проводим плоскость Q, параллельную P и отстоящую от неё на расстоянии, равном стороне квадрата. Шесть полученных плоскостей образуют грани куба; двенадцать прямых — пересечения каждой пары пересекающихся плоскостей — являются рёбрами куба, а восемь точек пересечения каждой тройки пересекающихся плоскостей служат вершинами куба. В этом легко убедиться, непосредственно рассматривая полученную совокупность точек, прямых и плоскостей. Умея построить куб, легко найти способ построения всех других правильных многогранников.

Построение правильного тетраэдра. Пусть дан куб (черт. 112). Возьмём какую-нибудь его вершину, например A. В ней сходятся три грани куба, имеющие форму квадратов. В каждом из этих квадратов берём вершину, противоположную точке A. Пусть это будут вершины куба B, C и D. Точки A, B, C и D служат вершинами правильного тетраэдра. Действительно, каждый из отрезков AB, BC, CD, AD, *BD* и *AC*, очевидно, служит диагональю одной из граней куба. А потому все эти отрезки равны между собой. Отсюда следует, что в треугольной пирамиде с вершиной *A* и основанием *BCD* все грани — правильные треугольники, следовательно, эта пирамида — правильный тетраэдр. Этот тетраэдр вписан в данный куб.

Полезно заметить, что оставшиеся четыре вершины куба служат вершинами второго правильного тетраэдра, равного первому и также вписанного в данный куб.

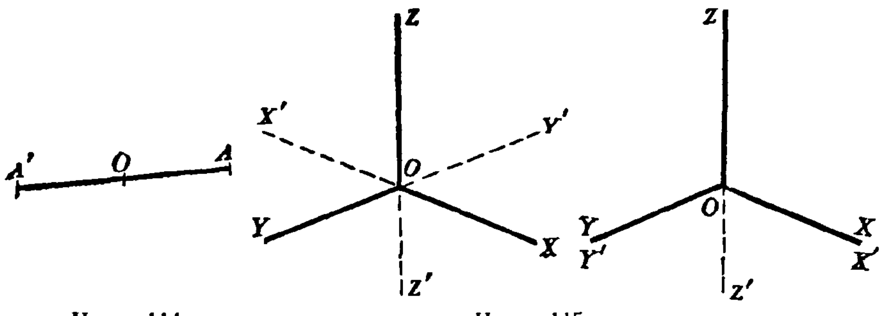
Построение октаэдра. Если в данном кубе построить центры всех его граней, то шесть полученных точек служат вершинами октаэдра. В этом легко убедиться, рассматривая чертёж 113.

Построение додекаэдра и икосаэдра. Если через каждое из 12 рёбер куба провести плоскость, не имеющую с поверхностью куба других общих точек, кроме точек того ребра, через которое она проведена, то полученные 12 плоскостей образуют грани некоторого 12-гранника. Более подробное изучение формы этого многогранника показывает, что можно так подобрать наклон этих плоскостей к граням куба, что полученный 12-гранник будет додекаэдром.

Наконец, если мы умеем построить додекаэдр, то построение икосаэдра не представляет затруднений: центры граней додекаэдра служат вершинами икосаэдра.

V. ПОНЯТИЕ О СИММЕТРИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

99. Центральная симметрия. Две фигуры называются симметричными относительно какой-либо точки *O* пространства, если каждой точке *A* одной фигуры соответствует в другой фигуре точка *A'*, расположенная на прямой *OA* по другую сторону от точки *O*, на расстоянии, равном расстоянию точки *A* от точки *O* (черт. 114). Точка *O* называется центром симметрии фигур.



Черт. 114. Черт. 115.

Пример таких симметричных фигур в пространстве мы уже встречали (§ 53), когда, продолжая за вершину рёбра и грани многогранного угла, получали многогранный угол, симметричный данному. Соответственные отрезки и углы, входящие в состав двух симметричных фигур, равны между собой. Тем не менее фигуры в целом не могут быть названы равными: их нельзя совместить одну с другой вследствие того, что порядок расположения частей в одной фигуре иной, чем в другой, как это мы видели на примере симметричных многогранных углов.

В отдельных случаях симметричные фигуры могут совмещаться, но при этом будут совпадать несоответственные их части. Например, возьмём прямой трёхгранный угол (черт. 115) с вершиной в точке O и рёбрами OX, OY, OZ.

Построим ему симметричный угол $OX'Y'Z'$. Угол $OXYZ$ можно совместить с $OX'Y'Z'$ так, чтобы ребро OX совпало с OY, а ребро OY с OX'. Если же совместить соответственные рёбра OX с OX' и OY с OY', то рёбра OZ и OZ' окажутся направленными в противоположные стороны.

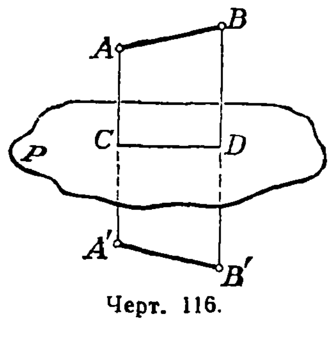
Если симметричные фигуры составляют в совокупности одно геометрическое тело, то говорят, что это геометрическое тело имеет центр симметрии. Таким образом, если данное тело имеет центр симметрии, то всякой точке, принадлежащей этому телу, соответствует симметричная точка, тоже принадлежащая данному телу. Из рассмотренных нами геометрических тел центр симметрии имеют, например: 1) параллелепипед, 2) призма, имеющая в основании правильный многоугольник с чётным числом сторон.

Правильный тетраэдр не имеет центра симметрии.

100. Симметрия относительно плоскости. Две пространственные фигуры называются симметричными относительно плоскости P, если каждой точке A в одной фигуре соответствует в другой точка A', причём отрезок AA' перпендикулярен к плоскости P и в точке пересечения с этой плоскостью делится пополам.

Теорема. ***Всякие два соответственных отрезка в двух симметричных фигурах равны между собой.***

Пусть даны две фигуры, симметричные относительно плоскости P. Выделим две какие-нибудь точки A и B первой фигуры, пусть A' и B' — соответствующие им точки второй фигуры (черт. 116, на чертеже фигуры не изображены). Пусть далее C — точка пересечения отрезка AA' с плоскостью P, D — точка пересечения отрезка BB' с той же плоскостью. Соединив прямолинейным отрезком точки C и D, получим два четырёхугольника $ABDC$ и $A'B'DC$. Так как $AC = A'C$, $BD = B'D$ и $\angle ACD = \angle A'CD$, $\angle BDC = \angle B'DC$, как прямые углы, то эти четырёхугольники равны (в чём легко убеждаемся наложением). Следовательно, $AB = A'B'$. Из этой теоремы непосредственно вытекает, что соответствующие плоские и двугранные углы двух фигур, симметричных относительно плоскости, равны между собой. Тем не менее совместить эти две фигуры одну с другой так, чтобы совместились их соответственные части, невозможно, так как порядок

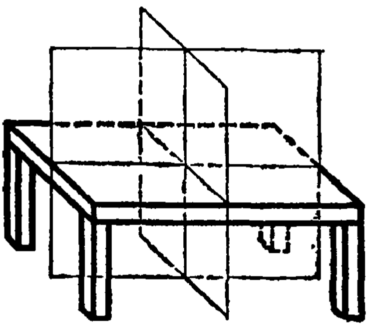


Черт. 116.

расположения частей в одной фигуре обратный тому, который имеет место в другой (это будет доказано ниже, § 102). Простейшим примером двух фигур, симметричных относительно плоскости, являются: любой предмет и его отражение в плоском зеркале; всякая фигура, симметричная со своим зеркальным отражением относительно плоскости зеркала.

Если какое-либо геометрическое тело можно разбить на две части, симметричные относительно некоторой плоскости, то эта плоскость называется плоскостью симметрии данного тела.

Геометрические тела, имеющие плоскость симметрии, чрезвычайно распространены в природе и в обыденной жизни. Тело человека и животного имеет плоскость симметрии, разделяющую его на правую и левую части.



Черт. 117.

На этом примере особенно ясно видно, что симметричные фигуры нельзя совместить. Так, кисти правой и левой рук симметричны, но совместить их нельзя, что можно видеть хотя бы из того, что одна и та же перчатка не может подходить и к правой и к левой руке. Большое число предметов домашнего обихода имеет плоскость симмѐтрии: стул, обеденный стол, книжный шкаф, диван и др. Некоторые, как например обеденный стол, имеют даже не одну, а две плоскости симметрии (черт. 117).

Обычно, рассматривая предмет, имеющий плоскость симметрии, мы стремимся занять по отношению к нему такое положение, чтобы плоскость симметрии нашего тела, или по крайней мере нашей головы, совпала с плоскостью симметрии самого предмета. В этом случае симметричная форма предмета становится особенно заметной.

101. Симметрия относительно оси. Ось симметрии второго порядка. Две фигуры называются симметричными относительно оси l (ось — прямая линия), если каждой точке A первой фигуры соответствует точка A' второй фигуры, так что отрезок AA' перпендикулярен к оси l, пересекается с нею и в точке пересечения делится пополам. Сама ось l называется осью симметрии второго порядка.

Из этого определения непосредственно следует, что если два геометрических тела, симметричных относительно какой-либо оси, пересечь плоскостью, перпендикулярной к этой оси, то в сечении получатся две плоские фигуры, симметричные относительно точки пересечения плоскости с осью симметрии тел.

Отсюда далее легко вывести, что два тела, симметричных относительно оси, можно совместить одно с другим, вращая одно из них на 180° вокруг оси симметрии. В самом деле, вообразим все возможные плоскости, перпендикулярные к оси симметрии.

Каждая такая плоскость, пересекающая оба тела, содержит две фигуры, симметричные относительно точки встречи плоскости с осью симметрии тел. Если заставить скользить секущую плоскость саму по себе, вращая её вокруг оси симметрии тела на 180°, то первая фигура совпадает со второй.

Это справедливо для любой секущей плоскости. Вращение же всех сечений тела на 180° равносильно повороту всего тела на 180° вокруг оси симметрии. Отсюда и вытекает справедливость нашего утверждения.

Если после вращения пространственной фигуры вокруг некоторой прямой на 180° она совпадает сама с собой, то говорят, что фигура имеет эту прямую своею осью симметрии второго порядка.

Название „ось симметрии второго порядка" объясняется тем, что при полном обороте вокруг этой оси тело будет в процессе вращения дважды принимать положение, совпадающее с исходным (считая и исходное). Примерами геометрических тел, имеющих ось симметрии второго порядка, могут служить: 1) правильная пирамида с чётным числом боковых граней; осью её симметрии служит её высота;

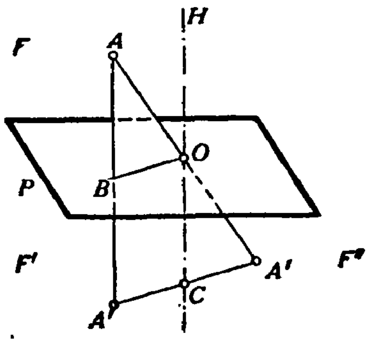
2) прямоугольный параллелепипед; он имеет три оси симметрии: прямые, соединяющие центры его противоположных граней;

3) правильная призма с чётным числом боковых граней. Осью её симметрии служит каждая прямая, соединяющая центры любой пары её противоположных граней (боковых граней и двух оснований призмы). Если число боковых граней призмы равно $2k$, то число таких осей симметрии будет $k+1$. Кроме того, осью симметрии для такой призмы служит каждая прямая, соединяющая середины её противоположных боковых рёбер. Таких осей симметрии призма имеет k.

Таким образом, правильная $2k$-гранная призма имеет $2k+1$ осей симметрии.

102. Зависимость между различными видами симметрии в пространстве. Между различными видами симметрии в пространстве — осевой, плоскостной и центральной — существует зависимость, выражаемая следующей теоремой.

Теорема. ***Если фигура F симметрична с фигурой F' относительно плоскости P и в то же время симметрична с фигурой F'' относительно точки O, лежащей в плоскости P, то фигуры F' и F'' симметричны относительно оси, проходящей через точку O и перпендикулярной к плоскости P.***



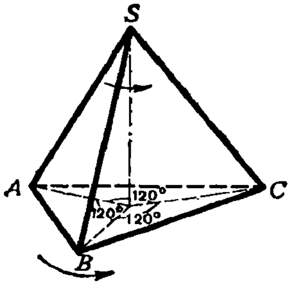
Черт. 118.

Возьмём какую-нибудь точку A фигуры F (черт. 118). Ей соответствует точка A' фигуры F' и точка A'' фигуры F'' (сами фигуры F, F' и F'' на чертеже не изображены).

Пусть B — точка пересечения отрезка AA' с плоскостью P. Проведём плоскость через точки A, A' и O. Эта плоскость будет перпендикулярна к плоскости P, так как проходит через прямую AA', перпендикулярную к этой плоскости. В плоскости $AA'O$ проведём прямую OH, перпендикулярную к OB. Эта прямая OH будет перпендикулярна и к плоскости P. Пусть далее C — точка пересечения прямых $A'A''$ и OH.

В треугольнике $AA'A''$ отрезок BO соединяет середины сторон AA' и AA'', следовательно, $BO \parallel A'A''$, но $BO \perp OH$, значит, $A'A'' \perp OH$. Далее, так как O — середина стороны AA'' и $CO \parallel AA'$, то $A'C = A''C$. Отсюда заключаем, что точки A' и A'' симметричны относительно оси OH. То же самое справедливо и для всех других точек фигуры. Значит, наша теорема доказана. Из этой теоремы непосредственно следует, что две фигуры, симметричные относительно плоскости, не могут быть совмещены так, чтобы совместились их соответственные части. В самом деле, фигура F' совмещается с F'' путём вращения вокруг оси OH на 180°. Но фигуры F'' и F не могут быть совмещены как симметричные относительно точки, следовательно, фигуры F и F' также не могут быть совмещены.

103. Оси симметрии высших порядков. Фигура, имеющая ось симметрии, совмещается сама с собой после поворота вокруг оси симметрии на угол в 180°. Но возможны случаи, когда фигура приходит к совмещению с исходным положением после поворота вокруг некоторой оси на угол, меньший 180°. Таким образом, если тело сделает полный оборот вокруг этой оси, то в процессе вращения оно несколько раз совместится со своим первоначальным положением. Такая ось вращения называется о с ь ю с и м м е т р и и в ы с ш е г о п о р я д к а, причём число положений тела, совпадающих с первоначальным, называется порядком оси симметрии. Эта ось может и не совпадать с осью симметрии второго порядка. Так, правильная треугольная пирамида не имеет оси симметрии второго порядка, но её высота служит для неё осью симметрии третьего порядка. В самом деле, после поворота этой пирамиды вокруг высоты на угол в 120° она совмещается сама с собой (черт. 119). При вращении пирамиды вокруг высоты она может занимать три положения, совпадающие с исходным, считая и исходное. Легко заметить, что всякая ось симметрии чётного порядка есть в то же время ось симметрии второго порядка.



Черт. 119.

Примеры осей симметрии высших порядков:

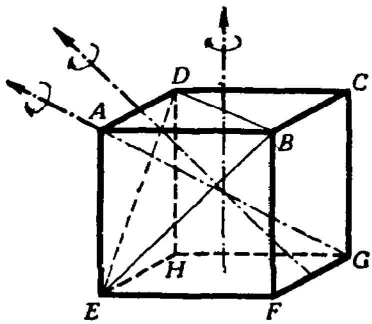
1) Правильная n-угольная пирамида имеет ось симметрии n-го порядка. Этой осью служит высота пирамиды.

2) Правильная n-угольная призма имеет ось симметрии n-го порядка. Этой осью служит прямая, соединяющая центры оснований призмы.

104. Симметрия куба. Как и для всякого параллелепипеда, точка пересечения диагоналей куба есть центр его симметрии.

Куб имеет девять плоскостей симметрии: шесть диагональных плоскостей и три плоскости, проходящие через середины каждой четвёрки его параллельных рёбер.

Куб имеет девять осей симметрии вторoго порядка: шесть прямых, соединяющих середины его противоположных рёбер, и три прямые, соединяющие центры противоположных граней (черт. 120). Эти последние прямые являются осями симметрии четвёртого порядка. Кроме того, куб имеет четыре оси симметрии третьего порядка, которые являются его диагоналями. В самом деле, диагональ куба AG (черт. 120), очевидно, одинаково наклонена к рёбрам AB, AD и AE, а эти рёбра одинаково наклонены одно к другому. Если соединить точки B, D и E, то получим правильную треугольную пирамиду $ADBE$, для которой диагональ куба AG служит высотой. Когда при вращении вокруг высоты эта пирамида будет совмещаться сама с собой, весь куб будет совмещаться со своим исходным положением. Других осей симметрии, как нетрудно убедиться, куб не имеет. Посмотрим, сколькими



Черт. 120.

различными способами куб может быть совмещён сам с собой. Вращение вокруг обыкновенной оси симметрии даёт одно положение куба, отличное от исходного, при котором куб в целом совмещается сам с собой.

Вращение вокруг оси третьего порядка даёт два таких положения, и вращение вокруг оси четвёртого порядка — три таких положения. Так как куб имеет шесть осей второго порядка (это обыкновенные оси симметрии), четыре оси третьего порядка и три оси четвёртого порядка, то имеются $6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 23$ положения куба, отличные от исходного, при которых он совмещается сам с собой.

Легко убедиться непосредственно, что все эти положения отличны одно от другого, а также и от исходного положения куба. Вместе с исходным положением они составляют 24 способа совмещения куба с самим собой.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Ребро данного куба равно a. Найти ребро другого куба, объём которого вдвое более объёма данного куба.

З а м е ч а н и е. Эта **задача об удвоении куба**, известная с древних времён, легко решается вычислением (именно: $x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2} = a \cdot 1{,}25992\ldots$), но построением (с помощью циркуля и линейки) она решена быть не может, так как формула для неизвестного содержит радикал третьей степени из числа, не являющегося кубом рационального числа.

2. Вычислить поверхность и объём прямой призмы, у которой основание — правильный треугольник, вписанный в круг радиуса $r = 2$ *м*, а высота равна стороне правильного шестиугольника, описанного около того же круга.

3. Определить поверхность и объём правильной восьмиугольной призмы, у которой высота $h=6$ *м*, а сторона основания $a=8$ *см*.

4. Определить боковую поверхность и объём правильной шестиугольной пирамиды, у которой высота равна 1 *м*, а апофема составляет с высотой угол в 30°.

5. Вычислить объём треугольной пирамиды, у которой каждое боковое ребро равно l, а стороны основания суть a, b и c.

6. Дан трёхгранный угол $SABC$, у которого все три плоских угла прямые. На его рёбрах отложены длины: $SA=a$; $SB=b$ и $SC=c$. Через точки A, B и C проведена плоскость. Определить объём пирамиды $SABC$.

7. Высота пирамиды равна h, а основание — правильный шестиугольник со стороной a. На каком расстоянии x от вершины пирамиды следует провести плоскость, параллельную основанию, чтобы объём образовавшейся усечённой пирамиды равнялся V?

8. Определить объём правильного тетраэдра с ребром a.

9. Определить объём октаэдра с ребром a.

10. Усечённая пирамида, объём которой $V=1465$ *см*^{3}, имеет основаниями правильные шестиугольники со сторонами: $a=23$ *см* и $b=17$ *см*. Вычислить высоту этой пирамиды.

11. Объём V усечённой пирамиды равен 10,5 *м*^{3}, высота $h=\sqrt{3}$ *м* и сторона a правильного шестиугольника, служащего нижним основанием, равна 2 *м*. Вычислить сторону правильного шестиугольника, служащего верхним основанием.

12. На каком расстоянии от вершины S пирамиды $SABC$ надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы отношение объёмов частей, на которые рассекается этой плоскостью пирамида, равнялось m?

13. Пирамида с высотой h разделена плоскостями, параллельными основанию, на три части, причём объёмы этих частей находятся в отношении $m:n:p$. Определить расстояние этих плоскостей до вершины пирамиды.

14. Сумма объёмов двух подобных многогранников равна V, а отношение сходственных рёбер равно $m:n$. Определить их объёмы.

15. Разделить усечённую пирамиду плоскостью, параллельной основаниям B и b, на две части, чтобы объёмы находились в отношении $m:n$.

16. Найти центр, оси и плоскости симметрии фигуры, состоящей из плоскости и пересекающей её прямой, не перпендикулярной к этой плоскости.

Ответ: центр симметрии — точка пересечения прямой с плоскостью; плоскость симметрии — плоскость, перпендикулярная данной, проходящая через данную прямую; осью симметрии служит прямая, лежащая в данной плоскости и перпендикулярная к данной прямой.

17. Найти центр, оси и плоскости симметрии фигуры, состоящей из двух пересекающихся прямых.

Ответ: фигура имеет две плоскости симметрии и три оси симметрии (указать какие).

ГЛАВА ЧЕТВЁРТАЯ

КРУГЛЫЕ ТЕЛА

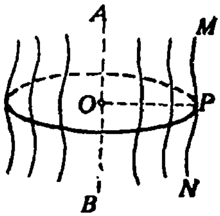
I. ЦИЛИНДР И КОНУС

105. Поверхность вращения. Поверхностью вращения называется поверхность, которая получается от вращения какой-нибудь линии (MN, черт. 121), называемой **образующей**, вокруг неподвижной прямой (AB), называемой **осью**, при этом предполагается, что образующая (MN) при своём вращении неизменно связана с осью (AB).

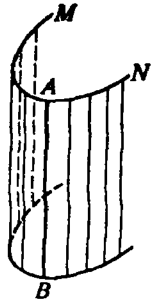
Возьмём на образующей какую-нибудь точку P и опустим из неё на ось перпендикуляр PO. Очевидно, что при вращении не изменяются ни длина этого перпендикуляра, ни величина угла AOP, ни положение точки O. Поэтому каждая точка образующей описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна к оси AB и центр которой лежит на пересечении этой плоскости с осью. Отсюда следует:

Плоскость, перпендикулярная к оси, пересекаясь с поверхностью вращения, даёт в сечении окружность.

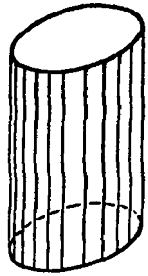
Всякая секущая плоскость, проходящая через ось, называется **меридиональной** плоскостью, а линия её пересечения с поверхностью вращения — **меридианом**. Все меридианы равны между собой, потому что при вращении каждый из них проходит через то положение, в котором ранее был всякий другой меридиан.



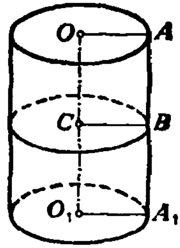
Черт. 121.



Черт. 122.



Черт. 123.



Черт. 124.

106. Цилиндрическая поверхность. Цилиндрической поверхностью называется поверхность, производимая движением прямой (AB, черт. 122), перемещающейся в пространстве параллельно данной прямой и пересекающей при этом данную линию (MN). Прямая AB называется **образующей**, *а линия MN* — **направляющей**.

107. Цилиндр. Цилиндром называется тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями (черт. 123).

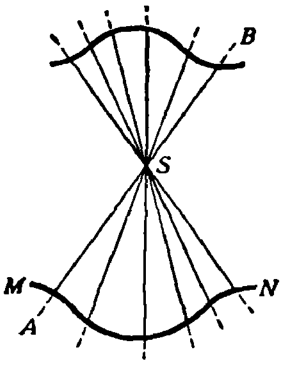
Часть цилиндрической поверхности, заключённая между плоскостями, называется **боковой поверхностью**, а части плоскостей, отсекаемые этой поверхностью, — **основаниями** цилиндра. Расстояние между плоскостями оснований есть **высота** цилиндра. Цилиндр называется **прямым** или **наклонным**, смотря по тому, перпендикулярны или наклонны к основаниям его образующие.

Прямой цилиндр (черт. 124) называется **круговым**, если его основания — круги. Такой цилиндр можно рассматривать как тело, происходящее от вращения прямоугольника OAA_1O_1 вокруг стороны OO_1 как оси; при этом сторона AA_1 описывает боковую поверхность, а стороны OA и O_1A_1 — круги оснований. Всякий отрезок BC, параллельный OA, описывает также круг, плоскость которого перпендикулярна к оси. Отсюда следует:

Сечение прямого кругового цилиндра плоскостью, параллельной основаниям, есть круг.

В элементарной геометрии рассматривается только прямой круговой цилиндр; для краткости его называют просто **ц и л и н д р о м.**

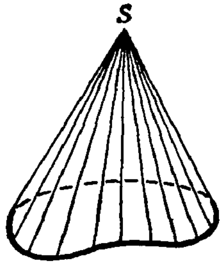
Иногда приходится рассматривать такие призмы, основания которых — многоугольники, вписанные в основания цилиндра или описанные около них, а высоты равны высоте цилиндра; такие призмы называются **вписанными** в цилиндр или **описанными** около него.



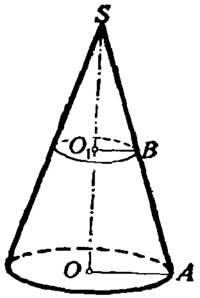
Черт. 125.

108. Коническая поверхность. Конической поверхностью называется поверхность, производимая движением прямой (AB, черт. 125), перемещающейся в пространстве так, что она при этом постоянно проходит через неподвижную точку (S) и пересекает данную линию (MN). Прямая AB называется **образующей,** линия MN — **направляющей,** а точка S — **вершиной конической поверхности.**

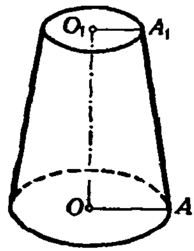
109. Конус. Конусом называется тело, ограниченное частью конической поверхности, расположенной по одну сторону от вершины, и плоскостью, пересекающей все образующие по ту же сторону от вершины (черт. 126). Часть конической поверхности, ограниченная этой плоскостью, называется **боковой поверхностью,** а часть плоскости, отсекаемая боковой поверхностью, — **основанием** конуса. Перпендикуляр, опущенный из вершины на плоскость основания, называется **высотой** конуса.



Черт. 126.



Черт. 127.



Черт. 128.

Конус называется **прямым круговым,** если его основание есть круг, а высота проходит через центр основания (черт. 127). Такой конус можно рассматривать как тело, происходящее от вращения прямоугольного треугольника SOA вокруг катета SO как оси. При этом гипотенуза SA описывает боковую поверхность, а катет OA — основание конуса. Всякий отрезок BO_1, параллельный OA, описывает при вращении круг, плоскость которого перпендикулярна к оси. Отсюда следует:

Сечение прямого кругового конуса плоскостью, параллельной основанию, есть круг.

В элементарной геометрии рассматривается только прямой круговой конус, который для краткости называется просто конусом.

Иногда приходится рассматривать такие пирамиды, основания которых суть многоугольники, вписанные в основание конуса или описанные около него, а вершина совпадает с вершиной конуса. Такие пирамиды называются **вписанными** в конус или **описанными** около него.

110. Усечённый конус. Так называется часть полного конуса, заключённая между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

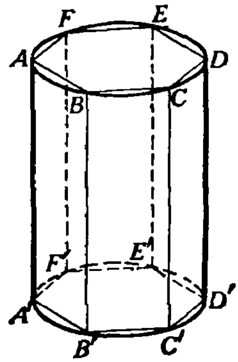
Круги, по которым параллельные плоскости пересекают конус, называются **основаниями** усечённого конуса.

Усечённый конус (черт. 128) можно рассматривать как тело, происходящее от вращения прямоугольной трапеции OAA_1O_1 вокруг стороны OO_1, перпендикулярной к основаниям трапеции.

Поверхность цилиндра и конуса

111. Определения. Боковые поверхности цилиндра и конуса принадлежат к поверхностям **кривым**, т. е. к таким, никакая часть которых не может совместиться с плоскостью. Поэтому мы должны особо определить, что надо разуметь под величиной боковой поверхности цилиндра или конуса, когда сравнивают эти поверхности с плоской единицей площади. Мы будем придерживаться следующих определений:

1) *За величину боковой поверхности цилиндра принимают предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной в этот цилиндр правильной призмы, когда число сторон правильного многоугольника, вписанного в основание, неограниченно удваивается* (и, следовательно, площадь каждой боковой грани неограниченно убывает).



Черт. 129.

2) *За величину боковой поверхности конуса* (полного или усечённого) *принимается предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной в этот конус правильной пирамиды* (полной или усечённой), *когда число сторон правильного многоугольника, вписанного в основание, неограниченно удваивается* (и, следовательно, площадь каждой боковой грани неограниченно убывает).

112. Теорема. ***Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту.***

Впишем в цилиндр (черт. 129) какую-нибудь правильную призму. Обозначим буквами p и H числа, выражающие длины периметра основания и высоты этой призмы. Тогда боковая поверхность её выразится произведением $p \cdot H$. Предположим теперь, что число сторон вписанного в основание многоугольника неограниченно возрастает.

Тогда периметр p будет стремиться к пределу, принимаемому за длину C окружности основания, а высота H останется без изменения; следовательно, боковая поверхность призмы, равная всегда произведению $p \cdot H$, будет стремиться к пределу $C \cdot H$. Этот предел и принимается за величину боковой поверхности цилиндра. Обозначив боковую поверхность цилиндра буквой S, можем написать:

$$S = C \cdot H.$$

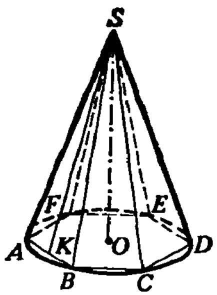
113. Следствия. 1) Если R обозначает радиус основания цилиндра, то $C = 2\pi R$, поэтому боковая поверхность цилиндра выразится формулой:

$$S = 2\pi R \cdot H.$$

2) Чтобы получить полную поверхность цилиндра, достаточно приложить к боковой поверхности сумму площадей двух оснований, поэтому, обозначая полную поверхность через T, будем иметь:

$$T = 2\pi RH + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi R(H + R).$$

114. Теорема. ***Боковая поверхность конуса равна произведению длины окружности основания на половину образующей.***



Черт. 130.

Впишем в конус (черт. 130) какую-нибудь правильную пирамиду и обозначим буквами p и l числа, выражающие длины периметра основания и апофемы этой пирамиды. Тогда боковая поверхность её выразится произведением $\frac{1}{2} p \cdot l$. Предположим теперь, что число сторон вписанного в основание многоугольника неограниченно возрастает. Тогда периметр p будет стремиться к пределу, принимаемому за длину C окружности основания, а апофема l будет иметь пределом образующую конуса (так как из $\triangle SAK$ следует, что $SA - SK < AK$); значит, если образующую конуса обозначим буквой L, то боковая поверхность вписанной пирамиды, постоянно равная $\frac{1}{2} p \cdot l$, будет стремиться к пределу $\frac{1}{2} C \cdot L$. Этот предел и принимается за величину боковой поверхности конуса. Обозначив боковую поверхность конуса буквой S, можем написать:

$$S = \frac{1}{2} C \cdot L = C \cdot \frac{1}{2} L.$$

115. Следствия 1) Так как $C = 2\pi R$, то боковая поверхность конуса выразится формулой:

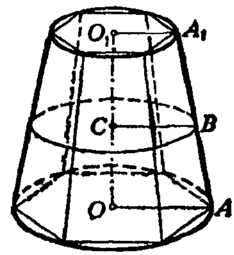
$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot L = \pi RL.$$

2) Полную поверхность конуса получим, если боковую поверхность сложим с площадью основания; поэтому, обозначая полную поверхность через T, будем иметь:

$$T = \pi RL + \pi R^2 = \pi R(L + R).$$

116. Теорема. ***Боковая поверхность усечённого конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.***

Впишем в усечённый конус (черт. 131) какую-нибудь правильную усечённую пирамиду и обозначим буквами p, p_1 и l числа, выражающие в одинаковых линейных единицах длины периметров нижнего и верхнего оснований и апофемы этой пирамиды. Тогда боковая поверхность вписанной пирамиды равна $\frac{1}{2}(p + p_1)l$.



Черт. 131.

При неограниченном возрастании числа боковых граней вписанной пирамиды периметры p и p_1 стремятся к пределам, принимаемым за длины C и C_1 окружностей оснований, а апофема l имеет пределом образующую L усечённого конуса. Следовательно, величина боковой поверхности вписанной пирамиды стремится при этом к пределу, равному $\frac{1}{2}(C + C_1)L_1$. Этот предел и принимается за величину боковой поверхности усечённого конуса. Обозначив боковую поверхность усечённого конуса буквой S, будем иметь:

$$S = \frac{1}{2}(C + C_1)L.$$

117. Следствия. 1) Если R и R_1 означают радиусы окружностей нижнего и верхнего оснований, то боковая поверхность усечённого конуса будет:

$$S = \frac{1}{2}(2\pi R + 2\pi R_1)L = \pi(R + R_1)L.$$

2) Если в трапеции OO_1A_1A (черт. 131), от вращения которой получается усечённый конус, проведём среднюю линию BC, то получим:

$$BC = \frac{1}{2}(OA + O_1A_1) = \frac{1}{2}(R + R_1),$$

откуда

$$R + R_1 = 2BC.$$

Следовательно,

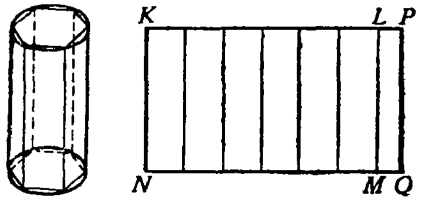
$$S = 2\pi BC \cdot L,$$

т. е. *боковая поверхность усечённого конуса равна произведению длины окружности среднего сечения на образующую.*

3) Полная поверхность T усечённого конуса выразится так:

$$T=\pi(R^2+R_1^2+RL+R_1L).$$

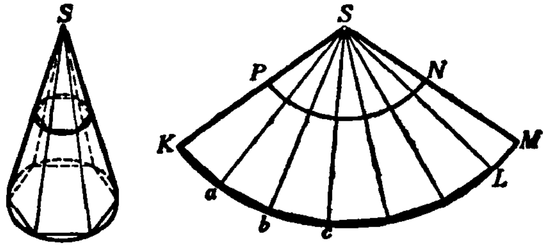
118. Развёртка цилиндра и конуса. Впишем в цилиндр (черт. 132) какую-нибудь правильную призму и затем вообразим, что боковая её поверхность разрезана вдоль бокового ребра. Очевидно, что, вращая её грани вокруг рёбер, мы можем р а з в е р н у т ь эту поверхность в плоскую фигуру без разрыва и без складок. Тогда получится то, что называется **развёрткой** боковой поверхности призмы. Она представляет собой прямоугольник $KLMN$, составленный из стольких отдельных прямоугольников, сколько в призме боковых граней. Основание его MN равно периметру основания призмы, а высота KN есть высота призмы.



Черт. 132.

Вообразим теперь, что число боковых граней вписанной призмы неограниченно удваивается; тогда её развёртка будет всё удлиняться, приближаясь к предельному прямоугольнику $KPQN$, у которого длина основания равна длине окружности основания цилиндра, а высота есть высота цилиндра. Этот прямоугольник называется **развёрткой** боковой поверхности цилиндра.

Подобно этому вообразим, что в конус вписана какая-нибудь правильная пирамида (черт. 133). Мы можем разрезать её боковую поверхность по одному из рёбер и затем, повёртывая грани вокруг рёбер, получить её плоскую развёртку в виде многоугольного сектора SKL, составленного из стольких равнобедренных треугольников, сколько в пирамиде боковых граней. Отрезки SK, Sa, Sb, ... равны боковому ребру пирамиды (или образующей конуса), а длина ломаной $Kab...L$ равна периметру основания пирамиды. При неограниченном удвоении числа боковых граней вписанной пирамиды развёртка её увеличивается, приближаясь к предельному сектору SKM, у которого длина дуги KM равна длине окружности основания, а радиус SK равен образующей конуса. Этот сектор называется **развёрткой** боковой поверхности конуса.



Черт. 133.

Подобно этому можно получить развёртку боковой поверхности усечённого конуса (черт. 133) в виде части кругового кольца $KMNP$. Легко видеть, что боковая поверхность цилиндра или конуса равна площади соответствующей развёртки.

Объём цилиндра и конуса

119. Определения. 1) ***За величину объёма цилиндра принимается предел, к которому стремится объём правильной призмы, вписанной в цилиндр, когда число боковых граней этой призмы неограниченно удваивается.***

2) ***За величину объёма конуса*** (полного или усечённого) ***принимается предел, к которому стремится объём правильной пирамиды*** (полной или усечённой), ***когда число боковых граней пирамиды неограниченно удваивается.***

120. Теоремы. 1) ***Объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту.***

2) ***Объём конуса равен произведению площади основания на треть высоты.***

Впишем в цилиндр какую-нибудь правильную призму, а в конус — какую-нибудь правильную пирамиду; тогда, обозначив площадь основания призмы или пирамиды буквой B_1, высоту их буквой H и объём — V_1, получим:

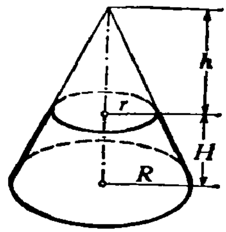
$$\text{для призмы } V_1 = B_1H; \text{ для пирамиды } V_1 = \frac{1}{3}B_1H.$$

Вообразим теперь, что число боковых граней призмы и пирамиды неограниченно удваивается. Тогда B_1 будет иметь пределом площадь B основания цилиндра или конуса, а высота H остаётся без изменения; значит, произведения B_1H и $\frac{1}{3}$ B_1H будут стремиться к пределам BH и $\frac{1}{3}BH$, и потому объём V цилиндра или конуса будет:

$$\text{для цилиндра } V = BH; \text{ для конуса } V = \frac{1}{3}BH.$$

121. Следствие. Если радиус основания цилиндра или конуса обозначим через R, то $B = \pi R^2$, поэтому объём цилиндра $V = \pi R^2H$; объём конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

122. Теорема. ***Объём усечённого конуса равен сумме объёмов трёх конусов, имеющих одинаковую высоту с усечённым конусом, а основаниями: один — нижнее основание этого конуса, другой — верхнее, третий — круг, площадь которого есть среднее геометрическое между площадями верхнего и нижнего оснований.***



Черт. 134.

Теорему эту докажем совершенно так же, как раньше мы доказали теорему для объёма усечённой пирамиды (§ 92).

На верхнем основании усечённого конуса (черт. 134) поместим такой малый конус (с высотой h), который дополняет данный усечённый конус до полного. Тогда объём V усечённого конуса можно рассматривать как разность объёмов полного конуса и дополнительного. Поэтому

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2(H+h)-\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi[R^2H+(R^2-r^2)h].$$

Из подобия треугольников находим:

$$\frac{R}{r}=\frac{H+h}{h},$$

откуда получаем:

$$Rh=rH+rh;\quad (R-r)h=rH;\quad h=\frac{rH}{R-r}.$$

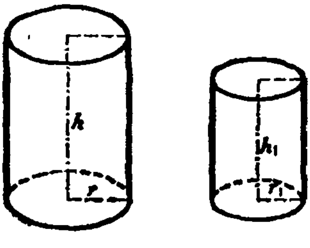
Поэтому

$$V=\frac{1}{3}\pi[R^2H+(R+r)]rH]=\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)=$$
$$=\frac{1}{3}\pi R^2H+\frac{1}{3}\pi RrH+\frac{1}{3}\pi r^2H.$$

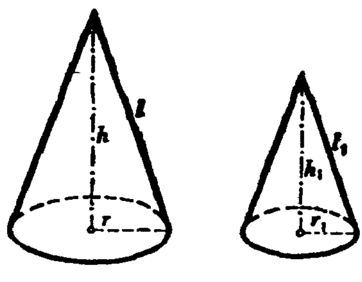
Так как πR^2 выражает площадь нижнего основания, πr^2 — площадь верхнего основания и $\pi Rr=\sqrt{\pi R^2\cdot\pi r^2}$ есть среднее геометрическое между площадями верхнего и нижнего оснований, то полученная нами формула вполне подтверждает теорему.

Подобные цилиндры и конусы

123. Определение. Два цилиндра или конуса называются **подобными**, если они произошли от вращения подобных прямоугольников или прямоугольных треугольников вокруг сходственных сторон.



Черт. 135.



Черт. 136.

Пусть (черт. 135 и 136) h и h_1 будут высоты двух подобных цилиндров или конусов, r и r_1 — радиусы их оснований, l и l_1 — образующие; тогда согласно определению

$$\frac{r}{r_1}=\frac{h}{h_1}\text{ и }\frac{r}{r_1}=\frac{l}{l_1},$$

откуда (по свойству равных отношений) находим:

$$\frac{r+h}{r_1+h_1}=\frac{r}{r_1} \text{ и } \frac{r+l}{r_1+l_1}=\frac{r}{r_1}.$$

Заметив эти пропорции, докажем следующую теорему:

124. Теорема. ***Боковые и полные поверхности подобных цилиндров или конусов относятся, как квадраты радиусов или высот; объёмы — как кубы радиусов или высот.***

Пусть S, T и V будут соответственно боковая поверхность, полная поверхность и объём одного цилиндра или конуса; S_1, T_1 и V_1 — те же величины для другого цилиндра или конуса, подобного первому. Тогда будем иметь для цилиндров:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{2\pi rh}{2\pi r_1 h_1}=\frac{rh}{r_1 h_1}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{T}{T_1}=\frac{2\pi r(r+h)}{2\pi r_1(r_1+h_1)}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{r+h}{r_1+h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{V}{V_1}=\frac{\pi r^2 h}{\pi r_1^2 h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^3}{r_1^3}=\frac{h^3}{h_1^3};$$

для конусов

$$\frac{S}{S_1}=\frac{\pi rl}{\pi r_1 l_1}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{l}{l_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{T}{T_1}=\frac{\pi r(r+l)}{\pi r(r_1+l_1)}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{r+l}{r_1+l_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{V}{V_1}=\frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^3}{r_1^3}=\frac{h^3}{h_1^3}.$$

II. ШАР

Сечение шара плоскостью

125. Определение. Тело, происходящее от вращения полукруга вокруг диаметра, называется **шаром**, а поверхность, образуемая при этом полуокружностью, называется **шаровой** или **сферической** поверхностью. Можно также сказать, что эта поверхность есть геометрическое место точек, одинаково удалённых от одной и той же точки (называемой **центром** шара).

Отрезок, соединяющий центр с какой-нибудь точкой поверхности, называется **радиусом**, а отрезок, соединяющий две точки поверхности и проходящий через центр, называется **диаметром** шара. Все радиусы одного шара равны между собой; всякий диаметр равен двум радиусам.

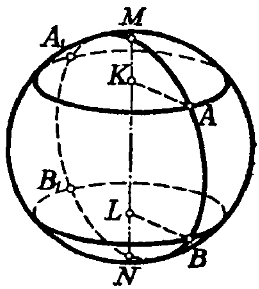
Два шара одинакового радиуса равны, потому что при вложении они совмещаются.

в точку касания. Так как, по определению, точка A есть единственная общая точка у плоскости с шаровой поверхностью, то всякая другая точка плоскости лежит вне шаровой поверхности и, следовательно, отстоит от центра на большее расстояние, чем A; таким образом, отрезок OA есть кратчайшее расстояние точки O от плоскости P, т. е. OA есть перпендикуляр к P.

Прямая, имеющая одну общую точку с шаровой поверхностью, называется касательной к шару. Легко видеть, что существует бесчисленное множество прямых, касающихся шара в данной точке. Действительно, всякая прямая (AC, черт. 140), лежащая в плоскости, касательной к шару, в данной точке (A) и проходящая через точку касания (A), есть касательная к шару в этой точке.

Поверхность шара и его частей

134. Определения. 1) Часть шаровой поверхности (черт. 141), отсекаемая от неё какой-нибудь плоскостью (AA_1), называтся **сегментной поверхностью.**



Черт. 141.

Окружность AA_1 называется **основанием,** а отрезок KM радиуса, перпендикулярного к плоскости сечения,— **высотой** сегментной поверхности.

2) Часть шаровой поверхности, заключённая между двумя параллельными секущими плоскостями (AA_1 и BB_1), называется **шаровым поясом** или **зоной.**

Окружности сечения AA_1 и BB_1 называются **основаниями,** а расстояние KL между параллельными плоскостями—**высотой** пояса.

Шаровой пояс и сегментную поверхность можно рассматривать как поверхность вращения, в то время как полуокружность $MABN$, вращаясь вокруг диаметра MN, описывает шаровую поверхность, часть её AB описывает пояс, а часть MA—сегментную поверхность.

Для нахождения величины шаровой поверхности и её частей мы докажем следующую лемму:

135. Лемма. ***Боковая поверхность каждого из трёх тел: конуса, усечённого конуса и цилиндра—равна произведению высоты тела на длину окружности, у которой радиус есть перпендикуляр, восставленный к образующей из её середины до пересечения с осью.***

1) Пусть конус образуется (черт. 142) вращением треугольника ABC вокруг катета AC. Если D есть середина образующей AB, то (§ 115)

$$\text{боковая поверхность конуса} = 2\pi \cdot BC \cdot AD. \qquad (1)$$

Проведя $DE \perp AB$, получим два подобных треугольника ABC и ADE (они прямоугольные и имеют общий угол A); из их подобия выводим:

$$BC:ED = AC:AD,$$

откуда

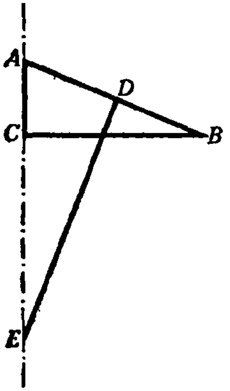
$$BC \cdot AD = ED \cdot AC,$$

и равенство (1) даёт:

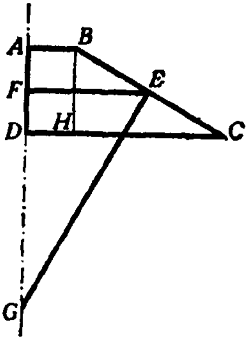
$$\text{боковая поверхность конуса} = 2\pi \cdot ED \cdot AC,$$

что и требовалось доказать.

2) Пусть усечённый конус (черт. 143) образуется вращением трапеции $ABCD$ вокруг стороны AD.



Черт. 142.



Черт. 143.

Проведя среднюю линию EF, будем иметь (§ 117):

$$\text{боковая поверхность усечённого конуса} = 2\pi \cdot EF \cdot BC. \qquad (2)$$

Проведём $EG \perp BC$ и $BH \perp DC$; тогда получим два подобных треугольника EFG и BCH (стороны одного перпендикулярны к сторонам другого); из их подобия выводим:

$$EF:BH = EG:BC,$$

откуда

$$EF \cdot BC = BH \cdot EG = AD \cdot EG.$$

Поэтому равенство (2) можно записать так:

$$\text{боковая поверхность усечённого конуса} = 2\pi \cdot EG \cdot AD,$$

что и требовалось доказать.

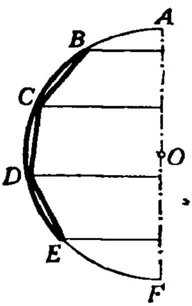
3) Теорема остаётся верной и в применении к цилиндру, так как окружность, о которой говорится в теореме, равна окружности основания цилиндра.

136. Определение. За величину поверхности шарового пояса, образуемого вращением (черт. 144) какой-нибудь части (BE) полуокружности вокруг диаметра (AF), принимают **предел**, к которому стремится поверхность, образуемая вращением вокруг того же диаметра п р а в и л ь н о й в п и с а н н о й л о м а н о й л и н и и ($BCDE$), когда её стороны неограниченно уменьшаются (и, следовательно, число сторон неограниченно увеличивается).

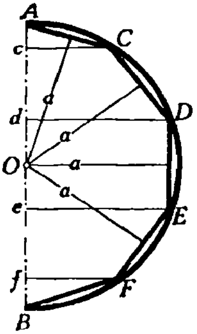
Это определение распространяется и на сегментную поверхность, и на шаровую поверхность; в последнем случае ломаная линия вписывается в целую полуокружность.

137. Теоремы. 1) ***Сегментная поверхность равна произведению её высоты на длину окружности большого круга.***

2) ***Поверхность шарового пояса равна произведению его высоты на длину окружности большого круга.***



Черт. 144.



Черт. 145

1) Впишем в дугу AF (черт. 145), образующую при вращении сегментную поверхность, правильную ломаную линию $ACDEF$ с произвольным числом сторон.

Поверхность, получающаяся от вращения этой ломаной, состоит из частей, образуемых вращением сторон AC, CD, DE и т. д. Эти части представляют собой боковые поверхности или полного конуса (от вращения AC), или усечённого конуса (от вращения CD, EF, ...), или цилиндра (от вращения DE, если $DE \parallel AB$). Поэтому мы можем применить к ним лемму § 135. При этом заметим, что каждый из перпендикуляров, восставленных из середин образующих до пересечения с осью, равен апофеме ломаной линии. Обозначив эту апофему буквой a, получим:

поверхность, образованная вращением $AC = Ac \cdot 2\pi a$;

» » » $CD = cd \cdot 2\pi a$;

» » » $DE = de \cdot 2\pi a$ и т. д.

Сложив эти равенства почленно, найдём:

поверхность, образованная вращением $ACDEF = Af \cdot 2\pi a$.

При неограниченном увеличении числа сторон вписанной ломаной апофема a стремится к пределу, равному радиусу шара R, а отрезок A остаётся без изменения; следовательно, предел поверхности, образованной вращением $ACDEF = Af \cdot 2\pi R$. Но предел поверхности, образованной вращением $ACDEF$, принимают за величину сегментной поверхности, а отрезок Af есть высота H сегментной поверхности; поэтому

$$\text{сегментная поверхность} = H \cdot 2\pi R = 2\pi RH.$$

2) Предположим, что правильная ломаная линия вписана не в дугу AF, образующую сегментную поверхность, а в какую-нибудь дугу CF, образующую шаровой пояс (черт. 145). Это изменение, как легко

видеть, нисколько не влияет на ход предыдущих рассуждений, поэтому и вывод остаётся тот же, т. е. что

$$\text{поверхность шарового пояса} = H \cdot 2\pi R = 2\pi RH,$$

где буквой H обозначена высота cf шарового пояса.

138. Теорема. ***Поверхность шара равна произведению длины окружности большого круга на диаметр,***

или: ***поверхность шара равна учетверённой площади большого круга.***

Поверхность шара, образуемую вращением полуокружности ADB (черт. 145), можно рассматривать как сумму поверхностей, образуемых вращением дуг AD и DB. Поэтому согласно предыдущей теореме можно написать:

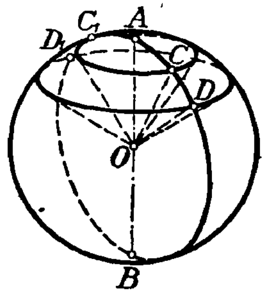
$$\text{поверхность шара} = 2\pi R \cdot Ad + 2\pi R \cdot dB = 2\pi R\,(Ad + dB) = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

139. Следствие. *Поверхности шаров относятся, как квадраты их радиусов или диаметров*, потому что, обозначая через R и R_1 радиусы, а через S и S_1 поверхности двух шаров, будем иметь:

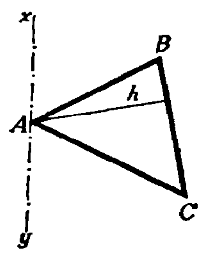
$$S : S_1 = 4\pi R^2 : 4\pi R_1^2 = R^2 : R_1^2 = 4R^2 : 4R_1^2 = (2R)^2 : (2R_1)^2.$$

Объём шара и его частей

140. Определение. Тело, получаемое от вращения (черт. 146) кругового сектора (COD) вокруг диаметра (AB), не пересекающего ограничивающую его дугу, называется **шаровым сектором.** Это тело ограничено боковыми поверхностями двух конусов и поверхностью шарового пояса; последняя называется **основанием** шарового сектора. Один из радиусов кругового сектора может совпадать с осью вращения; например, сектор AOC, вращаясь вокруг AO, производит шаровой сектор $OCAC_1$, ограниченный боковой поверхностью конуса и сегментной поверхностью. Для нахождения объёма шарового сектора и целого шара мы предварительно докажем следующую лемму.



Черт 146.



Черт. 147.

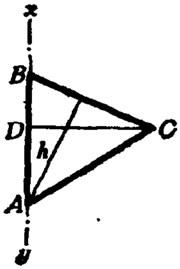
141. Лемма. ***Если*** $\triangle ABC$ (черт. 147) ***вращается вокруг оси*** xy, ***которая лежит в плоскости треугольника, проходит через его вершину*** A, ***но не пересекает стороны*** BC, ***то объём тела, получаемого при этом вращении, равен произведению поверхности, образуемой противоположной стороной*** BC, ***на одну треть высоты*** h, ***опущенной на эту сторону.***

При доказательстве рассмотрим три случая:

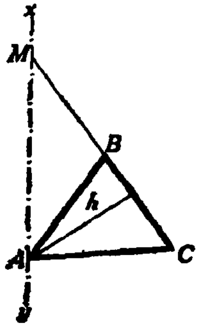
1) Ось совпадает со стороной AB (черт. 148). В этом случае искомый объём равен сумме объёмов двух конусов, получаемых вращением прямоугольных треугольников BCD и DCA. Первый объём равен $\frac{1}{3}\pi CD^2 \cdot DB$, а второй $\frac{1}{3}\pi CD^2 \cdot DA$; поэтому

объём, образованный вращением ABC, равен $\frac{1}{3}\pi CD^2(DB+DA)=$

$$=\frac{1}{3}\pi CD \cdot CD \cdot BA.$$



Черт. 148.



Черт. 149.

Произведение $CD \cdot BA$ равно $BC \cdot h$, так как каждое из этих произведений выражает двойную площадь $\triangle ABC$; поэтому

$$\text{объём } ABC=\frac{1}{3}\pi CD \cdot BC \cdot h.$$

Но произведение $\pi CD \cdot BC$ равно боковой поверхности конуса BDC; значит,

$$\text{объём } ABC=(\text{поверхность } BC)\cdot\frac{1}{3}h.$$

2) Ось не совпадает с AB и не параллельна BC (черт. 149). В этом случае искомый объём равен разности объёмов тел, производимых вращением треугольников AMC и AMB. По доказанному в первом случае

$$\text{объём } AMC=\frac{1}{3}h\cdot(\text{поверхность } MC),$$

$$\text{объём } AMB=\frac{1}{3}h\cdot(\text{поверхность } MB);$$

следовательно,

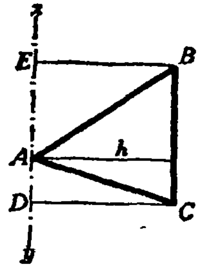
$$\text{объём } ABC=\frac{1}{3}h\cdot(\text{поверхность } MC-\text{поверхность } MB)=$$

$$=\frac{1}{3}h\cdot(\text{поверхность } BC).$$

3) Ось параллельна стороне BC (черт. 150). Тогда искомый объём равен объёму, производимому вращением $DEBC$ без суммы объёмов, производимых вращением треугольников AEB и ACD; первый из них равен $\pi DC^2 \cdot ED$; второй $\frac{1}{3}\pi EB^2 \cdot EA$ и третий $\frac{1}{3}\pi DC^2 \cdot AD$. Приняв

теперь во внимание, что $EB = DC$, получим:

$$\text{объём } ABC = \pi DC^2 \left[ED - \frac{1}{3}(EA + AD)\right] =$$
$$= \pi DC^2 \left(ED - \frac{1}{3} ED\right) = \frac{2}{3} \cdot \pi DC^2 \cdot ED.$$



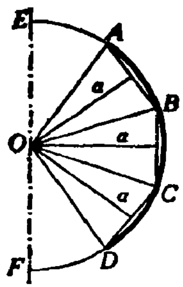
Черт. 150.

Произведение $2\pi DC \cdot ED$ выражает боковую поверхность цилиндра, образуемую стороной BC; поэтому

$$\text{объём } ABC = (\text{поверхность } BC) \cdot \frac{1}{3} DC =$$
$$= (\text{поверхность } BC) \cdot \frac{1}{3} h.$$

142. Определение. За величину объёма шарового сектора, получаемого вращением вокруг диаметра (EF, черт. 151) кругового сектора (AOD), принимается предел, к которому стремится объём тела, образуемого вращением многоугольного сектора, который ограничен крайними радиусами (OA и OD) и правильной ломаной линией, ($ABCD$), вписанной в дугу кругового сектора, когда число сторон её неограниченно увеличивается.

143. Теорема. ***Объём шарового сектора равен произведению поверхности соответствующего шарового пояса (или соответствующей сегментной поверхности) на треть радиуса.***



Черт. 151.

Пусть шаровой сектор производится вращением вокруг диаметра EF (черт. 151) сектора AOD.

Определим его объём V. Для этого впишем в дугу AD правильную ломаную линию $ABCD$ с произвольным числом сторон. Многоугольный сектор $OABCD$ образует при вращении некоторое тело, объём которого обозначим буквой V_1. Объём этот есть сумма объёмов тел, получаемых вращением треугольников OAB, OBC, OCD вокруг оси EF.

Применим к этим объёмам лемму, доказанную в § 141, причём заметим, что высоты треугольников равны апофеме a вписанной ломаной.

Согласно этой лемме будем иметь:

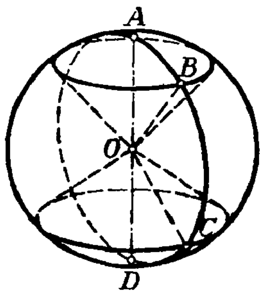
$$V_1 = (\text{поверхность } AB) \cdot \frac{a}{3} + (\text{поверхность } BC) \cdot \frac{a}{3} + \ldots =$$
$$= (\text{поверхность } ABCD) \cdot \frac{a}{3}.$$

Вообразим теперь, что число сторон ломаной линии неограниченно увеличивается. При этом условии поверхность $ABCD$ стремится к пределу, именно к поверхности шарового пояса AD, а апофема a имеет пределом радиус R; следовательно,

$$V = \text{пределу } V_1 = (\text{поверхность пояса } AD) \cdot \frac{R}{3}.$$

З а м е ч а н и е. Теорема и её доказательство не зависят от того, будет ли один из радиусов кругового сектора совпадать с осью вращения или нет.

144. Т е о р е м а. ***Объём шара равняется произведению его поверхности на треть радиуса.***



Черт. 152.

Разбив полукруг $ABCD$ (черт. 152), производящий шар, на какие-нибудь круговые секторы AOB, BOC, COD, мы заметим, что объём шара можно рассматривать как сумму объёмов шаровых секторов, производимых вращением этих круговых секторов. Так как согласно предыдущей теореме

$$\text{объём } AOB = (\text{поверхность } AB) \cdot \frac{1}{3} R,$$

$$\text{объём } BOC = (\text{поверхность } BC) \cdot \frac{1}{3} R,$$

$$\text{объём } COD = (\text{поверхность } CD) \cdot \frac{1}{3} R,$$

то

$$\text{объём шара} = (\text{поверхность } AB + \text{поверхность } BC + \text{поверхность } CD) \cdot \frac{1}{3} R = (\text{поверхность } ABCD) \cdot \frac{1}{3} R.$$

З а м е ч а н и е. Можно и непосредственно рассматривать объём шара как объём тела, образованного вращением вокруг диаметра кругового сектора, центральный угол которого равен 180°.

В таком случае объём шара можно получить как частный случай объёма шарового сектора, у которого шаровой пояс составляет всю поверхность шара.

В силу предыдущей теоремы *объём шара будет при этом равен его поверхности, умноженной на одну треть радиуса.*

145. С л е д с т в и е 1. Обозначим высоту шарового пояса или сегментной поверхности через H, радиус шара — через R, а диаметр — через D; тогда поверхность пояса или сегментная поверхность выразится, как мы видели (§ 137), формулой $2\pi RH$, а поверхность шара (§ 138) — формулой $4\pi R^2$; поэтому

$$\text{объём шарового сектора} = 2\pi RH \cdot \frac{1}{3} R = \frac{2}{3} \pi R^2 H;$$

$$\text{объём шара} = 4\pi R^2 \cdot \frac{1}{3} R = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ [1]},$$

или

$$\text{объём шара} = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{1}{6} \pi D^3.$$

Отсюда видно, что *объёмы шаров относятся, как кубы их радиусов или диаметров.*

146. Следствие 2. *Поверхность и объём шара соответственно составляют $\frac{2}{3}$ полной поверхности и объёма цилиндра, описанного около шара.*

Действительно, у цилиндра, описанного около шара, радиус основания равен радиусу шара, а высота равна диаметру шара; поэтому для такого цилиндра

$$\text{полная поверхность описанного цилиндра} = 2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2,$$
$$\text{объём описанного цилиндра} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$

Отсюда видно, что $\frac{2}{3}$ полной поверхности этого цилиндра равны $4\pi R^2$, т.е. равны поверхности шара, а $\frac{2}{3}$ объёма цилиндра составляют $\frac{4}{3}\pi R^3$, т. е. объём шара.

Это предложение было доказано Архимедом (в III в. до начала нашей эры). Архимед выразил желание, чтобы чертёж этой теоремы был изображён на его гробнице, что и было исполнено римским военачальником Марцеллом (Ф. Кэджори, История элементарной математики).

Предлагаем учащимся как полезное упражнение доказать, что поверхность и объём шара составляют $\frac{4}{9}$ соответственно полной поверхности и объёма

---

[1] Объём шара может быть выведен (не вполне, впрочем, строго) следующим простым рассуждением. Вообразим, что вся поверхность шара разбита на очень малые участки и что все точки контура каждого участка соединены радиусами с центром шара. Тогда шар разделится на очень большое число маленьких тел, из которых каждое можно рассматривать как пирамиду с вершиной в центре шара. Так как объём пирамиды равен произведению поверхности основания на третью часть высоты (которую можно принять равной радиусу шара), то объём шара, равный, очевидно, сумме объёмов всех пирамид, выразится так:

$$\text{объём шара} = S \cdot \frac{1}{3} R,$$

где S — сумма поверхностей оснований всех пирамид. Но эта сумма поверхностей оснований должна составить поверхность шара, и, значит,

$$\text{объём шара} = 4\pi R^2 \cdot \frac{1}{3} R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Таким образом, объём шара может быть найден посредством формулы его поверхности. Обратно, поверхность шара может быть найдена с помощью формулы его объёма из равенства:

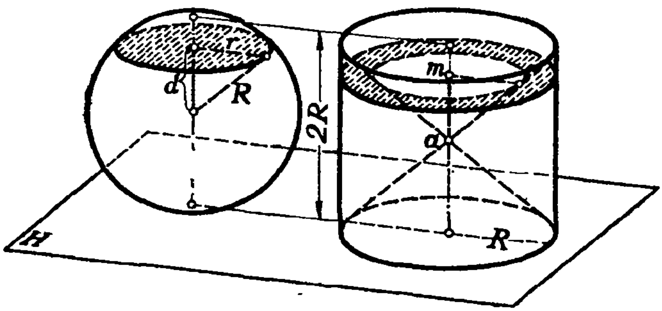
$$S \cdot \frac{1}{3} R = \frac{4}{3} \pi R^3, \text{ откуда } S = 4\pi R^2.$$

описанного конуса, у которого образующая равна диаметру основания. Соединяя это предложение с указанным в следствии 2, мы можем написать такое равенство, где Q обозначает поверхность или объём:

$$\frac{Q_{\text{шара}}}{4}=\frac{Q_{\text{цилиндра}}}{6}=\frac{Q_{\text{конуса}}}{9}.$$

147. Замечание. Формулу для объёма шара можно весьма просто получить, основываясь на принципе Кавальери (§ 89), следующим образом.

Пусть на одной и той же плоскости H (черт. 153) помещены шар радиуса R и цилиндр, радиус основания которого равен R, а высота $2R$ (значит, это такой цилиндр, который может быть описан около шара радиуса R). Вообразим далее, что из цилиндра вырезаны и удалены два конуса, имеющие общую



Черт. 153.

вершину на середине a оси цилиндра, а основания — у одного верхнее основание цилиндра, у другого нижнее. От цилиндра останется тогда некоторое тело, объём которого, как мы сейчас увидим, равен объёму нашего шара. Проведём какую-нибудь плоскость, параллельную плоскости H и которая пересекалась бы с обоими телами. Пусть расстояние этой плоскости от центра шара будет d, а радиус круга, полученного в сечении плоскости с шаром, пусть будет r. Тогда площадь этого круга окажется равной $\pi r^2=\pi(R^2-d^2)$. Та же секущая плоскость даст в сечении с телом, оставшимся от цилиндра, круговое кольцо (оно на чертеже покрыто штрихами), у которого радиус внешнего круга равен R, а внутреннего d (прямоугольный треугольник, образованный этим радиусом и отрезком am, равнобедренный, так как каждый острый угол его равен 45°). Значит, площадь этого кольца равна $\pi R^2-\pi d^2=$ $=\pi(R^2-d^2)$. Мы видим, таким образом, что секущая плоскость, параллельная плоскости H, даёт в сечении с шаром и телом, оставшимся от цилиндра, фигуры одинаковой площади, следовательно, согласно принципу Кавальери объёмы этих тел равны. Но объём тела, оставшегося от цилиндра, равен объёму цилиндра без удвоенного объёма конуса, т. е. он равен:

$$\pi R^2\cdot 2R-2\cdot\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R=2\pi R^3-\frac{2}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

значит, это и будет объём шара.

148. Определения. 1) Часть шара (ACC', черт. 154), отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью (CC'), называется **шаровым сегментом.** Круг сечения называется **основанием** сегмента, а отрезок Am радиуса, перпендикулярного к основанию, — **высотой** сегмента.

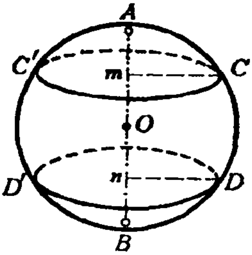
2) Часть шара, заключённая между двумя параллельными секущими плоскостями (CC' и DD'), называется **шаровым слоем**. Круги параллельных сечений называются основаниями слоя, а расстояние mn между ними — его **высотой**.

Оба эти тела можно рассматривать как происходящие от вращения вокруг диаметра AB части круга AmC или части $CmnD$.

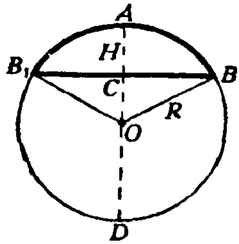
149. Теорема. ***Объём шарового сегмента равен объёму цилиндра, у которого радиус основания есть высота сегмента, а высота равна радиусу шара, уменьшенному на треть высоты сегмента***, т. е.

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3} H\right),$$

где H есть высота сегмента, а R — радиус шара.



Черт. 154.



Черт. 155.

Объём шарового сегмента, получаемого вращением вокруг диаметра AD (черт. 155) части круга ACB, найдётся, если из объёма шарового сектора, получаемого вращением кругового сектора AOB, вычтем объём конуса, получаемого вращением $\triangle COB$. Первый из них равен $\frac{2}{3}\pi R^2 H$, а второй $\frac{1}{3}\pi CB^2 \cdot CO$. Так как CB есть средняя пропорциональная между AC и CD, то $CB^2 = H(2R - H)$, поэтому

$$CB^2 \cdot CO = H(2R - H)(R - H) = 2R^2H - RH^2 - 2RH^2 + H^3 =$$
$$= 2R^2H - 3H^2R + H^3;$$

следовательно,

$$\text{объём } ABB_1 = \text{объёму } OBAB_1 - \text{объём } OBB_1 = \frac{2}{3}\pi R^2 H -$$
$$- \frac{1}{3}\pi CB^2 \cdot CO = \frac{2}{3}\pi R^2 H - \frac{2}{3}\pi R^2 H + \pi R H^2 - \frac{1}{3}\pi H^3 = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Объём цилиндра, у которого высота вдвое более диаметра основания, равен 1 *м*³. Вычислить его высоту.

2. Вычислить боковую поверхность и объём усечённого конуса, у которого радиусы оснований равны 27 *см* и 18 *см*, а образующая равна 21 *см*.

3. На каком расстоянии от центра шара, радиус которого равен 2,425 *м*, следует провести секущую плоскость, чтобы отношение поверхности меньшего сегмента к боковой поверхности конуса, имеющего общее с сегментом основание, а вершину в центре шара, равнялось 7:4?

4. Найти объём тела, происходящего от вращения правильного шестиугольника со стороной a вокруг одной из его сторон.

5. Вычислить радиус шара, описанного около куба, ребро которого равно 1 *м*.

6. Вычислить объём тела, происходящего от вращения правильного треугольника со стороной a вокруг оси, проходящей через его вершину и параллельной противоположной стороне.

7. Дан равносторонний $\triangle ABC$ со стороной a; на AC строят квадрат $BCDE$, располагая его в противоположную сторону от треугольника. Вычислить объём тела, происходящего от вращения пятиугольника $ABEDC$ вокруг стороны AB.

8. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. Через вершину A проводят прямую AM, перпендикулярную к диагонали AC, и вращают квадрат вокруг AM. Вычислить поверхность, образуемую контуром квадрата, и объём, образуемый площадью квадрата.

9. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной a. Через вершину A проводят прямую AM, перпендикулярную к радиусу OA, и вращают шестиугольник вокруг AM. Вычислить поверхность, образуемую контуром, и объём, образуемый площадью правильного шестиугольника.

10. В шаре, радиус которого равен 2, просверлено цилиндрическое отверстие вдоль его диаметра. Вычислить объём оставшейся части, если радиус цилиндрического отверстия равен 1.

11. Вычислить объём шара, который, будучи вложен в коническую воронку с радиусом основания $r=5$ *см* и с образующей $l=13$ *см*, касается основания воронки.

12. Около круга радиуса r описан равносторонний треугольник. Найти отношение объёмов тел, которые производятся вращением круга и площади треугольника вокруг высоты треугольника.

13. В цилиндрический сосуд, у которого диаметр основания равен 6 *см*, а высота 36 *см*, налита вода до половины высоты сосуда. На сколько поднимается уровень воды в сосуде, если в него погрузить шар диаметром 5 *см*?

14. Железный пустой шар, внешний радиус которого равен 0,154 *м*, плавает в воде, погружаясь в неё наполовину. Вычислить толщину оболочки этого шара, зная, что удельный вес железа равен 7,7.

15. Диаметр Марса составляет половину земного. Во сколько раз поверхность и объём Марса меньше, чем соответственные величины для Земли?

16. Диаметр Юпитера в 11 раз больше земного. Во сколько раз Юпитер превышает Марс по поверхности и объёму?

ДОПОЛНЕНИЕ

ОБ АКСИОМАХ ГЕОМЕТРИИ

1. Геометрия среди других областей математики (алгебра, арифметика) выделяется одной, только ей присущей особенностью. Эта особенность состоит в том, что те теоремы и свойства фигур, которые изучаются в геометрии, не только устанавливаются путём ряда рассуждений, но во многих случаях могут служить объектом непосредственного созерцания; справедливость этих свойств не только доказывается, но и подтверждается непосредственным зрительным впечатлением. Так, равенство углов при основании равнобедренного треугольника и многие другие свойства фигур можно непосредственно созерцать.

Наглядность геометрических объектов помогает обнаруживать и угадывать многие геометрические факты прежде, чем они будут точно доказаны. Непосредственное созерцание геометрических фигур у древних египтян (за 2000 лет до нашей эры) служило главным способом убеждаться в наличии тех или иных их свойств. Но такой способ мог быть пригоден лишь для установления простейших геометрических фактов; с такими именно фактами и имели дело египтяне, которые пользовались геометрией для узкопрактических целей. Но уже простое расширение и усложнение практических задач привело к необходимости изучать свойства всё более сложных геометрических фигур, а для этого уже недостаточно было простого созерцания чертежа; появилась необходимость применять всё более сложные формы рассуждений.

Кроме того, сама наглядность чертежа в применении к более сложным геометрическим фигурам часто весьма обманчива и приводит иногда к неверным заключениям.

Можно привести много примеров, когда общий вид чертежа подсказывает неверное заключение о взаимном расположении и свойствах изображённых на нём фигур. На этом основано много геометрических парадоксов, приводить которые мы здесь не будем.

Древние греки, воспринявшие геометрическую науку от египтян, обобщили отдельные факты, известные египтянам, и выработали определённые формы рассуждений, при помощи которых они обнаруживали новые геометрические факты. Приблизительно за 300 лет до начала нашей эры греческий геометр Евклид в ряде своих книг, носивших общее название „Начала“, дал первое научное обоснование геометрии.

Он постарался в достаточно отчётливых терминах выразить словами те общие представления о простейших геометрических образах: точках, линиях, поверхностях и о взаимоотношениях между ними, которые считались до того времени само собой понятными. Базируясь на этом, он дал полное, логически строгое построение геометрии по форме, в высшей степени совершенное и с точки зрения современной науки.

Он прежде всего попытался дать точные определения основных геометрических понятий: точки, линии, в частности прямой линии, поверхности, в частности плоскости и геометрического тела. Приведём данные им определения:

1. *Точка есть то, что не имеет частей.*
2. *Линия есть длина без ширины.*
3. *Границы линии суть точки.*
4. *Прямая линия есть та, которая одинаково расположена относительно всех своих точек.*
5. *Поверхность есть то, что имеет длину и ширину.*
6. *Границы поверхности суть линии.*
7. *Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена относительно всех своих прямых.*
8. *Телом называется то, что имеет длину, ширину и глубину.*
9. *Границы тела суть поверхности.*

Целью этих определений было достигнуть того, чтобы термины „точка", „прямая" и т. д. не только вызывали определённое зрительное представление, но одновременно с тем определяли некоторое понятие, опираясь на которое можно было бы делать дальнейшие логические выводы. И хотя эти определения несовершенны с точки зрения современной науки, но они вполне соответствовали тогдашнему состоянию научной мысли и являлись первым шагом к переходу от образов к понятиям. Они послужили отправным пунктом всех последующих работ по геометрии и определили собой пути её дальнейшего развития.

Все истины, которые устанавливаются в геометрии, Евклид разделил на три вида: постулаты, аксиомы и теоремы. К первым двум видам[1] были отнесены простейшие истины, которые не возбуждали никаких сомнений, были непосредственно очевидны и могли поэтому служить исходными предложениями, из которых логически выводились другие истины.

Третий вид предложений — теоремы — истины, которые должны доказываться, т. е. путём ряда рассуждений выводиться из двух первых видов истин. Приведём постулаты и аксиомы Евклида:

а) **Постулаты.** Требуется, чтобы:

1) *от каждой точки до каждой другой точки можно было провести одну прямую линию;*

[1] Принципиальной разницы между теми и другими Евклид не указывает, но с постулатами он обычно связывает утверждение возможности выполнить то или иное построение.

2) *ограниченную прямую можно было непрерывно продолжать по прямой;*

3) *из любого центра можно было описать окружность любым радиусом;*

4) *все прямые углы были равны между собой;*

5) *две прямые, которые при пересечении с третьей образуют с ней по одну сторону внутренние углы, в сумме меньшие двух прямых, при продолжении в ту же сторону пересекались.*

б) **Аксиомы:**

1) *равные одному и тому же равны между собой;*
2) *если к равным прибавить поровну, то суммы будут равны;*
3) *если от равных отнять поровну, то остатки будут равны;*
4) *совмещающиеся друг с другом равны;*
5) *целое больше своей части.*

Эти аксиомы и постулаты Евклида в течение долгого ряда последующих столетий служили базой, на которой строилась вся геометрия.

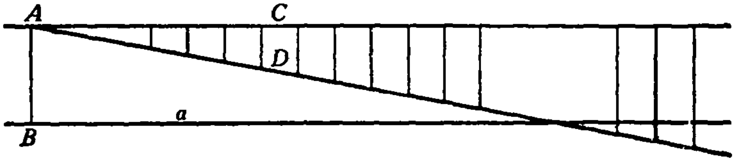
2. Уже ближайшие потомки Евклида обратили особое внимание на пятый из данных Евклидом постулатов. Он привлекал к себе внимание сложностью своей формулировки и далеко не полной очевидностью. Эта неочевидность вызвала стремление так или иначе доказать справедливость постулата, т. е. вывести его из остальных, не возбуждающих сомнений истин. Попытки дать доказательство пятого постулата продолжались в течение 2000 лет, но не привели и, как оказалось впоследствии, не могли привести к положительному результату. Удавалось лишь заменить постулат другим предложением, ему равносильным, но столь же неочевидным и не вытекавшим из остальных геометрических аксиом и постулатов.

Легко показать, что постулат Евклида равносилен утверждению, что в данной плоскости через каждую точку к каждой прямой можно провести единственную прямую, ей параллельную (т. е. не пересекающую данной). Действительно, если принять это положение как аксиому, то из теорем, доказанных в планиметрии, непосредственно вытекает постулат Евклида. Это предложение о единственности параллельной прямой и принимается обычно как аксиома вместо постулата Евклида (как это сделано в настоящей книге). Другим предложением, равносильным постулату Евклида, является теорема о сумме углов треугольника.

Усилия геометров в течение ряда веков были направлены на то, чтобы доказать или самый постулат Евклида, или предложение, ему равносильное. Приведём здесь для иллюстрации несколько таких доказательств.

Доказательство Прокла (в V в. нашей эры). Возьмём на данной плоскости прямую a и точку A вне её (черт. 156). Опустим из A перпендикуляр AB на прямую a и в точке A восставим перпендикуляр AC к прямой AB. Прямые a и AC не пересекаются, иначе из точки их пересечения было бы опущено на прямую AB два перпендикуляра. Пусть теперь через A проведена ещё какая-либо прямая AD. Прокл доказывает, что она должна встретиться с прямой a. Вот его доказательство.

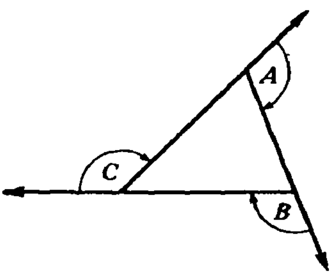
Будем восставлять перпендикуляры к прямой AB и продолжать их до пересечения с прямой AD. По мере удаления основания перпендикуляра от точки A его длина будет расти, и при достаточном удалении от точки A она станет больше расстояния между параллельными прямыми a и AC. Соответствующие точки прямой AD окажутся,



Черт. 156.

таким образом, лежащими по другую сторону прямой a, т. е. прямая AD перейдёт с одной стороны a на другую. А это может случиться только, если она пересечёт прямую a. В этом своём доказательстве Прокл опирается на то положение, что расстояние точек одной из двух параллельных прямых от другой не может беспредельно возрастать. Но это положение само есть некоторый постулат, равносильный постулату Евклида.

Приведем ещё пример попытки доказательства теоремы о сумме углов треугольника без помощи свойств параллельных прямых. Это доказательство относится уже к XIX в. и принадлежит профессору Геттингенского университета Thibaut (Тибо). Пусть дан $\triangle ABC$ (черт. 157). Продолжим сторону CA за точку A, сторону AB за точку B и сторону BC за точку C. Докажем, что образовавшиеся внешние углы составляют в сумме $4d$. Вращаем прямую AC около точки A на величину внешнего угла A. После этого поворота она совпадает с прямой AB. Вращаем далее эту прямую около точки B от её нового положения на величину внешнего угла B; после поворота она совпадает с прямой BC. Вращаем теперь эту прямую около точки C от её последнего положения на величину внешнего угла C. После этих трёх поворотов прямая вернётся в исходное положение. Следовательно, в общей сложности она повернётся на полный угол, т. е. на $4d$, но три её поворота состояли из поворотов на величины трёх внешних углов треугольника. Следовательно, сумма этих внешних углов равна $4d$. Но сумма и внешних и внутренних углов треугольника, очевидно, равна $6d$. Следовательно, сумма его внутренних углов равна $6d - 4d = 2d$.



Черт. 157.

В этом доказательстве Тибо производил три поворота прямой около **различных точек** и молчаливо предполагал, что такое вращение равносильно полному повороту около **одного** центра, когда прямая описывает полный угол.

Такое предположение само составляет некоторое допущение. Подробное изучение этого допущения показывает, что оно равносильно постулату Евклида. Мы не будем приводить других попыток доказательства пятого постулата.

Несмотря на многочисленные неудачи получить строгое доказательство постулата Евклида, попытки его доказательства не прекращались, и причиной этого была полная убеждённость геометров в невозможности обойтись без него при построении геометрии.

3. В первой половине XIX в. гениальный русский математик, профессор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский высказал смелую мысль, что постулат Евклида не является логическим следствием остальных аксиом геометрии и потому не может быть доказан и что принятие этого постулата не является необходимым для построения геометрии.

В подтверждение своей мысли он построил новую геометрию, в которой постулат Евклида был заменён другим предложением, а именно, что через данную точку в данной плоскости можно провести бесчисленное множество прямых, не пересекающих данной.

Предложения этой геометрии существенно отличались от теорем геометрии Евклида. Так, сумма углов треугольника оказалась меньше двух прямых углов, к теоремам о равенстве треугольников присоединилась новая: „Треугольники равны, когда три угла одного равны трём углам другого". В этой геометрии, следовательно, не существует треугольников подобных и неравных между собой.

Первый доклад о созданной им новой геометрии Лобачевский сделал в 1826 г. Идеи Лобачевского были в высшей степени новыми и неожиданными. Несмотря на всю непривычность таких предложений новой геометрии, она имела такую же стройную и законченную форму, как и геометрия Евклида. Впоследствии ей было дано название **неевклидовой** геометрии. Одновременно с её открытием возник вопрос: какая же геометрия имеет место в действительном материальном мире и какой геометрией следует пользоваться при решении проблемы прикладного знания — физики, астрономии и др.? Лобачевский пытался решить этот вопрос опытным путём — астрономическими наблюдениями.

Но решить этот вопрос столь простыми средствами оказалось невозможным. Дело в том, что наши пространственные восприятия не обладают абсолютной точностью и лишь приблизительно отражают пространственные отношения материального мира.

Геометрия Евклида выросла из наблюдений над материальным миром и потому с большой точностью отражает существующие в нём взаимоотношения, по крайней мере в их простейших проявлениях. В силу этого опыты Лобачевского не дали исчерпывающего ответа на поставленный вопрос: они не обнаружили заметных отклонений от того, что давала геометрия Евклида, но и не установили абсолютного совпадения предложений этой геометрии с пространственными взаимоотношениями материального мира.

Открытие неевклидовой геометрии произвело глубокие изменения в сознании геометров. Самый факт существования стройной и непротиворечивой неевклидовой геометрии подрывал вековое доверие к „наглядности" и „очевидности", руководившим мыслью древних геометров. Многовековой анализ пятого постулата расшатал устои первичных геометрических представлений, на которых покоилась геометрия Евклида. Он вскрыл глубокие зависимости между отдельными, казавшимися далёкими одни от других геометрическими фактами и представил в новом свете пространственные взаимоотношения материального мира. Поэтому система аксиом и определений Евклида как база для построения геометрии стала уже недостаточной. В свете новых идей его определения и аксиомы обнаружили недостаточную полноту и не могли уже отвечать возросшим требованиям научной строгости.

Такое, например, определение, как „линия есть длина без ширины", не могло уже удовлетворить геометров, так как в их сознании сами понятия длины и ширины уже утратили тот характер абсолютной ясности и первоначальности, который они имели во времена Евклида. Для геометров нового времени многие определения Евклида не имели силы без некоторых дополнительных предположений, которые явно не высказывались, но молчаливо и незаметно принимались сознанием древних геометров. Иначе трудно объяснить, почему, например, определение 4 нельзя применить к окружности и определение 7 — к поверхности круглого цилиндра или конуса.

Требование большей полноты геометрических определений и аксиом привело к тому, что в конце XIX в. была поставлена задача общего пересмотра и уточнений всей аксиоматической базы геометрии. Эти работы привели к созданию новой аксиоматики геометрии, вполне отвечающей современным требованиям математической строгости.

Ниже мы даём краткое изложение современного состояния этого вопроса.

4. Прежде всего поставим вопрос об определении основных геометрических образов: точка, прямая линия и плоскость. Заметим, что определить какое-нибудь понятие — значит выразить его через понятия, ранее уже установленные. Если же искать определение простейших понятий, то дело неизбежно сведётся лишь к замене одного термина другим, в свою очередь требующим определения. Так и было у Евклида, который понятие „линии" определил через понятие „длины" или „границы", а эти последние не определял.

Поэтому можно с самого начала не искать определения простейших геометрических понятий, а принять их за исходные, которые нельзя уже выразить через понятия более простые. „Точка", „прямая" и „плоскость" и принимаются за такие первичные, неопределимые геометрические понятия. По отношению к ним устанавливается целая система основных положений „аксиом", принимаемых за исходные недоказуемые положения. По существу эти аксиомы представляют собой лишь целесообразные абстракции пространственных взаимоотношений материального мира.

Мы приведём здесь ту систему аксиом, которая была дана немецким математиком Гильбертом. В этой системе все аксиомы геометрии разделяются на 5 групп.

Первая группа аксиом — **„аксиомы соединения"**. Аксиомы этой группы имеют целью установить те взаимоотношения между понятиями т о ч к а, п р я м а я и п л о с к о с т ь, которые обычно характеризуются словами: „прямая проходит через точку", „точка лежит на прямой или на плоскости" и т. п. Эта группа состоит из следующих аксиом:

1. *Две точки определяют единственную проходящую через них прямую.*
2. *На каждой прямой лежит не менее двух точек; существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*
3. *Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость. В каждой плоскости лежит по крайней мере одна точка.*
4. *Если две точки прямой линии лежат в данной плоскости, то и все точки этой прямой лежат в той же плоскости.*
5. *Если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют и ещё по крайней мере одну общую точку.*
6. *Существует по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

При первом взгляде на эти аксиомы некоторые из них могут показаться или недостаточными, или вообще ненужными. Так, аксиома 2 как бы противоречит обычному представлению о прямой, на которой мы мыслим бесчисленное множество точек. Но не следует забывать, что точки и прямые введены у нас как первичные, не зависящие одно от другого понятия. Они могут существовать раздельно. Поэтому, когда мы говорили, что точка лежит на прямой или что прямая проходит через точку, мы приписывали точке и прямой способность находиться между собой в некотором взаимоотношении. Чтобы яснее представить себе такое раздельное существование точек, прямых и плоскостей и взаимоотношения между ними, будем их представлять себе в виде конкретных физических предметов. Точки будем представлять себе в виде горошин какой-нибудь определённой величины. Эти горошины будем предполагать шарообразной формы и достаточно мягкими (например, разбухшими в воде), чтобы их можно было прокалывать тонкими иглами и резать на части. Прямые линии будем представлять в виде очень тонких стальных иголок, а плоскости — в виде столь же тонких пластинок. Сначала эти пластинки, иглы и горошины представляем себе ничем не связанными и даже находящимися в разных местах: в одном месте — кучка гороха, в другом — груда стальных игл, в третьем — пачка сложенных пластинок. Начнём теперь подчинять их тем условиям, которые содержатся в наших аксиомах. Мы будем считать, что точка лежит на прямой, если игла прокалывает горошину или хотя бы частично входит в неё. Будем считать, что точка лежит на плоскости, если тонкая пластинка режет горошину пополам или лишь надрезает горошину. Наконец, будем считать, что прямая лежит на плоскости, если тонкая игла служит краем пластинки, т. е. если игла прилегает на всём протяжении к краю пластинки, не выдаваясь от неё ни в ту, ни в другую сторону. Что означают при этих условиях аксиомы? Они требуют, чтобы наши горошины, иглы и пластинки приняли такое расположение в пространстве, чтобы каждые две горошины были проколоты по крайней мере одной иглой или нанизаны на одну иглу (акс. 1); каждая игла прокалывала не менее двух горошин (акс. 2); каждые три горошины были разрезаны (или надрезаны) одной пластинкой и чтобы каждая пластинка надрезала по крайней мере одну горошину (акс. 3); если две горошины, нанизанные на одну иглу, надрезать некоторой пластинкой, то и все другие горошины, которые могут оказаться нанизанными на ту же иглу, надрезывались бы той же пластинкой (акс. 4); если две пластинки надрезают одну и ту же горошину, то они надрезали бы по крайней мере ещё одну горошину (акс. 5); имеются по крайней мере четыре горошины, не разрезанные (и не надрезанные) одной и той же пластинкой (акс. 6). Таким условиям должны удовлетворять наши горошины, иглы и пластинки. И такую комбинацию горошин, игл и пластинок нетрудно построить. Действительно, отделим от пачки пластинок четыре пластинки. Обрежем их по краям так, чтобы каждая из них приняла форму равностороннего треугольника определённого размера. Из груды игл возьмём 6 штук и обломаем их концы так, чтобы все иглы стали одной длины, равной стороне треугольной пластинки. Возьмём далее 4 горошины и составим следующую фигуру: из 4 пластинок составим правильный тетраэдр; в пазы между прилегающими краями пластинок вложим иглы, а на вершинах тетраэдра поместим горошины так, чтобы пластинки их надрезали, а иглы прокалывали. Для этой совокупности горошин, игл и пластинок удовлетворяются все поставленные выше требования, т. е. все наши аксиомы.

Из этого примера видно,что множество точек, прямых и плоскостей, удовлетворяющих аксиомам 1-й группы, может быть конечным. В нашем примере мы имеем всего 4 точки, 6 прямых и 4 плоскости.

Вторая группа аксиом — „аксиомы порядка“ — имеет целью в отчётливой форме высказать те положения, на которые мы опираемся, когда говорим о том или ином порядке расположения точек на прямой и на плоскости. Главным понятием здесь является расположение на прямой одной точки м е ж д у двумя другими. Логическое содержание этого понятия и устанавливается аксиомами этой группы. Она состоит из следующих аксиом:

1. *Если B лежит между A и C, то A, B и C — различные точки прямой и B лежит также между C и A.*

2. *При данных двух точках A и B на прямой линии на ней существует по крайней мере одна точка C такая, что B лежит между A и C.*

3. *Из трёх данных точек на прямой не более чем одна лежит между двумя другими.*

4. *Если в данной плоскости даны треугольник ABC и какая-либо прямая a, не проходящая ни через одну из его вершин и пересекающая отрезок AB, то она непременно пересечёт или отрезок BC, или отрезок AC.*

Эти аксиомы предъявляют к нашим точкам, прямым и плоскостям требования, которым они должны удовлетворять. Та совокупность граней, рёбер и вершин тетраэдра, которая удовлетворяла аксиомам 1-й группы, уже не удовлетворяет нашим аксиомам. В самом деле, на каждой нашей игле были нанизаны лишь две горошины, между тем как вторая аксиома 2-й группы требует, чтобы на прямой было не менее трёх точек. А более подробный анализ показывает, что на каждой прямой должно лежать бесчисленное множество точек и что аксиомам 2-й и 1-й групп, вместе взятым, может удовлетворять лишь бесконечное множество точек, прямых и плоскостей [1].

Третья группа аксиом — **„аксиомы конгруэнтности“** — имеет целью установить основные предложения о равенстве отрезков и углов. Она содержит следующие аксиомы:

1. *На любой прямой от любой её точки можно отложить отрезок, равный данному.*

2. *Два отрезка, равные третьему, равны между собой.*

3. *Пусть A, B, C — точки одной прямой и A_1, B_1, C_1 — также точки одной прямой и $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$; если отрезки AB и BC, а также A_1B_1 и B_1C_1 не имеют общих точек, то $AC=A_1C_1$.*

4. *От любой точки данной прямой по данную её сторону можно построить один и только один угол, равный данному; каждый угол равен самому себе.*

5. *Если в двух треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ стороны $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ и $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$, то $\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$.*

Следует обратить внимание на последнюю аксиому.

В учебниках геометрии эта аксиома есть следствие второго случая равенства треугольников. Но само это равенство треугольников доказывается путём наложения и, следовательно, предполагает возможность п е р е м е щ е н и я фигур; такое перемещение само составляет некоторую новую аксиому, и притом не включённую в нашу систему. Поэтому предложение 5 и приходится принимать как новую аксиому. Пользование ею заменяет применение в геометрии метода перемещения фигур.

Четвёртую группу аксиом составляет одна — **„аксиома о параллельных прямых“**. При этом возможность существования параллельных доказывается без помощи новых аксиом. А потому аксиома требует лишь единственности параллельной прямой: *через данную*

[1] Доказательство этого факта выходит из рамок настоящей книги.

точку в данной плоскости можно провести не более одной прямой, не пересекающей данной. Об этой аксиоме мы уже говорили выше.

Наконец, пятую и последнюю группу аксиом составляют **„аксиомы непрерывности“**. Эта группа состоит из двух аксиом:

1. **Аксиома Архимеда.** *Если AB и CD — два произвольных отрезка, то на прямой AB существует ряд точек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ таких, что $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = CD$ и что B будет лежать между A_{n-1} и A_n* (черт. 158).

2. **Аксиома линейной полноты.** *Точки прямой линии образуют систему точек, которую нельзя дополнить новыми точками, которые можно было бы считать принадлежащими той же прямой, без нарушения ранее установленных аксиом*[1].

Содержание первой из этих аксиом — аксиомы Архимеда — достаточно ясно: аксиома требует, чтобы каждой точки прямой, как бы далеко она ни была намечена, можно было достигать с помощью конечного числа равных шагов и, следовательно, чтобы можно было измерить расстояние от данной точки до любой точки прямой. Поэтому эту аксиому и называют иногда аксиомой измерения.

Посмотрим, в чём сущность аксиомы линейной полноты.

Учащиеся знают из курса алгебры, что если на числовой оси построить все точки с рациональными абсциссами, то этим не исчерпаются

Черт. 158.

все точки прямой; прямая не будет сплошь заполнена этими точками. Так, точки с иррациональными абсциссами ещё не будут построены. Когда вводятся алгебраические иррациональные числа в виде корней всевозможных степеней из рациональных чисел и корней алгебраических уравнений с рациональными коэффициентами и строятся соответствующие им точки на числовой оси, то числовая ось обогащается новыми точками с иррациональными абсциссами. Но на числовой оси всё ещё остаются пустые места, где ещё могут быть вставлены новые точки. Так, точки с абсциссами π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\sqrt{\pi}$ и т. п. не будут нанесены на числовой оси. Ось заполнится вся лишь после того, как будут введены все действительные числа. После этого на ней нельзя будет вставить новую точку. На ней уже не останется пустых мест. Аксиома полноты требует, чтобы именно этим свойством обладала геометрическая прямая: чтобы на ней не осталось ни одного пустого места, куда можно было вставить новую точку.

Принятие этой аксиомы позволяет считать, что каждому действительному числу соответствует определённая точка на прямой при

[1] Точнее: без нарушения первых двух аксиом соединения, аксиом порядка, первой аксиомы конгруэнтности и аксиомы Архимеда.

выбранном начале отсчёта абсцисс и, обратно, каждой точке прямой соответствует определённое действительное число.

Таков перечень всех аксиом, на которых базируется в настоящее время евклидова геометрия.

5. Если теперь провести анализ всего курса элементарной геометрии, то можно будет заметить, что при всех проводимых доказательствах не приходилось опираться ни на какие иные исходные положения, кроме тех, которые заключены в данной выше системе аксиом. Одни из этих положений, как аксиома о параллельных и некоторые из аксиом соединения, были высказаны явно, другие молчаливо считались как само собой разумеющиеся. Аксиомы конгруэнтности были заменены предложением о возможности свободного перемещения фигур в пространстве. Но само это предложение, как показывает более подробный его анализ, является сложной аксиомой, равносильной всей совокупности аксиом конгруэнтности.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава четвёртая

Круглые тела