А. КИСЕЛЕВ

ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

★

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИЗА И НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СТАТЬИ АЛГЕБРЫ

ИЗДАНИЕ СЕДЬМОЕ

Допущено Научно-педагогической секцией Государственного ученого совета

55 — 64 тысяча

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

МОСКВА — 1928 — ЛЕНИНГРАД

О Т П Е Ч А Т А Н О

в 1-й Образцовой типографии

Гиза. Москва, Пятницкая, 71.

Главл. А-17649. У.21. Гиз 28612.

Заказ № 2704. Тираж 10 000 экз.

ОТДЕЛ ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ.

УЧЕНИЕ О ПРЕДЕЛАХ.

Глава первая.

Основные свойства пределов.

307. Определения. Возьмем сумму членов бесконечной убывающей Г. П.:

$$1+{}^1/_2+{}^1/_4+{}^1/_8+\ldots \text{ (знам. } {}^1/_2).$$

Сумма эта при неограниченном увеличении числа членов увеличивается, приближаясь (ч. I, § 252) к постоянному числу 2 так, что разность

$$2-(1+{}^1/_2+{}^1/_4+{}^1/_8+\ldots)$$

при достаточном увеличении числа слагаемых делается меньше любого данного положительного числа (напр., меньше 0,000001) и при дальнейшем увеличении числа слагаемых остается всегда меньше этого числа.

При этих условиях мы говорим, что 2 есть предел суммы $1+{}^1/_2+{}^1/_4+{}^1/_8\ldots$, если число слагаемых в ней увеличивается неограниченно.

В этом примере переменное число (сумма членов прогрессии), приближаясь к своему пределу, остается меньше его. Но могут быть случаи, когда переменное число, приближаясь к своему пределу, остается больше его. Напр., если предположим, что в сумме

$$1+\frac{1}{x}$$

буква x означает переменное положительное число, неограниченно увеличивающееся, то сумма эта будет приближаться к пределу 1, оставаясь всегда больше 1.

Может даже случиться, что переменное число так изменяется, что оно делается то больше, то меньше своего предела. Такой случай мы уже видели, когда говорили о пределе суммы членов бесконечно убывающей Г. П. (ч. I, § 253):

$$2, -1, +\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}, +\tfrac{1}{8}, \ldots \text{(знам.} -\tfrac{1}{2}\text{)}.$$

Предел этот равен $1\tfrac{1}{3}$, и суммы двух, трех, четырех и т. д. членов прогрессии переходят через значения:

$$2-1=1<1\tfrac{1}{3};\ 2-1+\tfrac{1}{2}=1\tfrac{1}{2}>1\tfrac{1}{3};\ 2-1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}=$$
$$=1\tfrac{1}{4}<1\tfrac{1}{3}\ldots,$$

которые попеременно то больше, то меньше своего предела.

После этих примеров будет понятно следующее определение предела: *если переменное число x при своем изменении приближается к постоянному числу a таким образом, что абсолютная величина разности $a-x$ делается и при дальнейшем процессе изменения x всегда остается меньше любого данного положительного числа (как бы мало оно ни было), то это постоянное число a называется пределом переменного x.*

Вместо того чтобы говорить: „число x имеет предел a“, часто говорят короче: „x стремится к a“ и письменно выражают это так:

$$x \to a.$$

Если абсолютная величина переменного числа увеличивается неограниченно (беспредельно), то условно говорят, что оно стремится к $+\infty$ или к $-\infty$ (смотря по его знаку), если же абсолютная величина переменного числа делается и остается меньшей любого данного положительного числа, то говорят, что оно стремится к нулю.

Переменное число, стремящееся к ∞, называется часто бесконечно большим, а переменное число, стремящееся к нулю, называется бесконечно малым. Должно однако помнить, что эти названия не означают „число очень большое“, или „число очень малое“; они характеризуют не самое число, а процесс его изменения: число, называемое „бесконечно большим“, изменяется так, что оно делается и остается (по абсолютной величине) больше любого данного числа, а число, называемое „бесконечно малым“, изменяется так, что оно делается и остается (по абсолютной величине) меньше любого данного положительного числа.

Если воспользоваться в этом смысле названием „бесконечно малое число“, то определение предела можно высказать короче так:

Постоянное число a называется пределом переменного числа x, если разность $x-a$ есть бесконечно малое число.

Встречается еще название „конечное число“. Так называется всякое число, которое не стремится к $\pm\infty$. Постоянное число тоже может быть названо конечным.

308. Некоторые свойства бесконечно малых чисел. 1) *Алгебраическая сумма бесконечно малых чисел бесконечно мала* (если число слагаемых не увеличивается беспредельно).

Возьмем, напр., три бесконечно малых числа α, β и γ (они могут быть положительные и отрицательные). Чтобы показать, что сумма их $\alpha+\beta+\gamma$ бесконечно мала, надо убедиться, что абсолютная величина этой суммы делается и остается меньше всякого данного положительного числа, напр., меньше 1 миллионной. Действительно, так как числа α, β и γ бесконечно малы, то это значит, что при своем изменении абсолютная величина каждого из них делается и остается меньше любого данного числа, в том числе и меньше $^1/_3$ миллионной; значит, тогда абсолютная величина суммы $\alpha+\beta+\gamma$ делается и остается меньше $^1/_3+{}^1/_3+{}^1/_3$, т. е. меньше 1 миллионной.

Заметим, что если одновременно с уменьшением слагаемых число их будет возрастать, то сумма их может оказаться и не бесконечно малой. Возьмем, напр., такие суммы:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{10} \text{ (10 слагаемых);}$$
$$\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\ldots+\frac{1}{100} \text{ (100 слагаемых);}$$

. . . .

Вообще $$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n} \text{ (n слагаемых).}$$

Несмотря на то, что с увеличением знаменателя слагаемые уменьшаются неограниченно, сумма их остается неизменной (она равна 1).

Возьмем еще такие суммы:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{10} \text{ (10^2 слагаемых);}$$
$$\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\ldots+\frac{1}{100} \text{ (100^2 слагаемых);}$$

. . . .