А. П. КИСЕЛЁВ

АЛГЕБРА

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

УЧЕБНИК
ДЛЯ 6—8 КЛАССОВ
СЕМИЛЕТНЕЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Утверждён
Министерством просвещения РСФСР

ИЗДАНИЕ ДВАДЦАТЬ ШЕСТОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА • 1952

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ.

I. Алгебраическое знакоположение.

1. Употребление букв. *а) Для выражения общих свойств чисел.* Пусть мы желаем кратко выразить в письменной форме, что произведение двух чисел не изменится, если мы поменяем местами множимое и множитель. Тогда, обозначив одно число буквой a, другое буквой b, мы можем написать равенство: $a \times b = b \times a$, или, короче: $ab = ba$, условившись раз навсегда, что если между двумя буквами, написанными рядом, не стоит никакого знака, то это значит, что между ними подразумевается знак умножения. Буквенные обозначения употребляют, если желают выразить, что некоторое свойство принадлежит не каким-нибудь отдельным числам, а всяким числам.

Для обозначения чисел употребляются обыкновенно буквы латинского (или французского) алфавита.

б) Для сокращённого выражения правила, посредством которого можно решить задачи, сходные по условиям, но различающиеся только величиной данных чисел.

Положим, например, мы решаем задачу:

найти 3% числа 520.

Тогда рассуждаем так:

1% какого-нибудь числа составляет $\frac{1}{100}$ этого числа; следовательно:

$$1\% \text{ числа } 520 \text{ составляет } \frac{520}{100} = 5{,}2;$$
$$3\% \text{ числа } 520 \text{ составляют } \frac{520}{100} \times 3 = 15{,}6.$$

Решив несколько подобного рода задач, мы замечаем, что для нахождения процентов какого-нибудь числа достаточно разделить это число на 100 и результат умножить на число процентов. Решим задачу в таком общем виде:

найти $p\%$ числа a.

Задачу решим так:

$$1\% \text{ числа } a \text{ составляет } \frac{a}{100},$$
$$p\% \text{ числа } a \text{ составляют } \frac{a}{100} \times p.$$

Если при числе не стоит никакого показателя степени, то можно подразумевать при нём показателем единицу; например, a означает то же самое, что и a^1.

Равенство двух каких-либо выражений обозначается знаком $=$, а неравенство знаком $>$, который остриём угла должен быть обращён к меньшему числу. Например, если написано:

$$5+2=7,\ 5+2<10,\ 5+2>6,$$

то это значит: $5+2$ равно 7; $5+2$ меньше 10; $5+2$ больше 6.

5. Порядок действий. Относительно порядка, в котором надо производить действия, указанные в алгебраическом выражении, условились: **сначала производить действия высшего порядка, т. е. возвышение в степень и извлечение корня, затем умножение и деление и, наконец, сложение и вычитание.**

Так, если написано выражение: $3a^2b-\frac{b^3}{c}+d$, то при вычислении его надо сначала произвести возвышение в степень (число a возвысить в квадрат и число b в куб), затем умножение и деление (3 умножить на a^2 и полученный результат на b; b^3 разделить на c) и, наконец, вычитание и сложение (из $3a^2b$ вычесть $\frac{b^3}{c}$ и к результату прибавить d).

Когда приходится по условиям задачи отступать от этого порядка действий, то употребляются *скобки*. Скобки показывают, что действия над числами, заключёнными в скобки, надо произвести ранее других. Например, выражения:

$$5+7\cdot 2 \text{ и } (5+7)\cdot 2$$

означают не одно и то же. В первом случае нужно 7 умножить на 2 и результат прибавить к 5 (получаем 19). Во втором случае надо сначала сложить 5 и 7 и результат умножить на 2 (получаем 24).

Точно так же, если написано:

$$(a+b)c-d,$$

то это значит, что сначала надо сложить a и b, затем полученное число умножить на c и из того, что получится, вычесть d.

Когда приходится заключать в скобки такое выражение, в котором есть свои скобки, то новым скобкам придают какую-нибудь другую форму. Например выражение:

$$a\{b-[c+(d-e)]\}$$

означает, что из d вычитается e, полученная разность складывается с c, полученная сумма вычитается из b и на эту разность умножается a.

Скобкам дают обыкновенно такие названия: круглые скобки ( ), квадратные, или ломаные, скобки [ ], фигурные скобки { }.

Когда в выражение входят несколько скобок, то обычно сначала производят действия над числами, заключёнными в круглые скобки, затем над числами в квадратных скобках и, наконец, в фигурных. Производя указанные в скобках действия, мы уничтожаем, или, как говорят, *раскрываем* скобки. Так, в выражении:

$$5\cdot\{24-2\cdot[10+2\cdot(6-2)-3\cdot(5-2)]\}$$

сначала раскрываем круглые скобки:

$$5 \cdot \{24 - 2 \cdot [10 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3]\}.$$

Затем раскрываем квадратные скобки: $5 \cdot \{24 - 2 \cdot 9\}$.

Наконец, раскрываем фигурные скобки: $5 \cdot 6 = 30$.

Упражнения.

1. Сторона квадрата равна a метров; выразить его периметр, затем площадь.

2. Если ребро куба равно m сантиметров, то как выразятся его поверхность, его объём?

3. У прямоугольника основание равно x метров, а высота на d метров короче основания. Выразить его площадь.

4. Некоторое двузначное число содержит x десятков, y простых единиц. Сколько всех единиц в этом числе?

5. В трёхзначном числе имеется a сотен, b десятков и c простых единиц. Какой формулой можно выразить всё число единиц, содержащееся в этом числе?

6. Смешано 2 сорта чаю: первого сорта взято a килограммов, второго b килограммов. Килограмм первого сорта стоит m рублей, второго сорта n рублей. Выразить цену одного килограмма смеси.

7. Указать посредством знаков, принятых в алгебре: 1) сумму квадратов чисел x и y; 2) квадрат суммы этих же чисел; 3) произведение квадратов этих чисел; 4) квадрат произведения их; 5) произведение суммы чисел a и b на их разность; 6) частное от деления суммы чисел m и n на их разность (последнее выразить двояким путём, т. е. посредством знака „:" и посредством черты).

8. Вычислить следующие выражения при $a = 20$, $b = 8$ и $c = 3$:

1) $(a + b)c$; 2) $a + bc$; 3) $(a + b)a - b$;

4) $(a + b)(a - b)$; 5) $(a + b):c$; 6) $\dfrac{a+b}{b-c}$.

9. Написать выражение, которое получится, если в произведении $3ab$ вместо a подставить сумму $x + y$ и вместо b — разность $x - y$.

Исторические сведения.

Алгебра происходит от слова „альджебр". Этим словом начиналось заглавие математического сочинения, написанного учёным Альхваризми (IX в.). Слово „Альхваризми" („из Хорезма") указывает на происхождение учёного из Хорезма (бывш. Хива), ныне Узбекской ССР. Сочинение Альхваризми под названием „Альджебр и альмукабала" излагает способы решения уравнений. Значение слова „алгебра" будет понятно после изучения главы об уравнениях.

Буквы для обозначения чисел ввёл впервые французский математик Виета в 1591 г. После него особенно широко пользовался буквенными обозначениями знаменитый французский философ и математик Рене Декарт (1596—1650 гг.).

Знаки, употребляемые в настоящее время в алгебре, введены различными математиками в разное время. Прежде для обозначения действий употребляли целое слово или даже фразу. Практическая потребность в более быстрых вычислениях приводила к попыткам сокращения отдельных наиболее употребительных слов, пока, наконец, эти слова или их сокращения не заменялись специальными знаками. Укажем время появления наиболее употребительных знаков.

Знаки сложения и вычитания „+" и „—" введены были немецким математиком Видманом в 1489 г. До него ещё они встречаются в рукописях великого итальянского художника Леонардо да Винчи.

Для обозначения равенства введён был (в 1557 г.) английским алгебраистом Рекордом знак „=", „ибо, — как писал он, — никакие два предмета не могут быть более равными, чем две параллельные линии одинаковой длины". Другой английский математик Херриот ввёл знаки „>" и „<" (в 1631 г.) и точку как знак умножения.

Знаменитым немецким математиком Лейбницем (1694 г.) впервые введён знак „:" для обозначения деления, которое раньше его обозначалось чертой.

Скобки ( ), [ ] и { } встречаются впервые в трудах фламандского математика Жирара (1629 г.).

Не все эти знаки сразу входили во всеобщее употребление. Некоторые математики продолжали ещё пользоваться частично старыми обозначениями. Алгебраическую символику в её настоящем виде можно считать окончательно установившейся лишь к концу XVIII столетия. Огромное влияние оказали в этом отношении сочинения великого английского учёного Исаака Ньютона (1642—1727 гг.).

II. Свойства первых четырёх арифметических действий.

Напомним известные уже из арифметики главнейшие свойства действий сложения, вычитания, умножения и деления, так как этими свойствами придётся часто пользоваться и в алгебре.

6. Сложение. а) **Сумма не изменяется от перестановки слагаемых** (переместительный закон сложения). Так:

$$3+8=8+3; \quad 5+2+4=2+5+4=4+2+5.$$

Вообще:

$$a+b=b+a; \; a+b+c+\ldots=b+a+c+\ldots=c+a+b+\ldots.$$

Ряд точек показывает, что число слагаемых может быть и более трёх.

б) **Сумма нескольких слагаемых не изменится, если какие-нибудь из них заменить их суммой** (сочетательный закон сложения). Так:

$$3+5+7=3+(5+7)=3+12=15;$$

$$4+7+11+6+5=7+(4+5)+(11+6)=7+9+17=33.$$

Вообще:

$$a+b+c=a+(b+c)=b+(a+c) \text{ и т. п.}$$

Иногда этот закон выражают так: **слагаемые можно соединять в какие угодно группы.**

в) **Чтобы прибавить к какому-либо числу сумму нескольких чисел, можно прибавить отдельно каждое слагаемое одно за другим.** Так:

$$5+(7+3)=(5+7)+3=12+3=15.$$

Вообще:

$$a+(b+c+d+\ldots)=a+b+c+d+\ldots$$

7. Вычитание. а) **Чтобы вычесть из какого-нибудь числа сумму нескольких чисел, можно вычесть отдельно каждое слагаемое одно за другим.** Так:

$$20-(5+8)=(20-5)-8=15-8=7.$$

Вообще:

$$a-(b+c+d+\ldots)=a-b-c-d-\ldots$$

б) **Чтобы прибавить разность двух чисел, можно прибавить уменьшаемое и затем вычесть вычитаемое.** Так:

$$8+(11-5)=8+11-5=14.$$

Вообще:

$$a+(b-c)=a+b-c.$$