А. П. КИСЕЛЁВ

АРИФМЕТИКА

УЧЕБНИК
ДЛЯ 5-го и 6-го КЛАССОВ
СЕМИЛЕТНЕЙ
И СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ПЕРЕРАБОТКА
проф. А. Я. ХИНЧИНА

Утверждён
Министерством просвещения РСФСР

ИЗДАНИЕ СЕМНАДЦАТОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва — 1955

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА ПЕРЕРАБОТКИ.

Всё многообразие трудных вопросов, встающих перед составителем каждого учебника, для своего удовлетворительного разрешения требует прежде всего единой принципиальной установки. При переработке курса арифметики А. П. Киселёва я исходил из того принципа, что каждый учебник, хотя бы это был учебник для V класса средней школы, должен представлять собой единое логически систематизированное целое. Проведение этого принципа должно было оказать и оказало решающее влияние на выбор и расположение материала.

В отношении выбора материала я не счёл возможным ограничиться лишь тем, что может и должно быть усвоено каждым учеником V класса. Требование логической цельности заставило ввести в учебник некоторую долю материала, который, как правило, может быть надлежащим образом усвоен учащимися лишь в старших классах при повторении курса. Весь материал такого рода выделен мелким шрифтом, и построение учебника таково, что всё набранное мелким шрифтом может быть пропущено без ущерба для понимания дальнейшего. Я не хочу советовать учителю безраздумно пропускать весь мелкий шрифт; здесь необходим дифференцированный подход в зависимости от уровня развития класса, и нельзя провести огульно резкой черты между тем, что доступно ученику V класса, и тем, что ему недоступно.

С другой стороны, требование предметного и логического единства заставило значительно сократить, а иногда и вовсе опустить ряд разделов, по традиции включаемых обычно в учебники арифметики; сюда относится теоретическая трактовка задач на тройное правило, на смешение и сплавы и т. п. Элементарная арифметика есть учение о действиях над рациональными числами. Специфические требования средней школы заставляют понимать это определение расширительно и включать в курс арифметики учение об измерении величин и о пропорциональных величинах. Это в известной мере нарушает цельность курса, не создавая, однако, существенного дефекта, ибо к арифметике просто присоединяется несколько более или менее законченных дополнительных глав. Но включение в такой курс не объединённых никакой общей теоретической основой приёмов решения отдельных встречающихся на практике типов задач означало бы сползание от научного руководства к „рабочей книге". Местом для такого рода задач должен быть задачник, а не теоретическое руководство.

Проведение основного принципа существенным образом сказалось и в р а с п о л о ж е н и и материала. Так, учение об измерения величин, понятие о мерах и именованных числах, естественно, нашли себе место в виде особого отдела на рубеже между учением о целых числах и учением о дробях. Это не значит, конечно, что в живом педагогическом процессе метры и килограммы должны быть впервые упоминаемы лишь после окончания учения о целых числах, включая теорию делимости. Разумеется, уже в работе над целыми числами учащиеся должны знакомиться с основными мерами; не будет ничего плохого, если уже при изучении целых чисел учащиеся прочитают тот или другой параграф из раздела, посвящённого мерам и измерению, но учебник как цельное и систематическое руководство не может и не должен в точности воспроизводить живого педагогического процесса.

В этом же порядке идей я счёл необходимым изъять из учебника особый раздел о процентах. Я исходил при этом из убеждения, что этот раздел, включавший в себя математически различные задачи, объединённые лишь общностью практической обстановки, являлся одним из пережитков „комплексного“ метода и что именно этот его характер и создавал в значительной мере специфические трудности в создании прочных навыков в области процентных вычислений. У учащихся, естественно, создавалось представление, будто процентные вычисления представляют собой нечто принципиально новое по сравнению с обычными действиями над дробными числами, и это представление затрудняло применение уже приобретённых навыков к задачам, которые лишь облечены в новую форму, но по существу не представляют собой ничего нового. Впрочем, учитель, который пожелал бы проходить процентные вычисления в виде особого раздела, имеет полную возможность сделать это по настоящему учебнику: для этого надо только выделить из IV и V отделов книги все параграфы, посвящённые процентам, и расположить их в том же порядке в виде особого отдела в конце книги.

Весь текст учебника Киселёва подвергся весьма тщательной переработке в сторону большей научной чёткости и большей доступности изложения. Во многих местах приводимые примеры заменены новыми и число примеров увеличено. Тем не менее строение и стиль книги в основном были предопределены её первоначальным текстом; автор переработки не мог ставить себе целью создание нового учебника.

В моей работе мне оказал весьма существенную помощь весь коллектив группы математики Центрального института средней школы; ряд ценных советов я получил и от представителей актива московских учителей; всем этим товарищам я приношу искреннюю благодарность.

1938 г. *А. Хинчин.*

ОТДЕЛ I.
ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА.

I. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА, ИХ НАИМЕНОВАНИЕ И ОБОЗНАЧЕНИЕ.

1. Понятие о целом числе. Один предмет да один предмет составляют два предмета; два предмета да один предмет составляют три предмета; три да один составляют четыре и т. д. Один, два, три, четыре и т. д. называются целыми числами.

Число один иначе называется единицей. Число два можно рассматривать как собрание (совокупность) двух единиц, число три — как собрание трёх единиц и т. д. Таким образом, всякое целое число есть либо единица, либо собрание нескольких единиц.

Кроме целых чисел, арифметика изучает и другие числа. С ними мы познакомимся дальше.

2. Натуральный ряд. Если к единице присоединить ещё единицу, к полученному числу снова присоединить единицу, потом ещё единицу и т. д., то получится натуральный ряд чисел: один, два, три, четыре, пять, шесть, семь и т. д.

Наименьшее число в этом ряду — единица; наибольшего числа нет, потому что ко всякому числу, как бы велико оно ни было, можно присоединить ещё единицу и получить число ещё большее; значит, натуральный ряд можно продолжать без конца; поэтому говорят, что натуральный ряд бесконечен.

Число три меньше, чем число пять, которое в натуральном ряду стоит дальше, чем три; действительно, чтобы получить число пять, надо к тем трём единицам, из которых составлено число три, присчитать ещё две единицы. Вообще из двух разных чисел всегда меньшим будет то, которое в натуральном ряду стоит раньше; действительно, чтобы из этого числа получить второе число, которое в натуральном ряду стоит позже, надо к первому числу присчитать ещё одну или несколько единиц, т. е. увеличить его; поэтому второе число больше первого.

Из двух чисел меньше то, которое в натуральном ряду встречается раньше, и больше то, которое в натуральном ряду встречается позже.

3. Счёт. Чтобы узнать, сколько в классе столов или сколько в саду деревьев, мы должны с о с ч и т а т ь их. Счёт состоит в том, что, отделяя один предмет за другим (на самом деле или только мысленно), мы называем каждый раз число отдельных предметов. Так, считая столы в классе, мы отделяем мысленно один стол за другим и говорим: один, два, три, четыре и т. д. Если при отделении последнего стола мы сказали, например, восемь, то, значит, в классе восемь столов; число восемь есть в этом случае р е з у л ь т а т с ч ё т а.

Мы принимаем за очевидную истину, что результат счёта не зависит от того порядка, в каком мы считаем предметы. Так, считая столы в классе, мы получим одно и то же число независимо от того, считаем ли мы от передних столов к задним или от задних к передним. Важно только, чтобы при счёте ни один стол не был пропущен и чтобы каждый стол был сосчитан только один раз.

4. Названия чисел до тысячи. Первые десять чисел натурального ряда носят следующие названия:

один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять (или десяток).

С помощью этих названий и ещё некоторых других можно выражать и другие числа. Положим, например, мы желаем назвать число поставленных здесь чёрточек:

Для этого отсчитываем десять чёрточек и отделяем их от остальных; потом отсчитываем ещё десять чёрточек и отделяем их от остальных. Продолжаем так отсчитывать по десятку до тех пор, пока либо совсем не останется чёрточек, либо их останется менее десяти. Теперь сосчитаем десятки и оставшиеся чёрточки (или единицы); так как десятков оказалось четыре, а оставшихся чёрточек три, то мы можем число всех чёрточек назвать так:

четыре десятка три единицы.

Когда в числе окажется более десяти десятков, то поступают так: отсчитывают десять десятков, потом ещё десять десятков, затем снова десять десятков и т. д. — до тех пор, пока можно. Каждые десять десятков называют одним словом: *сто*, или *сотня*. Положим, что в каком-нибудь числе оказывается: сотен — три, оставшихся десятков — пять и оставшихся единиц — семь; такое число можно назвать так:

три сотни пять десятков семь единиц.

Если сотен в числе окажется более десяти, то эти сотни считаются тоже десятками. Каждые десять сотен называют одним словом: *тысяча*.

5. Сокращение некоторых названий. В нашем языке употребительны некоторые сокращённые названия чисел. Так, десять да один называется *одиннадцать* (т. е. один-на-десять); десять да два называется *двенадцать* (т. е. две-на-десять) и т. д. Два десятка называется *двадцать* (т. е. два-десять); три десятка называется *тридцать* (т. е. три-десять); четыре десятка называется *сорок* и т. д. Две сотни называется *двести*; три сотни называется *триста* и т. д.

6. Обозначение чисел до тысячи. Первые девять чисел обозначаются особыми знаками или *цифрами*:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

С помощью этих девяти цифр и десятой 0 (нуль), означающей отсутствие предметов, можно изобразить всякое число.

Цифра 0 обозначает, что предметов вовсе нет, цифра 1, — что имеется только один предмет, и т. д.

Чтобы изобразить цифрами число, условились писать: простые единицы — на первом месте справа, десятки — на втором месте справа, сотни — на третьем месте; например:

число сорок два изобразится	. . . .	42
„ сорок „	. . . .	40
„ триста сорок пять изобразится	. . .	345
„ триста сорок „	. . .	340
„ триста семь „	. . .	307
„ триста „	. . .	300

Все цифры, кроме нуля, называются *значащими* цифрами.

Приведённые примеры показывают необходимость введения нуля. Так, в обозначении числа триста сорок (340) нельзя опустить нуль, потому что 34 означает тридцать четыре. Напротив, нули, стоящие влево от первой значащей цифры, могут быть опущены и почти всегда опускаются; 045 означает то же, что 45; 007 — то же, что просто 7. При этом условии число, изображаемое одной цифрой, называется *однозначным*, двумя цифрами — *двузначным*, тремя цифрами — *трёхзначным* и т. д.

7. Названия чисел, превосходящих тысячу. Когда считаемых предметов более тысячи, то составляют из них столько тысяч, сколько можно; затем считают тысячи и оставшиеся единицы и называют число тех и других: например, двести сорок тысяч пятьсот шестьдесят две единицы.

Тысяча тысяч составляет *миллион*, тысяча миллионов — *миллиард* (или *биллион*), тысяча миллиардов — *триллион* и т. п. [1]).

8. Обозначение чисел, превосходящих тысячу. Пусть требуется написать число: тридцать пять *миллиардов* восемьсот шесть *миллионов* семь *тысяч* шестьдесят три *единицы*. Его можно написать при помощи цифр и слов так:

35 миллиардов 806 миллионов 7 тысяч 63 единицы.

Чтобы можно было обойтись совсем без слов, условились: во-первых, числа миллиардов, миллионов, тысяч и простых единиц писать рядом, в одну строчку, слева направо, и, во-вторых, изображать каждое из этих чисел всегда т р е м я цифрами, т. е. вместо 63 единиц писать 063, вместо 7 тысяч писать 007 и т. п. Тогда наше число изобразится так:

035 806 007 063.

Впрочем, и здесь с левой стороны нулей не пишут, т. е. изображают наше число так:

35 806 007 063.

Наконец, то же число часто пишут и без промежутков:

35806007063.

При этом запоминают, что первые справа три цифры означают число единиц, следующие влево три цифры означают число тысяч, следующие за этими три цифры — число миллионов и т. д. Например:

567002301	означает . .	567 миллионов 2 тысячи 301 единица
15000026	„ . .	15 миллионов 26 единиц
2008001020	„ . .	2 миллиарда 8 миллионов 1 тысяча 20 единиц и т. п.

---

[1]) Затем следуют названия: *квадриллион* (тысяча триллионов), *квинтиллион* (тысяча квадриллионов), *секстиллион* (тысяча квинтиллионов) и т. д.

9. Как прочитать число, написанное длинным рядом цифр. Чтобы легче прочитать число, изображённое длинным рядом цифр, например такое: 5183000567029, мысленно отделяют в нём справа (например, запятой, поставленной сверху) по три цифры до тех пор, пока можно:

5’183’000’567’029.

Первая справа запятая заменяет слово „тысяч", вторая — „миллионов", третья — „миллиардов", четвёртая — „триллионов". Значит, наше число должно быть прочтено так:

5 триллионов 183 миллиарда 567 тысяч 29.

К последнему числу обыкновенно не добавляют слова „единиц".

Если то же число записано так, что через каждые три цифры, считая справа, оставлен промежуток:

5 183 000 567 029,

то его легко прочитать и не ставя запятых.

10. Значение мест, занимаемых цифрами. При таком способе написания чисел каждое место, занимаемое цифрой, имеет своё особое значение, а именно:

на	**1-м**	месте	справа	ставятся	**простые единицы**
„	**2-м**	„	„	„	**десятки**
„	**3-м**	„	„	„	**сотни**
„	**4-м**	„	„	„	**единицы тысяч**
„	**5-м**	„	„	„	**десятки тысяч**
„	**6-м**	„	„	„	**сотни тысяч**
„	**7-м**	„	„	„	**единицы миллионов**
„	**8-м**	„	„	„	**десятки миллионов**
„	**9-м**	„	„	„	**сотни миллионов**
„	**10-м**	„	„	„	**единицы миллиардов**

и т. д.

Мы видим, таким образом, что наша система обозначения основана на употреблении десяти цифр, которым приписывается двоякое значение: одно — в зависимости от начертания цифры, другое — в зависимости от места, занимаемого цифрой, а именно:

из двух написанных рядом цифр левая означает единицы, в 10 раз большие, чем правая.

11. Разряды единиц. Единицы, десятки, сотни, тысячи и т. д. иногда удобнее называть иначе, а именно:

единицы называются единицами 1-го разряда (или простыми единицами),

десятки „ „ 2-го „

сотни „ „ 3-го „ и т. д.

Все единицы, кроме простых единиц (единиц 1-го разряда), называются составными единицами. Так, десяток, сотня, тысяча — составные единицы.

Всякая составная единица по сравнению с другой единицей, меньшей её, называется единицей *высшего разряда*, а по сравнению с единицей, большей её, называется единицей *низшего разряда;* так, сотня есть единица высшего разряда сравнительно с десятком и единица низшего разряда сравнительно с тысячей.

Каждые 10 единиц низшего разряда составляют одну единицу следующего высшего разряда: например, десять десятков составляют сотню, десять десятков тысяч составляют сотню тысяч и т. д.

12. Классы единиц. Разряды единиц группируют ещё в *классы;* к 1-му классу относятся первые три разряда: сотни, десятки и единицы; ко 2-му классу относятся следующие три разряда: тысячи, десятки тысяч, сотни тысяч и т. д. 1-й класс есть *класс единиц* (содержит сотни, десятки и единицы единиц); 2-й класс — *класс тысяч* (содержит сотни, десятки и единицы тысяч) и т. д.

13. Как узнать, сколько в числе всех единиц данного разряда. Пусть требуется узнать, сколько в числе 56284 заключается всех сотен, т. е. сколько сотен заключается в десятках тысяч, в тысячах и в сотнях данного числа вместе.

Простые сотни ставятся на третьем месте справа; в данном числе на третьем месте стоит цифра 2; значит, в числе есть две простые сотни. Следующая влево цифра 6 означает тысячи, но в каждой тысяче содержится 10 сотен; значит, в 6 тысячах их заключается 60. Следующая влево цифра 5 означает десятки тысяч, но каждый десяток тысяч содержит в себе 10 тысяч, и, следовательно, 100 сотен; значит, в 5 десятках тысяч заключается 500 сотен. Всего, таким образом, в данном числе содержится сотен 500 да ещё 60, да ещё 2, т. е. 562.

Так же узнаём, что в данном числе всех десятков 5628.

Правило. **Чтобы узнать, сколько в числе заключается всех единиц данного разряда, надо отбросить все цифры, означающие единицы низших разрядов, и прочитать число, выражаемое оставшимися цифрами.**

II. РАЗЛИЧНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ. РИМСКИЕ ЦИФРЫ.

14. Понятия о системах счисления. Всякий общий способ наименования и обозначения чисел называется *системой счисления* или *нумерацией*. Наша система счисления называется *десятичной* (или десятеричной), потому что по этой системе 10 единиц одного разряда составляют одну единицу следующего высшего разряда. Число десять называют поэтому *основанием* десятичной системы счисления. Всякое число N по этой системе представляется разложенным на простые единицы, десятки, сотни, тысячи и т. д., причём число единиц каждого разряда меньше 10. Если положим, что в числе N содержится простых единиц a, десятков b, сотен c, тысяч d и т. д., то это число представляет собой сумму:

$$N = a + b\cdot 10 + c\cdot 10^2 + d\cdot 10^3 + \ldots .$$

Можно вообразить себе другие системы, в которых за основание принято какое-нибудь иное число. Если, например, за основание взять число 5, то получится *пятеричная* система счисления, по которой 5 единиц одного разряда должны составить единицу следующего высшего разряда. Таким образом, по пятеричной системе единицей 2-го разряда должна быть пятёрка, единицей 3-го разряда — 5 пятёрок, или 5^2, единицей 4-го разряда — 5 раз по 5 пятёрок, или 5^3, и т. д. По этой системе число N представлялось бы так:

$$N = a + b\cdot 5 + c\cdot 5^2 + d\cdot 5^3 + e\cdot 5^4 + \ldots ,$$

где каждое из чисел a, b, c, d, e, ... было бы меньше 5.

15. Число цифр, необходимое для изображения чисел по данной системе. Для письменного изображения чисел по десятичной системе употребляются 10 различных знаков. Для другой системы счисления потребовалось бы иное число цифр. Например, для пятеричной системы достаточно было бы следующих пяти цифр: 1, 2, 3, 4, 0. Действительно, число 5 представляло бы по этой системе 1 единицу 2-го разряда и, следовательно, изображалось бы так: 10. Число 6 представляло бы 1 единицу 2-го разряда (пятёрку) и одну единицу 1-го разряда и, следовательно, изображалось бы так: 11 и т. п. Для изображения чисел по системе, у которой основание превосходит 10, было бы недостаточно наших цифр. Например, для двенадцатеричной системы пришлось бы придумать особые знаки для чисел 10 и 11, потому что наши обозначения этих чисел выражали бы тогда другие числа, именно: 10 означало бы 1 единицу 2-го разряда, т. е. дюжину, а 11 означало бы 1 единицу 2-го разряда и 1 единицу 1-го разряда, т. е. 13.

16. Число, написанное по десятичной системе счисления, изобразить по другой системе. Для примера положим, что требуется число 1766 выразить по пятеричной системе при помощи пяти знаков 0, 1, 2, 3, 4. Для этого узнаем сначала, сколько в 1766 заключается единиц 2-го разряда, т. е. пятёрок. Их оказывается 353, причём остаётся 1 единица 1-го разряда. Теперь узнаем, сколько в 353 пятёрках заключается единиц 3-го разряда. Так как единица 3-го разряда содержит 5 единиц 2-го разряда, то надо 353 разделить на 5. Разделив, узнаем, что в 353 пятёрках заключается 70 единиц 3-го разряда и 3 единицы 2-го разряда. 70 единиц 3-го разряда превращаем в единицы 4-го разряда; эти последние — в единицы 5-го разряда и т. д.

$$\begin{array}{lllll}
1766 & |\ 5 & & & \\
\ \ 26 & 353 & |\ 5 & & \\
\ \ 16 & \ \ \ 3 & 70 & |\ 5 & \\
\ \ \ \ 1 & & 20 & 14 & |\ 5 \\
 & & \ \ 0 & \ \ 4 & \ \ 2
\end{array}$$

Таким образом, находим, что 1766 содержат 2 единицы 5-го разряда, 4 единицы 4-го разряда, 3 единицы 2-го разряда и 1 единицу 1-го разряда; следовательно, 1766 изобразится по пятеричной системе так: 24031. Пусть ещё требуется изобразить 121380 по двенадцатеричной системе:

$$\begin{array}{lllll}
121380 & |\ 12 & & & \\
\ \ 13 & 10115 & |\ 12 & & \\
\ \ 18 & \ \ \ 51 & 842 & |\ 12 & \\
\ \ \ \ 60 & \ \ \ \ 35 & \ \ \ 2 & 70 & |\ 12 \\
\ \ \ \ \ 0 & \ \ \ \ 11 & & 10 & \ \ 5
\end{array}$$

Обозначая 10 через a, 11 через b, найдём, что данное число изобразится так: $5a2b0$.

17. Число, написанное по какой-нибудь системе счисления, изобразить по десятичной. Пусть, например, требуется число 5623, написанное по восьмеричной системе, перевести на десятичную систему. Это можно выполнить, вычислив сумму:

$$N = 3 + 2\cdot 8 + 6\cdot 8^2 + 5\cdot 8^3 = 3 + 16 + 384 + 2560 = 2963.$$

Но проще поступить так: раздробим 5 единиц 4-го разряда в единицы 3-го разряда, для чего умножим 5 на 8 (потому что единица 4-го разряда содержит по восьмеричной системе 8 единиц 3-го разряда), к полученному числу приложим 6 единиц 3-го разряда, находящихся в данном числе. Раздробим единицы 3-го разряда в единицы 2-го разряда; к полученному числу приложим 2 единицы 2-го разряда, находящиеся в данном числе. Раздробим единицы 2-го разряда в единицы 1-го разряда, к полученному числу приложим 3 единицы 1-го разряда, находящиеся в данном числе. Получим 2963.

$$\begin{array}{r}
5623 \\
\cdot 8 \\
\hline
+\begin{array}{r}40\\ 6\end{array} \\
\hline
46 \\
\cdot 8 \\
\hline
+\begin{array}{r}368\\ 2\end{array} \\
\hline
370 \\
\cdot 8 \\
\hline
+\begin{array}{r}2960\\ 3\end{array} \\
\hline
2963
\end{array}$$

Замечания. 1) Десятичная система счисления распространена почти повсеместно. Многие видят причину такой распространённости в том, что каждый человек с детства привыкает считать при помощи десяти пальцев обеих рук. Однако десятичное счисление не является самым удобным. Например, в некоторых отношениях удобнее была бы двенадцатеричная система, которая, не требуя для изображения чисел большого числа цифр, обладает важным свойством, что основание её делится без остатка на 2, на 3, на 4 и на 6, тогда как основание нашей системы делится только на 2 и на 5; подобные же соображения послужили, вероятно, основанием шестидесятеричной системы счисления, употреблявшейся в древнем Вавилоне. Для теоретических исследований наиболее целесообразной оказывается двоичная система, которая, впрочем, для практических целей совсем неудобна, так как по этой системе даже небольшое число выражается длинным рядом цифр (например, число 70 выражается так: 1000110).

2) Употребляемые нами цифры и самая система обозначения чисел заимствованы европейцами у арабов (около XII в.). Вот почему эти цифры называются **арабскими**. Но есть основание думать, что арабы в свою очередь заимствовали эту систему у индусов.

18. Римские цифры. Так как римские цифры в настоящее время употребляются иногда для обозначения чисел, то полезно ознакомиться и с ними. Римляне употребляли для обозначения чисел только следующие семь знаков:

$$\mathrm{I}=1,\ \mathrm{V}=5,\ \mathrm{X}=10,\ \mathrm{L}=50,\ \mathrm{C}=100,\ \mathrm{D}=500,\ \mathrm{M}=1000.$$

Их способ выражать числа существенно отличался от нашего. У нас цифры изменяют своё значение с переменой места, а в римской нумерации цифры на всяком месте сохраняют своё значение. Когда написано несколько римских цифр рядом, то число, выражаемое ими, равно сумме чисел, выражаемых каждой цифрой, например, XXV означает сумму $10+10+5$, т. е. 25; CLXV означает сумму $100+50+10+5$, т. е. 165, и т. п. Исключение из этого правила составляют только следующие 6 чисел:

$$4=\mathrm{IV},\ 9=\mathrm{IX},\ 40=\mathrm{XL},\ 90=\mathrm{XC},\ 400=\mathrm{CD},\ 900=\mathrm{CM}.$$

В этих изображениях значение левой цифры вычитается из значения правой.

После этого понятны будут следующие изображения чисел:

$$\mathrm{I}=1,\ \mathrm{II}=2,\ \mathrm{III}=3,\ \mathrm{IV}=4,\ \mathrm{V}=5,\ \mathrm{VI}=6,$$
$$\mathrm{VII}=7,\ \mathrm{VIII}=8,\ \mathrm{IX}=9,\ \mathrm{X}=10,\ \mathrm{XI}=11,\ \mathrm{XII}=12,$$
$$\mathrm{XIV}=14,\ \mathrm{XVIII}=18,\ \mathrm{XIX}=19,\ \mathrm{XX}=20,\ \mathrm{XXIX}=29,$$
$$\mathrm{XLII}=42,\ \mathrm{LXXXIV}=84,\ \mathrm{XCV}=95,\ \mathrm{CCC}=300,$$
$$\mathrm{MCMXXXVII}=1937.$$

Число тысяч изображается так же, как число единиц, только с правой стороны внизу ставят букву m (mille — тысяча), например:

$$\mathrm{CLXXX}_m\,\mathrm{CCCLXIV}=180\,364.$$

III. СЛОЖЕНИЕ.

19. Что такое сложение. Единицы, из которых составлено несколько чисел, могут быть объединены в одно собрание. Число, которое получится после счёта всех единиц этого собрания, называется *суммой*, а те числа, которые соединяются в одно собрание, называются *слагаемыми*. Так, 5 спичек да 7 спичек да 2 спички могут быть соединены в одно собрание 14 спичек. Число 14 есть сумма трёх слагаемых: 5, 7 и 2. Слагаемых может быть 2, 3 и более.

Слагаемые можно рассматривать как части суммы.

Нахождение по нескольким данным числам одного нового числа называется *арифметическим действием* (для краткости мы его будем просто называть *действием*).

Действие, состоящее в образовании суммы нескольких чисел, называется сложением этих чисел.

Знак сложения есть $+$ (плюс); так, если написано $5+7+2$, то это означает сумму чисел 5, 7 и 2.

Действие сложения всегда возможно (любые числа могут быть соединены в одно собрание) и всегда даёт единственный результат.

20. Основные свойства суммы. 1) Сумма не изменяется от перемены порядка слагаемых.

Так, сумма $5+7+2$ всегда равна 14, в каком бы порядке мы ни производили сложение:

$$5+7+2=2+7+5=7+5+2=14.$$

Свойство это принято называть *переместительным законом сложения*, так как оно состоит в том, что слагаемые можно перемещать, не изменяя суммы.

В общем виде это свойство для трёх слагаемых можно записать так:

$$a+b+c=a+c+b=b+a+c=b+c+a=c+a+b=c+b+a,$$

где под буквами разумеются какие угодно числа.

2) Сумма не изменится, если какую-либо группу слагаемых мы заменим их суммой.

Например, сумма $5+7+2$ не изменится, если мы слагаемые 7 и 2 заменим их суммой:

$$5+7+2=5+9=14.$$

Это свойство называется *сочетательным законом сложения*, так как оно состоит в том, что любые слагаемые мы можем *сочетать* (соединять) в одно число (в одну группу).

В общем виде это свойство для трёх слагаемых можно записать так:

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c),$$

где скобками указано, в каком порядке надо произвести сложение: сначала сделать сложение, указанное внутри скобок, а затем сложение, указанное вне скобок.

21. Как прибавить сумму и как прибавить к сумме. Из основных свойств суммы можно вывести следующие два предложения.

1) Чтобы прибавить к какому-нибудь числу сумму нескольких чисел, можно прибавить к этому числу каждое слагаемое одно за другим.

Так:

$$100+(20+7+3)=100+20+7+3\text{ [1]}.$$

В самом деле, на основании свойства 2) (§ 20) правая часть написанного равенства не изменится, если мы в ней слагаемые 20, 7 и 3 соединим в одну группу, но, сделав это, мы получим как раз левую часть написанного равенства.

2) Чтобы прибавить какое-нибудь число к сумме, можно прибавить это число к одному какому-нибудь слагаемому, оставив другие без изменения.

Так:

$$(35+15+20)+10=(35+10)+15+20=$$
$$=35+(15+10)+20=\ldots .$$

Все эти суммы равны сумме $35+15+20+10$, только в некоторых из них слагаемые переставлены и некоторые из слагаемых соединены в одну группу. Поэтому на основании свойств 1) и 2) (§ 20) все эти суммы равны сумме $35+15+20+10$ и, значит, равны между собой.

22. Сложение двух однозначных чисел. Чтобы найти сумму двух однозначных чисел, достаточно к одному из них причислить все единицы другого. Так, присчитывая к 7 все единицы числа 5, находим сумму 12.

Чтобы уметь быстро складывать всякие числа, следует з а п о м н и т ь все суммы, которые получаются от сложения двух однозначных чисел.

---

[1]) Скобки ( ) здесь и в дальнейшем означают, что действия, стоящие внутри скобок, должны быть выполнены прежде остальных; подробнее об употреблении скобок см. § 41.

Замечание. Так как нуль указывает на отсутствие единиц, то $5+0=5$ (если к пяти ничего не прибавить, то останется 5) и $0+5=5$ (если единиц не было, а затем присчитано 5 единиц, то 5 единиц и получится). Вообще сложение любого числа с нулём или нуля с любым числом всегда даёт это самое число.

23. Сложение многозначного числа с однозначным. Пусть требуется сложить 37 и 8. Для этого от 37 отделим 7 единиц и сложим их с 8; получим 15. Эти 15 единиц прибавим к 30; но 15 всё равно что 10 да 5. Прибавив 10 к 30, получим 40; прибавив к 40 ещё 5, получим 45.

Можно поступить и так. Заметив, что к 37 надо прибавить 3, чтобы получить 40, отделим 3 единицы от 8 единиц и приложим их к 37; тогда получим 40 и ещё 5 единиц, оставшихся от 8, т. е. получим 45.

Следует привыкнуть выполнять эти действия в уме и притом быстро.

Указанные в этом параграфе два приёма сложения составляют применение тех предложений, о которых говорится в § 21, как это видно из равенства:

$$37+8=(30+7)+8=30+(7+8)=30+15=$$
$$=30+(10+5)=(30+10)+5=40+5=45,$$

или $\quad 37+8=37+(3+5)=(37+3)+5=40+5=45.$

24. Сложение многозначных чисел. Пусть требуется найти сумму четырёх чисел: 13653, 22409, 1608 и 346. Для этого сложим сначала простые единицы всех слагаемых, потом их десятки, затем сотни и т. д. Чтобы при этом не смешать между собой единиц различных разрядов, напишем данные числа одно под другим так, чтобы единицы стояли под единицами, десятки — под десятками, сотни — под сотнями и т. д.; под последним слагаемым проведём черту:

$$+\begin{array}{r}13653\\22409\\1608\\346\\\hline 38016\end{array}$$

Сложив единицы, получим 26, т. е. 2 десятка и 6 единиц; 2 десятка запомним, чтобы их сложить с десятками данных чисел, а 6 единиц запишем под чертой, под единицами слагаемых. Сложив десятки (вместе с теми двумя десятками, которые получились от сложения единиц), получим 11 десятков, т. е. 1 сотню и 1 десяток; 1 сотню мы запомним, чтобы её сложить с сотнями, а 1 десяток напишем под чертой на месте десятков. От сложения сотен получим 20 сотен, т. е. ровно 2 тысячи; эти 2 тысячи запомним, чтобы их прибавить к тысячам, а под чертой напишем нуль на месте сотен. Продолжаем так действие далее.

Замечание. Если при сложении цифр какого-нибудь столбца (например, десятков в данном нами примере) встретится цифра нуль, то на неё не обращают внимания, так как на основании замечания в конце § 22 прибавление нуля не изменяет имевшегося числа единиц.

25. Нуль есть число. Мы видели, что при выполнении сложения среди слагаемых может встретиться нуль; дальше мы увидим, что над нулём нам придётся выполнять и другие арифметические действия. Поэтому мы теперь условимся *считать нуль числом* наравне с другими числами; очевидно, что *нуль меньше всякого другого числа.*

26. Увеличение числа на несколько единиц. Увеличить какое-нибудь число на несколько единиц — это значит приложить к числу эти несколько единиц. Если, например, надо увеличить 80 на 25, то это значит, что требуется к 80 приложить 25 (получим 105). Таким образом, увеличение числа на несколько единиц выполняется сложением.

27. Изменение суммы с изменением слагаемых. Так как сумма содержит в себе все единицы слагаемых, то очевидно, что

если к какому-либо слагаемому прибавим несколько единиц (а другие слагаемые оставим без изменения), то сумма увеличится на столько же единиц.

Так, $5+8=13$; если к первому слагаемому прибавить 4, то получится $(5+4)+8=9+8=17$; если прибавить 4 ко второму слагаемому (а первое слагаемое оставить без изменения), то получится:

$$5+(8+4)=5+12=17;$$

таким образом, от прибавления числа 4 к одному из слагаемых сумма увеличивается на 4 единицы (так как 17 на 4 единицы больше, чем 13).

Если от какого-либо слагаемого отнимем несколько единиц (а другие слагаемые оставим без изменения), то сумма уменьшится на столько же единиц;

если к какому-нибудь слагаемому прибавим несколько единиц, а от другого слагаемого отнимем столько же единиц, то сумма останется без изменения.

IV. ВЫЧИТАНИЕ.

28. Что такое вычитание. У ученика было 7 тетрадей; 3 из них он отдал брату; чтобы узнать, сколько тетрадей у него осталось, мы должны от 7 тетрадей отнять 3 тетради (остаётся 4 тетради).

Действие, состоящее в том, что от одного числа отнимается столько единиц, сколько их содержится в другом данном числе, называется вычитанием.

В нашем примере из числа 7 надо вычесть число 3; получается число 4.

Число, от которого отнимают, называется *уменьшаемым;* число, которое отнимают, называется *вычитаемым;* число, получаемое после вычитания, называется *разностью.* Разность иначе называется *остатком.*

В нашем примере уменьшаемое 7, вычитаемое 3, разность 4.

Знак вычитания есть — (минус); он ставится между уменьшаемым и вычитаемым.

Так: $7 - 3 = 4$.

Очевидно, что из данного числа можно вычесть всякое число, которое меньше его или равно ему; но ни из какого числа нельзя вычесть число, которое больше его. Поэтому *вычитаемое не может быть больше уменьшаемого.*

29. Сравнение вычитания со сложением. При производстве вычитания одно число, именно уменьшаемое, разлагается на два числа. Например, если мы, отняв 5 от 9, нашли, что осталось 4, то, значит, мы разложили 9 на два числа: 5 (отнятые единицы) и 4 (оставшиеся единицы). Очевидно, что если эти два числа соединим в одно, то получим то число 9, которое разлагали; значит, *уменьшаемое равно вычитаемому, сложенному с остатком;* иначе говоря, уменьшаемое есть сумма, а вычитаемое и остаток — слагаемые.

При сложении слагаемые даются, а сумма отыскивается; при вычитании же даются сумма и одно слагаемое, а другое слагаемое отыскивается.

Значит, число, которое при сложении ищется, — при вычитании даётся, и наоборот; поэтому говорят, что *вычитание есть действие, обратное сложению.*

30. *Замечания.* 1) Вычитание можно было бы определить сразу как действие, обратное сложению, посредством которого по данной сумме двух слагаемых и одному из этих слагаемых отыскивается другое слагаемое. Но в самом начале элементарного изложения арифметики представляется более простым и наглядным определить вычитание как отнимание от уменьшаемого части, равной вычитаемому, а потом уже показать соотношение между вычитанием и сложением (как это сделано в § 29).

2) Действие вычитания всегда возможно и даёт единственный результат, если только вычитаемое не более уменьшаемого. Если, например, из a требуется вычесть b, то мы можем выполнить это, отняв от a последовательно одну за другой столько единиц, сколько содержится в b. Отняв одну единицу, получим в остатке единственное число $a-1$, непосредственно предшествующее в натуральном ряду числа a; отняв другую единицу, мы опять-таки получим единственное число $a-1-1$, непосредственно предшествующее числу $a-1$, и т. д. Если $b<a$, то, отняв b единиц, мы получим некоторое (и только одно) число натурального ряда, которое и будет разностью, если $b=a$, то после отнимания остаток будет нуль; наконец, если $b>a$, то вычитание невозможно.

31. Вычитание однозначного числа. Чтобы без затруднения вычитать всякое число, надо сначала научиться вычитать в уме однозначное число из однозначного и двузначного. Искомая разность легко находится посредством сложения. Например, чтобы узнать, сколько будет 15 без 8, вспомним, какое число при сложении с 8 даёт 15; 8 да 7 составляет 15; значит, 15 без 8 будет 7.

Следует привыкнуть выполнять это вычитание в уме и притом быстро.

Замечание. $7-0=7$ (если от 7 единиц ничего не отнять, то останется 7 единиц), вообще при вычитании нуля из любого числа всегда получается это самое число.

$8-8=0$ (если от 8 единиц отнять 8 единиц, то ничего не останется); вообще разность двух одинаковых чисел всегда равна нулю.

Из нуля нельзя вычесть никакое другое число, потому что все другие числа больше нуля.

32. Вычитание многозначного числа.

Пример: из 60072 вычесть 7345.

Расположим действие так же, как и при сложении:

$$\begin{array}{rl} -\,\dot{6}0\dot{0}72 & \text{уменьшаемое} \\ 7345 & \text{вычитаемое} \\ \hline 52727 & \text{разность.} \end{array}$$

Будем держаться того же порядка, как и при сложении, т. е. станем вычитать единицы из единиц, десятки из десятков и т. д. 5 единиц из 2 единиц нельзя вычесть; берём от 7 десятков 1 десяток, он содержит 10 единиц, которые мы присоединяем к 2 единицам, стоящим в уменьшаемом; получается 12 единиц; из них мы вычитаем 5 единиц вычитаемого; в остатке получаем 7 единиц. Теперь переходим к десяткам. Из тех 7 десятков, которые имелись в уменьшаемом, 1 десяток мы уже использовали при вычитании единиц (чтобы не забыть этого, мы над цифрой 7 десятков поставили точку), остаётся 6 десятков; из них мы вычитаем 4 десятка вычитаемого, в остатке получается 2 десятка. Переходим к сотням. В уменьшаемом сотен нет; обращаемся к тысячам и видим, что их в уменьшаемом тоже нет; поэтому идём дальше — к десяткам тысяч; их в уменьшаемом имеется 6; один из этих 6 десятков тысяч мы берём (в знак чего над цифрой 6 ставим точку), он содержит 10 тысяч; одну из этих тысяч мы берём; она содержит 10 сотен, из которых мы вычитаем 3 сотни вычитаемого и получаем в остатке 7 сотен. У нас осталось ещё 9 тысяч; из них мы вычитаем 7 тысяч вычитаемого, получаем 2 тысячи в остатке. Наконец, оставшиеся 5 десятков тысяч уменьшаемого переходят в остаток без изменения, так как из них ничего не вычитается. Таким образом, остаток составляет 52727.

Вот ещё примеры на вычитание:

$$\begin{array}{r} \dot{6}\dot{0}\dot{0}\dot{0}227 \\ -\;4320423 \\ \hline 1679804 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \dot{5}\dot{0}\dot{0}\dot{0}\dot{0}0 \\ -\;17236 \\ \hline 482764 \end{array}$$

Вычитание удобнее производить от низших разрядов к высшим потому, что при таком порядке мы в случае надобности всегда можем взять 1 единицу из высших разрядов для раздробления её в единицы низшего разряда.

33. Как вычесть сумму и как вычесть из суммы. При вычитании многозначного числа в предыдущем параграфе мы вычитали единицы из единиц, десятки из десятков и т. д. При этом мы пользовались следующими правилами.

1) Чтобы вычесть сумму, можно вычесть каждое слагаемое отдельно одно за другим.

Так, чтобы вычесть число 325, т. е. сумму $5 + 20 + 300$, можно вычесть отдельно слагаемые 5, 20 и 300.

В общем виде это правило можно выразить таким равенством:

$$a - (b + c + d + \ldots) = a - b - c - d - \ldots .$$

2) Чтобы вычесть число из суммы, можно вычесть это число из какого-нибудь одного слагаемого.

Так:

$$(30 + 20) - 10 = 50 - 10 = 40,$$

или

$$(30 + 20) - 10 = (30 - 10) + 20 = 20 + 20 = 40,$$

или

$$(30+20)-10=30+(20-10)=30+10=40.$$

Вообще

$$(a+b+c+\ldots)-m=(a-m)+b+c+\ldots=a+(b-m)+c+\ldots$$

Рассматривая вычитаемое как сумму простых единиц, десятков, сотен и т. д., мы вычитаем отдельно единицы, потом десятки, затем сотни и т. д. Чтобы вычесть единицы, мы рассматриваем уменьшаемое как сумму разрядов и вычитаем единицы вычитаемого из одного слагаемого этой суммы, именно из единиц. Если этого сделать нельзя, мы берём один десяток уменьшаемого и, раздробив его в простые единицы, присоединяем эти единицы к единицам уменьшаемого и потом вычитаем единицы вычитаемого. Если десятков в уменьшаемом не окажется, мы берём 1 сотню, раздробляем её в десятки и т. д.

34. Проверка сложения. Чтобы убедиться, что действие сделано верно, надо проверить. Для проверки сложения обыкновенно складывают слагаемые во второй раз в ином порядке, чем в первый, например, производя сложение снизу вверх. Если при втором сложении получается та же сумма, то весьма вероятно, что сложение произведено верно.

С другой стороны, можно проверить сложение и вычитанием; для этого надо вычесть из полученной суммы одно из слагаемых; если разность окажется равной сумме остальных слагаемых, то можно считать вероятным, что действие сделано верно.

35. Проверка вычитания. Так как уменьшаемое есть сумма, а вычитаемое и остаток — слагаемые, то для проверки вычитания достаточно сложить вычитаемое с остатком; если получится число, равное уменьшаемому, то весьма вероятно, что действие сделано верно.

С другой стороны, так как вычитаемое и остаток — слагаемые, а уменьшаемое — их сумма и так как от перестановки слагаемых сумма не меняется, то вычитание можно проверить и вычитанием, для этого надо из уменьшаемого вычесть остаток; если при этом получится вычитаемое, то можно считать вероятным, что действие произведено верно.

36. Уменьшение числа на несколько единиц. Уменьшить какое-нибудь число на несколько единиц — значит вычесть из него эти несколько единиц. Так, если требуется 100 уменьшить на 30, то это значит, что требуется от 100 отнять 30 (получим 70).

37. Сравнение двух чисел. Желая сравнить между собой два числа, мы задаёмся вопросом, на сколько единиц одно число больше или меньше другого. Чтобы узнать это, надо из большего числа вычесть меньшее. Например, чтобы узнать на сколько 20 меньше 35 (или на сколько 35 больше 20) надо из 35 вычесть 20; тогда найдём, что 20 меньше 35 (или 35 больше 20) на 15 единиц.

38. Изменение разности с изменением данных чисе. может быть выведено как следствие изменения суммы, так как уменьшаемое есть сумма, а вычитаемое и разность — слагаемые. Поэтому,

если к уменьшаемому прибавим несколько единиц, то разность увеличится на столько же единиц;

если от уменьшаемого отнимем несколько единиц, то разность уменьшится на столько же единиц;

если к вычитаемому прибавим несколько единиц, то разность уменьшится на столько же единиц;

если от вычитаемого отнимем несколько единиц, то разность увеличится на столько же единиц.

Полезно обратить особое внимание на то, что **разность не изменится, если мы уменьшаемое и вычитаемое одновременно увеличим или уменьшим на одно и то же число.**

Так:

$$11-3=(11+6)-(3+6)=8.$$

39. Как вычесть разность. Пусть требуется из 30 вычесть разность 12—8. Вместо того чтобы сначала найти эту разность (она будет 4) и затем её вычесть из 30 (получим 26), мы можем поступить так: увеличим на 8 и уменьшаемое 30 и вычитаемое 12—8, тогда вместо 30 будем иметь 38, а вместо разности 12—8 получим 12. Теперь из 38 вычитаем 12; найдём 26. Это и будет искомое число, так как мы увеличили и уменьшаемое и вычитаемое на одно и то же число, отчего разность не изменится.

Можно ещё поступить и так: вычтем из 30 не 12 без 8, а прямо 12 (получим 18). Но мы вычли больше, чем требовалось, на 8; от этого осталось меньше, чем следует, на 8; значит, если увеличить 18 на 8, то найдём надлежащий остаток 26. Таким образом,

чтобы вычесть разность, можно прибавить вычитаемое и затем отнять уменьшаемое; или же отнять уменьшаемое[1]) и затем прибавить вычитаемое.

В общем виде это правило можно выразить такими равенствами:

$$a-(b-c)=a+c-b; \quad a-(b-c)=a-b+c.$$

[1]) Если это возможно, т. е. если уменьшаемое не больше того числа, из которого требуется вычесть разность.

V. ЗНАКИ ДЕЙСТВИЙ. ЗНАКИ РАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА. СКОБКИ.

40. Знаки. Иногда при решении задачи бывает нужно, не производя действия на самом деле, только указать знаками, какие действия надо выполнить над данными числами. Положим, например, надо указать, что числа 10, 15 и 20 требуется сложить. Тогда пишут данные слагаемые в одну строчку и ставят между ними знак сложения: $10+15+20$.

Если надо указать, что из одного числа требуется вычесть другое, то пишут уменьшаемое и вычитаемое в одну строчку и ставят между ними знак —. Так, выражение $10-8$ означает, что надо из 10 вычесть 8.

Выражение $10+15+20$ читается так: 10 плюс 15 плюс 20, или же сумма 10, 15 и 20. Выражение $10-8$ читается так: 10 минус 8, или же разность 10 и 8.

Употребительны ещё знаки: $=$, $>$ и $<$, которыми мы уже пользовались. Первый называется *знаком равенства* и заменяет собой слова „равно" или „равняется"; два других называются *знаками неравенства* и означают: знак $>$ „больше", а знак $<$ „меньше"; например, выражения $7+8=15$, $7+8>10$ и $7+8<20$ читаются так: 7 плюс 8 равно 15; 7 + 8 больше 10; 7 + 8 меньше 20. Следует помнить, что знаки $>$ и $<$ должны быть обращены остриём угла к меньшему числу.

Встречаются ещё знаки $\neq$ (не равно), $\leqslant$ (меньше или равно), $\geqslant$ (больше или равно).

41. Скобки. Формула. При решении задач весьма полезно раньше совершения действий указать, какие действия и в каком порядке надо выполнить над данными числами, чтобы дойти до ответа на предложенный вопрос. Положим, например, что для решения какой-нибудь задачи надо сначала сложить 35 и 20, потом эту сумму вычесть из 200. Чтобы указать это, пишут так:

$$200-(35+20).$$

Здесь скобки, стоящие после знака —, означают, что из 200 надо вычесть сумму $35+20$, т. е. 55.

Иногда выражение, содержащее скобки, приходится заключить в новые скобки; в таком случае употребляют скобки различной формы, чтобы отличить их одни от других[1]), например, такое выражение:

$$100+\{160-[60-(7+8)]\}$$

[1]) Скобки такой формы ( ) обыкновенно называют простыми, или круглыми, такой формы [ ] — прямыми, или квадратными, и такой { } — фигурными.

означает: сложить 7 и 8 (получим 15); найденную сумму (15) вычесть из 60 (получим 45); вычесть найденное число (45) из 160 (получим 115); сложить полученное число с 100 (получим 215). При этом последовательность действий всегда подразумевается такая, что сначала выполняется действие, помещённое в самых внутренних скобках, и т. д.

Заметим, что при обозначении последовательных сложений и вычитаний, т. е. когда действия должны производиться в том порядке, в каком они написаны, скобки обычно не ставятся; так, если написано:

$$20 - 2 + 4 - 5,$$

то это значит то же, что и $[(20-2)+4]-5$, т. е. что из 20 вычитается 2, к полученной разности прибавляется 4 и от этой суммы отнимается 5.

Выражение, показывающее, какие действия и в какой последовательности надо выполнить над данными числами, чтобы получить искомое число, называется формулой.

Вычислить формулу — значит найти число, которое получится после выполнения всех действий, указанных в формуле.

VI. УМНОЖЕНИЕ.

***Задача.** Куплено 6 линеек по 85 копеек каждая. Сколько заплатили за все линейки?*

Для решения этой задачи мы должны найти сумму 6 одинаковых слагаемых.

$$85 + 85 + 85 + 85 + 85 + 85 = 510 \ (= 5 \text{ руб. } 10 \text{ коп.}).$$

В нашей задаче мы эту сумму находим обыкновенным сложением. Но когда число равных слагаемых велико, нахождение сумм посредством сложения утомительно.

А так как складывать одинаковые слагаемые приходится очень часто, то арифметика вырабатывает способы находить такие суммы более быстро.

Когда производится сложение одинаковых слагаемых, т. е. когда одно и то же число повторяется как слагаемое несколько раз, то говорят, что это число умножается (берётся много раз). Когда оно повторяется 6 раз, то говорят, что оно умножается на 6; если повторяется 20 раз, то говорят, что оно умножается на 20 и т. п.

42. Что такое умножение. *Умножением і сложение одинаковых слагаемых.*

При этом то число, которое повторяется как слагаемое, называется *множимым* (оно умножается), а число, показывающее, сколько берётся таких одинаковых слагаемых, называется *множителем*.

Число, полученное после умножения, называется *произведением*. Например, когда 85 умножается на 6, то 85 есть множимое, 6 — множитель, а получившееся после умножения число 510 — произведение. Множимое и множитель безразлично называются *сомножителями*.

Принято обозначать умножение посредством особого знака. Если, например, 85 надо умножить на 6, то пишут так: $85 \cdot 6$, т. е. пишут множимое, справа от него знак умножения (точка), а справа от знака ставят множитель; такое обозначение заменяет собой сумму $85 + 85 + 85 + 85 + 85 + 85$. Когда произведение найдено, то можно написать равенство: $85 \cdot 6 = 510$[1]).

Равенство это можно прочитать различно:

сумма шести одинаковых слагаемых, из которых каждое равно 85, составляет 510;

85, умноженное на 6, составляет 510;

произведение 85 на 6 равно 510.

Замечания. 1) Так как умножение есть частный случай сложения, то оно всегда возможно и даёт единственный результат при данных сомножителях.

2) Когда сомножители обозначены буквами, то их умножение часто указывается без всякого знака (просто помещают сомножители рядом). Так, если написано ab, то это значит, что число a умножается на число b. Также не ставят никакого знака, если только один множитель обозначен буквой, например $5a$.

3) Множимое может обозначать единицы какого угодно названия, например метры, рубли, карандаши и т. д.; произведение должно означать единицы того же названия, как и множимое. Так, если 7 рублей умножается на 4, то получается 28 рублей. Множитель, означая, сколько берётся одинаковых слагаемых, не имеет наименования; так, можно 7 рублей помножить на 4, но нельзя 7 рублей помножить на 4 рубля или 4 метра.

В прикладных науках (например, в физике) часто перемножают между собой именованные числа, причём наименование произведения рассматривается как произведение наименований сомножителей.

43. Некоторые особые случаи умножения. 1) Если множимое есть единица, то произведение равно множителю; так, $1 \cdot 5 = 5$, потому что сумма $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ составляет 5.

---

1) Вместо точки в качестве знака умножения употребляют также и крест ($\times$).

2) **Если множимое есть нуль, то и произведение равно нулю:** например, $0 \cdot 4 = 0$, потому что сумма $0 + 0 + 0 + 0$, как мы условились ранее (§ 24), должна считаться равной нулю.

3) **Если множитель единица, то произведение принимается равным множимому:** например, $5 \cdot 1 = 5$ (если 5 взять 1 раз, получим 5).

4) **Если множитель есть нуль, то произведение принимается равным нулю:** например, $5 \cdot 0 = 0$ (если 5 не брать ни одного раза, то ничего не получим).

44. Увеличение числа в несколько раз. Увеличить число в 2 раза, в 3 раза, в 4 раза и т. д. — значит составить сумму двух, трёх, четырёх и т. д. слагаемых, равных данному числу. Например, увеличить 10 в 5 раз — значит взять сумму пяти слагаемых, из которых каждое равно 10, т. е. умножить 10 на 5. Таким образом, увеличение числа в несколько раз выполняется умножением (тогда как увеличение числа на какое-нибудь число выполняется сложением).

45. От перемещения сомножителей произведение не изменяется. Положим, желаем сосчитать изображённые здесь чёрточки:

I I I I I I I
I I I I I I I
I I I I I I I

В первой строчке их 7, во второй и в третьей тоже по 7, значит, всех чёрточек будет $7 + 7 + 7$, т. е. $7 \cdot 3$. Но те же чёрточки можно считать вертикальными столбцами: в первом столбце их 3, во втором 3, в третьем 3 и т. д.; так как всех столбцов 7, то чёрточек окажется $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$, т. е. $3 \cdot 7$. Но число чёрточек не зависит от того, в каком порядке мы их считаем: значит, $7 \cdot 3 = 3 \cdot 7$.

Подобным же образом можно убедиться, что $8 \cdot 5 = 5 \cdot 8$; $20 \cdot 15 = 15 \cdot 20$ и т. д. Вообще

произведение не изменяется от перемещения множимого на место множителя, а множителя на место множимого.

Свойство это называется *переместительным законом умножения.*

В общем виде его можно выразить равенством:

$$ab = ba.$$

Замечание. Этим свойством умножение обладает и тогда, когда множитель есть единица или нуль; так, $1 \cdot 5 = 5$ и $5 \cdot 1 = 5$; $0 \cdot 4 = 0$ и $4 \cdot 0 = 0$.

46. Таблица умножения. Чтобы уметь быстро производить умножение любых чисел, надо запомнить все произведения *однозначных* чисел. Для этого составляют (при помощи сложения) так называемую **таблицу умножения** и заучивают её наизусть.

47. Порядок, в каком мы будем рассматривать умножение. Мы укажем, как производится действие умножения в такой последовательности:

1) умножение многозначного числа на однозначное;

2) умножение любого числа на число, выражаемое цифрой 1 с одним или несколькими нулями;

3) умножение любого числа на число, выражаемое какой угодно значащей цифрой с одним или несколькими нулями;

4) умножение многозначного числа на многозначное;

5) умножение чисел, оканчивающихся нулями.

48. Умножение многозначного числа на однозначное. Пусть требуется умножить 846 на 5. Принято располагать действие так:

$$\begin{array}{r} 846 \\ \cdot\ 5 \\ \hline 4230, \end{array}$$

т. е. пишут множимое, под ним множитель; под множителем проводят черту. Под чертой пишут цифры произведения по мере того, как их получают.

Умножить 846 на 5 — значит сложить 5 чисел, каждое из которых равно 846. Для этого достаточно взять сначала 5 раз по 6 единиц, потом 5 раз по 4 десятка и, наконец, 5 раз по 8 сотен.

В каждом из этих случаев произведение найдём по таблице умножения.

5 раз по 6 единиц = 30 единицам, т. е. 3 десяткам; ставим нуль под чертой на месте единиц, а 3 десятка запоминаем.

5 раз по 4 десятка = 20 десяткам, да 3 десятка = 23 десяткам, т. е. 2 сотням и 3 десяткам; ставим 3 десятка под чертой на месте десятков, 2 сотни запоминаем.

5 раз по 8 сотен = 40 сотням, да 2 сотни = 42 сотням; ставим под чертой 42 сотни, т. е. 4 тысячи и 2 сотни.

Таким образом, произведение 846 на 5 оказывается равным 4230.

49. Умножение на число, выражаемое единицей с одним или несколькими нулями. Пусть требуется умножить: 358 на 10, т. е. сложить 10 чисел, каждое из которых равно 358. Если взять 10 раз по одной единице, получится 1 десяток; значит, если взять 10 раз по 358 единиц, получится 358 десятков, что составляет 3580 единиц. Возьмём ещё другой пример: 296 · 1000.

Одна единица, повторенная слагаемым 1000 раз, составляет 1 тысячу; следовательно, 296 единиц, повторенные 1000 раз, составляют 296 тысяч, что пишется так: 296 000.

***Правило.* Чтобы умножить любое число на число, выражаемое единицей с нулями, достаточно приписать к множимому справа столько нулей, сколько их во множителе.**

50. Умножение на число, выражаемое какой угодно значащей цифрой с одним или несколькими нулями. Пусть требуется умножить: 248 на 30, т. е. сложить 30 одинаковых слагаемых, каждое из которых равно 248. Вообразим, что эти 30 слагаемых соединены в 10 одинаковых групп по 3 слагаемых в каждой группе:

248	248	248	248	248	248	248	248	248	248
248	248	248	248	248	248	248	248	248	248
248	248	248	248	248	248	248	248	248	248
744	744	744	744	744	744	744	744	744	744

Мы можем, таким образом, взять 3 раза по 248, а результат этого действия (число 744) помножить на 10. Иначе говоря, для умножения какого-нибудь числа на 30 достаточно умножить его на 3 и полученное произведение умножить на 10 (для чего приписать справа один нуль):

$$248 \cdot 3 = 744, \quad 744 \cdot 10 = 7440.$$

Возьмём ещё другой пример: 895 · 400.

В этом примере требуется сложить 400 чисел, каждое из которых равно 895.

Но 400 слагаемых можно соединить в 100 групп по 4 слагаемых в каждой группе. Чтобы узнать, сколько единиц в одной из этих групп, надо 895 умножить на 4 (получим 3580); чтобы затем узнать, сколько единиц во всех группах, надо 3580 умножить на 100 (для чего достаточно приписать к числу 3580 справа два нуля).

***Правило.* Чтобы умножить любое число на какую угодно значащую цифру с нулями, достаточно умножить множимое на эту значащую цифру и к полученному произведению приписать справа столько нулей, сколько их во множителе.**

51. Умножение на многозначное число. Пусть требуется сделать умножение:

$$3826 \cdot 472,$$

т. е. сложить 472 одинаковых числа, каждое из которых равно 3826. Для этого достаточно сложить сперва 2 таких числа, потом ещё 70, потом ещё 400 и, наконец, все полученные суммы соединить в одну; т. е. требуется повторить число 3826 слагаемым 472 раза. Для этого достаточно повторить 3826 слагаемым 2 раза, потом 70 раз, потом 400 раз и полученные суммы соединить в одну; другими словами, достаточно 3826 умножить на 2, потом на 70, затем на 400 и полученные произведения сложить.

Действие расположим так: пишем множимое, под ним множитель, под множителем проводим черту:

$$\begin{array}{r} 3826 \\ \cdot\ 472 \\ \hline 7652 \\ 267820 \\ 1530400 \\ \hline 1805872 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3826 \\ \cdot\ 472 \\ \hline 7652 \\ 26782 \\ 15304 \\ \hline 1805872 \end{array}$$

Умножаем множимое на 2 и полученное произведение пишем под чертой; это будет *первое частное* (частичное) *произведение* (именно 7652).

Умножаем множимое на 70. Для этого достаточно умножить множимое на 7 и к произведению приписать справа один нуль; поэтому мы ставим нуль под цифрой единиц первого частного произведения, а цифры, получаемые от умножения множимого на 7, пишем, по порядку их получения, под десятками, сотнями и прочими разрядами первого частного произведения. Это будет *второе частное произведение* (267820).

Умножаем множимое на 400. Для этого достаточно умножить 3826 на 4 и к произведению приписать справа два нуля. Пишем два нуля под единицами и десятками второго частного произведения, а цифры, получаемые от умножения множимого на 4, пишем, по порядку их получения, под сотнями, тысячами и прочими разрядами второго частного произведения. Тогда получим *третье частное произведение* (1530400).

Под последним частным произведением проводим черту и складываем их все, получаем полное произведение.

Для сокращения письма не пишут нулей, указанных нами жирным шрифтом; при этом надо только помнить, что, умножая множимое на цифру десятков множителя, мы должны писать первую полученную цифру под десятками первого частного произведения; умножая множимое на цифру сотен множителя, пишем первую полученную цифру под сотнями предыдущих частных произведений и т. д.

Замечания. 1) Если в числе цифр множителя есть единица, то, умножая множимое на эту цифру, надо иметь в виду, что, когда множитель есть единица, произведение равно множимому.

2) Когда во множителе встречаются нули, то на них не умножают, а переходят прямо к умножению на следующую значащую цифру множителя. Например:

$$\begin{array}{r}
470827\\
\cdot\ 60013\\
\hline
1412481\\
470827\\
2824962\\
\hline
28255740751
\end{array}$$

Последнее частное произведение, полученное от умножения множимого на 6 десятков тысяч, записывается, конечно, так, чтобы его цифра единиц (2) стояла в разряде десятков тысяч.

3) Если во множителе цифр больше, чем во множимом, то для уменьшения числа частных произведений лучше множитель взять за множимое, а множимое за множитель. Например, находя произведение 378 · 27468, умножают 27468 на 378

52. Сокращённое умножение чисел, оканчивающихся нулями. Сначала возьмём пример, в котором только одно множимое оканчивается нулями:

$$2700 \cdot 15.$$

Умножить 2700 на 15 — значит сложить 15 чисел, каждое из которых равно 2700.

Если станем находить эту сумму обыкновенным сложением

$$\left.\begin{array}{r}
2700\\
2700\\
\cdots\\
\cdots\\
\cdots\\
\cdots\\
2700\\
\hline
40500
\end{array}\right\}\ \text{15 раз,}$$

то нули слагаемых, очевидно, перейдут в сумму, и достаточно будет взять 15 раз по 27 сотен. Значит, для умножения 2700 на 15 достаточно умножить 27 на 15 и к произведению приписать два нуля.

Действие всего удобнее расположить так:

$$\begin{array}{r} \cdot\, 2700 \\ 15 \\ \hline 135 \\ 27 \\ \hline 40500, \end{array}$$

т. е. множитель пишется так, чтобы нули множимого стояли направо от множителя; затем производят умножение, не обращая внимания на нули множимого, а к произведению их приписывают справа.

Возьмём теперь пример, в котором только множитель оканчивается нулями:

$$358 \cdot 23\,000.$$

Это значит, что требуется сложить 23 000 чисел, каждое из которых равно 358.

Но 23 000 слагаемых можно соединить в 1000 одинаковых групп по 23 слагаемых в каждой группе. Чтобы узнать, сколько единиц окажется в одной группе, надо 358 умножить на 23, а чтобы затем узнать, сколько единиц будет во всех группах, надо число единиц в одной группе умножить на 1000 (для чего достаточно приписать справа к этому числу три нуля). Действие располагают обыкновенно так:

$$\begin{array}{l} 358 \\ \cdot\ 23000 \\ \hline 1074 \\ 716 \\ \hline 8234000 \end{array}$$

Наконец, рассмотрим пример, в котором оба данных числа оканчиваются нулями:

$$57\,000 \cdot 3200.$$

Для умножения 57 000 на какое-нибудь число надо умножить 57 на это число и к произведению приписать три нуля. Но чтобы умножить 57 на 3200, надо умножить 57 на 32 и к произведению приписать два нуля. Поэтому,

когда множимое и множитель оканчиваются нулями, производят умножение, не обращая внимания на нули, и к произведению приписывают столько нулей, сколько их во множимом и во множителе вместе.

Действие располагают так:

$$
\begin{array}{r}
\times\,57000 \\
3200 \\
\hline
114 \\
171 \\
\hline
182400000
\end{array}
$$

53. Изменения произведения с изменением сомножителей.

1) Если увеличим множитель в несколько раз, то и произведение увеличится во столько же раз.

Так, если в примере

$$15 \cdot 3 = 45$$

увеличим множитель, положим, в 4 раза, то получим произведение $15 \cdot 12 = 180$. Новое произведение оказалось больше прежнего в 4 раза. Так оно и должно быть, потому что первое произведение есть сумма трёх слагаемых:

$$15 + 15 + 15,$$

а новое произведение — сумма 12 таких же слагаемых:

$$15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + \\ + 15.$$

Пользуясь сочетательным законом сложения, мы можем в последней сумме каждые три слагаемые соединить в одну группу:

$$(15 + 15 + 15) + (15 + 15 + 15) + (15 + 15 + 15) + \\ + (15 + 15 + 15),$$

и тогда станет ясно, что новое произведение равно сумме четырёх чисел, из которого каждое равно прежнему произведению, т. е. новое произведение больше прежнего в 4 раза.

2) Если увеличим множимое в несколько раз, то и произведение увеличится во столько же раз.

Так, если в том же примере увеличим множимое, положим, в 6 раз, то получим $90 \cdot 3 = 270$. Новое произведение больше прежнего в 6 раз. Так оно и должно быть, потому что множимое и множитель можно поменять местами, не меняя произведения, а от увеличения множителя в несколько раз, как мы сейчас видели, произведение увеличивается во столько же раз.

Из сказанного в случаях 1) и 2) следует:

3) Если уменьшим множитель или множимое в несколько раз, то и произведение уменьшится во столько же раз.

Например:

$$20 \cdot 2 = 40;\ 10 \cdot 2 = 20;\ 5 \cdot 2 = 10 \text{ и т. п.}$$

Если оба сомножителя изменяются одновременно, то произведение иногда увеличится, иногда уменьшится или же останется без перемены.

Чтобы определить заранее, что сделается с произведением от одновременного изменения обоих сомножителей, следует предположить, что сначала изменено только множимое, а потом и множитель. Увеличим, например, в произведении $15 \cdot 6 = 90$ множимое в 3 раза, а множитель в 2 раза:

$$15 \cdot 6 = 90;\ 45 \cdot 12 = ?$$

Чтобы узнать, что сделается с произведением, рассуждаем так: от увеличения множимого в 3 раза произведение увеличится в 3 раза, т. е. будет не 90, а $90 + 90 + 90$. От увеличения затем множителя в 2 раза произведение ещё увеличится в 2 раза; значит, оно теперь будет:

$$(90 + 90 + 90) + (90 + 90 + 90),$$

т. е. сравнительно с начальным произведением оно увеличится в *дважды три* раза, т. е. в 6 раз.

В том же примере увеличим множимое в 8 раз, а множитель уменьшим в 2 раза:

$$15 \cdot 6 = 90; \quad 120 \cdot 3 = ?$$

От увеличения множимого в 8 раз произведение увеличится в 8 раз, а от уменьшения затем множителя в 2 раза это увеличенное в 8 раз произведение уменьшится в 2 раза. Значит, после двух этих изменений произведение увеличится только в 4 раза:

$$120 \cdot 3 = 360 = 90 \cdot 4.$$

4) Если один сомножитель увеличим в несколько раз, а другой уменьшим во столько же раз, то произведение

не изменится, потому что от увеличения одного сомножит· л
произведение увеличится, а от уменьшения другого сомно: ль
теля оно уменьшится во столько же раз. Например:

$$15 \cdot 6 = 90; \quad 30 \cdot 3 = 90; \quad 5 \cdot 18 = 90.$$

54. Упрощение умножения в некоторых случая Зная изменения произведения в зависимости от изменения со множителей, мы можем иногда упростить умножение. Пусть например, надо умножить 438 на 5. Увеличим множитель 2 раза, т. е. вместо 5 возьмём множитель 10. Тогда произве дение находим сразу, оно будет 4380. Но, увеличив множи тель в 2 раза, мы увеличили произведение в 2 раза; следова тельно, искомое произведение должно быть вдвое меньше 4380 т. е. оно равно 2190.

Подобно этому, если требуется умножить на 25, мы мо жем умножить на 100 и полученное произведение уменьши в 4 раза.

Иногда упрощение достигается ещё более простыми сооб ражениями. Пусть, например, требуется умножить 56 на 1 Помножив 56 на 10, получим 560; остаётся ещё 1 раз доба вить 56; получим 616.

Подобным же образом можно умножить любое число на 1 Для этого достаточно умножить его на 20 и затем вычес множимое.

55. Произведение трёх и более сомножителей. Пуст имеем несколько чисел, например 7, 5, 3 и 4, данных в опр делённом порядке, например в таком, как они у нас поста лены. Составим из них произведение таким образом: умнож первое число на второе, получим 35; умножив 35 на треть число, получим 105; умножив 105 на четвёртое число, получи 420. Число 420 называется произведением четырёх сомнож телей: 7, 5, 3 и 4. Подобным образом можно находить прои ведение пяти, шести и более сомножителей.

Для обозначения таких последовательных умножений пишу данные числа в одну строку в том порядке, в каком требуетс производить над ними умножение, и ставят между ними зна умножения. Таким образом, выражение:

$$3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7$$

равносильно такому:

$$[(3 \cdot 4) \cdot 2] \cdot 7,$$

т. е. оно означает, что 3 умножается на 4, полученное про изведение — на 2 и это последнее произведение — на 7.

56. Переместительный закон умножения для любого числа сомножителей: произведение не меняется от перемены порядка сомножителей. То свойство произведения, в котором мы убедились в § 45, остаётся верным и для произведения трёх, четырёх и более сомножителей, т. е. произведение не изменяется от перемены порядка сомножителей (сколько бы их ни было).

Например, вычислив каждое из произведений:

$$2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7; \quad 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7; \quad 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5; \quad 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5,$$

отличающихся только порядком сомножителей, мы получим одно и то же число 840.

57. Сомножители произведения можно соединять в какие угодно группы.

Соединим, например, в произведении

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2$$

два последних сомножителя в одну группу: $3 \cdot 4 \cdot (5 \cdot 2)$ и вычислим это выражение: $3 \cdot 4 = 12$; $5 \cdot 2 = 10$; $12 \cdot 10 = 120$. Мы получили то же самое число, как если бы произвели умножение, не соединяя сомножителей в группы: $3 \cdot 4 = 12$; $12 \cdot 5 = 60$; $60 \cdot 2 = 120$.

Свойство это называется *сочетательным законом* умножения.

Его можно рассматривать как следствие переместительного закона. Действительно, согласно этому закону мы можем перенести множители 5 и 2 к началу ряда, т. е. написать произведение так: $5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$. В этом виде множители 5 и 2 составляют одну группу, так как по определению (§ 56) выражение $5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ означает произведение $(5 \cdot 2) \cdot 3 \cdot 4$. Теперь группу эту можно поменять местами с каждым из остальных сомножителей. Значит,

$$(5 \cdot 2) \cdot 3 \cdot 4 = 3 \cdot (5 \cdot 2) \cdot 4 = 3 \cdot 4 \cdot (5 \cdot 2).$$

В общем виде сочетательный закон умножения можно выразить (для трёх сомножителей) так:

$$abc = (ab)\,c = a\,(bc).$$

58. Как умножить на произведение и как умножить произведение. 1) Мы видели (§ 50), что если требуется умножить какое-нибудь число на 30 (т. е. на произведение $3 \cdot 10$), то достаточно умножить множимое на 3 и затем умножить полученное число на 10; также для умножения какого-нибудь числа на 400 (т. е. на произведение $4 \cdot 100$) можно умножить это число на 4 и затем полученное число на 100. Такой приём последовательного умножения на каждый множитель отдельно применим и к произведению четырёх, пяти и более множителей. Так:

$$7\cdot(3\cdot5\cdot8)=7\cdot3\cdot5\cdot8=[(7\cdot3)\cdot5]\cdot8,$$

потому что согласно § 57 множители 3, 5 и 8 могут быть соединены в одну группу. Таким образом,

чтобы умножить на произведение, можно умножить сначала на первый сомножитель, потом полученное произведение умножить на второй сомножитель, затем на третий и т. д.

2) Пусть требуется умножить произведение $7\cdot3\cdot4$ на 8. Вместо того чтобы сначала вычислить произведение $7\cdot3\cdot4$ (оно равно 84), а затем его умножить на 8 (получим 672) мы можем умножить на 8 какой-нибудь один из сомножителей 7, 3 или 4, оставив другие без изменения, и уже потом перемножать их. Например, умножим на 8 сомножитель 3. Тогда будем иметь: $7\cdot(3\cdot8)\cdot4=7\cdot24\cdot4=672$; мы получили то же самое число, что и прежде.

Таким образом,

чтобы умножить произведение на какое-нибудь число, можно умножить на это число один из сомножителей, оставив другие без изменения.

Так:

$$(5\cdot4\cdot8)\cdot3=(5\cdot3)\cdot4\cdot8=5\cdot(4\cdot3)\cdot8=5\cdot4\cdot(8\cdot3)=480.$$

Это правило является очевидным следствием переместительного и сочетательного законов.

59. Как умножить сумму на какое-нибудь число. Когда мы умножали раньше (§ 48) число 846 (т. е. сумму 6 единиц, 4 десятков и 8 сотен) на 5, мы умножали на 5 отдельно единицы, десятки и сотни и полученные числа складывали. Подобным образом можно поступать всегда, когда требуется сумму умножить на какое-нибудь число. Пусть, например, надо умножить $10+7+5+9$ на 3. Это значит, что требуется найти сумму:

$$(10+7+5+9)+(10+7+5+9)+(10+7+5+9).$$

Но, чтобы прибавить сумму, можно прибавить отдельно каждое слагаемое одно за другим (§ 21). Поэтому написанная сейчас сумма может быть заменена такой:

$$10+7+5+9+10+7+5+9+10+7+5+9.$$

Сгруппируем слагаемые этой суммы так:

$$(10+10+10)+(7+7+7)+(5+5+5)+(9+9+9)$$

$$10 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 9 \cdot 3.$$

Рассуждение это можно повторить для любых других чисел. Таким образом,

чтобы умножить сумму на какое-нибудь число, можно умножить на это число каждое слагаемое отдельно и затем сложить полученные результаты.

Так как произведение не меняется от перемещения сомножителей, то из выведенного правила следует:

чтобы умножить какое-нибудь число на сумму, можно умножить это число на каждое слагаемое отдельно и результаты сложить.

Так мы и поступали, когда (§ 51) число 3826 умножали на 472, т. е. на сумму $2 + 70 + 400$.

Свойство это называется *распределительным законом* умножения (относительно сложения), так как согласно ему умножение, производимое над суммой, можно распределять между отдельными слагаемыми.

В общем виде это свойство можно выразить так:

$$(a + b + c + \ldots) m = am + bm + cm + \ldots,$$

или

$$m (a + b + c + \ldots) = ma + mb + mc + \ldots .$$

Замечание. Для избежания недоразумений выражение $am + bm + cm + \ldots$ надо бы написать так: $(am) + (bm) + (cm) + \ldots$. Но для сокращения письма условились, что если в выражении указаны действия сложения, вычитания и умножения, а скобок не имеется, то надо сначала произвести умножение, а потом сложение и вычитание. Тогда и без скобок будет ясно, в каком порядке надо произвести действия в выражении $am + bm + cm + \ldots$.

VII. ДЕЛЕНИЕ.

60. До сих пор мы всегда считали все сомножители данными, а произведение — искомым. Но есть очень много задач, в которых, наоборот, произведение двух чисел дано, а одно из этих чисел — неизвестно.

Задача 1. *В классе рбздали 75 тетрадей по 3 тетради каждому ученику. Сколько учеников в классе?*

Если число тетрадей, полученных одним учеником (т. е. 3), умножить на неизвестное число учеников, то мы должны получить общее число розданных тетрадей (т. е. 75). Таким образом, здесь даны произведение (75) и один из сомножителей (3), а отыскивается другой сомножитель. Искомое число учеников равно 25, так как $3 \cdot 25 = 75$.

Задача 2. *В классе 30 учеников. Если им поровну раздать 120 листов бумаги, то сколько получит каждый?*

Если неизвестное число листов, полученных каждым учеником, умножить на число учеников (30), то мы должны получить общее число розданных листов бумаги (т. е. 120). Таким образом, здесь снова даны произведение (120) и один из сомножителей (30), а отыскивается другой сомножитель. Каждый ученик получит по 4 листа, так как $4 \cdot 30 = 120$.

61. *Делением называется действие, посредством которого по данному произведению двух сомножителей и одному из этих сомножителей отыскивается другой сомножитель.*

При этом данное произведение называется *делимым*, данный сомножитель — *делителем*, а искомый сомножитель — *частным*.

Для решения первой задачи надо 75 разделить на 3; здесь делимое 75, делитель 3, частное 25.

Для решения второй задачи надо 120 разделить на 30; здесь делимое 120, делитель 30, частное 4.

Деление обозначается либо знаком : , разделяющим делимое и делитель (делимое слева, делитель справа), либо горизонтальной чертой, также разделяющей делимое и делитель (делимое сверху, делитель снизу). Таким образом, каждое из равенств

$$75 : 3 = 25, \quad \frac{75}{3} = 25$$

означает, что число 75 при делении на число 3 даёт в частном число 25.

62. Примечание. Так как при перемене мест сомножителей произведение не меняется (переместительный закон умножения), то для результатов деления безразлично, какой из двух сомножителей — множимое или множитель — является данным и какой — искомым. Но если мы хотим учитывать предметное содержание решаемой задачи, то оно в этих двух случаях может оказаться совершенно различным. Так, в задаче первой узнаётся, сколько раз надо взять по 3 (тетради), чтобы составилось 75 (тетрадей); здесь дано множимое (3), отыскивается множитель. Напротив, в задаче второй узнаётся, какое число (листов бумаги) надо взять 30 раз, чтобы получить 120 (листов); здесь дан множитель 30, отыскивается множимое.

Можно, таким образом, сказать, что одним и тем же арифметическим действием — делением — решаются две различные по своему содержанию задачи.

63. На нуль делить нельзя. При всяком делении делителем может быть любое число, кроме нуля. *На нуль делить нельзя.*

Рассмотрим, почему это так. Если делимое не нуль, а любое другое число, например 5, то разделить его на нуль значило бы найти такое число, которое после умножения на нуль даёт 5; но такого числа нет, потому что всякое число после умножения на нуль даёт снова нуль. Если же делимое тоже равно нулю, то деление возможно, но частным может служить любое число, потому что в этом случае любое число после умножения на делитель (0) даёт нам делимое (т. е. снова 0); таким образом, в этом случае деление хотя и возможно, но не приводит к единственному определённому результату.

Поэтому нуль не может служить делителем.

64. Деление с остатком. Деление одного числа на другое не всегда возможно. Так, 27 нельзя разделить на 6, потому что нет такого целого числа, которое при умножении на 6 давало бы 27. Говорят, что 27 не делится на 6.

Если мы хотим, например, 27 тетрадей раздать поровну шести ученикам, то этого сделать нельзя: мы можем раздать ученикам по 4 тетради, что составит 24 тетради; 3 тетради при этом останутся нерозданными.

Условились и в этом случае говорить о делении 27 на 6; попрежнему 27 называют делимым, 6 — делителем; число 4 называют *неполным частным*, а число 3 — *остатком от деления*. Само деление в этом случае называют *делением с остатком*. Таким образом: *при делении с остатком неполным частным называют наибольшее число, которое при умножении на делитель даёт произведение, не превосходящее делимого. Разность между делимым и этим произведением называют остатком от деления.*

Отсюда следует, что *остаток всегда меньше делителя.*

Деление с остатком можно записывать так:

$$27:6=4 \text{ (остаток 3).}$$

Вот ещё примеры деления с остатком:

$\frac{32}{5}=6$ (остаток 2), $100:9=11$ (остаток 1).

65. Общее определение деления целых чисел. В области целых чисел делению без остатка и делению с остатком можно дать следующее общее определение: *разделить число a* (делимое) *на число* b (делитель) — *значит, найти такие два числа* q (частное) и r (остаток), *которые удовлетворяли бы соотношениям:*

$$a = bq + r \quad \text{и} \quad r < b.$$

Так как равенство $a = bq + r$ выражает, что

$$a = \overbrace{(b + b + b + \ldots + b)}^{q \text{ слагаемых}} + r$$

и так как при этом $r < b$, то частное q, очевидно, показывает, какое наибольшее число раз делитель содержится в делимом.

Легко убедиться, что если делитель b не равен нулю, то так определённое действие деления всегда возможно и всегда даёт единственный результат. Действительно:

1) если $a < b$, то $q = 0$ и $r = a$ и только эта пара чисел удовлетворяет определению;

2) если $a = b$, то $q = 1$ и $r = 0$, и никакая другая пара чисел не удовлетворяет определению; наконец,

3) если $a > b$, то частное q, как мы видели, показывает, какое наибольшее число раз делитель b содержится в делимом a, потому, если только b не равно нулю, это частное всегда существует, и ясно, что оно может быть только одно; но тогда и остаток r существует (он равен разности $a - bq$) и может быть только один.

Заметим ещё, что остатком при делении на число b может быть любое число из ряда

$$0, 1, 2, \ldots, b - 1.$$

Отсюда следует, что число различных остатков, которые могут получиться при делении на число b, равно b.

66. Сравнение деления с умножением. При умножении двух чисел отыскивается их произведение, а при делении (без остатка) оно даётся, а отыскивается то число, которое при умножении даётся (множимое или множитель). Значит, *деление есть действие, обратное умножению* (и умножение обратно делению).

Если при делении получается остаток, то делимое не равно произведению делителя на частное, а равно этому произведению, сложенному с остатком. Так, $27 = 6 \cdot 4 + 3$.

67. Задачи, которые решаются при помощи деления. Вот несколько типичных задач, при решении которых пользуются делением.

1) *Когда надо узнать, сколько раз большее число содержит в себе меньшее*, или, что то же, *во сколько раз одно число больше или меньше другого;* например, сколько раз 20 рублей содержат в себе 5 рублей.

2) *Когда требуется данное число разложить на несколько равных частей*; например, когда требуется 60 ли-

стов бумаги разложить на 12 равных частей (короче: найти двенадцатую часть 60 листов).

3) *Когда надо уменьшить данное число в несколько раз,* потому что уменьшить, например, 60 листов бумаги в 12 раз — значит вместо 60 листов взять одну двенадцатую часть 60 листов.

68. Деление можно выполнять посредством сложения, вычитания и умножения. Пусть, например, требуется разделить 212 по 53. Искомое частное мы можем найти:

1) Сложением:

$$53 + 53 = 106; \quad 106 + 53 = 159; \quad 159 + 53 = 212.$$

Оказывается, что 53 надо повторить слагаемым 4 раза, чтобы получить 212; значит, искомое частное есть 4.

2) Вычитанием:

$$\begin{array}{r} 212 \\ -\ 53 \\ \hline 159 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 159 \\ -\ 53 \\ \hline 106 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 106 \\ -\ 53 \\ \hline 53 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 53 \\ -\ 53 \\ \hline 0 \end{array}$$

Оказывается, что 53 от 212 можно отнять 4 раза; значит, искомое частное есть 4.

3) Умножением:

$$53 \cdot 2 = 106; \quad 53 \cdot 3 = 159; \quad 53 \cdot 4 = 212.$$

Искомое частное есть 4.

Однако эти способы неудобны, если частное — большое число; арифметика указывает более простой приём, который мы теперь и рассмотрим.

69. Как узнать, будет ли частное однозначное. Для этого стоит только умножить (в уме) делитель на 10 и сравнить полученное произведение с делимым.

Пример 1. $534 : 68 = ?$

Если 68 умножим на 10 (т. е. припишем к числу 68 нуль с правой стороны), то получим 680; но 534 меньше 680; поэтому частное должно быть меньше 10; значит, оно должно быть числом однозначным.

Пример 2. $534 : 37 = ?$

Если 37 умножим на 10, то получим 370; но 534 больше 370; поэтому частное не может быть меньше 10; значит, оно не может быть однозначным числом.

70. Нахождение однозначного частного. Рассмотрим два случая: когда делитель тоже однозначный и когда делитель многозначный.

Действия при этом обычно располагаются так:

```
64528 |23
46    |2805
185
184
  128
  115
   13
```

При этом видим: 1) числа, из которых последовательно складывается частное, представляют собой единицы различных разрядов (2 тысячи 8 сотен 0 десятков 5 единиц); поэтому, вместо того чтобы выписывать их полностью ($2000 + 800 + 5$), мы можем просто писать соответствующие цифры друг за другом, как это и показано в записи; при этом *необходимо ставить нуль всякий раз, когда при делении не получается значащей цифры* (десятки в нашем примере); 2) получим остаток от какого-нибудь деления (например, в нашем случае 18 при первом делении), для раздробления его в следующий низший разряд и прибавления числа единиц этого разряда, имеющихся в делимом, мы можем просто „снести" соответствующую цифру делимого (5 в нашем примере) и приписать её справа к полученному остатку, как это в нашей записи показано пунктиром.

Благодаря этим упрощениям деление при некотором навыке может производиться с большой быстротой.

Вот ещё три примера деления:

```
1470035 |7              3480000 | 15
14      |210005         30      |232000
  7                      48
  7                      45
   0035                   30
     35                   30
      0                     000
```

```
130987 |929
 929   |140
 3808
 3716
   927
```

72. Сокращённый способ деления на однозначное число. Когда делитель однозначный, то для сокращения письма полезно привыкнуть производить в уме все вычитания, выписывая только остатки.

Например, так:

```
563087 |6               или ещё короче: 563087 | 6
 23    |93847                                5  93847
  50
   28
    47
     5
```

Здесь цифра 5 под чертой означает последний остаток.

73. Случай, когда делитель оканчивается нулями. Деление упрощается в том случае, когда делитель оканчивается нулём или несколькими нулями. Возьмём сначала случай, когда делитель есть единица с нулями. Разделить какое-нибудь число на 10, на 100, на 1000 и т. д. — значит узнать, сколько в этом числе заключается десятков, сотен, тысяч и т. д. Но это легко узнаётся по правилу нумерации, указанному нами ранее (§ 13). Например:

$$54634 : 10 = 5463 \text{ (остаток } 4)$$
$$54634 : 1000 = 54 \text{ (остаток } 634).$$

Правило. **Чтобы разделить число на единицу с нулями, достаточно отделить в делимом справа столько цифр, сколько нулей в делителе; тогда оставшиеся цифры делимого представят собой частное, а отделённые — остаток.**

Возьмём теперь случай, когда делитель есть какое-нибудь число, оканчивающееся нулями; например:

```
389224 |7300
365    |53
 242
 219
  2324
```

Делитель представляет собой 73 сотни. Чтобы узнать, сколько раз 73 сотни содержатся в делимом, разобьём его на две части: на сотни и единицы. Первая часть есть 3892 сотни, вторая часть — 24 единицы. 73 сотни могут содержаться только в одной из этих частей, именно в сотнях.

Но 73 сотни содержатся в 3892 сотнях столько г сколько раз 73 какие-нибудь единицы содержатся в 3ε таких же единицах. Поэтому мы делим 3892 на 73, обращая внимания на то, что это сотни.

Разделив, находим, что 73 сотни в 3892 сотнях содє жатся 53 раза, причём 23 сотни остаются. Прилож к 23 сотням 24 единицы делимого, получим 2324; в эт числе 73 сотни не содержатся ни разу; следовательно, 23 будет остатком.

Вот ещё пример, в котором и делимое и делитель ока чиваются нулями:

```
35000 | 7300
292   |-----
----     4
 5800
```

Правило. **Если делитель оканчивается нулями, то мысленно отбрасывают в нём эти нули и в делимом мысленно отбрасывают справа столько цифр, сколько в делителе отброшено нулей; оставшиеся числа делят и к остатку сносят отброшенные цифры делимого.**

74. Проверка умножения. Так как произведение не изменяется от перемены мест сомножителей, то для проверки умножения можно произвести его во второй раз, умножая множитель на множимсе.

Например:

```
Умножение:     Проверка:
   532            145
 · 145          · 532
 -----          -----
  2660            290
 2128            435
 532             725
 -----          -----
 77140          77140
```

Оба произведения оказались одинаковыми; следовательно, весьма вероятно, что действие сделано верно.

Умножение можно проверить и делением. Для этого надо разделить полученное произведение на один из сомножителей; если в частном получится другой сомножитель, то можно считать вероятным, что умножение было сделано верно.

75. Проверка деления. Деление можно проверять умножением, основываясь на том, что делимое должно равняться делителю, умноженному на частное (плюс остаток, если он есть).

Например:

Деление:
$$\begin{array}{r|l}
8375 & 42 \\ \cline{2-2}
42 & 199 \\ \cline{1-1}
417 & \\
378 & \\ \cline{1-1}
395 & \\
378 & \\ \cline{1-1}
17 &
\end{array}$$

Проверка:
$$\begin{array}{r}
\times\ 199 \\
42 \\ \hline
398 \\
796 \\ \hline
+\ 8358 \\
17 \\ \hline
8375
\end{array}$$

Мы умножили частное 199 на делитель 42 и к полученному произведению приложили остаток 17. Так как после этого получилось число, равное делимому, то весьма вероятно, что действие сделано верно.

Если деление произведено без остатка, то его можно проверить и делением. В самом деле, так как делимое есть произведение делителя и частного, то при делении делимого на частное должен получиться делитель. Например:

Деление:
$$\begin{array}{r|l}
544 & 17 \\ \cline{2-2}
51 & 32 \\ \cline{1-1}
34 & \\
34 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Проверка:
$$\begin{array}{r|l}
544 & 32 \\ \cline{2-2}
32 & 17 \\ \cline{1-1}
224 & \\
224 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

76. Как разделить на произведение. Пусть требуется разделить 60 на произведение $5 \cdot 3$, т. е. на 15. Для этого достаточно разделить 60 на 5 и полученное частное разделить ещё на 3.

$$60 : 5 = 12; \quad 12 : 3 = 4.$$

Всего проще объяснить, почему такое двойное деление (на 5 и на 3) даёт надлежащий результат, если будем рассматривать деление как разложение делимого на равные части. Тогда можно сказать, что первым делением (на 5) мы разлагаем 60 на 5 равных частей, причём в каждой части получается 12; вторым делением (на 3) мы разлагаем 12 на 3 равные части, причём в каждой части получается по 4. Это можно наглядно изобразить так:

$$\overbrace{\overbrace{4+4+4}^{12} + \overbrace{4+4+4}^{12} + \overbrace{4+4+4}^{12} + \overbrace{4+4+4}^{12} + \overbrace{4+4+4}^{12}}^{60}$$

Отсюда видно, что после двух этих делений число 60 оказывается разложенным на 15 равных частей.

Подобным же образом можем разъяснить, что для деления числа 300 на произведение трёх множителей $3 \cdot 5 \cdot 4$ можно разделить 300 на 3 (получим 100), затем это частное разделить на 5 (получим 20), наконец последнее частное разделить на 4 (получим 5). Таким образом,

чтобы разделить какое-нибудь число на произведение, можно разделить это число на первый сомножитель, полученное частное разделить на второй сомножитель, это частное на третий и т. д. (*предполагается при этом*, что каждое деление выполняется без остатка).

Этим свойством можно иногда пользоваться при *устном делении*; например, чтобы разделить 1840 на 20, мы принимаем во внимание, что $20 = 10 \cdot 2$ и делим 1840 на 10 (получим 184) и найденное число на 2 (получим 92); подобно этому, разделить какое-нибудь число на 8, т. е. на произведение, равное $2 \cdot 2 \cdot 2$, можно делимое разделить на 2, потом ещё на 2 и ещё на 2.

77. Изменение частного с изменением делимого и делителя.

1) Если увеличим (или уменьшим) делимое в несколько раз, то частное увеличится (или уменьшится) во столько же раз.

Так, если в примере $20:5=4$ мы увеличим делимое, положим, в 3 раза, т. е. вместо 20 возьмём в делимом $20+20+20$, то получим: $60:5=12$. Новое частное оказалось больше прежнего в 3 раза, потому что если 5 в 20 содержится 4 раза, то 5 в сумме $20+20+20$ должно, очевидно, содержаться 4 раза, да ещё 4 раза, да ещё 4 раза, т. е. в 3 раза более, чем оно содержится в 20.

2) Если увеличим (или уменьшим) делитель в несколько раз, то частное уменьшится (или увеличится) во столько же раз.

Так, если в примере $60:5=12$ увеличим делитель, положим, в 3 раза, т. е. вместо 5 возьмём делителем 15, то получим $60:15=4$. Новое частное оказалось меньше прежнего в 3 раза. Так оно и должно быть, потому что 15 есть произведение $5 \cdot 3$, а чтобы разделить на произведение, можно разделить делимое на первый сомножитель (на 5) и полученное число (12) разделить затем на второй сомножитель (на 3), отчего оно уменьшится (в 3 раза).

Предполагается при этом, что деление совершается *без остатка*. Если же есть остаток, то частное может измениться иначе, чем было сейчас указано. Возьмём, например, такое деление: $23:5=4$ (остаток 3) и увеличим делимое в 3 раза.

Получим: $69:5=13$ (остаток 4); частное увеличилось более чем в 3 раза.

Замечание. Когда делимое и делитель изменяются одновременно, то частное может иногда увеличиться, иногда уменьшиться, или же остаться без изменения. Чтобы узнать заранее, как изменится частное, надо предположить, что сначала изменено только делимое, а потом и делитель (сравните § 53).

Следует обратить особое внимание на те случаи, когда частное остаётся без изменения.

3) Частное не изменяется, когда делимое и делитель увеличены в одинаковое число раз,

потому что от увеличения делимого частное увеличивается, а от увеличения делителя оно уменьшается во столько же раз. Так, если в примере $60:15=4$ увеличим делимое и делитель в 5 раз, то получим $300:75=4$.

4) Частное не изменяется, когда делимое и делитель уменьшены в одинаковое число раз,

потому что от уменьшения делимого частное уменьшается, а от уменьшения делителя оно увеличивается во столько же раз. Так, если в том же примере уменьшим делимое и делитель в 5 раз, то получим $12:3=4$.

78. Как разделить произведение. Пусть требуется произведение $8 \cdot 12 \cdot 20$ разделить на 4. Вместо того чтобы сначала вычислить это произведение (оно равно 1920), а потом разделить его на 4 (получим 480), мы можем разделить на 4 какой-нибудь один из сомножителей, оставив другие без изменения, и затем вычислить произведение. Так разделим, положим, 12 на 4, а 8 и 20 оставим без изменения; получим $8 \cdot 3 \cdot 20=480$, т. е. мы получим то же самое число, которое получили раньше. Так оно и должно быть, потому что разделить на 4 это значит уменьшить в 4 раза, а произведение уменьшится в 4 раза, если уменьшим в 4 раза один из сомножителей. Таким образом,

чтобы разделить произведение на какое-нибудь число, можно разделить на это число один сомножитель, оставив другие без изменения.

79. Как разделить сумму и как разделить разность.

1) Чтобы разделить сумму на какое-нибудь число, можно разделить на это число каждое слагаемое отдельно и полученные частные сложить (предполагается, что все деления совершаются без остатка).

Так, чтобы разделить сумму $21+14+35$ на 7 (т. е. узнать, сколько раз в этой сумме содержится 7), мы можем узнать, сколько раз 7 содержится в 21 (3 раза), потом в 14 (2 раза), затем в 35 (5 раз), и полученные числа сложить: $3+2+5=10$.

2) Чтобы разделить разность на какое-нибудь число, можно разделить на это число отдельно уменьшаемое и вычитаемое, а потом из первого частного вычесть второе. Так:

$$(40-25):5=40:5-25:5=8-5=3.$$

Так оно и должно быть, потому что 40 содержит в себе 8 пятёрок, а 25 содержит 5 пятёрок, а 8 пятёрок без 5 пятёрок, очевидно, содержит в себе 3 пятёрки.

80. Замечание о порядке действий в формулах.

Сложение и вычитание принято называть действиями *первой ступени*, а умножение и деление — действиями *второй ступени*. Для уменьшения числа случаев, когда надо прибегать к скобкам, чтобы выразить порядок действий, условились:

если в выражении, не имеющем скобок, указаны действия только одной ступени, то они производятся в том порядке, в каком написаны (слева направо). Так, выражение:

$$40-10+15-8$$

означает, что из 40 вычитается 10 (получим 30), к полученному числу прикладывается 15 (получим 45) и затем вычитается 8 (получим 37). Или выражение:

$$400:4\cdot5:2$$

означает, что 400 делится на 4 (получим 100), частное умножается на 5 (получим 500) и это произведение делится на 2 (получим 250).

Если же в выражении без скобок указаны действия разных ступеней, то сначала выполняются действия второй ступени (умножение и деление), а потом — действие первой ступени (сложение и вычитание). Например, выражение:

$$6+20\cdot4-10:2$$

означает, что надо 20 умножить на 4 (получим 80), затем 10 разделить на 2 (получим 5), потом к 6 приложить 80 (получим 86) и, наконец, отнять 5 (получим 81).

Отступления от этого порядка указываются скобками. Так, если написано:

$$6+(20\cdot4-10):2,$$

то это значит 20 умножить на 4, вычесть 10, разделить на 2 и сложить с 6 (получим 41).

ОТДЕЛ II.

О ДЕЛИМОСТИ ЧИСЕЛ.

81. Предварительные замечания. Из четырёх арифметических действий два — сложение и умножение — могут быть выполнены всегда (т. е. над любыми числами). Вычитание хотя и не всегда может быть выполнено, но признак его выполнимости очень прост: уменьшаемое не должно быть меньше вычитаемого; поэтому, если даны два числа, мы всегда сразу можем узнать, можно ли из первого вычесть второе.

Совсем иначе обстоит дело с делением; мы знаем, что деление (без остатка) не всегда может быть выполнено; но иногда бывает очень трудно, не производя деления, узнать, делится ли одно число на другое. Поэтому с действием деления связаны самые трудные вопросы арифметики. Некоторые из этих вопросов мы рассмотрим в настоящем отделе.

Когда одно число делится на другое без остатка, то для краткости говорят просто, что первое число *делится* на второе. В этом случае говорят также, что первое число есть *кратное* второго, а второе есть *делитель* первого. Так, 15 есть кратное трёх, а 3 есть делитель 15.

Заметим, что нуль делится на любое число (кроме нуля), причём частное также равно нулю. В самом деле, так как $a \cdot 0 = 0$, каково бы ни было число a, то $0 : a = 0$.

I. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ.

Существуют признаки, по которым иногда легко узнать, не производя деления на самом деле, делится или не делится данное число на некоторые другие числа. Эти признаки мы теперь и рассмотрим.

82. Делимость суммы и разности. При выводе признаков делимости мы часто будем пользоваться следующими свойствами суммы и разности:

1) **если каждое слагаемое делится на одно и то же число, то и сумма разделится на это число;**

2) если одно слагаемое не делится, а все прочие делятся на какое-нибудь число, то сумма не разделится на это число;

3) если уменьшаемое и вычитаемое делятся на одно и то же число, то и разность делится на это число.

Свойства 1) и 3) очевидны; если, например, число 5 содержится целое число (9) раз в числе 45 и целое число (7) раз в числе 35, то оно, очевидно, будет содержаться целое число ($9 + 7 = 16$) раз в их сумме и целое число ($9 - 7 = 2$) раз в их разности.

Свойство 2) легко доказывается, если свойства 1) и 3) уже установлены. Возьмём, например, сумму $102 = 45 + 35 + 22$. Здесь слагаемые 45 и 35 делятся на 5, а последнее слагаемое 22 на 5 не делится. Покажем, что и сумма 102 не может делиться на 5. Так как 45 и 35 делятся на 5, то и сумма их $45 + 35 = 80$ по свойству 1) делится на 5. Но из равенства $102 = 45 + 35 + 22$ следует $102 - (45 + 35) = 22$, или $102 - 80 = 22$. Если бы 102 делилось на 5, то по свойству 3) и разность $102 - 80 = 22$ должна была бы делиться на 5; так как 22 на 5 не делится, то значит, и 102 не может делиться на 5.

83. Признак делимости на 2. Числа, делящиеся на 2, называются *чётными*, а не делящиеся на 2 — *нечётными*. В ряду натуральных чисел числа нечётные и чётные чередуются: так, 1 — нечётное число, 2 — чётное число, 3 — нечётное число, 4 — чётное число и т. д.

Всякое число, оканчивающееся нулём, представляет собой сумму десятков, например 320 есть сумма 32 десятков. Но десяток делится на 2; поэтому и сумма нескольких десятков также делится на 2 (содержит в себе столько раз по 5 двоек, сколько в ней десятков). Значит, всякое число, оканчивающееся нулём, делится на 2. Например:

$$320 : 2 = 160.$$

Возьмём теперь число, оканчивающееся любой чётной цифрой, например 328. Это число можно представить в виде суммы так:

$$328 = 320 + 8.$$

Каждое из чисел 320 и 8 делится на 2; значит, по свойству 1) (§ 82) и 328 разделится на 2 и будет чётным числом. Напротив, число, оканчивающееся нечётной цифрой, например 329, не может делиться на 2.

В самом деле,

$$329 = 320 + 9;$$

так как 320 делится на 2, а 9 не делится, то по свойству 2) (§ 82) 329 не может делиться на 2.

Таким образом, **на 2 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются чётной цифрой.**

Примечание. Цифра нуль считается чётной, так как она изображает число, делящееся на 2 (§ 81).

84. Признак делимости на 4. Всякое число, оканчивающееся двумя нулями, представляет собой сумму сотен: например, 2300 есть сумма 23 сотен. Но сотня делится на 4; поэтому и сумма нескольких сотен также делится на 4 (содержит в себе столько раз по 25 четвёрок, сколько в ней сотен). Значит, всякое число, оканчивающееся двумя нулями, делится на 4.

Например:

$$2300 : 4 = 575.$$

Возьмём теперь два числа таких, чтобы две последние цифры у одного из них выражали число, делящееся на 4, а у другого — число, не делящееся на 4, например 2348 и 2350 (48 делится на 4, а 50 нет). Их можно представить в виде сумм так:

$$2348 = 2300 + 48; \quad 2350 = 2300 + 50.$$

В первом примере каждое слагаемое делится на 4, поэтому и сумма делится на 4; значит, число 2348 делится на четыре. Во втором примере первое слагаемое делится на 4, а второе не делится, поэтому сумма 2350 не делится на 4. Таким образом,

на 4 делятся все те и только те числа, у которых две последние цифры выражают число, делящееся на 4.

Таким же путём легко доказать, что на 8 делятся все те и только те числа, у которых три последние цифры выражают число, делящееся на 8.

85. Признаки делимости на 5 и на 10. Десяток делится на 5 и на 10; поэтому число, составленное из десятков, т. е. оканчивающееся нулём, делится на 5 и на 10. Если число не оканчивается нулём, то оно не делится на 10, а на 5 оно разделится только тогда, когда последняя его цифра будет 5, потому что из всех однозначных чисел только 5 делится на 5. Итак:

на 5 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются нулём или цифрой 5; на 10 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются нулём.

Замечание. Подобным же образом можно убедиться, что на 25 делятся все те и только те числа, у которых две последние цифры или нули, или 25, или 50, или 75.

На 50 делятся все те и только те числа, у которых две последние цифры нули или 50.

86. Признаки делимости на 3 и на 9. Предварительно заметим, что и на 3, и на 9 делится всякое число, написанное посредством одной цифры 9, т. е. 9, 99, 999 и т. п. Действительно:

$$999 : 3 = 333; \qquad 9999 : 3 = 3333 \text{ и т. д.;}$$
$$999 : 9 = 111; \qquad 9999 : 9 = 1111 \text{ и т. д.}$$

Заметив это, возьмём какое-нибудь число, например 2457, и разложим его на отдельные единицы различных разрядов (кроме простых единиц, которые оставим неразложенными):

$$\begin{aligned} 2457 = {} & 1000 + 1000 + \\ & + 100 + 100 + 100 + 100 \\ & + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + \\ & + 7 \end{aligned}$$

Разложим каждую тысячу на 999 и 1, каждую сотню — на 99 и 1, каждый десяток — на 9 и 1. Тогда вместо 2 тысяч получим 2 раза по 999 и 2 единицы; вместо 4 сотен получим 4 раза по 99 и 4 единицы; вместо 5 десятков — 5 раз по 9 и ещё 5 единиц. Следовательно:

$$\begin{aligned} 2457 = {} & 999 + 999 \qquad\qquad\qquad + 2 + \\ & + 99 + 99 + 99 + 99 + 4 + \\ & + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 5 + \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 7 \end{aligned}$$

Слагаемые 999, 99 и 9 делятся на 3 и на 9; значит, делимость данного числа на 3 или на 9 зависит только от суммы $2 + 4 + 5 + 7$; если эта сумма делится (не делится) на 3 или на 9, то и данное число делится (не делится) на эти числа. Сумма $2 + 4 + 5 + 7$ есть сумма чисел, выражаемых цифрами данного числа, написанными отдельно; для краткости говорят, что это есть *сумма цифр* данного числа. Поэтому:

на 3 делятся все те и только те числа, у которых сумма цифр делится на 3;

на 9 делятся все те и только те числа, у которых сумма цифр делится на 9.

В числе 2457 сумма цифр равна 18; 18 делится на 3 и на 9; значит, 2457 тоже делится и на 3 и на 9. Действительно:

$$2457 : 3 = 819; \quad 2457 : 9 = 273.$$

Так как 9 делится на 3, то всякое число, делящееся на 9, будет делиться и на 3. Но число может делиться на 3 и в то же время не делиться на 9. Так, в числе 17331 сумма цифр равна 15; так как 15 делится на 3, но не делится на 9, то и число 17331 делится на 3, но не делится на 9.

Замечание. В подробных курсах арифметики можно найти ещё признаки делимости на 7, 11, 13, 37 и другие числа, но они настолько сложны, что пользование ими на практике затруднительно, поэтому мы их не излагаем.

87. Признаки делимости на 6, 12, 15. Если какое-нибудь число делится на 6, то его можно разложить на шестёрки, т. е. представить его в виде суммы:

$$6+6+6+6+\ldots+6.$$

Но каждую шестёрку можно разложить и на двойки $(2+2+2)$ и на тройки $(3+3)$; значит, и всё такое число можно разложить и на двойки и на тройки; следовательно, оно должно делиться и на 2 и на 3. Таким образом,

чтобы число делилось на 6, необходимо, чтобы оно делилось на 2 и на 3.

Например, число 3584 не делится на 6, так как оно не делится на 3 (хотя и делится на 2); число 3585 также не делится на 6, так как оно не делится на 2 (хотя и делится на 3).

Но это рассуждение ещё не убеждает нас, что этот признак делимости на 6 достаточен, т. е. что всякое число, которое делится на 3 и на 2, разделится и на 6. Докажем теперь, что это так. Допустим, что данное число делится на 3 и на 2, и убедимся, что в таком случае оно будет делиться и на 6.

Пусть данное число делится на 3 и на 2. Тогда его можно разложить и на тройки и на двойки. Вообразим, что мы его разложили на тройки:

$$3+3+3+3+\ldots+3.$$

Будем соединять, начиная слева, каждые 2 тройки в 1 шестёрку. Тогда должно получиться одно из двух:

1) все тройки соединятся в шестёрки, ни одной лишней тройки не останется; это значит, что наше число представилось в виде

$$6+6+\ldots+6,$$

т. е. разложилось на шестёрки; следовательно, оно делится на 6;

2) одна тройка осталась без пары, т. е. наше число представилось в виде

$$6+6+\ldots+6+3.$$

Но здесь все слагаемые, кроме последнего, делятся на 2; значит, на основании свойства 2) (§ 82) наше число не делилось бы на 2; а так как оно по условию на 2 делится, то этот случай невозможен.

Теперь мы можем утверждать, что для делимости какого-нибудь числа на 6 необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3; или короче:

на 6 делятся все те и только те числа, которые делятся и на 2 и на 3.

Например, число 13854 делится на 6, так как оно делится на 2 (оканчивается чётной цифрой) и в то же время делится на 3 (сумма его цифр делится на 3). Действительно, $13854 : 6 = 2309$.

Тем же способом можно убедиться в том, что **на 12 делятся все те и только те числа, которые делятся на 3 и на 4; на 15 делятся все те и только те числа, которые делятся на 3 и на 5.**

88. Общее обоснование признаков делимости предыдущего типа. Признаки делимости на 6, 12, 15 и на многие другие числа имеют общее теоретическое обоснование, которое мы здесь изложим.

Теорема. *Если произведение двух чисел a_1a_2 делится на третье число p и одно из чисел a_1 или a_2 не имеет с p общих делителей, кроме единицы, то другое из них делится на p.*

Доказательство. Пусть, например, число a_1 не имеет с p общих делителей, кроме единицы; тогда докажем, что a_2 должно делиться на p.

Разделим a_1 на p и назовём частное и остаток от этого деления соответственно q и r. Тогда:

$$a_1 = pq + r.$$

Убедимся относительно остатка r, что он: 1) не равен 0 и 2) не имеет общих делителей с p, кроме единицы. Действительно, если $r = 0$, то $a_1 = pq$, и тогда a_1 делилось бы на p, и, следовательно, числа a_1 и p имели бы общий делитель, отличный от единицы, что противоречит условию теоремы. Предположим далее, что p и r имеют какой-нибудь общий делитель $t > 1$. Тогда a_1 делилось бы на t и, следовательно, a_1 и p имели бы общий делитель $t > 1$, что противоречит условию.

Если остаток r не равен единице, то разделим p на r и назовём частное и остаток от этого деления q_1 и r_1. Тогда:

$$p = rq_1 + r_1.$$

Так как p и r по доказанному не имеют общих делителей, кроме единицы, то из последнего равенства убеждаемся, подобно предыдущему, что: 1) r_1 не равно нулю и 2) r и r_1 не имеют общих делителей, кроме единицы. Если r_1 не равно единице, то разделим r на r_1, отчего получим остаток r_2, не равный нулю и не имеющий общих делителей с r_1, кроме единицы. Если r_2 не равен единице, то разделим r_1 на r_2 и т. д.; тогда получим ряд равенств:

$$\begin{aligned} a_1 &= pq + r, \\ p &= rq_1 + r_1, \\ r &= r_1q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

из которых убеждаемся, что остатки r, r_1, r_2 и т. д. не равны нулю. Так как при всяком делении остаток должен быть меньше делителя, то $r < p$, $r_1 < r$, $r_2 < r_1$ и т. д. Поэтому, произведя достаточное число делений, мы, наконец, дойдём до такого остатка, который равен единице.

Пусть $r_n = 1$. Тогда: $r_{n-2} = r_{n-1}q_n + 1$.

Умножим почленно каждое из полученных равенств на a_2.

$$\begin{aligned} a_1a_2 &= pqa_2 + ra_2, \\ pa_2 &= rq_1a_2 + r_1a_2, \\ ra_2 &= r_1q_2a_2 + r_2a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r_{n-2}a_2 &= r_{n-1}q_na_2 + a_2. \end{aligned}$$

Обращая внимание на первое из этих равенств, рассуждаем так:

так как произведение a_1a_2 по условию делится на p, то и сумма $pqa_2 + ra_2$ делится на p; первое слагаемое этой суммы делится на p; следовательно, и второе слагаемое, т. е. произведение ra_2, делится на p. Перейдя затем к равенству второму, находим, что сумма pa_2 и одно из слагаемых $(ra_2)\,q_1$ делится на p, откуда заключаем, что и второе слагаемое r_1a_2 делится на p. Переходя затем к равенству третьему, от третьего к четвёртому, от четвёртого к пятому и т. д., дойдём, наконец, до последнего равенства, из которого заключим, что a_2 делится на p.

89. ***Следствие. Если число a делится порознь на два числа p и q, причём p и q не имеют общих делителей, кроме единицы, то a делится на произведение pq.***

Обозначим частное от деления a на p через Q; тогда:

$$a = pQ.$$

Так как по условию a делится на q, то из этого равенства заключаем, что pQ делится на q. Но p не имеет с q общих делителей, кроме единицы; значит, согласно теореме, Q должно делиться на q. Пусть частное от этого деления будет Q_1; тогда:

$$Q = qQ_1.$$

Вставив в предыдущее равенство на место Q равное ему произведение, получим:

$$a = p\,(qQ_1) = (pq)\,Q_1,$$

откуда видно, что число a есть произведение двух множителей (pq) и Q_1, значит, a делится на pq.

Таким образом: если число делится на 2 и на 3, то оно дели на 6; если число делится на 3 и на 4, то оно делится на 12; ес делится на 3 и на 5, то оно делится на 15, и т. п.

Примечание. Если числа p и q имеют общий делитс отличный от единицы, то из делимости какого-нибудь числа н и на q ещё не следует, что это число делится на произведение так, число 36 делится на 4 и на 6, но не делится на произведен $4 \cdot 6 (= 24)$.

II. РАЗЛОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ.

90. Простые и составные числа. Всякое число, ко- нечно, делится на единицу и само на себя. Существует оче много чисел, которые делятся не только на единицу и на са себя, но имеют ещё и другие делители: например, число кроме единицы и 30, имеет ещё делители: 2, 3, 5, 6, 10 и

Всякое число, кроме единицы, которое делится толь на единицу и само на себя, называется простым (и абсолютно простым, или первоначальным).

Число, которое делится не только на единицу и са на себя, но ещё и на другие числа, называется составн (или сложным).

Число 1 не причисляется ни к простым, ни к составн числам, оно занимает особое положение.

Есть 25 простых чисел, меньших 100, а именно:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,
43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

В конце этой книги приложена таблица, в которой вып- саны все простые числа меньше 6000.

91. Разложение составного числа на простые мн- жители. Всякое составное число можно разложить на пр- стые множители, т. е. представить его в виде пр изведения простых чисел. Например, разложить на простые множители — значит представить это число т $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.

Пусть требуется разложить на простые множители как нибудь составное число, например 420. Для этого нахо (по признакам делимости) наименьшее простое число, на к- торое делится 420; такое число есть 2. Разделим 420 на :

$$420 : 2 = 210,$$

значит,

$$420 = 210 \cdot 2. \qquad (1)$$

Теперь подыскиваем наименьшее простое число, на которое делится составное число 210; такое число есть 2. Разделим 210 на 2:

$$210 : 2 = 105,$$

значит,

$$210 = 105 \cdot 2.$$

Заменим в равенстве (1) число 210 равным ему произведением:

$$420 = 105 \cdot 2 \cdot 2. \qquad (2)$$

Наименьшее простое число, на которое делится составное число 105, есть 3. Разделим 105 на 3:

$$105 : 3 = 35,$$

значит,

$$105 = 35 \cdot 3.$$

Заменим в равенстве (2) число 105 равным ему произведением:

$$420 = 35 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2. \qquad (3)$$

Наименьшее простое число, на которое делится составное число 35, есть 5; разделив 35 на 5, находим 7; значит, $35 = 7 \cdot 5$. Заменив в равенстве (3) число 35 равным ему произведением $7 \cdot 5$, получим:

$$420 = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2.$$

Это и будет требуемое разложение, так как теперь все сомножители — числа простые.

Так как произведение не изменяется от перемены мест сомножителей, то можно писать их в каком угодно порядке; обыкновенно их пишут от меньших к большим, т. е. так:

$$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Разложение на простые множители удобнее всего записывать так:

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

т. е. пишут данное составное число и проводят справа от него вертикальную черту. Справа от черты помещают наименьшее простое число, на которое делится данное составное, и делят на него это данное число. Цифры частного подписывают под делимым. С этим частным поступают так же, как и с данным числом. Действия продолжают до тех пор, пока в частном не получится единица. Тогда все числа, стоящие направо от черты, будут простыми множителями данного числа.

В рассмотренном примере мы каждый раз искали *наименьший* простой делитель полученного числа; чаще всего это — самый удобный способ разложения, потому что чем меньше число, тем легче на него делить, кроме того, для большинства малых делителей существуют простые признаки делимости. Однако указанный путь не является обязательным, и часто разложение на простые множители может быть проще проведено другим порядком. Так, в нашем же примере мы сразу видим, что 420 делится на $10=2\cdot5$. Поэтому, произведя разложение (в уме)

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

мы можем написать:

$$420=10\cdot42=2\cdot5\cdot2\cdot3\cdot7=2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7.$$

Если требуется, например, разложить на множители число 13 000, то мы можем сразу заметить, что $13\,000=13\cdot1000$, а так как 13 — простое число, то остаётся разложить на простые множители число

$$1000=10\cdot10\cdot10=2\cdot5\cdot2\cdot5\cdot2\cdot5,$$

и мы сразу получаем:

$$13\,000=2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5\cdot13.$$

Возьмём ещё пример. Разложим на простые множители 8874:

$$\begin{array}{r|r} 8874 & 2 \\ 4437 & 3 \\ 1479 & 3 \\ 493 & 17 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array}$$

Дойдя до частного 493, мы затрудняемся решить, на какое число оно делится. В таких случаях обращаемся к таблице простых чисел (в конце этой книги). Если в ней встретится число, поставившее нас в затруднение, то оно делится только само на себя. Число 493 не находится в таблице простых чисел; значит, это число составное, и потому мы пробуем делить его на простые числа: 7, 11, 13 и т. д., до тех пор, пока не дойдём до деления без остатка. Оказывается, что 493 делится на 17, причём в частном получается 29. Теперь можем окончить разложение.

Из этого примера видно, что иногда очень трудно выполнить разложение составного числа, так как при разложении мы можем встретиться с большим числом, о котором затруднительно решить, простое ли оно или составное, а если оно составное, то не всегда легко найти его наименьший простой делитель.

92. Возведение в степень. При разложении чисел на множители, а также и во многих других случаях приходится часто писать несколько одинаковых сомножителей подряд, например $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ или $5 \cdot 5 \cdot 5$. Подобно тому как для сложения равных слагаемых мы ввели особое наименование (умножение) и особое обозначение ($2 \cdot 4$ вместо $2+2+2+2$), так и для умножения равных сомножителей полезно ввести особое наименование и особое обозначение.

Произведение одинаковых сомножителей называется *степенью*. Так, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ есть 2 в четвёртой степени. Записывается это так;

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4;$$

при этом число 2 называется *основанием* степени, а число 4 — *показателем* степени. Самое же действие называется *возведением числа 2 в четвёртую степень*. Точно так же

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3,$$

читается: 5 в третьей степени; здесь 5 — основание, а 3 — показатель степени.

Вторую степень сокращённо называют *квадратом* данного основания, а третью степень — *кубом* его. Так, 7^2 читается: 7 в квадрате, а 5^3 — 5 в кубе. Первой степенью числа называют само это число: $3^1 = 3$. С помощью введённого обозначения разложение чисел на простые множители часто может быть записано короче; так, в примерах, рассмотренных в § 91, мы можем написать:

$$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7,$$
$$13\,000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 13.$$

Иногда такое сокращение может быть очень заметным: например, $1536 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^9 \cdot 3$.

93. Составное число разлагается только в один ряд простых множителей. Легко доказать, что способом, о. санным в § 91, всякое составное число можно разложить простые множители. Но, применяя этот способ, мы можем придерживаться непременно того порядка, какой был на указан, т. е. мы можем начинать разложение не с наименьшего простого числа, на которое делится составное, а производить разложение в какой-нибудь другой последовательности (и даже можем, как это мы видели, разложить составное число сначала на составные множители, а затем эти множители разложить на простые). Поэтому возникает вопрос: не могут ли иногда получиться для одного и того же составного числа два (или более) различных ряда простых множителей, которые отличались бы друг от дру или самими множителями, или числом повторения одинако множителей? Например, число 14 000 имеет разложе $2^4 \cdot 5^3 \cdot 7$; не может ли оно иметь ещё и другое разложен в которое входил бы какой-нибудь иной простой множите. кроме 2, 5, 7, или в котором эти множители повторялись какое-нибудь другое число раз, чем в разложении $2^4 \cdot 5^3$. Доказано, что этого быть не может, т. е. что составн число, как бы мы его ни разлагали, даёт только один р простых множителей (которые, конечно, могут быть пе ставляемы).

Доказательство возможности и единственности разложе чисел на простые множители. Чтобы строго доказать, что вся число (кроме единицы) может быть разложено, и притом тол одним способом, на простые множители, докажем сначала следу щие две теоремы.

Теорема 1. Всякое число, кроме единицы, имеет по край мере один простой делитель.

Доказательство. Пусть $a \neq 1$; если a — число прост то оно само будет своим простым делителем, и теорема доказ если же a — число составное, то оно имеет делителей, отличн от a и от единицы; пусть b есть наименьший из этих делител тогда b не может быть составным числом, так как если бы о делилось на число c, отличное от единицы и от него самого, то на это число c делилось бы и число a, и, значит, b не было бы наименьшим делителем числа a. Поэтому b — число простое, а так к оно есть делитель числа a, то теорема доказана.

Теорема 2. Произведение нескольких сомножителей $a_1 a_2 a_3 \ldots$ может делиться на простое число p только тогда, когда по кр ней мере один из сомножителей делится на p.

Доказательство. Рассматривая данное произведение к произведение только двух сомножителей: a_1 и $(a_2 a_3 \ldots a_n)$, мо рассуждать так: если a_1 не делится на простое число p, то это значит, что a_1 не имеет с p общих делителей, кроме единицы; в таком случае по доказанной в § 88 теореме число $(a_2a_3\ldots a_n)$ должно делиться на p. Подобно этому убедимся, что если a_2 не делится на p, то число $(a_3a_4\ldots a_n)$ должно делиться на p. Продолжая эти рассуждения далее, найдём, что если ни одно из чисел: a_1, a_2, $a_3\ldots$, a_{n-1} не делится на p, то a_n делится на p. Итак, какое-нибудь из чисел: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ делится на p.

Чтобы доказать теперь возможность разложения любого числа, кроме единицы, на простые множители, поступаем так. Пусть $a \neq 1$; если a — число простое, то утверждение доказано; если же a — число составное, то по теореме 1 оно имеет простой делитель p_1; пусть

$$a = p_1a_1;$$

если a_1 — число простое, то теорема доказана; если же оно составное, то по теореме 1 оно имеет простой делитель p_2; пусть

$$a_1 = p_2a_2,$$

так что

$$a = p_1p_2a_2;$$

если a_2 — число простое, то теорема доказана; если оно составное, то мы продолжаем рассуждать указанным образом. Так как $a > a_1$, $a_1 > a_2$ и т. д., то наше разложение должно рано или поздно закончиться; но закончиться оно может только тогда, когда какое-нибудь a_n окажется числом простым (если оно составное, то мы можем продолжать разложение); поэтому разложение

$$a = p_1p_2\ldots p_{n-1}a_n$$

есть разложение числа a на простые множители, возможность которого таким образом доказана.

Для доказательства единственности разложения будем рассуждать так:

пусть для некоторого числа мы имеем два разложения (на одинаковые или различные) простые множители:

$$abc\ldots \text{ и } a_1b_1c_1\ldots,$$

тогда

$$abc\ldots = a_1b_1c_1\ldots.$$

Левая часть последнего равенства делится на a; значит, и правая часть должна делиться на a. Но a — число простое, поэтому произведение $a_1b_1c_1\ldots$ только тогда разделится на a, когда один из его множителей делится на a (теорема 2); но простое число может делиться на другое простое число, отличное от единицы, только тогда, когда эти простые числа одинаковы. Значит, одно из чисел: $a_1b_1c_1\ldots$ равняется a. Пусть $a_1 = a$. Разделив обе части равенства на a, получим

$$bc\ldots = b_1c_1\ldots.$$

Подобно предыдущему, убедимся, что один из множителей $b_1, c_1\ldots$ равен b. Пусть $b_1 = b$, тогда $cd\ldots = c_1d_1\ldots$. Продолжая эти рассуждения далее, увидим, что все множители первого ряда входят также и во второй ряд. Разделив обе части равенства на a_1, убедимся, что в первом ряду есть множитель a_1. Таким образом, подобно предыдущему, найдём, что все множители второго ряда входят и в первый ряд. Отсюда следует, что оба эти ряда могут отличаться только порядком множителей, а не самими множителями, другими словами, что *эти два ряда представляют один и тот же ряд.* Иначе говоря, *каждое число* (кроме единицы) *может быть разложено на простые множители и притом только одним способом.*

94. Некоторые сведения о простых числах. Легко убедиться, что *существует бесчисленное множество простых чисел.* Действительно, допустим противное, т. е. что простых чисел конечное число. В таком случае должно существовать наибольшее простое число. Пусть такое число будет a. Чтобы опровергнуть сделанное допущение, вообразим новое число N, составленное по формуле:

$$N = (2\cdot3\cdot5\cdot7\ldots a) + 1,$$

т. е. вообразим такое число N, которое получится, если перемножить все простые числа от 2 до a включительно и к произведению приложим ещё единицу. Так как N, очевидно, больше a и a, согласно предположению, есть наибольшее из простых чисел, то N должно быть числом составным. Но составное число делится на некоторое простое число (§ 93, теорема 1). Следовательно, N делится на некоторое число из ряда: 2, 3, 5, 7, 11, ..., a. Но этого быть не может, так как N есть сумма двух слагаемых, из которых первое (произведение $2\cdot3\cdot5\ldots a$) делится на всякое число из ряда: 2, 3, 5, ..., a, а второе (1) не делится ни на одно из этих чисел. Значит, наибольшего простого числа не существует, а если нет наибольшего простого числа, то ряд простых чисел бесконечен.

С древнейших времён простые числа были предметом многочисленных исследований. Между прочим, учёные старались отыскать *закон* составления простых чисел, который дал бы возможность выразить все простые числа одной или несколькими *формулами*, или старались найти по крайней мере такую формулу, которая хотя бы и не выражала *всех* простых чисел, но позволяла бы найти *произвольно большое* простое число. В этом смысле особенно интересна попытка знаменитого французского математика XVII в. — Ферма́ (Fermat). Он нашёл, что формула $2^n + 1$ даёт простые числа при n, равном $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$. Действительно, при этих значениях показателя n получаются следующие простые числа:

3, 5, 17, 257.

Основываясь на этом наблюдении (и на некоторых соображениях о свойствах чисел), Ферма́ высказал предположение, что формула $2^n + 1$ должна давать простые числа при всяком n, равном *степени* 2. Это мнение долгое время не было опровергнуто, ибо никому (до Эйлера) не удавалось указать хотя бы один случай, когда при n, равном степени 2, формула $2^n + 1$ дала бы составное число[1]). Первый опроверг гипотезу Ферма́ знаменитый Эйлер (XVIII в.), до-

---

[1]) При возрастании n выражение $2^n + 1$ даёт числа, увеличивающиеся с чрезвычайной быстротой: например, при $n = 2^4$ получается число 65537, при $n = 2^5$ — число 4294967297. О таких больших числах трудно было решить (при состоянии науки в XVII и XVIII вв.), простые они или составные.

казав, что при $n = 2^5 = 32$ формула $2^n + 1$ даёт число, делящееся на 641. Эта ошибка Ферма́ представляет собой поучительный пример, насколько в математике неприменим метод умозаключения от частного к общему (метод наведения, или индукции).

За неимением формул, выражающих все простые числа, является надобность составить эмпирически (опытным путём) ряд последовательных простых чисел от 2 до какого-нибудь определённого большого числа a. Самый простой и вместе с тем самый древний способ составления такого ряда принадлежит александрийскому математику Эратосфену (жившему в III в. до нашей эры). Способ Эратосфена состоит в том, что из ряда натуральных чисел от 2 до a (число, которым желают ограничить ряд) выключают сначала все числа, делящиеся на 2 (кроме 2), потом все числа, делящиеся на 3 (кроме 3), затем все числа, делящиеся на 5, на 7, на 11 (кроме самих этих чисел), и т. д. Это делается очень просто: выписав ряд нечётных чисел от 3 до a, зачёркивают в нём каждое третье число после 3, каждое 5 число после 5, каждое 7 после 7 и т. д.

В настоящее время имеются таблицы всех последовательных простых чисел, меньших 9 000 000.

Если нет под руками выписанного ряда простых чисел, или если данное число N превосходит наибольшее число выписанного ряда, то возникает вопрос: как узнать, будет ли N простое или составное число? Самый простой для этого способ состоит в следующем. Найдя предварительно $\sqrt{N}$, выписывают все простые числа, меньшие этого корня. Пусть это будут числа:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ a.$$

Затем делят N на 2, на 3, на 5, ... и на a. Если N не разделится ни на одно из этих чисел, то можно утверждать, не производя дальнейших делений, что N — число простое. Действительно, так как $N = \sqrt{N} \cdot \sqrt{N}$, то очевидно, что от деления N на числа, бо́льшие $\sqrt{N}$, должны получаться частные, меньшие $\sqrt{N}$; поэтому если бы число N могло разделиться на какое-нибудь число, большее $\sqrt{N}$, то оно разделилось бы и на число, меньшее $\sqrt{N}$. Когда N велико, то способ этот может оказаться очень утомительным; так, если $N > 1\,000\,000$, то $\sqrt{N} > 1000$, а имеется 168 простых чисел, меньших 1000, следовательно, для испытания такого числа потребовалось бы иногда до 168 делений. В теории чисел указываются способы, посредством которых можно значительно уменьшить число делений, потребных для испытаний данного числа, но и при этом всё-таки вопрос об определении, будет ли данное число простым или составным, представляет иногда и до сего времени огромные затруднения.

III. НАХОЖДЕНИЕ ДЕЛИТЕЛЕЙ СОСТАВНОГО ЧИСЛА.

95. Что такое „делитель" числа. Напомним, что делителем данного числа называется число, на к о т о р о е данное число делится.

Всякое простое число, например число 11, имеет только два делителя: единицу и самого себя.

Всякое составное число имеет более двух делителей; например, число 6 имеет 4 делителя: 1, 2, 3 и 6; из них 2 и 3 — простые, а 6 составной.

96. Нахождение делителей данного числа. Пусть требуется найти делители числа 420. Для этого разложим это число на простые множители:

$$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Очевидно, что 420 делится на каждый из этих множителей; легко видеть, что 420 делится и на произведение двух, трёх и более своих множителей. Например, 420 делится на произведение $3 \cdot 7$, т. е. на 21, так как, переставив множители 3 и 7 к началу ряда, мы получим:

$$420 = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 21 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5,$$

откуда и видно, что 420 делится на 21.

Правило. **Чтобы найти делители данного составного числа, предварительно разлагают его на простые множители; каждый из этих множителей будет простым делителем данного числа; перемножением же простых множителей по два, по три, по четыре и т. д. получатся составные делители данного числа.**

Замечание. Чтобы найти частное от деления составного числа на какой-нибудь его делитель, достаточно из разложения этого числа на простые множители отбросить те множители, которые в произведении составляют данный делитель, и перемножить между собой остальные множители.

Например, чтобы найти частное от деления 420 на 21, из разложения $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ выбросим множители 3 и 7, произведение которых составляет 21, и оставшиеся множители перемножим (получим 20).

Указанным правилом могут быть получены *все* делители данного числа. В самом деле, пусть число a имеет делитель b, и пусть c есть частное от деления a на b, так что

$$a = bc.$$

Если мы разложим b и c на простые множители и вставим эти разложения в написанное равенство, то мы, очевидно, получим разложение числа a на простые множители, причём число b будет получаться как произведение некоторой части этих сомножителей. Таким образом, любой делитель данного числа действительно может быть получен по указанному выше правилу.

IV. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ НЕСКОЛЬКИХ ЧИСЕЛ.

97. Что такое наибольший общий делитель. *Наибольшим общим делителем нескольких чисел называется самое большое число, на которое делятся все эти числа.*

Например, наибольший общий делитель трёх чисел: 18, 30 и 24 есть 6, потому что 6 есть самое большое число, на которое делятся все эти числа.

Два числа, для которых наибольший общий делитель есть единица, называются взаимно простыми (или относительно простыми). Таковы, например, числа 14 и 15.

Укажем два способа нахождения наибольшего общего делителя нескольких чисел.

98. Способ первый — посредством разложения на простые множители. Пусть требуется найти наибольший общий делитель двух чисел: 180 и 126. Для этого предварительно разложим эти числа на простые множители:

$$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5; \quad 126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7.$$

Сравнивая между собой множители этих чисел, замечаем, что между ними есть общие, а именно: 2, 3, 3. Каждый из этих общих множителей будет и общим делителем 180 и 126. Чтобы получить составные общие делители, надо перемножить общие множители по два и по три. Наибольший общий делитель, очевидно, получится, если перемножим все общие множители:

$$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18.$$

Пусть ещё требуется найти наибольший общий делитель трёх чисел: 210, 1260 и 245. Разложим эти числа на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Теперь видим, что наибольший общий делитель этих чисел равен произведению общих множителей 5 и 7, т. е. равен 35.

Подобным образом можно находить наибольший общий делитель четырёх, пяти и более данных чисел.

Правило. **Чтобы найти наибольший общий делитель нескольких чисел, достаточно, разложив их на простые множители, перемножить между собой те из этих множителей, которые общи всем данным числам.**

Примечание. При этом надо помнить, что если какой-нибудь простой множитель в разложение всех чисел входит несколько раз, то столько же раз он должен войти и в наибольший общий делитель.

Пользуясь введённым в § 92 обозначением степени, мы можем в первом из рассмотренных примеров разложение данных чисел на простые множители записать так:

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5; \qquad 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

В наибольший общий делитель данных чисел множители 5 и 7 совсем не войдут, так как 5 не входит во второе число, а 7 не входит в первое число. Множитель 2 войдёт 1 раз, так как в разложение второго числа он входит только 1 раз. Множитель же 3 войдёт в наибольший общий делитель 2 раза (т. е. во второй степени), так как в оба данных числа он входит во второй степени; таким образом, наибольший общий делитель данных чисел есть

$$2 \cdot 3^2 = 18.$$

Таким образом, указанное выше правило можно выразить ещё так:

чтобы найти наибольший общий делитель нескольких чисел, разлагают эти числа на простые множители, берут произведение степеней различных простых множителей, входящих в состав всех данных чисел, причём каждый множитель берётся с наименьшим показателем, с каким он встречается в составе данных чисел.

Пример: наибольший общий делитель чисел

$$9000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \text{ и } 1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

равен $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450$.

99. Способ второй — посредством последовательного деления. Сначала мы разъясним этот способ в применении только к двум данным числам, а потом в применении к трём, четырём и более числам.

Способ этот основан на следующих двух предложениях:

I. Если большее из двух данных чисел делится на меньшее, то меньшее есть их наибольший общий делитель.

Например, возьмём два числа: 54 и 18, из которых большее делится на меньшее. Так как 54 делится на 18 и 18 делится на 18, то, значит, 18 есть общий делитель чисел 54 и 18.

Этот делитель есть в то же время и наибольший, потому что 18 не может делиться ни на какое число, большее 18.

II. Если большее из данных чисел не делится на меньшее, то их наибольший общий делитель равен наибольшему общему делителю двух других чисел, а именно, меньшего из данных чисел и остатка от деления большего из них на меньшее.

Пусть, например, даны два числа: 85 и 30, из которых большее не делится на меньшее. Разделив первое на второе, получим: $85:30=2$ (остаток 25); тогда наибольший общий делитель чисел 85 и 30 должен быть также наибольшим общим делителем других двух чисел, а именно: 30 и 25 (это есть 5).

Действительно, из деления мы находим:

$$85=30\cdot 2+25; \text{ откуда } 25=85-30\cdot 2.$$

Из этих равенств на основании известных нам свойств суммы и разности (§ 82) можно вывести такие два заключения:

1) всякий общий делитель чисел 30 и 25 должен быть также и делителем числа 85;

2) всякий общий делитель чисел 85 и 30 должен быть также и делителем остатка 25.

Оказывается, таким образом, что 2 пары чисел:

$$\overbrace{85 \text{ и } 30} \qquad \overbrace{30 \text{ и } 25}$$

должны иметь одни и те же общие делители; значит, и наибольший общий делитель у них должен быть один и тот же.

Посмотрим теперь, как можно пользоваться этими предложениями для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел.

Пусть требуется найти наибольший общий делитель чисел 391 и 299.

$$
\begin{array}{r|l}
391 & \underline{299} \\
\underline{299} & 1 \\
299 & \underline{92} \\
\underline{276} & 3 \\
92 & \underline{23} \\
\underline{92} & 4 \\
0 &
\end{array}
$$

Разделим 391 на 299, чтобы узнать, не будет ли 299 наибольшим общим делителем (на основании предложения I). Видим, что 391 не делится на 299 (получается остаток 92), поэтому 299 не есть наибольший общий делитель. На осно-

100 и добавим к ним те множители числа 40, которых недостаёт в разложении 100. Тогда получим произведение $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2$, которое делится и на 100 и на 40. Добавим теперь к этому произведению те множители числа 35, которых в произведении недостаёт. Тогда получим произведение:

$$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 = 1400,$$

делящееся и на 100, и на 40, и на 35. Это и есть наименьшее общее кратное этих чисел, потому что, выключив из него хотя бы один сомножитель, мы получим число, которое не разделится на какое-нибудь из данных чисел.

Обратим внимание на то, что в рассмотренном примере мы, добавляя к простым множителям числа 100 недостающие в нём множители числа 40, добавили множитель 2. Хотя 2 в разложении числа 100 и имеется, но этот множитель там встречается всего 2 раза, а в разложении числа 40 мы видим его 3 раза; поэтому мы и должны были считать его „недостающим" в разложении числа 100.

***Правило.* Чтобы найти наименьшее общее кратное нескольких данных чисел, разлагают все эти числа на простые множители; затем, взяв разложение одного из них, приписывают к нему недостающие простые множители из разложения другого числа; к этому произведению приписывают недостающие в нём простые множители из разложения третьего числа и т. д. до последнего. Полученное таким путём произведение и будет наименьшим общим кратным данных чисел.**

Пользуясь введённым в § 92 обозначением степени, мы можем разложение данных в нашем примере чисел записать так:

$$100 = 2^2 \cdot 5^2; \quad 40 = 2^3 \cdot 5; \quad 35 = 5 \cdot 7.$$

Очевидно, что наименьшее общее кратное данных чисел должно содержать множители 2, 5 и 7; при этом множитель 2 должен входить в третьей степени, так как при меньшем показателе полученное число не могло бы делиться на 40; множитель 5 должен входить во второй степени, так как иначе полученное число не разделилось бы на 100; наконец, множитель 7 достаточно взять в первой степени. Таким образом, искомое наименьшее общее кратное есть

$$2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 1400.$$

Итак, указанное правило можно выразить ещё так:

чтобы найти наименьшее общее кратное нескольких

чисел, разлагают их на простые множители и составляют произведение степеней всех различных простых множителей, входящих в разложение данных чисел, причём каждый множитель берётся с наибольшим показателем, с каким он встречается в этих разложениях.

103. Некоторые особые случаи. Рассмотрим два случая, в которых наименьшее общее кратное может быть найдено весьма просто.

Случай первый, *когда никакая пара данных чисел не имеет общих множителей.* Пусть, например, даны три числа: 20, 49, 33, из которых, как видно из разложений:

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5; \quad 49 = 7 \cdot 7; \quad 33 = 3 \cdot 11,$$

никакая пара не имеет общих множителей. Применяя к этому случаю общее правило, мы придём к заключению, что *все данные числа надо перемножить*:

$$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 11 = 20 \cdot 49 \cdot 33 = 32340.$$

Так, в частности, надо поступать, когда отыскивается наименьшее общее кратное различных между собой *простых* чисел; например, наименьшее общее кратное чисел 3, 7 и 11 равно $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$.

Случай второй, *когда большее из данных чисел делится на все остальные.* Тогда наибольшее число и есть наименьшее общее кратное. Пусть, например, даны четыре числа: 5, 12, 15 и 60, из которых большее 60 делится на 5, на 12 и 15; так как оно при этом, конечно, делится и само на себя, то оно и есть наименьшее общее кратное.

104. Способ второй — посредством нахождения наибольшего общего делителя. Пусть требуется найти наименьшее общее кратное чисел 336 и 1260. Разлагая эти числа на простые множители, мы находим: $336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$ и $1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Произведение данных чисел равно:

$$336 \cdot 1260 = (2^4 \cdot 3 \cdot 7) \cdot (2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7). \qquad (1)$$

Вспомним теперь, как составляются наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух данных чисел. Каждое простое число, встречающееся в разложении данных чисел на множители, войдёт в наибольший общий делитель с наименьшим из тех двух показателей, с которыми оно встречается, а в наименьшее общее кратное — с наибольшим из этих двух показателей.

Таким образом, в наибольший общий делитель войдёт 2[illegible], а в наименьшее общее кратное 2^4; в наибольший общий делитель войдёт 3, а в наименьшее общее кратное 3^2; множитель 5, входящий в разложение только одного из двух данных чисел, войдёт в их наименьшее общее кратное, а в наибольший общий делитель не войдёт; наконец, множитель [illegible], который в каждое из данных чисел входит с показателем [illegible], войдёт с этим показателем и в наибольший общий делитель и в наименьшее общее кратное.

Таким образом, наибольший общий делитель данных чисел есть $2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$, а наименьшее общее кратное их $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5040$. Мы видим, что все множители данных чисел, стоящие в правой части равенства (1), распределились: часть из них вошла в наибольший общий делитель, а остальные вошли в наименьшее общее кратное. Поэтому произведение данных чисел $336 \cdot 1260$ равно произведению их наибольшего общего делителя 84 на их наименьшее общее кратное 5040. Отсюда получим:

Правило. **Наименьшее общее кратное двух чисел равно произведению этих чисел, делённому на их наибольший общий делитель.**

Заметив это, мы можем находить наименьшее общее кратное двух чисел и не разлагая этих чисел на простые множители. В самом деле, наибольший общий делитель данных чисел может быть найден способом последовательного деления. После же отыскания наибольшего общего делителя наименьшее общее кратное данных чисел легко находится по только что изложенному правилу.

105. Случай трёх или более чисел. Пусть требуется найти наименьшее общее кратное трёх чисел: 336, 1260 и 350. Находим сначала наименьшее общее кратное чисел 336 и 1260; оно равно 5040, как мы видели в § 104. Теперь находим наименьшее общее кратное числа 5040 и третьего данного числа 350. Наибольший общий делитель этих чисел легко найти (например, способом последовательного деления); он равен 70. Значит, наименьшее общее кратное чисел 5040 и 350 равно по правилу § 104:

$$\frac{5040 \cdot 350}{70} = 25200.$$

Это число и будет наименьшим общим кратным трёх данных чисел.

Подобным же образом можно находить и наименьшее общее кратное четырёх, пяти и более чисел.

Правило. **Чтобы найти наименьшее общее кратное трёх или более чисел, сначала находят наименьшее общее кратное каких-нибудь двух из них, потом — наименьшее общее кратное этого наименьшего общего кратного и какого-нибудь третьего данного числа, затем — наименьшее общее кратное этого наименьшего общего кратного и четвёртого данного числа и т. д.**

ОТДЕЛ III.
ИЗМЕРЕНИЕ ВЕЛИЧИН. МЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА МЕР.

106. Введение. До сих пор мы имели дело только с целыми числами. Основой для введения целых чисел исторически были прежде всего потребности счёта, и этим потребностям целые числа вполне удовлетворяют. Но деятельность человека уже в глубокой древности создала потребности, для удовлетворения которых целых чисел оказалось недостаточно. Появилась необходимость введения новых чисел, и арифметика должна была заняться изучением свойств этих чисел и действий над ними.

Одним из основных видов человеческой практики, приведших к необходимости рассмотрения более широких классов чисел, является измерение величин. Поэтому, прежде чем мы перейдём к изучению этих чисел, мы должны остановиться на вопросе о том, что такое измерение величин, и на важнейших понятиях, связанных с этим процессом.

107. Измерение величин. Положим, что мы хотим составить себе точное представление о длине какой-нибудь комнаты, тогда мы измеряем эту длину при помощи другой длины, которая нам хорошо известна, например при помощи метра. Для этого откладываем метр по длине нашей комнаты столько раз, сколько можно. Если он уложится по длине комнаты ровно 10 раз, то длина её равна 10 метрам. Подобно этому, чтобы измерить вес какого-либо предмета, мы берём другой вес, который нам хорошо известен, например грамм, и узнаём (с помощью весов), сколько раз грамм содержится в измеряемом весе. Пусть он содержится ровно 5 раз, тогда вес предмета равен 5 граммам.

Известная нам величина, употребляемая для измерения других, называется *единицей* величин этого рода. Так, метр есть единица длины, грамм — единица веса и т. п.

Для каждого рода величин обыкновенно выбирают несколько единиц, одни более крупные, другие более мелкие. Так, для измерения веса, кроме грамма, употребляют ещё *килограмм, тонну, миллиграмм* и т. п

Измерить какую-нибудь величину — значит найти, сколько раз в ней содержится другая величина того же рода, принятая за единицу.

108. Меры. В каждом государстве правительство установило определённые единицы для главнейших величин. Сделаны образцовые единицы: образцовый метр, образцовый килограмм и т. п., по которым приготовляют единицы для обиходного употребления. Единицы, вошедшие в употребление, называются *мерами*.

Меры называются *однородными*, если они служат для измерения величин одного рода. Так, грамм и килограмм — меры однородные, так как они служат для измерения веса.

Отношением двух однородных мер называется число, показывающее, сколько раз меньшая мера содержится в большей. Так, отношение метра к сантиметру есть число 100.

109. Метрическая система мер. В настоящее время у нас введена метрическая система мер, принятая и во многих других странах.

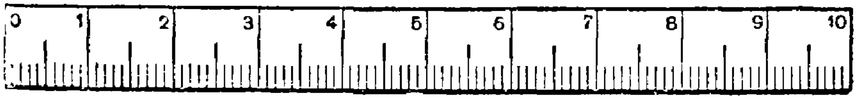
За единицу длины в этой системе принят метр.

Международным прототипом метра Первой генеральной конференцией мер и весов в 1889 г. признана нарезная платино-иридиевая мера, которая хранится в Международном бюро мер и весов в Севре (Франция).

Для СССР за прототип метра принята копия международного платино-иридиевого метра, носящая знак № 28 и хранящаяся во Всесоюзном институте метрологии и стандартизации в Ленинграде.

Метр разделяется на 10 равных частей, десятая часть метра — ещё на 10 равных частей, сотая часть метра в свою очередь на 10 равных частей и т. д. С другой стороны, употребляются меры в 10 метров, в 100 метров и т. д. Чтобы назвать десятичные подразделения метра, присоединяют к слову „метр" латинские слова *„деци"* (для обозначения одной десятой), *„центи"* (одной сотой), *„милли"* (одной тысячной); так, *дециметр* означает одну десятую часть метра, *центиметр* — одну сотую часть метра, *миллиметр* — одну тысячную часть метра.

Впрочем, слово „центиметр" чаще заменяется французским словом „сантиметр".



Черт. 1.

Чертёж 1 изображает 1 дециметр, разделённый на сантиметры и миллиметры (в натуральную величину).

Меры, кратные метру, называются при помощи греческих слов: *дека* (10), *гекто* (100), *кило* (1000); так, *декаметр* означает 10 метров, *гектометр* — 100 метров, *километр* — 1000 метров.

Названия метрических мер принято сокращённо обозначать так:

Названия метрических мер	Русские обозначения	Латинские обозначения
метр	*м*	*m*
дециметр	*дм*	*dm*
сантиметр	*см*	*cm*
миллиметр	*мм*	*mm*
километр	*км*	*km*

Для измерения площадей употребляются квадратные меры: квадратный метр, т. е. площадь квадрата, сторона которого имеет длину 1 *м*, квадратный декаметр и т. п. Каждая из таких мер содержит в себе 100 мер следующего низшего разряда; так, квадратный дециметр содержит 100 квадратных сантиметров.

Для измерения площади полей употребляются *ар* (*а*) и *гектар* (*га*). Ар есть *квадратный декаметр;* гектар равен 100 арам и есть, следовательно, *квадратный гектометр*.

Для измерения объёмов служат кубические меры: кубический метр, т. е. объём куба, ребро которого имеет длину 1 *м*, кубический дециметр и т. д. Каждая из этих мер содержит в себе 1000 мер следующего низшего разряда; так, кубический метр содержит 1000 кубических дециметров.

Единицей веса служит *грамм* (*г*). Грамм приблизительно равен весу одного кубического сантиметра чистой перегнанной воды при температуре 4° Цельсия (или 3°, 2 Реомюра) в безвоздушном пространстве. Грамм подразделяется на дециграммы, сантиграммы и миллиграммы; веса, кратные грамму, называются: декаграмм, гектограмм и килограмм (часто называемый сокращённо *„кило“*; обозначается *кг*).

Употребительны ещё меры: *тонна*, равная 1000 килограммам, и *центнер*, равный 100 килограммам.

Для измерения вместимости сосудов (и объёмов жидких и сыпучих тел) употребляется *литр* (*л*).

Литр есть объём, приблизительно равный одному кубическому дециметру. Точнее, литр есть объём одного килограмма воды при наибольшей её плотности и при нормальном атмосферном давлении. Употребляется также *гектолитр*, равный 100 *л*.

Употребительны ещё децилитр, центилитр, декалитр и килолитр.

110. Удобства метрической системы. Метрическая система мер обладает следующими тремя важными удобствами: 1) меры различных величин находятся в простой зависимости от основной меры — *метра;* 2) отношение мер соседних разрядов одно и то же для всех разрядов и всех величин (кроме, конечно, поверхностей и объёмов); 3) это отношение равно основанию нашей системы счисления, вследствие чего действия над именованными числами значительно упрощаются.

111. Меры времени. Есть две основные *меры времени:* сутки и год. *Сутки* представляют (приблизительно) то время, в течение которого Земля совершает полный оборот около своей оси; они разделяются на 24 часа, считаемые либо от 1 до 24, либо от 1 до 12 и затем опять от 1 до 12. За начало суток принимают полночь. В настоящее время в практике путей сообщения, почт, телеграфов и радиовещания принято считать часы от 0 до 24 (чтобы избежать излишнего добавления слов: „после полудня", „после полуночи").

Так, вместо „2 часа дня" говорят „14 часов", вместо „7 часов вечера" говорят „19 часов". Сутки подразделяются так:

$$
\begin{aligned}
\text{сутки} &= 24 \text{ часам,}\\
\text{час} &= 60 \text{ минутам,}\\
\text{минута} &= 60 \text{ секундам.}
\end{aligned}
$$

Год представляет собой (приблизительно) то время, в течение которого Земля совершает полный оборот вокруг Солнца. Принято считать каждые 3 последовательных года по 365 дней, а следующий за ними четвёртый — в 366 дней. Год, содержащий в себе 366 дней, называется *високосным*, а годы, содержащие по 365 дней, — *простыми.* К четвёртому году добавляют один лишний день по следующей причине. Время обращения Земли вокруг Солнца содержит в себе не ровно 365 суток, а 365 суток и 6 часов (приблизительно). Таким образом, простой год короче истинного года на 6 часов, а 4 простых года короче 4 истинных годов на 24 часа, т. е. на одни сутки. Поэтому к каждому четвёртому году добавляют одни сутки (29 февраля). При этом за високосные принимают годы, числа которых делятся на 4 без остатка (например, 1936, 1940 и т. д.).

Год разделяется на 12 неравных частей, называемых *месяцами*. Вот название месяцев по порядку: *январь* (31 день), *февраль* (28 или 29), *март* (31), *апрель* (30), *май* (31), *июнь* (30), *июль* (31), *август* (31), *сентябрь* (30), *октябрь* (31), *ноябрь* (30), *декабрь* (31).

Летосчисление, по которому 3 года считаются в 365 дней, а четвёртый в 366, было установлено римским диктатором Юлием Цезарем (в 46 г. до нашей эры) и потому называется *юлианским*, или *старым стилем*. Оно было до революции принято в России, но после Великой Октябрьской социалистической революции заменено международным *новым стилем*, или *грегорианским* летосчислением (названным так по имени римского папы Григория XIII, введшего это счисление в 1582 г.). По этому счислению счёт времени в XX в. идёт на 13 дней впереди старого стиля; так, когда по старому стилю, положим, 10 декабря, то по новому стилю считают 23 декабря. Таким образом, чтобы от нового стиля перейти к старому, надо от даты нового стиля отсчитать 13 дней. Например, если у нас было 5 марта 1936 г., то по старому стилю это означало 21 февраля того же года, так как, отсчитав 5 мартовских дней, мы остальные 8 дней должны отсчитать от февраля, а этот месяц в 1936 г. имел 29 дней.

112. Основы грегорианского летосчисления. Время, протекающее от одного весеннего равноденствия до следующего весеннего равноденствия, называется *солнечным*, или *тропическим годом;* время, считаемое за год по гражданскому летосчислению, называется *гражданским годом*. Так как перемены времён года зависят от положения Земли относительно Солнца, то солнечный год представляет такой промежуток времени, в течение которого вполне завершаются перемены времени года. Поэтому желательно, чтобы год гражданский по возможности совпадал с годом солнечным; только при этом условии времена года в разные эпохи будут приходиться в одни и те же месяцы. Летосчисление, введённое Юлием Цезарем, не достигало этого вполне. По этому счислению гражданский год считается в 365 дней и 6 часов, тогда как солнечный год содержит (приблизительно) 365 дней 5 часов 48 минут 48 секунд, так что год юлианского счисления длиннее солнечного (приблизительно) на 11 минут 12 секунд, что в 400 лет составляет около трёх дней. Юлианское летосчисление исправлено было впервые папой Григорием XIII в 1582 г. К этому году разница между гражданским счислением времени и солнечным составляла 10 суток, так что считали, например, 1 сентября, когда следовало бы по солнечному времени считать 11 сентября. Чтобы уравнять гражданское время с солнечным, Григорий предложил вместо 5 октября в 1582 г. считать 15 октября. Но так как подобное запаздывание должно было повториться и впоследствии, то было установлено, чтобы на будущее время каждые 400 лет гражданского счисления были сокращены на трое суток. Это сокращение должно было производиться таким образом. По юлианскому счислению те годы, номера которых представляют полные сотни, считаются високосными, например годы 1600, 1700 и т. п. должны считаться по юлианскому счислению в 366 дней. Но Григорий предложил, чтобы такие годы считались простыми, кроме тех, у которых число сотен делится на 4. Вследствие этого по грегорианскому летосчислению 1600 г. должен был считаться високосным (16 делится на 4), а 1700, 1800, 1900 гг. — простыми, тогда как по юлианскому счислению все эти 4 года считались високосными. Таким образом, каждые 400 лет сокращаются на трое суток. Счисление, установленное Григорием XIII, известно под именем *грегорианского.* Оно в настоящее время принято почти по всей Европе. Грегорианское счисление называется иначе *новым стилем*, а юлианское — *старым стилем.* Так как в 1582 г. новый стиль подвинулся вперёд от старого стиля на 10 дней, а после того ещё на 3 дня (в 1700, 1800, 1900 гг.), то в настоящее время старый стиль отстаёт от нового на 13 дней.

113. Именованные числа. Целое число вместе с указанием наименования тех единиц, из которых оно составлено, называется именованным числом. Так, 5 карандашей, 3 метра, 37 граммов — *именованные числа.* Если же при числе не указано наименований тех единиц, из которых оно составлено, то такое число называется *отвлечённым.* 5, 3, 37 — отвлечённые числа.

Словам „именованное число" иногда придаётся более общее значение. Пусть при измерении веса некоторого тела мы нашли, что этот вес составляет 3 *кг* и сверх того ещё 350 *г*; тогда вес этого тела, записанный в виде

3 *кг* 350 *г*,

также называют именованным числом (хотя здесь на самом деле имеются два различных числа и две различные меры). Подобным же образом 12 *м* 47 *см* называется именованным числом.

Именованное число называется *простым*, если в него входят единицы только одного наименования, например 3 *кг*.

Именованное число называется *составным*, если в него входят единицы различных наименований, например 3 *кг* 350 *г*.

Если два именованных числа выражают одну и ту же величину, то они считаются *равными.* Например, составное именованное число 2 *км* 25 *м* равно простому именованному числу 2025 *м*, так как оба эти числа выражают одну и ту же длину.

Преобразование именованного числа в единицы одного какого-нибудь низшего разряда называется *раздроблением*, а обратное преобразование именованного числа в единицы высших разрядов называется *превращением*. Так, преобразование числа 2 *км* 25 *м* в 2025 *м* будет раздроблением, а обратное преобразование числа 2025 *м* в 2 *км* 25 *м* будет превращением.

114. Почему для измерения величин нужны новые числа. Когда мы хотим сосчитать, сколько столов в классе или сколько деревьев в саду, то всегда найдётся целое число, отвечающее на наш вопрос. Поэтому для счёта предметов никаких других чисел, кроме целых, не требуется.

Но когда мы хотим измерить, например, длину комнаты, то мы хотим узнать, сколько раз выбранная единица длины, например метр, содержится в этой длине. При этом может случиться, что мы отложим метр 5 раз и заметим, что осталась ещё неизмеренная часть длины, но что наш метр в этой части не укладывается — она меньше метра. Это значит, что измеряемая длина содержит единицу измерения (метр) больше 5 раз, но меньше 6 раз. Значит, никакое целое число не может служить ответом на вопрос о том, сколько метров содержит измеряемая длина (потому что нет целого числа, которое больше 5, но меньше 6). Если мы хотим всё же получить на наш вопрос ответ в виде некоторого числа, то мы должны расширить область изучаемых нами чисел, т. е. ввести, кроме целых чисел, ещё другие, новые числа. К изучению этих чисел мы теперь и переходим.

ОТДЕЛ IV.
ОБЫКНОВЕННЫЕ (простые) ДРОБИ.

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.

115. Доли единицы. Мы уже встречались с такими единицами измерения, которые могут быть разделены на равные части. Так, 1 *м* может быть разделён на 100 *см*; одни сутки могут быть разделены на 24 часа.

Мы называем сантиметр *сотой* частью метра; точно так же мы называем час *двадцать четвёртой* частью суток. Миллиметр составляет *тысячную* часть метра. Сутки составляют *триста шестьдесят пятую* часть простого (т. е. не високосного) года. Во всех этих случаях вместо „часть" говорят иногда „доля". Так, грамм есть *тысячная* доля килограмма, минута есть *шестидесятая* доля часа.

Вторая доля короче называется *половиной*, третья доля — *третью*, четвёртая доля — *четвертью*.

116. Дробное число. *Одна доля или собрание нескольких одинаковых долей единицы называется дробью.*

Например: 1 десятая, 3 пятых, 12 седьмых — дроби.

Целое число вместе с дробью составляет *смешанное число*; например, 3 целых 7 восьмых (т. е. целые единицы, к которым добавлено ещё 7 восьмых долей единицы).

Дроби и смешанные числа называются *дробными числами*, в отличие от *целых чисел*, составленных из целых единиц.

117. Изображение дроби. Принято изображать дробь так: пишут число, показывающее, сколько долей содержится в дроби; под ним проводят черту; под чертой ставят другое число, показывающее, на сколько равных частей разделена единица, от которой взята дробь. Например, 3 пятых изображают так: $\frac{3}{5}$.

Число, стоящее над чертой, называется *числителем* дроби; оно показывает число долей, из которых составлена дробь.

Число, стоящее под чертой, называется *знаменателем* дроби; оно показывает, на сколько равных частей была разделена единица. Оба эти числа вместе называются *членами дроби*.

Смешанное число изображают так: пишут целое число и к нему с правой стороны приписывают дробь; например, число 3 и две седьмых изображается так: $3\frac{2}{7}$.

118. Получение дробных чисел при измерении. Положим, мы желаем измерить какую-нибудь длину с помощью метра. Допустим, что метр в этой длине укладывается 7 раз, причём получается остаток, меньший метра. Чтобы измерить этот остаток, подыскиваем такую долю метра, которая, если возможно, уложилась бы в остатке без нового остатка. Пусть окажется, что десятая доля метра укладывается в остатке ровно 3 раза. Тогда говорим, что измеряемая длина равна $7\frac{3}{10}$ метра.

Подобно этому дробные числа могут получаться при измерении веса $\left(\text{например, } 2\frac{1}{4} \text{ грамма}\right)$, при измерении времени $\left(\text{например, } \frac{7}{10} \text{ часа}\right)$ и т. п.

Таким образом, дробное число может получиться как *результат измерения.*

119. Получение дробных чисел при делении целого числа на равные части. Пусть требуется разделить 5 *кг* хлеба на 8 равных частей. Мы можем выполнить это деление так: вообразим, что каждый килограмм хлеба разделён на 8 равных частей (на восьмые доли); тогда в 5 *кг* хлеба таких долей окажется $8 \cdot 5$, т. е. 40, а в одной восьмой части 5 *кг* хлеба их должно быть $40:8$, т. е. 5. Значит, восьмая часть 5 *кг* равна $\frac{5}{8}$ одного килограмма $\left(\text{и вообще восьмая часть 5 каких-нибудь единиц равна } \frac{5}{8} \text{ одной такой единицы}\right)$.

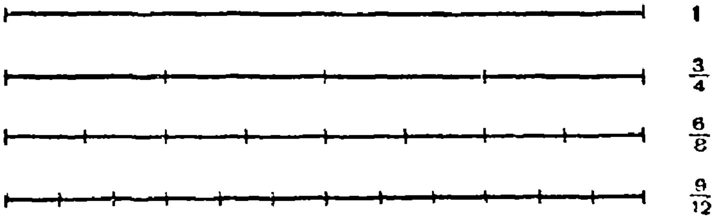
Возьмём ещё другой пример: требуется уменьшить в 5 раз число 28, т. е. вместо 28 требуется взять одну пятую часть этого числа. 28 есть сумма чисел 25 и 3. Пятая часть числа 25 равна 5. Чтобы найти пятую часть от 3, разделим каждую единицу на 5 равных частей; взяв от каждой единицы по $\frac{1}{5}$, найдём, что пятая часть трёх единиц будет $\frac{3}{5}$. Значит, пятая часть числа 28 равна $5\frac{3}{5}$.

Но можно найти пятую часть числа 28 ещё и так: пятая часть одной единицы есть $\frac{1}{5}$; пятая часть другой единицы есть также $\frac{1}{5}$; если, таким образом, возьмём по пятой части от каждой из 28 единиц, то получим $\frac{28}{5}$. Таким образом: **чтобы разделить целое число на несколько равных частей, достаточно взять это целое число числителем дроби, а знаменателем написать другое число, показывающее, на сколько равных частей делится целое число.**

Примеры. Одна двенадцатая часть числа 7 есть $\frac{7}{12}$; четверть числа 15 есть $\frac{15}{4}$; дробь $\frac{8}{13}$ есть тринадцатая часть числа 8; дробь $\frac{29}{6}$ есть *одна шестая* часть числа 29.

Следствие. Всякую дробь можно рассматривать не только как собрание нескольких одинаковых долей единицы, но и как *одну долю нескольких целых единиц.* Так, дробь $\frac{5}{8}$ есть не только 5 восьмых долей одной единицы, но и одна восьмая доля 5 единиц.

120. Равенство и неравенство дробных чисел. Два дробных числа считаются равными, если величины, выражаемые этими числами *при одной и той же единице измерения,* равны между собой.



Черт. 2

Возьмём какую-нибудь дробь, например $\frac{3}{4}$ (пусть это будет $\frac{3}{4}$ той длины, которая изображена на чертеже 2). Разделим каждую четверть пополам. Мы получим тогда более мелкие доли; в одной четверти таких долей 2; значит, в единице их содержится $2 \cdot 4 = 8$; следовательно, это — восьмые доли; в трёх четвертях этих восьмых долей содержится $2 \cdot 3 = 6$;

значит, дробь $\frac{3}{4}$ равна дроби $\frac{6}{8}$; этим мы хотим сказать, что две длины, из которых одна составляет $\frac{3}{4}$ метра, а другая $\frac{6}{8}$ метра, равны между собой; или что два веса, из которых один равен $\frac{3}{4}$ килограмма, а другой $\frac{6}{8}$ килограмма, равны между собой и т. д.

Из двух неравных дробных чисел бо́льшим считается то, которое выражает бо́льшую величину *при одной и той же единице измерения*. Так, если мы говорим, что $\frac{1}{5} > \frac{1}{8}$, мы желаем этим выразить, что, например, $\frac{1}{5}$ грамма больше, чем $\frac{1}{8}$ грамма, $\frac{1}{5}$ часа больше, чем $\frac{1}{8}$ часа, и т. п.

Если же у двух дробей числители одинаковы, то больше будет та из них, у которой *меньше знаменатель*, потому что она содержит одинаковое число более крупных долей единицы, чем другая. Так, $\frac{2}{3}$ больше, чем $\frac{2}{5}$.

121. Дробь правильная и неправильная. Дробь, у которой числитель меньше знаменателя, называется *правильной*; дробь же, у которой числитель больше знаменателя или же равен ему, называется *неправильной*. Очевидно, правильная дробь меньше единицы, а неправильная больше неё или равна ей; например:

$$\frac{7}{8} < 1; \quad \frac{8}{8} = 1; \quad \frac{9}{8} > 1.$$

122. Обращение целого числа в неправильную дробь. Всякое целое число можно выразить в каких угодно долях единицы. Пусть, например, требуется выразить 8 в двадцатых долях. В одной единице заключается 20 двадцатых; следовательно, в 8 единицах их будет $20 \cdot 8$, т. е. 160. Значит,

$$8 = \frac{20 \cdot 8}{20} = \frac{160}{20}.$$

Подобным образом число 25 в четвёртых долях выразится $\frac{100}{4}$, число 100 в семнадцатых долях выразится $\frac{1700}{17}$ и т. п.

Правило. **Чтобы выразить целое число в виде неправильной дроби с данным знаменателем, надо этот знаменатель умножить на целое число и полученное произведение взять числителем, а знаменатель написать данный.**

Замечание. Целое число иногда бывает полезно изобразить в виде такой дроби, у которой числитель равен этому целому числу, а знаменатель есть единица. Так, вместо 5 пишут иногда $\frac{5}{1}$ (пять первых). Чтобы придать смысл таким выражениям, условливаются, что „первая“ часть числа есть само число.

123. Обращение смешанного числа в неправильную дробь. Пусть требуется обратить смешанное число $8\frac{3}{5}$ в неправильную дробь. Это значит нужно узнать, сколько пятых долей заключается в восьми целых единицах вместе с тремя пятыми долями той же единицы. В одной единице содержится 5 пятых долей; следовательно, в восьми единицах их будет $5 \cdot 8$, т. е. 40; значит, в восьми единицах вместе с тремя пятыми таких долей окажется $40+3$, т. е. 43.

Итак, $8\frac{3}{5}=\frac{43}{5}$. Подобно этому:

$$3\frac{7}{8}=\frac{8 \cdot 3+7}{8}=\frac{31}{8};$$

$$10\frac{1}{4}=\frac{4 \cdot 10+1}{4}=\frac{41}{4}.$$

Правило. **Чтобы смешанное число обратить в неправильную дробь, надо знаменатель дроби умножить на целое число, к полученному произведению прибавить числитель и эту сумму взять числителем искомой дроби, а знаменатель оставить прежний.**

124. Обращение неправильной дроби в смешанное число. Пусть требуется неправильную дробь $\frac{100}{8}$ обратить в смешанное число, т. е. узнать, сколько в этой неправильной дроби заключается целых единиц и сколько ещё восьмых долей, не составляющих единицы. Так как единица заключает в себе 8 восьмых, то в 100 восьмых содержится столько единиц, сколько раз 8 восьмых содержится в 100 восьмых. 8 восьмых в 100 восьмых содержатся 12 раз, причём 4 восьмых остаются. Значит, 100 восьмых содержат 12 целых единиц и ещё 4 восьмые доли. Итак:

$$\frac{100}{8}=12\frac{4}{8}.$$

Подобно этому:

$$\frac{59}{8}=7\frac{3}{8}; \quad \frac{314}{25}=12\frac{14}{25}; \quad \frac{85}{17}=5; \quad \frac{25}{25}=1.$$

Правило. **Чтобы неправильную дробь обратить в смешанное или целое число, делят числитель на знаменатель; целое частное от этого деления покажет, сколько целых единиц, а остаток — сколько ещё долей единицы в смешанном числе.**

Обращение неправильной дроби в смешанное число иногда называют также *исключением целого числа* из этой дроби.

II. ИЗМЕНЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ДРОБИ С ИЗМЕНЕНИЕМ ЕЁ ЧЛЕНОВ.

125. Увеличение или уменьшение обоих членов дроби в одинаковое число раз. Обратимся снова к чертежу 2 (стр. 85); в § 120 мы делили каждую четверть на 2 равные части; мы получили, таким образом, восьмые доли; в трёх четвертях содержится 6 восьмых, и потому, как мы видели, дробь $\frac{3}{4}$ равна дроби $\frac{6}{8}$.

Если каждую четверть разделим вместо двух на 3 равные части, то получим ещё более мелкие доли, которых в целой единице будет $3 \cdot 4$, т. е. 12 (значит, это будут двенадцатые доли), а в трёх четвертях их окажется $3 \cdot 3$, т. е. 9; тогда вместо $\frac{3}{4}$ получим дробь $\frac{9}{12}$, равную по величине дроби $\frac{3}{4}$. Подразделяя, таким образом, каждую четверть на 2, на 3, на 4, на 5 и т. д. равных частей, мы получим ряд таких равных дробей:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\frac{15}{20}=\frac{18}{24}=\ldots.$$

Каждая из этих дробей, начиная со второй, получается из первой дроби $\frac{3}{4}$ умножением её числителя и знаменателя на одно и то же число: на 2, на 3, на 4 и т. д.; значит, **величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель её умножить на одно и то же число** (или, что то же, увеличить в одинаковое число раз).

В общем виде это свойство дроби можно выразить так:

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$$

Отсюда следует, что **величина дроби не изменится и тогда, если числитель и знаменатель её разделить на одно и то же число** (или, что то же, уменьшить в одинаковое число раз). Например, заметив, что в дроби $\frac{30}{50}$ оба члена делятся на 10, мы можем эту дробь заменить дробью $\frac{3}{5}$, которая получится, если числитель и знаменатель дроби $\frac{30}{50}$ уменьшить в 10 раз.

126. Увеличение или уменьшение одного члена дроби в несколько раз. **Если числитель дроби увеличить (или уменьшить) в несколько раз, то дробь увеличится (или уменьшится) во столько же раз.** Например, увеличив числитель дроби $\frac{4}{10}$ в 3 раза, получим $\frac{12}{10}$. Эта дробь больше прежней в 3 раза, потому что в ней в 3 раза более долей, а доли остались те же.

Если знаменатель дроби увеличить (или уменьшить) в несколько раз, то дробь уменьшится (или увеличится) во столько же раз. Например, увеличив знаменатель дроби $\frac{4}{10}$ в 5 раз, получим $\frac{4}{50}$. Эта дробь меньше прежней в 5 раз, потому что (согласно § 125) $\frac{4}{10}=\frac{4\cdot5}{10\cdot5}=\frac{20}{50}$, а $\frac{20}{50}$ в 5 раз больше, чем $\frac{4}{50}$.

127. Увеличение или уменьшение дроби в несколько раз. Зная, как изменяется дробь с изменением её числителя и знаменателя, мы можем вывести следующие *правила:*

1) **чтобы увеличить дробь в несколько раз, достаточно увеличить во столько же раз её числитель или уменьшить во столько же раз её знаменатель;**

2) **чтобы уменьшить дробь в несколько раз, достаточно уменьшить во столько же раз её числитель или увеличить во столько же раз её знаменатель.**

Примеры.

Увеличить $\frac{7}{12}$ в 5 раз; получим $\frac{35}{12}$.

Увеличить $\frac{7}{12}$ в 6 раз; получим $\frac{42}{12}$, или $\frac{7}{2}$.

Уменьшить $\frac{8}{9}$ в 7 раз; получим $\frac{8}{63}$.

Уменьшить $\frac{8}{9}$ в 4 раза; получим $\frac{8}{36}$, или $\frac{2}{9}$.

Конечно, уменьшение числителя в несколько раз (при уменьшении дроби) или уменьшение знаменателя в несколько раз (при увеличении дроби) возможно не во всех случаях (как это видно из приведённых примеров), а только тогда, когда числитель или знаменатель делятся на то число, которое показывает, во сколько раз надо уменьшить или увеличить дробь.

128. Увеличение или уменьшение обоих членов дроби на одно и то же число. Положим, что к обоим членам дроби $\frac{a}{b}$ мы прибавили одно и то же число m; тогда получим новую дробь $\frac{a+m}{b+m}$. Сравним новую дробь с прежней. Для этого умножим оба члена прежней дроби на $b+m$, а оба члена новой на b.

$$\frac{a}{b}=\frac{a(b+m)}{b(b+m)};\quad \frac{a+m}{b+m}=\frac{(a+m)b}{(b+m)b}.$$

Теперь сравним между собой числители этих двух дробей, так как знаменатели их одинаковы:

$$a(b+m)=ab+am \text{ и } (a+m)b=ab+bm.$$

Отняв от полученных сумм по ab, найдём am в первом случае и bm во втором. Если взятая дробь меньше единицы, т. е. если $a<b$, то тогда $am<bm$; значит, правильная дробь от нашей операции увеличилась. Если же данная дробь больше единицы, т. е. если $a>b$, то тогда $am>bm$; значит, такая дробь от нашей операции уменьшилась. Таким образом:

от прибавления к членам дроби одного и того же числа дробь, меньшая единицы, увеличивается, а дробь, бо́льшая единицы, уменьшается.

Например, если взять дробь $\frac{1}{2}$ и к её числителю и знаменателю прибавить по единице, то получим дробь $\frac{1+1}{2+1}=\frac{2}{3}$, которая больше $\frac{1}{2}$; если же взять дробь $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$ и с ней проделать то же, получится дробь $\frac{3+1}{2+1}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$, которая меньше $\frac{3}{2}$.

III. СОКРАЩЕНИЕ ДРОБИ.

129. Что называется „сокращением" дроби. *Сокращением дроби называется замена её другой, равной ей дробью с меньшими членами, путём деления числителя и знаменателя на одно и то же число.*

Конечно, сократить можно только такую дробь, у которой члены имеют какой-нибудь общий делитель, кроме единицы, например, дробь $\frac{8}{12}$ можно сократить, а дробь $\frac{9}{20}$ нельзя, так как у первой дроби числитель и знаменатель имеют общий делитель помимо единицы, именно 4 $\left(\text{по сокращении получается дробь } \frac{2}{3}\right)$, а числитель и знаменатель второй дроби не имеют никакого общего делителя, кроме единицы.

Дробь, которая не может быть сокращена, называется *несократимой*.

130. Два способа сокращения. Первой способ (п о с л е д о в а т е л ь н о е   с о к р а щ е н и е) состоит в том, что, руководствуясь признаками делимости, определяют, не делятся ли числитель и знаменатель данной дроби на какой-нибудь общий делитель (кроме единицы); если такой делитель существует, то на него дробь сокращают; полученную после сокращения дробь, если можно, сокращают таким же путём снова и такое последовательное сокращение продолжают до тех пор, пока не получится дробь несократимая.

Например:

$$\frac{\overset{10}{840}}{3600}=\frac{\overset{4}{84}}{360}=\frac{\overset{3}{21}}{90}=\frac{7}{30}.$$

Для памяти вначале полезно надписывать над дробью то число, на которое сокращают. Потом, при некотором навыке, эту запись обычно опускают.

Второй способ (п о л н о е   с о к р а щ е н и е) состоит в том, что отыскивают наибольший общий делитель членов дроби и, если он окажется не единицей, делят на него эти члены. Например, пусть требуется сократить дробь $\frac{391}{527}$. Для этого находим наибольший общий делитель чисел 391 и 527 (он равен 17) и на него сокращаем:

$$\frac{391}{527}=\frac{391:17}{527:17}=\frac{23}{31}.$$

В этом случае после сокращения получается дробь несократимая. Действительно, наибольший общий делитель членов дроби должен содержать в себе все общие простые множители, входящие в состав этих членов; поэтому, когда на него разделим числитель и знаменатель, то полученные частные уже не могут содержать в себе никаких общих множителей (кроме единицы) и, следовательно, не будут иметь никаких общих делителей.

131. О несократимых дробях. ***Теорема.*** *Если данная дробь равна некоторой несократимой дроби, то члены данной дроби получаются из соответственных членов этой несократимой дроби умножением на одно и то же целое число.*

Положим, что

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1},$$

причём допустим, что первая дробь несократима, т. е. что члены её a и b не имеют общих делителей, кроме единицы. Требуется доказать, что a_1 кратно a и b_1 кратно b и притом в одинаковое число раз. Для доказательства умножим оба члена второй дроби на b, а первой — на b_1; так как величины дробей от этого не изменятся, то получим равенство:

$$\frac{ab_1}{bb_1}=\frac{a_1b}{b_1b},$$

откуда находим:

$$ab_1=a_1b.$$

Произведение ab_1 делится на a; значит, и произведение a_1b тоже делится на a, но b, по условию, есть число, взаимно простое с a; значит, надо, чтобы a_1 делилось на a (§ 88). Обозначив частное от деления a_1 на a буквой m, можем положить: $a_1=am$, после чего последнее равенство даёт:

$$ab_1=amb.$$

Разделив обе части этого равенства на a, получим:

$$b_1=mb.$$

Итак, оказывается, что $a_1=am$ и $b_1=bm$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Две несократимые дроби равны только тогда, когда у них равны числители и равны знаменатели.*

Следствие 2. *Всякая дробь равна одной и только одной несократимой дроби.* В самом деле, второй способ сокращения (§ 130) показывает, что всякая дробь равна некоторой несократимой дроби; если бы она равнялась двум таким дробям, то эти две несократимые дроби были бы равны друг другу, что невозможно в силу следствия 1. Значит, данная дробь действительно равна только одной несократимой дроби.

IV. ПРИВЕДЕНИЕ ДРОБЕЙ К НАИМЕНЬШЕМУ ОБЩЕМУ ЗНАМЕНАТЕЛЮ.

132. Объяснение. Возьмём для примера две дроби $\frac{5}{12}$ и $\frac{7}{15}$ и зададимся вопросом, нельзя ли эти дроби выразить в одинаковых долях единицы. Дробь $\frac{5}{12}$ несократима; поэтому знаменатели дробей, которым может равняться дробь $\frac{5}{12}$, должны быть числами, кратными 12. Другими словами, кроме двенадцатых долей, её можно выразить в долях двадцать четвёртых, тридцать шестых, сорок восьмых и т. д. Подобно этому знаменатели дробей, которым может равняться несократимая дробь $\frac{7}{15}$, должны быть числами, кратными 15; следовательно, общий знаменатель этих двух дробей должен быть общим кратным числам 12 и 15, а наименьший общий знаменатель должен быть наименьшим общим кратным чисел 12 и 15. Найдём наименьшее общее кратное этих чисел:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$15 = 3 \cdot 5$$
$$\text{НОК} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

Это и будет наименьший общий знаменатель дробей $\frac{5}{12}$ и $\frac{7}{15}$. Чтобы выразить каждую из этих дробей в шестидесятых долях, найдём для их знаменателей так называемые *дополнительные множители*, т. е. для каждого знаменателя найдём *то число, на которое его надо умножить, чтобы получить наименьший общий знаменатель*. Так как $60 = 12 \cdot 5 = 15 \cdot 4$, то для получения 60 надо умножить 12 на 5, а 15 на 4. Чтобы не изменилась величина дробей, надо умножить числитель каждой дроби на то же число, на которое умножаем её знаменатель; поэтому:

$$\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{25}{60}; \quad \frac{7}{15} = \frac{7 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{28}{60}.$$

Пусть ещё требуется привести к наименьшему общему знаменателю три дроби: $\frac{4}{90}$, $\frac{7}{20}$ и $\frac{8}{75}$. Первая из них — сократимая дробь, после сокращения она даёт $\frac{2}{45}$; остальные дроби несократимые. Отыщем наименьшее общее кратное всех знаменателей: 45, 20 и 75.

$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$	дополнительный множитель для 45 равен 20
$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$	„ „ „ 20 „ 45
$75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$	„ „ „ 75 „ 12

$$\text{НОК} = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 900.$$

Теперь умножим оба члена каждой дроби на дополнительный множитель для её знаменателя:

$$\frac{2}{45}=\frac{2\cdot20}{45\cdot20}=\frac{40}{900};\ \frac{7}{20}=\frac{7\cdot45}{20\cdot45}=\frac{315}{900};\ \frac{8}{75}=\frac{8\cdot12}{75\cdot12}=\frac{96}{900}.$$

Правило. **Чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, предварительно, если можно, их сокращают, затем находят наименьшее общее кратное всех знаменателей и для каждого знаменателя определяют соответствующий дополнительный множитель; наконец, умножают оба члена каждой дроби на дополнительный множитель для её знаменателя.**

133. Некоторые особые случаи. Случай 1-й, *когда никакая пара знаменателей не содержит общих множителей.*

Например:

$$\frac{3}{7},\ \frac{4}{15},\ \frac{5}{8}.$$

Так как в этом случае наименьшее общее кратное знаменателей равно их произведению, то оба члена каждой дроби надо умножить на произведение знаменателей остальных дробей:

$$\frac{3}{7}=\frac{3\cdot15\cdot8}{7\cdot15\cdot8}=\frac{360}{840};$$

$$\frac{4}{15}=\frac{4\cdot7\cdot8}{15\cdot7\cdot8}=\frac{224}{840};$$

$$\frac{5}{8}=\frac{5\cdot7\cdot15}{8\cdot7\cdot15}=\frac{525}{840}.$$

В частности, так поступают, когда знаменатели — числа простые, различные между собой.

Случай 2-й, *когда наибольший из знаменателей делится на каждый из остальных,* например:

$$\frac{3}{7},\ \frac{7}{15},\ \frac{8}{315}.$$

Знаменатель 315 делится на 7 и на 15. В этом случае наибольший знаменатель есть наименьшее общее кратное всех знаменателей; значит, он должен быть наименьшим общим знаменателем:

дополнительный множитель для 7 равен 45:

$$\frac{3}{7}=\frac{3\cdot45}{7\cdot45}=\frac{135}{315};$$

дополнительный множитель для 15 равен 21:

$$\frac{7}{15}=\frac{7\cdot 21}{15\cdot 21}=\frac{147}{315};\quad \frac{8}{315}=\frac{8}{315}.$$

V. ДЕЙСТВИЯ НАД ДРОБНЫМИ ЧИСЛАМИ.

Сложение дробных чисел.

134. Определение и вывод правила. Сложение дробных чисел можно определить так же, как и сложение целых чисел (§ 19), а именно:

сложение есть действие, состоящее в том, что несколько данных чисел (слагаемых) *соединяются в одно число* (сумму), *содержащее в себе все единицы слагаемых и все их доли.*

1) Пусть требуется найти сумму нескольких дробей с *одинаковыми* знаменателями, например таких:

$$\frac{7}{11}+\frac{3}{11}+\frac{5}{11}.$$

Очевидно, что 7 одиннадцатых, да 3 одиннадцатых, да 5 одиннадцатых какой-нибудь единицы составляют $7+3+5$ одиннадцатых той же единицы, т. е.:

$$\frac{7}{11}+\frac{3}{11}+\frac{5}{11}=\frac{7+3+5}{11}=\frac{15}{11}=1\frac{4}{11}.$$

2) Пусть требуется сложить дроби с *разными* знаменателями, например такие:

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{10}+\frac{9}{16}.$$

Тогда, приведя все эти дроби к наименьшему общему знаменателю, сделаем сложение, как в первом случае:

$$\frac{\overset{20}{\smile}\!\!\!\!3}{4}+\frac{\overset{8}{\smile}\!\!\!\!7}{10}+\frac{\overset{5}{\smile}\!\!\!\!9}{16}=\frac{60+56+45}{80}=\frac{161}{80}=2\frac{1}{80}.$$

Число, поставленное для памяти над каждой данной дробью, есть тот дополнительный множитель, на который надо умножить члены дроби, чтобы привести её к общему знаменателю.

Правило. **Чтобы сложить дроби, надо их предварительно привести к общему наименьшему знаменателю, затем сложить числители и под суммой их подписать общий знаменатель.**

3) Пусть, наконец, требуется сложить *смешанные числа*:

$$4\frac{2}{15}+8\frac{9}{10}+3\frac{5}{6}.$$

Сначала сложим дроби:

$$\frac{\overset{2}{\widetilde{2}}}{15}+\frac{\overset{3}{\widetilde{9}}}{10}+\frac{\overset{5}{\widetilde{5}}}{6}=\frac{4+27+25}{30}=\frac{56}{30}=1\frac{26}{30}=1\frac{13}{15}.$$

Затем сложим целые числа и к сумме их добавим единицу, получившуюся от сложения дробей:

$$4+8+3+1=16.$$

Значит, полная сумма равна $16\frac{13}{15}$.

Замечание. Относительно сложения дробного числа с нулём держатся того же условия, какое было указано в сложении целых чисел, а именно: ***прибавить нуль к какому-нибудь числу или прибавить к нулю какое-нибудь число — значит оставить это число без изменения.***

135. Свойства суммы. Сумма дробных чисел обладает теми же свойствами, что и сумма целых чисел (§ 20), а именно:

1) сумма не изменится от перемены порядка слагаемых и

2) сумма не изменится, если какую-либо группу слагаемых мы заменим их суммой.

Изменение суммы при изменении слагаемых также остаётся для дробных чисел таким же (§ 27), как и для целых, т. е.

если какое-либо слагаемое увеличится или уменьшится на какое-нибудь число, то и сумма увеличится или уменьшится на то же самое число.

Вычитание дробных чисел.

136. Определение и вывод правила. *Вычитание есть действие, состоящее в том, что от большего данного числа* (уменьшаемого) *отнимается часть, равная меньшему данному числу* (вычитаемому).

Можно также сказать, что вычитание есть действие (обратное сложению), с помощью которого по данной сумме двух слагаемых и одному из этих слагаемых отыскивается другое слагаемое.

1) Пусть даны для вычитания дроби с *одинаковыми* знаменателями, например такие:

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}.$$

Если от семи восьмых отделим часть, равную трём восьмым, то останется, очевидно, 7—3 восьмых:

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

2) Пусть данные дроби имеют *разные* знаменатели; например:

$$\frac{11}{15}-\frac{3}{8}.$$

Тогда, приведя эти дроби к одному знаменателю, сделаем вычитание, как было объяснено раньше:

$$\frac{\overset{8}{\overbrace{11}}}{15}-\frac{\overset{15}{\overbrace{3}}}{8}=\frac{88-45}{120}=\frac{43}{120}.$$

Правило. **Чтобы вычесть дробь из дроби, надо предварительно привести их к наименьшему общему знаменателю, затем из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого и под их разностью подписать общий знаменатель.**

3) Если нужно вычесть смешанное число из другого смешанного числа, то, если можно, вычитают дробь из дроби, а целое из целого. Например:

$$8\frac{\overset{4}{\overbrace{9}}}{11}-5\frac{\overset{11}{\overbrace{3}}}{4}=8\frac{36}{44}-5\frac{33}{44}=3\frac{3}{44}.$$

Если же дробь вычитаемого больше дроби уменьшаемого, то берут одну единицу из целого числа уменьшаемого, раздробляют её в надлежащие доли и прибавляют к дроби уменьшаемого, после чего поступают, как описано выше.

Например:

$$10\frac{\overset{6}{\overbrace{3}}}{11}-5\frac{\overset{11}{\overbrace{5}}}{6}=10\frac{18}{66}-5\frac{55}{66}=9\frac{84}{66}-5\frac{55}{66}=4\frac{29}{66}.$$

Так же производится вычитание дроби из целого числа например:

$$10-\frac{3}{17}=9\frac{17}{17}-\frac{3}{17}=9\frac{14}{17};$$

$$7-2\frac{3}{5}=6\frac{5}{5}-2\frac{3}{5}=4\frac{2}{5}.$$

Замечания. 1) При вычитании *нуля* держатся того же условия, какое было указано при вычитании целых чисел, а именно: **вычесть нуль из какого-нибудь числа — значит оставить это число без изменения.**

2) Разность дробных чисел изменяется при изменении данных чисел совершенно так же, как и разность целых чисел, а именно: **если увеличить (или уменьшить) уменьшаемое на какое-нибудь число, то и разность увеличится (или уменьшится) на такое же число; если увеличить (или уменьшить) вычитаемое на какое-нибудь число, то разность уменьшится (или увеличится) на такое же число.**

Нахождение дроби данного числа.

137. Находить дробь данного числа приходится при решении очень многих задач. Примером могут служить следующие задачи:

Задача 1. *Поезд движется равномерно со скоростью* 40 *км в час. Какой путь он пройдёт в* $\frac{7}{8}$ *часа?*

Очевидно, в $\frac{7}{8}$ часа поезд пройдёт столько километров, сколько их заключается в $\frac{7}{8}$ от 40 *км*. Чтобы найти $\frac{7}{8}$ числа 40, найдём сначала $\frac{1}{8}$ этого числа (т. е. уменьшим 40 в 8 раз), а затем полученный результат увеличим в 7 раз:

$\frac{1}{8}$ числа 40 составляет 5;

$\frac{7}{8}$ числа 40 составляют $5\times7=35$.

Значит, поезд в $\frac{7}{8}$ часа проходит 35 *км*.

В этой задаче мы находили $\frac{7}{8}$ числа 40.

Задача 2. Один метр материи стоит $18\frac{1}{2}$ рубля. Сколько рублей надо заплатить за $1\frac{3}{4}$ метра (т. е. за $\frac{7}{4}$ метра) этой материи?

Очевидно, что $\frac{7}{4}$ метра стоят столько рублей, сколько рублей окажется в $\frac{7}{4}$ числа $18\frac{1}{2}$. Чтобы узнать это, мы найдём сначала $\frac{1}{4}$ этого числа (т. е. уменьшим $18\frac{1}{2}$ в 4 раза), а затем результат увеличим в 7 раз:

$\frac{1}{4}$ числа $18\frac{1}{2}$ (т. е. числа $\frac{37}{2}$) составляет $\frac{37}{2\cdot 4}$ (§ 127);

$\frac{7}{4}$ числа $18\frac{1}{2}$ (т. е. числа $\frac{37}{2}$) составляют $\frac{37\cdot 7}{2\cdot 4}=\frac{259}{8}=32\frac{3}{8}$.

Значит, за $\frac{7}{4}$ метра придётся уплатить $32\frac{3}{8}$ рубля.

В этой задаче мы находили $\frac{7}{4}$ числа $18\frac{1}{2}$.

Задача 3. Найти $\frac{8}{3}$ числа $\frac{5}{6}$.

Найдём сначала $\frac{1}{3}$ числа $\frac{5}{6}$ (т. е. уменьшим $\frac{5}{6}$ в 3 раза), затем увеличим полученный результат в 8 раз.

$$\frac{1}{3} \text{ числа } \frac{5}{6} \text{ составляет } \frac{5}{6\cdot 3};$$

$$\frac{8}{3} \text{ числа } \frac{5}{6} \text{ составляют } \frac{5\cdot 8}{6\cdot 3}=\frac{40}{18}=2\frac{2}{9}.$$

В этой задаче мы находили $\frac{8}{3}$ числа $\frac{5}{6}$.

Из этих задач выводим правило: **чтобы найти величину какой-нибудь дроби данного числа, надо уменьшить это число во столько раз, сколько единиц в знаменателе дроби, и результат увеличить во столько раз, сколько единиц в числителе дроби.**

Нахождение процентов данного числа.

138. Что такое проценты. Мы уже знаем, что некоторые наиболее употребительные доли единицы получили особые названия; одну вторую называют половиной, одну третью долю — третью, одну четвёртую — четвертью. Очень часто (например, при учёте продукции и при денежных расчётах) употребляются *сотые* доли; поэтому они также получили особое название.

Сотая часть какого-нибудь числа называется *процентом* этого числа. Поэтому, например, 5 процентов какого-нибудь числа означают то же самое, что 5 сотых (или одна двадцатая) этого числа.

Процент обозначается знаком $\%$; так, 17% какого-либо числа означают 17 процентов, т. е. $\frac{17}{100}$ этого числа.

Наши государственные трудовые сберегательные кассы приносят вкладчикам 3% годового дохода; это значит, что каждая положенная в сберегательную кассу сумма в течение года увеличивается на 3%, т. е. на $\frac{3}{100}$ (этой суммы); эти 3% составляют годовой *доход* вкладчика.

Если говорят, что рабочий-стахановец выполнил 250% нормы, то это значит, что выработанная им продукция составляет 250%, т. е. $\frac{250}{100}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$ нормы, т. е. полученного задания; другими словами, он выработал в $2\frac{1}{2}$ раза больше, чем полагалось по норме.

139. Нахождение процентов данного числа. Пусть требуется, например, найти 18% числа 245; так как 18% означают $\frac{18}{100}$, то задача решается по правилу § 137:

$$18\% \text{ числа } 245 \text{ составляют } \frac{245 \cdot 18}{100}=44\frac{1}{10}.$$

Рассмотрим ещё следующие три задачи.

Задача 1. *При заказе костюма стоимостью в 240 рублей заказчик внёс 15% в виде задатка; найти сумму задатка.*

Очевидно, мы должны найти 15% $\left(\text{т. е. } \frac{15}{100}\right)$ числа 240; по правилу § 137:

$$15\% \text{ числа } 240 \text{ составляют } \frac{240 \cdot 15}{100}=36 \text{ (рублей).}$$

Таким образом, сумма задатка равна 36 рублям.

Задача 2. *Бригада лесорубов имела задание заготовить 90 кубометров дров; задание перевыполнено на 20%. Сколько дров заготовила бригада?*

20% числа 90 составляют $\frac{90 \cdot 20}{100} = 18$ (кубометров).

Следовательно, задание (90 кубометров) перевыполнено на 18 кубометров, и, значит, бригада заготовила $90 + 18 = 108$ (кубометров).

Задача 3. Государственный внутренний заём приносит 4% годового дохода; за сколько лет доход от облигации в 300 рублей составит 42 рубля?

Сначала узнаем, какой доход приносит облигация в 300 рублей в один год; для этого надо найти 4% числа 300; 4% числа 300 составляют $\frac{300 \cdot 4}{100} = 12$ (рублей). Значит, облигация приносит 12 рублей дохода в год. Поэтому 42 рубля дохода она принесёт за $42 : 12 = 3\frac{1}{2}$ (года).

Умножение дробных чисел.

140. Определения. 1) Умножение дробного числа на целое определяется так же, как и умножение целых чисел, а именно: *умножить какое-нибудь число* (множимое) *на целое число* (множитель) — *значит составить сумму одинаковых слагаемых, в которой каждое слагаемое равно множимому, а число слагаемых — множителю.*

Так, умножить $\frac{7}{8}$ на 5 — значит найти сумму:

$$\frac{7}{8} + \frac{7}{8} + \frac{7}{8} + \frac{7}{8} + \frac{7}{8}.$$

2) *Умножить какое-нибудь число* (множимое) *на дробь* (множитель) — *значит найти эту дробь множимого.*

Так, умножить 5 на $\frac{7}{8}$ — значит найти $\frac{7}{8}$ пяти единиц. Умножить $\frac{3}{4}$ на $\frac{2}{3}$ — значит найти $\frac{2}{3}$ числа $\frac{3}{4}$.

Таким образом, нахождение дроби от данного числа, рассмотренное нами перед этим, мы будем теперь называть умножением на дробь.

3) *Умножить какое-нибудь число* (множимое) *на смешанное число* (множитель) — *значит умножить множимое сперва на целое число множителя, потом на дробь множителя и результаты этих двух умножений сложить между собой.*

Например: $\frac{4}{5}\cdot 3\frac{2}{7}=\frac{4}{5}\cdot 3+\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{7}$.

Число, получаемое после умножения, во всех этих случаях называется *произведением*, т. е. так же, как и при умножении целых чисел.

Из этих определений видно, что умножение дробных чисел есть действие всегда возможное и всегда однозначное.

141. Целесообразность этих определений. Чтобы уяснить себе целесообразность введения в арифметику двух последних определений умножения, возьмём такую задачу:

Задача. *Поезд, двигаясь равномерно, проходит в час 40 км; как узнать, сколько километров пройдёт этот поезд в данное число часов?*

Если бы мы остались при том одном определении умножения, которое указывается в арифметике целых чисел (сложение равных слагаемых), то наша задача имела бы три различных решения, а именно:

Если данное число часов целое (например, 5 часов), то для решения задачи надо 40 *км* умножить на это число часо

Если данное число часов выражается дробью (наприме $\frac{3}{4}$ часа), то придётся найти величину этой дроби от 40 *к*.

Наконец, если данное число часов смешанное (наприме $5\frac{3}{4}$ часа), то надо будет 40 *км* умножить на целое число, заключающееся в смешанном числе, и к результату добавить ещё такую дробь от 40 *км*, какая есть в смешанном числе.

Данные нами определения позволяют на все эти возможные случаи дать один общий ответ:

надо 40 *км* умножить на данное число часов, каково бы оно ни было.

Таким образом, если задачу представить в общем виде так:

Поезд, двигаясь равномерно, проходит в час v *км*. Сколько километров поезд пройдёт за t часов?

то какие бы ни были числа v и t, мы можем высказать од.. ответ: искомое число выражается формулой $v\cdot t$.

Примечание. Найти какую-нибудь дробь данного числа, по нашему определению, означает то же самое, что умножить данное число на эту дробь; поэтому, например, найти 5% (т. е. пять сотых) данного числа означает то же самое, что умножить данное число на $\frac{5}{100}$ или на $\frac{1}{20}$; найти 125% данного числа означает то же, что умножить это число на $\frac{125}{100}$ или на $\frac{5}{4}$, и т. д.

142. Замечание о том, когда от умножения число увеличивается и когда оно уменьшается. *От умножения на правильную дробь число уменьшается, а от умножения на неправильную дробь число увеличивается, если эта неправильная дробь больше единицы, и остаётся без изменения, если она равна единице.*

Например, произведение $5\cdot\frac{7}{8}$ должно быть меньше, чем 5, так как оно означает $\frac{7}{8}$ числа 5, а $\frac{7}{8}$ от пяти меньше, чем $\frac{8}{8}$ от пяти, т. е. меньше, чем 5; произведение $5\cdot\frac{9}{8}$ должно быть больше, чем 5, потому что оно означает $\frac{9}{8}$ числа 5, а $\frac{9}{8}$ от пяти больше, чем $\frac{8}{8}$ от пяти, т. е. больше, чем 5; наконец, произведение $5\cdot\frac{8}{8}$, т. е. $\frac{8}{8}$ от пяти, равно 5.

Замечание. При умножении дробных чисел, так же как и целых, произведение принимается равным нулю, если какой-нибудь из сомножителей равен нулю; так, $0\cdot\frac{7}{8}=0$ и $\frac{7}{8}\cdot 0=0$.

143. Вывод правил умножения.

1. *Умножение дроби на целое число.* Пусть требуется дробь $\frac{3}{10}$ умножить на 5. Это значит увеличить $\frac{3}{10}$ в 5 раз. Чтобы увеличить дробь в 5 раз, достаточно увеличить её числитель или уменьшить её знаменатель в 5 раз (§ 127).

Поэтому:

$$\frac{3}{10}\cdot 5=\frac{3\cdot 5}{10}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}, \text{ или } \frac{3}{10}\cdot 5=\frac{3}{10:5}=\frac{3}{2}.$$

Правило 1-е. **Чтобы умножить дробь на целое число, надо умножить на это целое число числитель, а знаменатель оставить тот же; вместо этого можно также разделить на данное целое число знаменатель дроби (если это возможно), а числитель оставить тот же.**

Замечание. Произведение дроби на её знаменатель равно её числителю.

Так:

$$\frac{5}{8}\cdot 8=\frac{5\cdot 8}{8}=5.$$

2. *Умножение целого числа на дробь.* Пусть надо умножить 7 на $\frac{4}{9}$. Это значит найти $\frac{4}{9}$ числа 7. Для этого найдём сначала $\frac{1}{9}$ числа 7, а потом $\frac{4}{9}$.

$\frac{1}{9}$ числа 7 составляет $\frac{7}{9}$ (§ 119);

$\frac{4}{9}$ числа 7 составляют $\frac{7\cdot4}{9}$ (§ 127).

Значит,

$$7\cdot\frac{4}{9}=\frac{7\cdot4}{9}=\frac{28}{9}.$$

Правило 2-е. **Чтобы умножить целое число на дробь, надо умножить целое число на числитель дроби и это произведение сделать числителем, а знаменателем подписать знаменатель данной дроби.**

3. *Умножение дроби на дробь.* Пусть надо умножить $\frac{3}{5}$ на $\frac{7}{8}$. Это значит найти $\frac{7}{8}$ числа $\frac{3}{5}$. Для этого сначала найдём $\frac{1}{8}$, а затем $\frac{7}{8}$ числа $\frac{3}{5}$.

$\frac{1}{8}$ числа $\frac{3}{5}$ составляет $\frac{3}{5\cdot8}$ (§ 127);

$\frac{7}{8}$ числа $\frac{3}{5}$ составляют $\frac{3\cdot7}{5\cdot8}$.

Значит,

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{8}=\frac{3\cdot7}{5\cdot8}=\frac{21}{40}.$$

Правило 3-е. **Чтобы умножить дробь на дробь, надо умножить числитель на числитель и знаменатель на знаменатель и первое произведение сделать числителем, а второе знаменателем произведения.**

Замечание. Это правило можно применять и к умножению дроби на целое число и целого числа на дробь, если только целое число будем рассматривать как дробь со знаменателем единица. Так:

$$\frac{3}{10}\cdot5=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{1}=\frac{3\cdot5}{10\cdot1}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2};$$

$$7\cdot\frac{4}{9}=\frac{7}{1}\cdot\frac{4}{9}=\frac{7\cdot4}{1\cdot9}=\frac{28}{9}=3\frac{1}{9}.$$

Таким образом, изложенные сейчас три правила заключаются в одном, которое в общем виде можно выразить так:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

4. *Умножение смешанных чисел.*

Правило 4-е. **Чтобы перемножить смешанные числа, надо обратить их в неправильные дроби и затем умножить по правилам умножения дробей.** Например:

$$1)\ 7 \cdot 5\frac{3}{4} = 7 \cdot \frac{23}{4} = \frac{7 \cdot 23}{4} = \frac{161}{4} = 40\frac{1}{4}.$$

$$2)\ 2\frac{3}{5} \cdot 4\frac{2}{3} = \frac{13}{5} \cdot \frac{14}{3} = \frac{13 \cdot 14}{5 \cdot 3} = \frac{182}{15} = 12\frac{2}{15}.$$

144. Сокращение при умножении. При умножении дробей, если это возможно, надо делать предварительное сокращение, как это видно из следующих примеров:

$$1)\ 12 \cdot \frac{7}{8} = \frac{12 \cdot 7}{8} = \frac{3 \cdot 7}{2} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}.$$

$$2)\ \frac{16}{21} \cdot \frac{5}{28} = \frac{16 \cdot 5}{21 \cdot 28} = \frac{4 \cdot 5}{21 \cdot 7} = \frac{20}{147}.$$

Такое сокращение возможно делать потому, что величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель её будут уменьшены в одинаковое число раз.

145. Изменение произведения с изменением сомножителей. Произведение дробных чисел при изменении сомножителей изменяется совершенно так же, как и произведение целых чисел (§ 53), а именно:

если увеличить (или уменьшить) какой-нибудь сомножитель в несколько раз, то и произведение увеличится (или уменьшится) во столько же раз.

Так, если в примере:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$$

мы увеличим множимое, положим, в 2 раза, т. е. вместо $\frac{3}{5}$ возьмём $\frac{3}{5} + \frac{3}{5}$, то новое произведение будет представлять собой $\frac{4}{7}$ уже не дроби $\frac{3}{5}$, а этой дроби, повторенной слагаемым 2 раза; значит, новое произведение должно быть больше прежнего в 2 раза. И действительно,

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{35};\ \frac{24}{35} \text{ в 2 раза более } \frac{12}{35}.$$

Увеличим в том же примере множитель, положим, в 3 раза, т. е. вместо $\frac{4}{7}$ **возьмём** $\frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7}$**; тогда новое произве-**

дение будет представлять собой уже не $\frac{4}{7}$ множимого, а $\frac{4}{7}$ его, повторенные 3 раза; значит, новое произведение должно быть больше прежнего в 3 раза. И действительно,

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{7}=\frac{36}{35};\ \frac{36}{35} \text{ в 3 раза больше } \frac{12}{35}.$$

146. Произведение трёх и более дробей. Пусть дано перемножить три дроби: $\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}$, причём предполагается, что действие умножения надо производить в той последовательности, в какой написаны сомножители, т. е. $\frac{2}{3}$ требуется умножить на $\frac{7}{8}$ и затем полученное произведение умножить на $\frac{5}{6}$. Перемножив две первые дроби, получим $\frac{2\cdot 7}{3\cdot 8}$; умножив это число на третью дробь, найдём $\frac{2\cdot 7\cdot 5}{3\cdot 8\cdot 6}=\frac{1\cdot 7\cdot 5}{3\cdot 8\cdot 3}=\frac{35}{72}$. Значит,

чтобы перемножить несколько дробей, надо перемножить их числители между собой и знаменатели между собой и первое произведение сделать числителем, а второе знаменателем произведения.

Замечание. Это правило можно применять и к таким произведениям, в которых некоторые множители—числа целые или смешанные, если только целое число будем рассматривать как дробь, у которой знаменатель единица, а смешанные числа будем обращать в неправильные дроби. Например:

$$\frac{3}{4}\cdot 5\cdot 1\frac{5}{6}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{1}\cdot\frac{11}{6}=\frac{3\cdot 5\cdot 11}{4\cdot 1\cdot 6}=\frac{5\cdot 11}{4\cdot 2}=\frac{55}{8}=6\frac{7}{8}.$$

147. Основные свойства умножения. Те свойства умножения, которые были нами указаны для целых чисел (§ 56, 57, 59), принадлежат и умножению дробных чисел. Укажем эти свойства.

1) Произведение не изменяется от перемены мест сомножителей.

Например:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}.$$

Действительно, согласно правилу предыдущего параграфа, первое произведение равно дроби $\frac{2\cdot 5\cdot 3}{3\cdot 6\cdot 4}$, а второе равно дроби $\frac{5\cdot 3\cdot 2}{6\cdot 4\cdot 3}$. Но эти дроби одинаковы, потому что их члены отличаются только порядком целых сомножителей, а произведение целых чисел не изменяется при перемене мест сомножителей.

2) Произведение не изменится, если какую-либо группу сомножителей заменить их произведением.

Например:

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}\right),$$

потому что:

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}=\frac{5\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot4\cdot7\cdot5}$$

и

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}\right)=\frac{5\cdot3}{6\cdot4}\cdot\frac{2\cdot1}{7\cdot5}=\frac{5\cdot3\cdot(2\cdot1)}{6\cdot4\cdot(7\cdot5)}=\frac{5\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot4\cdot7\cdot5}.$$

Результаты получаются одинаковые.

Из этого свойства умножения можно вывести такое заключение:

чтобы умножить какое-нибудь число на произведение, можно умножить это число на первый сомножитель, полученное число умножить на второй и т. д.

Например:

$$10\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}\right)=10\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7},$$

так как согласно свойству 2) в произведении $10\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}\right)$ мы можем умножение на число, заключённое в скобках, заменить последовательным умножением на $\frac{3}{4}$ и на $\frac{5}{7}$.

3) *Распределительный закон умножения (относительно сложения).* Чтобы умножить сумму на какое-нибудь число, можно умножить на это число каждое слагаемое отдельно и результаты сложить.

Закон этот был нами объяснён (§ 59) в применении к целым числам. Он остаётся верным без всяких изменений и для дробных чисел.

Покажем в самом деле, что равенство

$$(a+b+c+\ldots)\,m=am+bm+cm+\ldots$$

(распределительный закон умножения относительно сложения) остаётся верным и тогда, когда буквы означают дробные числа. Рассмотрим три случая.

1) Предположим сначала, что множитель m есть число целое, например $m=3$ (a, b, c — какие угодно числа). Согласно опреде-

лению умножения на целое число можно написать (ограничиваясь для простоты тремя слагаемыми):

$$(a+b+c)\cdot 3=(a+b+c)+(a+b+c)+(a+b+c).$$

На основании сочетательного закона сложения мы можем в правой части опустить все скобки; применяя же переместительный закон сложения, а потом снова сочетательный, мы можем, очевидно, переписать правую часть так:

$$(a+a+a)+(b+b+b)+(c+c+c).$$

Тогда получим:

$$(a+b+c)\cdot 3=a\cdot 3+b\cdot 3+c\cdot 3.$$

Значит, распределительный закон в этом случае подтверждается.

2) Теперь допустим, что множитель m есть дробь с числителем единица, например $m=\frac{1}{8}$. Умножить $a+b+c$ на $\frac{1}{8}$ — значит найти $\frac{1}{8}$ часть этой суммы. Эта часть равна $\frac{a}{8}+\frac{b}{8}+\frac{c}{8}$, в чём мы можем убедиться, если умножим это выражение на 8. Действительно, так как 8 — целое число, то, по доказанному в первом случае, после умножения мы получим:

$$\frac{a}{8}\cdot 8+\frac{b}{8}\cdot 8+\frac{c}{8}\cdot 8,$$

что составляет

$$a+b+c.$$

Значит, восьмая часть этой суммы равна действительно

$$\frac{a}{8}+\frac{b}{8}+\frac{c}{8},$$

что можно написать и так:

$$a\cdot\frac{1}{8}+b\cdot\frac{1}{8}+c\cdot\frac{1}{8}.$$

Следовательно,

$$(a+b+c)\cdot\frac{1}{8}=a\cdot\frac{1}{8}+b\cdot\frac{1}{8}+c\cdot\frac{1}{8}.$$

Мы видим, что распределительный закон подтверждается и в этом случае.

3) Наконец, допустим, что множитель m есть дробь с каким угодно числителем, например $m=\frac{9}{8}$ (сюда же относится и тот случай, когда m есть смешанное число).

Умножить сумму $a+b+c$ на $\frac{9}{8}$ — значит найти $\frac{9}{8}$ этой суммы, для чего достаточно умножить на 9 одну восьмую её. Но

$\frac{1}{8}$ суммы, как мы сейчас убедились, равна $\frac{a}{8}+\frac{b}{8}+\frac{c}{8}$; значит, $\frac{9}{8}$ её будет:

$$\left(\frac{a}{8}+\frac{b}{8}+\frac{c}{8}\right)\cdot 9,$$

что, согласно первому случаю, равно:

$$\frac{a}{8}\cdot 9+\frac{b}{8}\cdot 9+\frac{c}{8}\cdot 9,$$

т. е.

$$a\cdot\frac{9}{8}+b\cdot\frac{9}{8}+c\cdot\frac{9}{8}.$$

Значит,

$$(a+b+c)\cdot\frac{9}{8}=a\cdot\frac{9}{8}+b\cdot\frac{9}{8}+c\cdot\frac{9}{8}.$$

Таким образом, распределительный закон подтверждается во всех случаях.

Нахождение неизвестного числа по данной величине его дроби.

148. Задачи и правило. Прежде чем перейти к делению дробных чисел, полезно рассмотреть, как можно находить неизвестное число, если дана величина какой-нибудь его дроби. Для ясности мы изложим этот вопрос на следующих простых задачах.

Изменим задачи, данные в § 137, таким образом:

Задача 1. Поезд, двигаясь равномерно, прошёл расстояние в 35 км в $\frac{7}{8}$ часа. Сколько километров проходит этот поезд в час?

Конечно, поезд проходит в час такое число километров, $\frac{7}{8}$ которого составляют 35 *км*. Значит, в этой задаче нам дана величина (35 *км*) семи восьмых неизвестного числа, а требуется найти это число.

Так как 35 *км* составляют $\frac{7}{8}$ неизвестного числа, то, уменьшив 35 *км* в 7 раз, мы найдём $\frac{1}{8}$ этого неизвестного числа, а увеличив затем результат в 8 раз, получим $\frac{8}{8}$ его, т. е. полное число. Для ясности выразим наше рассуждение более подробной записью:

$\frac{7}{8}$ неизвестного числа составляют 35;

$\frac{1}{8}$ „ „ составляет $\frac{35}{7}$;

$\frac{8}{8}$ „ „ составляют $\frac{35\cdot 8}{7}=\frac{5\cdot 8}{1}=40$.

Значит, поезд в час проходит 40 *км.*

Задача 2. $1\frac{3}{4}$ *метра материи стоят* $32\frac{3}{8}$ *рубля. Сколько рублей стоит 1 м этой материи?*

Так как $1\frac{3}{4}$ метра $=\frac{7}{4}$ метра и эти $\frac{7}{4}$ метра стоят $32\frac{3}{8}$ рубля, то, уменьшив $32\frac{3}{8}$ рубля в 7 раз, мы узнаем стоимость $\frac{1}{4}$ метра, а увеличив затем эту стоимость в 4 раза, найдём цену целого метра. Выразим это подробной записью:

$\frac{7}{4}$ метра стоят $32\frac{3}{8}$ рубля $=\frac{259}{8}$ рубля;

$\frac{1}{4}$ „ стоит $\frac{259}{8\cdot 7}$ рублей;

$\frac{4}{4}$ „ стоят $\frac{259\cdot 4}{8\cdot 7}=18\frac{1}{2}$ рубля.

Задача 3. Найти число, $\frac{8}{3}$ *которого составляют* $2\frac{2}{9}\left(=\frac{20}{9}\right)$.

$\frac{8}{3}$ неизвестного числа составляют $\frac{20}{9}$;

$\frac{1}{3}$ „ „ составляет $\frac{20}{9\cdot 8}$;

$\frac{3}{3}$ „ „ составляют $\frac{20\cdot 3}{9\cdot 8}=\frac{5}{6}$.

Из этих задач выводим правило: **чтобы найти неизвестное число по данной величине его дроби, достаточно уменьшить эту величину во столько раз, сколько единиц в числителе дроби, и результат увеличить во столько раз, сколько единиц в знаменателе дроби.**

149. Нахождение числа по данным его процентам. Пусть дано, что 18% некоторого числа составляют $14\frac{2}{5}$; чтобы найти это число, мы замечаем, что $14\frac{2}{5}$ составляют

$\frac{18}{100}$ этого числа; поэтому, согласно правилу предыдущего параграфа, неизвестное число получится, если $14\frac{2}{5}=\frac{72}{5}$ разделить на 18 $\left(\text{получится } \frac{4}{5}\right)$ и результат умножить на 100 (получится 80).

Рассмотрим две задачи.

Задача 1. Доход вкладчика сберегательной кассы за 4 года составил 12 руб. 84 коп. Найти сумму вклада [1].

Доход за 4 года составил 12 руб. 84 коп., или 1284 копейки. Значит, доход за 1 год составляет $1284:4=321$ (копейка). Так как сберкасса выплачивает 3% годового дохода, то 321 копейка составляет 3% суммы вклада. Чтобы найти сумму вклада, надо на основании правила предыдущего параграфа разделить это число на 3 и результат помножить на 100:

$$\frac{321}{3}\cdot 100=10\,700\ (=107\ \text{рублей}).$$

Задача 2. Население города составляет 134 400 *человек. Со времени Великой Октябрьской социалистической революции оно выросло на* 60%. *Сколько жителей было в городе до революции?*

К неизвестному числу жителей прибавилось 60% этого числа. Так как каждое число составляет 100% (сто сотых долей) самого себя, то новое число жителей (134 400) составляет 160% прежнего их числа. Поэтому для нахождения прежнего числа жителей надо по правилу предыдущего параграфа разделить число 134 400 на 160 и результат помножить на 100:

$$\frac{134\,400}{160}\cdot 100=84\,000\ (\text{человек}).$$

Деление дробных чисел.

150. ***Определение.*** *Деление есть действие* (обратное умножению), *состоящее в том, что по данному произведению двух сомножителей* (делимому) *и одному из этих сомножителей* (делителю) *отыскивается другой сомножитель* (частное).

---

[1] При этом предполагается, что в конце каждого года вкладчик берёт из кассы свой доход, так что сумма вклада на следующий год остаётся прежняя.

Например, разделить $\frac{7}{8}$ на $\frac{3}{5}$ — значит найти такое число, которое надо умножить на $\frac{3}{5}$, чтобы получить $\frac{7}{8}$; или найти такое число, на которое надо умножить $\frac{3}{5}$, чтобы получить $\frac{7}{8}$. В первом случае частное представляет собой искомое множимое, во втором случае — искомый множитель.

Так как множимое и множитель могут меняться местами, то *величина частного не зависит от того, означает ли это частное множимое или множитель.*

Замечания. 1. В арифметике целых чисел это определение применимо только к делению *без остатка;* в арифметике же дробных чисел это определение, как мы увидим, применимо всегда, за исключением случая, когда делитель равен нулю.

2. *От деления на правильную дробь число увеличивается, а от деления на неправильную дробь число уменьшается, если эта неправильная дробь больше единицы, и остаётся без изменения, если она равна единице.*

Например, частное $5 : \frac{7}{8}$ должно быть больше 5, потому что это частное, умноженное на $\frac{7}{8}$, должно составить 5; а так как при умножении на $\frac{7}{8}$, как мы знаем, всякое число уменьшается, то это частное должно быть больше 5. Так же объясняется, что частное $5 : \frac{9}{8}$ должно быть меньше 5 (так как при умножении на $\frac{9}{8}$ это частное, увеличившись, должно дать число 5).

151. Вывод правил деления. При делении могут представиться 5 следующих случаев.

1) ***Деление целого числа на целое.*** Такое деление было рассмотрено в арифметике целых чисел. Но там точное деление не всегда было возможно, так как делимое не всегда есть произведение делителя на целое число; поэтому в общем случае приходилось рассматривать деление с *остатком.* Теперь же, допустив умножение на дробь, мы всякий случай деления целых чисел можем считать возможным, за исключением деления на нуль, которое и здесь остаётся невозможным. Пусть, например, требуется разделить 5 на 7, т. е. найти число, произведение которого на 7 даёт 5. Такое число есть

дробь $\frac{5}{7}$, потому что $\frac{5}{7}\cdot 7=5$. Точно так же $20:7=\frac{20}{7}$, потому что $\frac{20}{7}\cdot 7=20$.

Правило 1-е. **Чтобы разделить целое число на целое, надо составить дробь, числитель которой равен делимому, а знаменатель — делителю.**

Заметим, что в области целых чисел деление без остатка называется иначе делением *нацело*, так как в частном получается целое число, а не дробное.

2) *Деление дроби на целое число.* Пусть требуется разделить $\frac{8}{9}$ на 4, т. е. требуется найти число, которое надо умножить на 4, чтобы получить $\frac{8}{9}$.

Так как от умножения на 4 всякое число увеличивается в 4 раза, то, значит, искомое число, увеличенное в 4 раза, должно составить $\frac{8}{9}$, и потому, чтобы найти его, достаточно дробь $\frac{8}{9}$ уменьшить в 4 раза. Чтобы уменьшить дробь в 4 раза, надо уменьшить в 4 раза её числитель или увеличить в 4 раза её знаменатель (§ 127). Поэтому:

$$\frac{8}{9}:4=\frac{8:4}{9}=\frac{2}{9},$$

или

$$\frac{8}{9}:4=\frac{8}{9\cdot 4}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}.$$

Правило 2-е. **Чтобы разделить дробь на целое число, надо разделить на это целое число числитель дроби (если это возможно), оставив тот же знаменатель, или умножить на это целое число знаменатель дроби, оставив тот же числитель.**

3) *Деление целого числа на дробь.* Пусть требуется разделить 3 на $\frac{2}{5}$, т. е. требуется найти такое число, которое надо умножить на $\frac{2}{5}$, чтобы получить 3. Так как умножить какое-нибудь число на $\frac{2}{5}$ — значит найти $\frac{2}{5}$ этого числа, то:

$\frac{2}{5}$ неизвестного частного составляют 3;

$\frac{1}{5}$ » » составляет $\frac{3}{2}$;

$\frac{5}{5}$ » » составляют $\frac{3}{2}\cdot 5=\frac{3\cdot 5}{2}$.

Значит,

$$3 : \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}.$$

Правило 3-е. **Чтобы разделить целое число на дробь, надо умножить это целое число на знаменатель данной дроби и это произведение взять числителем, а знаменателем сделать числитель данной дроби.**

4) ***Деление дроби на дробь.*** Пусть надо разделить $\frac{5}{6}$ на $\frac{7}{11}$, т. е. требуется найти число, которое при умножении на $\frac{7}{11}$ составит $\frac{5}{6}$. Так как умножить какое-нибудь число на $\frac{7}{11}$ — значит найти $\frac{7}{11}$ этого числа, то:

$\frac{7}{11}$ неизвестного частного составляют $\frac{5}{6}$;

$\frac{1}{11}$ „ „ составляет $\frac{5}{6 \cdot 7}$;

$\frac{11}{11}$ „ „ составляют $\frac{5 \cdot 11}{6 \cdot 7}$.

Значит,

$$\frac{5}{6} : \frac{7}{11} = \frac{5 \cdot 11}{6 \cdot 7} = \frac{55}{42} = 1\frac{13}{42}.$$

Правило 4-е. **Чтобы разделить дробь на дробь, надо умножить числитель первой дроби на знаменатель второй, а знаменатель первой дроби на числитель второй и первое произведение взять числителем, а второе знаменателем.**

Замечание. Под это правило можно подвести и все предыдущие случаи, если только целое число будем рассматривать как дробь со знаменателем единица. Так,

$$5 : 7 = \frac{5}{1} : \frac{7}{1} = \frac{5 \cdot 1}{1 \cdot 7} = \frac{5}{7};$$

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{9} : \frac{4}{1} = \frac{8 \cdot 1}{9 \cdot 4} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9};$$

$$3 : \frac{2}{5} = \frac{3}{1} : \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}.$$

Таким образом, правило деления дробей во всех случаях можно выразить таким буквенным равенством:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

5) ***Деление смешанных чисел.***

Правило 5-е. **Чтобы разделить смешанные числа, надо обратить их в неправильные дроби и затем разделить по правилам деления дробей.**

Например:

$$8 : 3\frac{5}{6} = 8 : \frac{23}{6} = \frac{8 \cdot 6}{23} = \frac{48}{23} = 2\frac{2}{23};$$

$$7\frac{3}{4} : 5\frac{1}{2} = \frac{31}{4} : \frac{11}{2} = \frac{31 \cdot 2}{4 \cdot 11} = \frac{31}{22} = 1\frac{9}{22}.$$

152. Замена деления умножением. Если переставим в данной дроби числитель на место знаменателя и наоборот, то дробь, получившаяся после этой перестановки, называется *обратной* по отношению к данной. Так, для $\frac{7}{8}$ обратная дробь будет $\frac{8}{7}$. Целое число также имеет обратную дробь; например, для 5 или для $\frac{5}{1}$ обратная дробь будет $\frac{1}{5}$. Поэтому обратные дроби удобнее называть *обратными числами.* Число, обратное данному, можно определять и как частное от деления единицы на данное число. Так, число, обратное $\frac{7}{8}$, есть

$$\frac{1}{\frac{7}{8}} = \frac{8}{7}.$$

Согласно этому определению, можно находить обратные числа и для смешанных чисел. Так, для числа $4\frac{5}{8}$ обратным числом будут

$$\frac{1}{4\frac{5}{8}} = \frac{1}{\frac{37}{8}} = \frac{8}{37}.$$

Очевидно, что произведение любого числа на обратное ему число равно единице.

Условившись в этом, можем высказать такое правило деления: **чтобы разделить одно число на другое, можно делимое умножить на число, обратное делителю.**

В верности этого правила легко убедиться из следующих примеров:

$$8 : 9 = \frac{8}{9} \text{ и } 8 \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{9};$$

$$\frac{7}{8} : 5 = \frac{7}{40} \text{ и } \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{40}; \quad \frac{2}{7} : \frac{3}{5} = \frac{10}{21} \text{ и } \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{21};$$

$$5 : \frac{7}{8} = \frac{40}{7} \text{ и } 5 \cdot \frac{8}{7} = \frac{40}{7}; \quad 5 : 3\frac{1}{3} = \frac{3}{2} \text{ и } 5 \cdot \frac{1}{3\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

153. Сокращение при делении. При делении дробных чисел, если возможно, следует делать *предварительное* сокращение, как показано в следующих примерах:

1) $12:\frac{8}{11}=\frac{12\cdot 11}{8}=\frac{3\cdot 11}{2}=\frac{33}{2}=16\frac{1}{2}$;

2) $\frac{8}{9}:\frac{6}{7}=\frac{8\cdot 7}{9\cdot 6}=\frac{4\cdot 7}{9\cdot 3}=\frac{28}{27}=1\frac{1}{27}$;

3) $\frac{5}{12}:\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 18}{12\cdot 7}=\frac{5\cdot 3}{2\cdot 7}=\frac{15}{14}=1\frac{1}{14}$.

Такое сокращение возможно делать потому, что величина дроби не изменяется, если числитель и знаменатель её уменьшены в одинаковое число раз.

154. Как разделить на произведение. То свойство деления (без остатка), которое было нами указано для целых чисел (§ 76), принадлежит и дробным числам, а именно:

чтобы разделить какое-нибудь число на произведение нескольких сомножителей, можно разделить это число на первый сомножитель, полученный результат разделить на второй сомножитель и т. д.

Так, $10:\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\right)=10:\frac{2}{3}:\frac{5}{7}$, потому что по правилам умножения и деления дробей мы получим:

$$10:\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\right)=10:\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{10\cdot(3\cdot 7)}{2\cdot 5}=\frac{10\cdot 3\cdot 7}{2\cdot 5},$$

$$10:\frac{2}{3}:\frac{5}{7}=\frac{10\cdot 3}{2}:\frac{5}{7}=\frac{10\cdot 3\cdot 7}{2\cdot 5},$$

т. е. мы получим одно и то же число как деля сразу на произведение, так и деля последовательно на каждый сомножитель.

155. Изменение частного с изменением данных чисел. При изменении делимого или делителя частное от деления дробных чисел изменяется совершенно так же, как и частное от деления целых чисел (§ 77), а именно:

если увеличить (или уменьшить) делимое в несколько раз, то частное увеличится (или уменьшится) во столько же раз; если увеличить (или уменьшить) делитель в несколько раз, то частное уменьшится (или увеличится) во столько же раз.

Обратим особое внимание на то, что

если увеличить или уменьшить в одинаковое число раз и делимое и делитель, то частное не изменится;

так, если в примере $\frac{5}{6}:\frac{7}{11}=\frac{55}{42}$ мы увеличим делимое и делитель, положим, в 3 раза, то получим:

$$\frac{15}{6}:\frac{21}{11}=\frac{15\cdot 11}{6\cdot 21}=\frac{5\cdot 11}{6\cdot 7}=\frac{55}{42};$$

частное осталось то же самое.

В общем виде это можно выразить так:

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}=\frac{a:m}{b:m}.$$

156. Отношение двух чисел. После введения дробных чисел деление, как мы видели, становится действием всегда возможным (за исключением деления на нуль). Значит, если даны два числа, то существует частное от деления первого числа на второе (если только второе число не нуль).

Частное от деления одного числа на другое иначе называется *отношением* этих чисел. Первое число (делимое) называется *предыдущим членом* отношения; второе число (делитель) называется *последующим членом* отношения.

Так, отношением чисел $2\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{7}$ служит частное

$$\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{1}{7}}=\frac{35}{2}=17\frac{1}{2};$$

$2\frac{1}{2}$ — предыдущий член этого отношения, $\frac{1}{7}$ — его последующий член.

Если отношение двух чисел есть число целое, то оно показывает, сколько раз последующий член содержится в предыдущем [1]); условились, однако, пользоваться этим способом выражения и тогда, если отношение число дробное: так, в рассмотренном примере мы говорим, что число $\frac{1}{7}$ содержится в числе $2\frac{1}{2}$ семнадцать с половиной раз.

В приложениях часто приходится рассматривать отношение двух именованных чисел одного и того же наименования.

---

[1]) Так, в § 108 мы называли уже отношением двух однородных мер число, показывающее, сколько раз меньшая мера содержится в большей.

Пусть, например, требуется узнать, во сколько раз $4\frac{1}{4}$ *кг* превышают $2\frac{1}{2}$ *кг*. Ответ даётся отношением чисел $4\frac{1}{4}$ и $2\frac{1}{2}$; но члены этого отношения часто пишут вместе с их наименованием, т. е.

$$\frac{4\frac{1}{4}\,кг}{2\frac{1}{2}\,кг}=1\frac{7}{10};$$

само число $1\frac{7}{10}$ при этом отвлечённое, так как оно показывает, сколько раз один вес содержится в другом.

Так как отношение чисел есть частное этих чисел, в котором делимым служит предыдущий член, а делителем последующий, то оно и обладает всеми свойствами частного; из этих свойств напомним следующие:

1) предыдущий член отношения может быть любым числом; последующий член может быть любым числом, кроме нуля;

2) предыдущий член равен последующему, умноженному на отношение;

3) последующий член равен предыдущему, делённому на отношение;

4) отношение не изменится, если оба его члена умножить или разделить на одно и то же число.

Из свойства 4) следует, что **отношение с дробными членами можно заменить отношением целых чисел.** Пусть, например, дано отношение $\frac{5}{12}:\frac{3}{8}$; умножая оба члена этого отношения на наименьший общий знаменатель данных дробей, т. е. на 24, мы заменяем данное отношение равным ему отношением $10:9$, членами которого служат уже целые числа.

Подобным же образом

$$3\frac{1}{4}:\frac{5}{6}=\frac{13}{4}:\frac{5}{6}=\left(\frac{13}{4}\cdot 12\right):\left(\frac{5}{6}\cdot 12\right)=39:10.$$

Замечания. 1. Отношение двух чисел, которое мы определили, иногда называют кратным, или геометрическим, отношением, в отличие от разностного, или арифметического, отношения двух чисел, которое определяется как разность этих чисел. В дальнейшем под отношением мы всегда будем подразумевать кратное отношение.

2. Если переставить члены отношения, т. е. предыдущий

член сделать последующим и наоборот, то полученное новое отношение называется **обратным** прежнему.

3. **Отношение именованных чисел всегда может быть заменено отношением отвлечённых чисел.** Для этого достаточно выразить именованные числа в одной и той же единице и взять отношение получившихся отвлечённых чисел. Например, отношение 10 *т* 5 *ц* к 7 *ц* равно отношению 105 *ц* к 7 *ц*, а это отношение равно отношению отвлечённых чисел 105 к 7. При действиях над именованными числами отношением обычно называют лишь частное от деления двух однородных именованных чисел.

157. Процентное отношение двух чисел. Пусть требуется узнать, сколько процентов числа 250 составляет число $42\frac{1}{2}$. Один процент числа 250 составляет $\frac{250}{100}$; поэтому число $42\frac{1}{2}$ составляет столько процентов числа 250, сколько раз в $42\frac{1}{2}$ содержится $\frac{250}{100}$, т. е.

$$42\frac{1}{2}:\frac{250}{100}=\frac{42\frac{1}{2}}{250}\cdot 100=17\ (\%).$$

Число, показывающее, сколько процентов данное число составляет от другого числа, называется *процентным отношением* этих чисел. Рассмотренный пример показывает, что *для нахождения процентного отношения двух чисел надо умножить отношение этих чисел на 100.*

К этому же выводу можно прийти и другим путём. Чтобы найти, сколько процентов числа 250 составляет число $42\frac{1}{2}$, надо выразить отношение $\frac{42\frac{1}{2}}{250}$ в процентах, т. е. в сотых долях. Но чтобы узнать, сколько сотых долей содержится в данном числе, надо это число помножить на 100 (так, в числе 5 содержится $5\cdot 100=500$ сотых, в числе $\frac{1}{2}$ содержится $\frac{1}{2}\cdot 100=50$ сотых и т. п.). Поэтому число $\frac{42\frac{1}{2}}{250}$ составляет $\frac{42\frac{1}{2}}{250}\cdot 100=17$ сотых долей, т. е. 17 процентов.

Рассмотрим две задачи.

Задача 1. *Совхоз имеет* 80 000 *га земли, из них* 69 200 *га засеяны пшеницей. Какой процент общей площади занимают пшеничные поля?*

Для решения задачи надо найти, сколько процентов от числа 80 000 составляет число 69 200. Иначе говоря, надо найти процентное отношение чисел 69 200 и 80 000. По установленному правилу находим:

$$\frac{69200}{80000} \cdot 100 = 86\frac{1}{2} \ (\%).$$

Задача 2. *Из* 325 *кг муки получено* 429 *кг хлеба. Найти процент припёка.*

Припёк составляет 429 — 325 = 104 (*кг*).

Для решения задачи надо найти процентное отношение чисел 104 и 325; по установленному правилу находим:

$$\frac{104}{325} \cdot 100 = 32 \ (\%).$$

ОТДЕЛ V.
ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ.

I. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ.

158. Десятичные доли. Доли, получаемые от деления какой-нибудь единицы на 10, на 100, на 1000, вообще на такое число равных частей, которое выражается единицей с одним или с несколькими нулями, называются *десятичными долями*.

Таким образом, десятичные доли, последовательно уменьшающиеся, будут следующие:

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}, \frac{1}{1000000} \text{ и т. д.}$$

Из двух неодинаковых десятичных долей бо́льшая называется десятичной долей *высшего* разряда, а меньшая — десятичной долей *низшего* разряда. Каждая десятичная доля содержит в себе 10 десятичных долей следующего низшего разряда. Так,

$$\frac{1}{10}=\frac{10}{100}, \quad \frac{1}{100}=\frac{10}{1000}, \quad \frac{1}{1000}=\frac{10}{10000} \text{ и т. д.}$$

159. Десятичная дробь. Дробь, у которой знаменатель есть единица с одним или с несколькими нулями, называется *десятичной*; таковы, например, дроби:

$$\frac{3}{10}, \frac{27}{100}, \frac{27401}{1000}, 3\frac{1}{1000} \text{ и т. п.}$$

В отличие от десятичных, дроби, имеющие какие угодно знаменатели, называются *обыкновенными*, или *простыми*, дробями.

160. Десятичные знаки. В цифровом изображении целого числа из двух рядом стоящих цифр правая всегда означает единицы, в 10 раз меньшие, нежели левая. Условимся распространить это значение мест и на те цифры, которые могут быть написаны вправо от простых единиц. Положим, например, что в такой записи:

63,48259...

цифра 3 означает простые единицы. Тогда цифра 4 означает единицы в 10 раз меньшие, нежели простые единицы, т. е. десятые доли; 8 означает сотые доли, 2 — тысячные, 5 — десятитысячные, 9 — стотысячные и т. д. Чтобы не ошибиться в значении мест, условимся отделять запятой целое число от десятичных долей. На места недостающих долей, а также и на место целого числа, когда его нет, будем ставить нули. Например, при таких условиях выражение 0,0203 означает 2 сотых 3 десятитысячных.

Подобным же образом 25,703 означает 25 целых 7 десятых 3 тысячных; 0,82 означает 8 десятых 2 сотых и т. д.

Цифры, стоящие направо от запятой, называются *десятичными знаками.*

161. Изображение десятичной дроби без знаменателя. Всякую десятичную дробь мы можем написать без знаменателя. Пусть, например, дана десятичная дробь $\frac{32736}{1000}$. Сначала исключим из неё целое число, получим $32\frac{736}{1000}$. Теперь представим эту дробь так:

$$\frac{32736}{1000}=32+\frac{700}{1000}+\frac{30}{1000}+\frac{6}{1000}=32+\frac{7}{10}+\frac{3}{100}+\frac{6}{1000}.$$

Значит, дробь эту можно изобразить таким образом:

$$\frac{32736}{1000}=32{,}736.$$

Это легко проверить, раздробив в числе 32,736 целые единицы и все десятичные доли в доли самые мелкие (в тысячные), что проще всего сделать так: так как целая единица содержит в себе 10 десятых, то 32 целых составляют 320 десятых; приложив к ним 7 десятых, получим 327 десятых. Так как десятая доля содержит в себе 10 сотых, то 327 десятых составляют 3270 сотых; приложив к ним 3 сотых, получим 3273 сотых. Так как 1 сотая = 10 тысячным, то 3273 сотых = 32730 тысячным; приложив к этому числу ещё 6 тысячных, получим данную дробь, равную 32736 тысячным.

Пусть дана десятичная дробь $\frac{578}{100000}$, в которой нет целого числа. Эту дробь можно представить так:

$$\frac{578}{100000}=\frac{500}{100000}+\frac{70}{100000}+\frac{8}{100000}=\frac{5}{1000}+\frac{7}{10000}+\frac{8}{100000}.$$

Следовательно, дробь эта изобразится таким образом:

$$\frac{578}{100000} = 0,00578.$$

Правило. **Чтобы десятичную дробь написать без знаменателя, достаточно написать её числитель и отделить в нём запятой с правой стороны столько десятичных знаков, сколько нулей в знаменателе** (для чего иногда с левой стороны числителя приходится приписать несколько нулей).

В последующем изложении мы всегда будем предполагать (если не будет сделано особой оговорки), что десятичная дробь изображена без знаменателя.

Замечание. **Приписывание нулей справа или слева десятичной дроби** (написанной без знаменателя) **не изменяет её величины.** Например, каждое из чисел:

7,05; 7,0500; 007,05

выражает одно и то же число: 7 целых 5 сотых, так как 500 десятитысячных равно 5 сотым, а 007 выражает просто 7.

162. Как читается десятичная дробь. Сначала прочитывают целое число (а когда его нет, то говорят: „нуль целых“), затем читают число, написанное после запятой, как если бы оно было целое, и прибавляют название тех долей, которыми десятичное изображение дроби оканчивается; например, 0,00378 читается: 0 целых 378 стотысячных. Значит, десятичная дробь, написанная без знаменателя, прочитывается так, как если бы она была изображена при помощи числителя и знаменателя.

Впрочем, десятичную дробь, у которой очень много десятичных знаков, предпочитают читать иначе: разбивают все десятичные знаки, начиная от запятой, на грани, по 3 знака в каждой грани (кроме последней, в которой может быть один и два знака); затем читают каждую грань как целое число, добавляя к названию числа первой грани слово „тысячных“, второй грани — „миллионных“, третьей — „миллиардных“ и т. д.; к названию числа последней грани добавляют название долей, выражаемых последней цифрой дроби. Таким образом, дробь

0,028 306 000 07

читается так: 0 целых 28 тысячных 306 миллионных 07 стомиллиардных.

163. Сравнение десятичных дробей по величине. Пусть желаем узнать, какое из следующих чисел больше:

$$0{,}735 \text{ или } 0{,}7348.$$

Для этого к числу, у которого десятичных знаков меньше, припишем (хотя бы только мысленно) с правой стороны столько нулей, чтобы число десятичных знаков в обеих числах оказалось одно и то же:

$$0{,}7350; \quad 0{,}7348.$$

Теперь видим, что первое число содержит 7350 десятитысячных, а второе 7348 десятитысячных; знаменатели дробей стали одинаковы; значит, больше будет та из них, у которой числитель больше; так как 7350 больше, чем 7348, то первое число больше второго.

Подобным образом легко убедиться, что

$3{,}01 > 2{,}998$; $3{,}7 > 3{,}6874$; $3{,}64 < 3{,}6985$ и т. д.

Правило. **Из двух десятичных дробей та больше, у которой число целых больше; при равенстве целых — у которой число десятых больше; при равенстве целых и десятых — у которой число сотых больше и т. д.**

164. Изменение величины десятичной дроби от перенесения в ней запятой. Перенесём в числе 3,274 запятую на один знак вправо; тогда получим новое число: 32,74. В первом числе цифра 3 означает простые единицы, а во втором — десятки; следовательно, значение её увеличилось в 10 раз. Цифра 2 означает в первом числе десятые доли, а во втором — простые единицы; следовательно, её значение тоже увеличилось в 10 раз. Также увидим, что значение и прочих цифр увеличилось в 10 раз. Таким образом:

от перенесения запятой вправо на один знак десятичная дробь увеличивается в 10 раз.

Отсюда следует, что от перенесения запятой вправо на два знака десятичная дробь увеличивается в 100 раз, на три знака — в 1 000 раз и т. д.

Обратно: **от перенесения запятой влево на один знак десятичная дробь уменьшается в 10 раз.**

Следовательно, от перенесения запятой влево на два знака дробь уменьшается в 100 раз, от перенесения на три знака — в 1 000 раз и т. д.

165. Увеличение или уменьшение десятичной дроби в 10 раз, в 100 раз, в 1 000 раз и т. д. Пусть требуется увеличить число 0,02 в 10 000 раз. Для этого достаточно перенести в нём запятую на четыре знака вправо. Но в данном числе имеется всего два десятичных знака. Чтобы было четыре знака, припишем с правой стороны два нуля, отчего величина числа не изменится. Перенеся потом запятую на конец числа, получим целое число 0200, или просто 200.

Пусть требуется уменьшить то же число 0,02 в 100 раз. Для этого достаточно перенести в нём запятую на два знака влево. Но в данном числе влево от запятой имеется только один знак. Припишем с левой стороны два нуля, отчего величина числа не изменится. Перенеся потом запятую на два знака влево, получим 0,0002.

Всякое целое число можно рассматривать как десятичную дробь, у которой вправо от запятой стоит сколько угодно нулей; поэтому увеличение и уменьшение целого числа в 10 раз, в 100 раз, в 1000 раз и т. д. совершается так же, как и в десятичной дроби. Например, если уменьшим целое число 567,000... в 100 раз, то получим 5,67.

Замечание. Указанное свойство десятичной дроби изменять при перенесении запятой свою величину в 10 раз, в 100 раз и т. д. позволяет очень быстро делать раздробление и превращение данного именованного числа, выраженного в метрических мерах.

Пусть, например, требуется составное именованное число 3 метра 8 дециметров 4 сантиметра выразить в метрах. Так как дециметр — это десятая доля метра, сантиметр — сотая доля метра, то, очевидно, данное составное именованное число выразится в метрах так: 3,84 метра. Перенося в этой десятичной дроби запятую вправо, найдём, что 3,84 метра = = 38,4 дециметра = 384 сантиметрам.

Пусть ещё требуется простое именованное число 8746 миллиграммов превратить в составное (т. е. выразить в мерах высших разрядов). Так как грамм равен 1 000 миллиграммам, то 8746 миллиграммов = 8,746 грамма = 8 граммам 7 дециграммам 4 сантиграммам 6 миллиграммам.

II. ДЕЙСТВИЯ НАД ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ.

Сложение десятичных дробей.

166. Сложение десятичных дробей производится так же, как и сложение целых чисел. Пусть, например, требуется сложить $2{,}078 + 0{,}75 + 13{,}5602$. Подпишем эти числа друг под другом так, чтобы целые стояли под целыми, десятые под десятыми, сотые под сотыми и т. д.; при этом все запятые располагаются друг под другом:

$$\begin{array}{r} 2{,}078 \\ +\ 0{,}75 \\ 13{,}5602 \\ \hline 16{,}3882 \end{array}$$

Начинаем сложение с наименьших долей. От сложения десятитысячных долей получим 2; пишем эту цифру под чертой. От сложения тысячных получим 8; пишем 8 под чертой. От сложения сотых получим 18; но 18 сотых = 10 сотых + 8 сотых; десять сотых составляют одну десятую; запомним её, чтобы приложить к десятым долям слагаемых, а 8 сотых напишем под чертой. Продолжаем так действие до конца. Запятая в сумме стоит под запятыми в слагаемых.

Вычитание десятичных дробей.

167. Вычитание десятичных дробей производится так же, как и вычитание целых чисел. Пусть, например, требуется сделать вычитание: 5,709—0,3078.

Подпишем вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы единицы одного названия стояли друг под другом:

$$\begin{array}{r} -\,5{,}709 \\ 0{,}3078 \\ \hline 5{,}4012 \end{array}$$

Чтобы вычесть последнюю цифру вычитаемого, возьмём из 9 тысячных 1 тысячную и раздробим её в десятитысячные; получим 10 десятитысячных. Значит, цифру 8 вычитаемого надо вычесть из 10, а цифру 7 из 8.

Так же производится вычитание десятичной дроби из целого числа; например:

$$\begin{array}{r} -\,3\phantom{{,}000} \\ 1{,}873 \\ \hline 1{,}127 \end{array}$$

Берём от 3 единиц одну и раздробляем её в десятые; от них берём одну и раздробляем её в сотые; от сотых берём 1 сотую и раздробляем её в тысячные. От этого вместо 3 целых получим: 2 целых 9 десятых 9 сотых и 10 тысячных. Значит, цифру 3 вычитаемого придётся вычесть из 10, цифры 7 и 8 из 9, а цифру 1 из 2.

Умножение десятичных дробей.

168. Рассмотрим два случая: первый — когда *один из сомножителей целое число*, второй — когда *оба сомножителя десятичные дроби.*

Примеры:

1) 3,085 · 23; 2) 8,375 · 2,56.

Если бы в этих примерах мы изобразили десятичные дроби при помощи числителя и знаменателя и произвели действие по правилу умножения обыкновенных дробей, то получили бы:

$$1)\ \frac{3085}{1000}\cdot 23=\frac{3085\cdot 23}{1000}=\frac{70955}{1000}=70{,}955;$$

$$2)\ \frac{8375}{1000}\cdot\frac{256}{100}=\frac{8375\cdot 256}{1000\cdot 100}=\frac{2144000}{100000}=21{,}44000=21{,}44.$$

Правило. **Чтобы умножить десятичные дроби, достаточно, не обращая внимания на запятые, перемножить их как целые числа и в произведении отделить запятой с правой стороны столько десятичных знаков, сколько их во множимом и во множителе вместе.**

Действие лучше всего располагать так:

$$\begin{array}{r} \cdot\ 3{,}085 \\ 23 \\ \hline 9255 \\ 6170 \\ \hline 70{,}955 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \cdot\ 8{,}375 \\ 2{,}56 \\ \hline 50250 \\ 41875 \\ 16750 \\ \hline 21{,}44000 \end{array}$$

Деление десятичных дробей.

169. Деление на целое число. Приближённое частное.

Пусть требуется разделить 39,47 на 8. Расположим действие так, как оно располагается при делении целых чисел:

$$\begin{array}{l|l} 39{,}47 & 8 \\ \cline{2-2} 74 & 4{,}93 \\ 27 & \\ 3 & \end{array}$$

Делим 39 целых на 8; получаем в частном 4 целых и в остатке 7 целых. Раздробляем остаток в десятые доли и сносим 4 десятых делимого; получаем 74 десятых. Делим 74 десятых на 8; получаем в частном 9 десятых и в остатке 2 десятых. Раздробляем остаток в сотые доли и сносим 7 сотых делимого; получаем 27 сотых. Разделив их на 8, получаем в частном 3 сотых и в остатке 3 сотых.

Положим, что мы на этом прекратили действие. Тогда получим *приближённое частное* 4,93. Чтобы узнать, на сколько оно разнится от точного частного, найдём это точное частное и сравним его с приближённым. Чтобы получить точное частное, достаточно к числу 4,93 приложить дробь, которая получится от деления остатка (3 сотых) на 8. От деления 3 единиц на 8 получим $\frac{3}{8}$ единицы; от деления 3 сотых на 8 получим $\frac{3}{8}$ сотой. Значит, точное частное равно сумме $4{,}93+\frac{3}{8}$ сотой. Отбросив $\frac{3}{8}$ сотой, мы сделаем ошибку, которая меньше целой сотой. Поэтому говорят, что 4,93 есть приближённое частное *с точностью до* $\frac{1}{100}$. Если вместо того, чтобы отбрасывать $\frac{3}{8}$ сотой, мы дополним эту дробь до целой сотой доли $\left(\text{увеличив её на } \frac{5}{8} \text{ сотой}\right)$, то сделаем ошибку, тоже меньшую $\frac{1}{100}$; тогда получим другое приближённое частное $4{,}93+0{,}01$, т. е. 4,94, тоже с точностью до $\frac{1}{100}$. Число 4,93 меньше, а 4,94 больше точного частного, а поэтому говорят, что первое число есть приближённое частное *с недостатком*, а второе — *с избытком*.

Если станем продолжать действие дальше, обращая остатки в десятичные доли, всё более и более мелкие, то будем получать приближённые частные с большей точностью. Так, если обратим остаток 3 сотых в тысячные доли и разделим 30 тысячных на 8, то получим приближённое частное 4,933 (с недостатком) или 4,934 (с избытком), причём ошибка менее 0,001. Продолжая действие дальше, получим:

$$
\begin{array}{l|l}
39{,}47 & 8 \\
\cline{2-2}
\;\;74 & 4{,}93375 \\
\;\;\;\;27 & \\
\;\;\;\;\;\;30 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;60 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;40 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;0 &
\end{array}
$$

Продолжая деление достаточно далеко, мы можем иногда дойти до остатка 0 (как в нашем примере); тогда получим точное частное. В противном случае приходится довольствоваться приближённым частным, причём ошибку можно сделать как угодно малой. Если, например, мы желаем найти приближённое частное с точностью до одной миллионной, то прекращаем деление тогда, когда в частном получилась цифра миллионных долей.

Правило. **Деление десятичной дроби на целое число производится так же, как и деление целых чисел, причём остатки обращают в десятичные доли, всё более и более мелкие, и действие продолжают до тех пор, пока или не получится точное частное, или в приближённом частном не получится цифра тех десятичных долей, которыми хотят ограничиться.**

Так же поступают при делении целого числа на целое, если желают получить частное в виде десятичной дроби. Например, деление 123 на 7 можно выполнить так:

$$\begin{array}{r|l} 123 & \;7 \\ \cline{2-2} 53 & 17{,}57\ldots \\ 40 & \\ 50 & \\ 1 & \end{array}$$

Замечание. Для указания того, что какое-нибудь равенство не точное, а только приблизительное, употребляется иногда искривлённый знак равенства $\approx$; так, если написано:

$$39{,}47 : 8 \approx 4{,}93,$$

то этим хотят выразить, что частное от деления 39,47 на 8 *приблизительно* равно 4,93.

170. Величина погрешности приближённого частного. *Из двух приближённых частных* (взятых с одной и той же точностью), *одного с недостатком, а другого с избытком, какое-нибудь одно всегда точно до $\frac{1}{2}$ десятичной доли последнего разряда,* а именно таким частным будет частное с недостатком, если остаток меньше $\frac{1}{2}$ делителя, и частное с избытком, если остаток больше $\frac{1}{2}$ делителя. Рассмотрим, например, деление 39,47:8 (см. предыдущий параграф). Положим, мы берём приближённое частное 4,93, при котором остаток 3 меньше половины делителя (меньше 4).

Тогда точное частное будет $4{,}93+\frac{3}{8}$ сотой; значит, оно отличается от числа 4,93 на $\frac{3}{8}$ сотой $\left(\text{меньше } \frac{1}{2} \text{ сотой}\right)$, а от числа 4,94 на $\frac{5}{8}$ сотой $\left(\text{более } \frac{1}{2} \text{ сотой}\right)$ (в этом случае выгоднее взять частное с недостатком).

Продолжим деление:

$$\begin{array}{r|l} 39{,}47 & 8 \\ \cline{2-2} 74 & 4{,}933 \\ 27 & \\ 30 & \\ 6 & \end{array}$$

Возьмём теперь в том же примере приближённое частное 4,933, при котором остаток 6 больше половины делителя. Точное частное будет $4{,}933+\frac{6}{8}$ тысячной; значит, оно отличается от числа 4,933 на $\frac{6}{8}$ тысячной $\left(\text{более } \frac{1}{2} \text{ тысячной}\right)$, а от числа 4,934 на $\frac{2}{8}$ тысячной $\left(\text{менее } \frac{1}{2} \text{ тысячной}\right)$ (в этом случае, значит, выгоднее взять частное с избытком).

Когда остаток меньше половины делителя, тогда цифра частного, которая должна бы следовать за той, на которой мы остановились, очевидно, будет меньше 5, а если остаток больше половины делителя, то эта цифра должна быть 5 или больше 5.

171. Деление на десятичную дробь. Пусть требуется разделить 3,753 на 0,85. Для этой цели перенесём в делимом и в делителе запятую вправо на такое *одинаковое* число десятичных знаков (в нашем примере на 2), чтобы *делитель обратился в целое число*. Так как при этом делимое и делитель увеличатся в одинаковое число раз (в нашем примере в 100 раз), то частное от этого не изменится (§ 155). Таким образом, деление на десятичную дробь мы сведём к делению на целое число:

$$375{,}3:85\approx 4{,}415,$$

которое выполняется так, как указано было ранее.

Точно так же поступают при делении целого числа на десятичную дробь; например:

$$7:0{,}325=7000:325\approx 21{,}538.$$

Правило. **Чтобы разделить какое-нибудь число на десятичную дробь, надо отбросить в делителе запятую и, увеличив делимое во столько раз, во сколько увели-**

чился делитель отбрасыванием в нём запятой, разделить по правилу деления на целое число.

172. Пример на вычисление с десятичными дробями. Пусть требуется вычислить дробь:

$$\frac{7,5 \cdot 0,09 \cdot 3,725}{0,18 \cdot 2,7 \cdot 3,2675}.$$

Отбросим в этой дроби все запятые и посмотрим, как изменится от этого величина дроби. Числитель её увеличится в $10 \cdot 100 \cdot 1000$ раз, т. е. в 1 000 000 раз. Знаменатель увеличится в $100 \cdot 10 \cdot 10\,000$ раз, т. е. в 10 000 000 раз. Чтобы величина дроби не изменилась, надо числитель увеличить ещё в 10 раз, например вместо числа 9, полученного отбрасыванием запятой в дроби 0,09, взять 90. Теперь вычислим выражение:

$$\frac{75 \cdot 90 \cdot 3725}{18 \cdot 27 \cdot 32675};$$

сократив предварительно числа 75 и 18 на 3, числа 90 и 27 на 9 и числа 3725 и 32675 на 25, получим:

$$\frac{25 \cdot 10 \cdot 149}{6 \cdot 3 \cdot 1307} = \frac{37250}{23526} \approx 1,58.$$

173. Процентные вычисления с десятичными дробями. При процентных вычислениях, как мы видим, часто приходится умножать и делить на 100; а так как эти действия особенно просто выполняются над десятичными дробями, то при всякого рода процентных вычислениях пользование десятичными дробями оказывается особенно удобным. Рассмотрим несколько задач.

Задача 1. Сколько дохода принесёт за 2 года и 3 месяца сумма в 728 рублей, положенная в сберегательную кассу?

Так как касса приносит $3^0/_0$ годового дохода, то годовой доход составляет $3^0/_0$ или 0,03 числа 728, т. е.

$$728 \cdot 0,03 = 21,84 \,(= 21 \text{ руб. } 84 \text{ коп.}).$$

Доход за 3 месяца, т. е. за 0,25 года, составит 0,25 годового дохода, т. е.

$$21,84 \cdot 0,25 = 5,46 \,(= 5 \text{ руб. } 46 \text{ коп.}).$$

Доход же за 2 года и 3 месяца составит

$$21,84 \cdot 2 + 5,46 = 49,14 \,(= 49 \text{ руб. } 14 \text{ коп.}).$$

Задача 2. $3,4\%$ неизвестного числа составляют 1,6388. Найти это число.

По правилу § 149 мы должны разделить число 1,6388 на 3,4 и результат помножить на 100.

Находим:

$$\frac{1,6388}{3,4} \cdot 100 = \frac{1638,8}{34} = 48,2.$$

Задача 3. В сберегательную кассу помещён вклад. Через 9 месяцев вклад взят обратно, причём вкладчику выдано 633 руб. 95 коп. Найти сумму первоначального вклада.

Годовой доход вкладчика составляет 3%, или 0,03 неизвестного вклада. Значит, доход за 9 месяцев $\left(\text{т. е. за } \frac{3}{4}, \text{ или } 0,75 \text{ года}\right)$ составит:

$$0,03 \cdot 0,75 = 0,0225 \; (= 2,25\%)$$

неизвестного вклада. Таким образом, полученная вкладчиком сумма 633,95 рубля составляет 1,0225 (или $102,25\%$) неизвестного вклада. Чтобы найти этот вклад, мы должны разделить 633,95 на 1,0225:

$$\frac{633,95}{1,0225} = 620 \text{ (рублей)}.$$

Задача 4. Оборот магазина по плану составлял 75300 рублей; на самом деле этот оборот составил 85842 рубля. На сколько процентов выполнен план?

Для решения этой задачи мы должны найти процентное отношение чисел 85842 и 75300, т. е. выразить отношение $\frac{85842}{75300}$ в сотых долях; с этой целью проще всего выразить частное от деления данных чисел в виде десятичной дроби, как это показано в § 171:

$$\frac{85842}{75300} = 1,14;$$

таким образом, план выполнен на 114%.

III. ОБРАЩЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ В ДЕСЯТИЧНЫЕ.

174. Предварительные замечания. Так как действия над десятичными дробями производятся проще, чем над дробями обыкновенными, то часто бывает полезно обращать обыкновенные дроби в десятичные[1]). Укажем два способа такого обращения.

175. Первый способ: посредством разложения знаменателя на простые множители. Пусть требуется обратить дробь $\frac{7}{40}$ в десятичную. Для этого зададимся вопросом: нельзя ли привести эту дробь к такому знаменателю, который выражался бы единицей с нулями. Если бы это оказалось возможным, то мы получили бы тогда десятичную дробь, написанную при помощи числителя и знаменателя, а такую дробь мы затем не затруднились бы написать и без знаменателя. Чтобы привести несократимую дробь к другому знаменателю, надо оба её члена умножить на одно и то же число (§ 132). Чтобы узнать, на какое число надо умножить 40 для получения единицы с нулями, примем во внимание, *что всякое число, выражаемое единицей с нулями, разлагается только на множители 2 и 5, причём оба эти множителя входят в разложение одинаковое число раз, именно столько раз, сколько стоит нулей при единице.*

Например:

$$1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5;$$
$$10000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \text{ и т. п.}$$

Заметив это, разложим 40 на простые множители:

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5.$$

Из этого разложения видим, что если умножить 40 два раза на 5, то после умножения получится такое число, в которое 2 и 5 будут входить множителями одинаковое число раз (по 3 раза); значит, тогда получится число, выражаемое единицей с нулями (с тремя нулями). Чтобы при этом дробь не изменила своей величины, надо и числитель её умножить 2 раза на 5; тогда:

$$\frac{7}{40} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 5}{40 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{175}{1000} = 0{,}175.$$

---

[1]) Впрочем, при совершении вычислений над дробями десятичными и обыкновенными совместно не всегда целесообразно приводить эти дроби к одному виду: если, например, требуется 0,567 умножить на $\frac{3}{7}$, то нет надобности обращать $\frac{3}{7}$ в десятичную дробь, можно 0,567 умножить на 3 и результат разделить на 7.

Примеры:

1) $\frac{7}{8}=\frac{7}{2\cdot2\cdot2}=\frac{7\cdot5\cdot5\cdot5}{2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5}=\frac{875}{1000}=0{,}875;$

2) $\frac{4}{125}=\frac{4}{5\cdot5\cdot5}=\frac{4\cdot2\cdot2\cdot2}{5\cdot5\cdot5\cdot2\cdot2\cdot2}=\frac{32}{1000}=0{,}032;$

3) $\frac{11}{20}=\frac{11}{2\cdot2\cdot5}=\frac{11\cdot5}{2\cdot2\cdot5\cdot5}=\frac{55}{100}=0{,}55.$

176. Какие обыкновенные дроби обращаются в десятичные и какие не обращаются. Из указанного способа обращения обыкновенных дробей в десятичные можно вывести два следующих следствия:

1) Если знаменатель обыкновенной дроби не содержит никаких иных простых множителей, кроме 2 и 5, то такая дробь обращается в десятичную, причём эта десятичная дробь имеет столько десятичных знаков, сколько раз в знаменателе обыкновенной дроби после сокращения её повторяется тот из множителей 2 и 5, который входит в него большее число раз.

Пусть, например, в знаменателе обыкновенной дроби после её сокращения больше повторяется множитель 2 и пусть этот множитель входит 4 раза. Тогда придётся добавлять множитель 5 столько раз, чтобы после добавления оба множителя (2 и 5) входили по 4 раза; значит, после умножения в знаменателе получится 1 с четырьмя нулями, а потому и десятичная дробь будет иметь 4 десятичных знака. Например:

$$\frac{7}{80}=\frac{7}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5}=\frac{7\cdot5\cdot5\cdot5}{80\cdot5\cdot5\cdot5}=\frac{875}{10000}=0{,}0875.$$

2) Если знаменатель обыкновенной дроби содержит в себе какие-либо простые множители, отличающиеся от 2 и 5, и эти множители не сокращаются с числителем, то такая дробь не обращается в десятичную.

Возьмём, например, дробь $\frac{35}{84}$, в которой знаменатель содержит простые множители 3 и 7 (именно $84=2\cdot2\cdot3\cdot7$). Один из них (7) сокращается; после сокращения получим $\frac{5}{12}$. Так как 12 содержит множитель 3, то эта дробь не обращается в десятичную, потому что на какие бы целые числа мы ни умножали знаменатель её, никогда не получим число, изображаемое единицей с нулями.

Такие дроби можно обращать лишь в *приближённые десятичные*, применяя второй способ обращения.

177. Второй способ: посредством деления числителя на знаменатель. Этот способ более употребителен, чем первый; так как он применим и к таким обыкновенным дробям, которые обращаются только в приближённые десятичные дроби.

Пусть требуется обратить дробь $\frac{23}{8}$ в десятичную. Число $\frac{23}{8}$ можно рассматривать как частное от деления 23 на 8 (§ 151, правило 1-е). Но частное от деления целых чисел, как мы видели, можно найти в виде десятичной дроби, точно или приближённо. Для этого надо только обращать остатки от деления в десятичные доли, всё более и более мелкие, до тех пор, пока не получится в остатке нуль или пока не получится в частном доли того разряда, дальше которого не желают идти.

$$
\begin{array}{l|l}
23 & 8 \\ \cline{2-2}
\ \ 70 & 2,875 \\
\ \ \ \ 60 & \\
\ \ \ \ \ \ 40 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 0 &
\end{array}
$$

В нашем примере получилось точное частное: $\frac{23}{8} = 2,875$.

Пусть требуется обратить $\frac{3}{14}$ в десятичную дробь. Так как эта дробь несократима и знаменатель её содержит простой множитель 7, отличный от 2 и 5, то её нельзя обратить в десятичную; однако можно найти такую десятичную дробь, которая п р и б л и з и т е л ь н о будет равна $\frac{3}{14}$ и притом с какой угодно точностью. Если, например, мы желаем найти десятичную дробь, которая отличалась бы от $\frac{3}{14}$ менее, чем на 0,001, то достаточно найти 3 десятичных знака от деления 3 на 14:

$$
\begin{array}{l|l}
3 & 14 \\ \cline{2-2}
30 & 0,214 \\
\ \ 20 & \\
\ \ \ \ 60 & \\
\ \ \ \ \ \ 4 &
\end{array}
$$

Приближённое частное 0,214 отличается от точного частного, т. е. от $\frac{3}{14}$, менее чем на половину тысячной. Если продолжать деление дальше, то погрешность становится всё меньше и меньше. Однако деление никогда не может окончиться, потому что в противном случае мы получили бы десятичную дробь, которая в точности равна $\frac{3}{14}$, что невозможно; таким образом, продолжая деление, мы можем получить в частном сколько угодно десятичных знаков.

178. Конечные и бесконечные десятичные дроби. Округление числа. Если простая дробь, например $\frac{3}{14}$, не может быть представлена в виде десятичной дроби, то мы всё же можем, как показано в § 177, производя деление 3 на 14, писать всё новые и новые цифры частного, получая, таким образом, всё новые и новые десятичные дроби; эти десятичные дроби дают всё лучшие и лучшие приближения к числу $\frac{3}{14}$; поэтому в этом случае условились говорить, что число $\frac{3}{14}$ разлагается в *бесконечную* десятичную дробь:

$$\frac{3}{14}=0,214\ldots;$$

здесь три точки означают, что ряд цифр частного не исчерпывается проставленными цифрами (2, 1, 4), а может быть продолжен без конца; поэтому с таким же правом мы могли бы написать:

$$\frac{3}{14}=0,2\ldots;\ \frac{3}{14}=0,21\ldots;\ \frac{3}{14}=0,2142\ldots;\ \text{и т. д.}$$

В отличие от таких бесконечных десятичных дробей те десятичные дроби, которыми мы занимались до сих пор, называют *конечными* десятичными дробями.

Бесконечные десятичные дроби (а также и конечные с большим числом десятичных знаков) для практических надобностей приходится *округлять*, беря вместо точной дроби приближённую, с желаемой точностью, с недостатком или с избытком (§ 169). Так, если желаем ограничиться точностью до одной сотой, то вместо дроби

$$3,141592653\ldots$$

берём приближение 3,14 (с недостатком); если же по условиям вопроса желательна точность до одной тысячной, то берём 3,142 (с избытком).

179. Периодические дроби. Бесконечная десятичная дробь, у которой одна или несколько цифр неизменно повторяются в одной и той же последовательности, называется *периодической* десятичной дробью, а совокупность повторяющихся цифр называется *периодом* этой дроби.

Периодические дроби бывают *чистые* и *смешанные*. Чистой периодической дробью называется такая, у которой период начинается тотчас после запятой, например 2,363636...; смешанной — такая, у которой между запятой и первым периодом есть одна или несколько цифр не повторяющихся, например 0,5232323... . Периодические дроби пишут сокращённо так:

вместо	2,3636...	пишут:	2, (36)
„	0,52323...	„	0,5(23),

т. е. заключают в скобки период.

180. Бесконечная десятичная дробь, получающаяся при обращении обыкновенной дроби, должна быть периодической. Убедимся в этом свойстве на каком-нибудь примере. Пусть желаем обратить дробь $\frac{19}{7}$ в десятичную. Так как знаменатель 7 не составлен из множителей 2 и 5 и данная дробь несократима, то она не может обратиться в конечную десятичную дробь. Следовательно, она обращается в бесконечную десятичную дробь. Чтобы получить несколько её первых десятичных знаков, станем делить 19 на 7. Так как деление не может окончиться:

```
19 |7
 50 2,71428571...,
  10
   30
    20
     60
      40
       50
        10
         3
```

то остатков должно быть бесконечно много. Но остатки всегда меньше делителя; поэтому *различных* остатков не может быть больше шести следующих: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Из этого следует, что при достаточном продолжении деления остатки непременно начнут п о в т о р я т ь с я. Действительно, седьмой остаток оказывается такой же, как и первый. Но если повторился остаток, то, приписав к нему нуль, мы получим такое же делимое, какое было раньше (50); значит, в частном начнут получаться те же цифры, какие были раньше, т. е. в частном получится периодическая дробь. В нашем примере период начался с первой цифры после запятой, и потому получилась чистая периодическая дробь. В других примерах может случиться, что период начнётся не с первой цифры, а, например, с третьей или с какой-нибудь иной; тогда получится смешанная периодическая дробь.

IV. ОБРАЩЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ В ОБЫКНОВЕННЫЕ.

181. Предварительное замечание. В § 180 мы видели, что при обращении простой дроби в десятичную всегда получается десятичная дробь либо конечная, либо периодическая. Пусть теперь, наоборот, дана периодическая десятичная дробь, и мы хотим узнать, какова та простая дробь, при разложении которой получается данная периодическая дробь. Для этого сначала рассмотрим, какие периодические дроби получаются от обращения таких обыкновенных, у которых числитель есть единица, а знаменатель — цифра 9, написанная один или несколько раз подряд, например $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$ и т. д.

$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{99}$	$\frac{1}{999}$
$\begin{array}{r\|l} 1 & 9 \\ \hline 10 & 0,111\ldots \\ \underline{10} & \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 1 & 99 \\ \hline 100 & 0,0101\ldots \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 1 & 999 \\ \hline 1000 & 0,001001\ldots \\ 1 & \end{array}$
$\frac{1}{9}=0,(1)$	$\frac{1}{99}=0,(01)$	$\frac{1}{999}=0,(001).$

Из рассмотрения этих делений легко вывести, что в таких периодических дробях период состоит или из единицы, или из единицы, предшествуемой нулями, причём в периоде столько цифр, сколько раз в знаменателе дроби повторяется цифра 9.

182. Обращение чистой периодической дроби в обыкновенную. Пусть желаем найти обыкновенную дробь, от которой происходит чистая периодическая 0,2323 ... . Для этого сравним эту периодическую дробь с другой, более простой, у которой период имеет столько же цифр, но состоит из единицы, предшествуемой нулями:

$$0{,}232323\ldots$$
$$0{,}010101\ldots$$

Первая дробь содержит: 23 сотых 23 десятитысячных 23 миллионных и т. д.; вторая дробь содержит: 1 сотую 1 десятитысячную 1 миллионную и т. д. Значит, в первой дроби содержится десятичных долей всех этих разрядов в 23 раза более, чем во второй. Поэтому если существует обыкновенная дробь, от обращения которой получается периодическая 0,(23), то она должна быть в 23 раза более обыкновенной дроби, от которой происходит 0,(01)[1]; но дробь 0,(01) происходит, как мы видели, от $\frac{1}{99}$; следовательно, дробь 0,(23) должна происходить от $\frac{23}{99}$. И действительно:

$$\begin{array}{r|l}
23 & 99 \\ \hline
230 & 0{,}23\ldots \\
198 & \\ \hline
320 & \\
297 & \\ \hline
23 &
\end{array}$$

$$\frac{23}{99} = 0{,}232323\ldots = 0{,}(23).$$

Правило. **Чтобы обратить чистую периодическую дробь в обыкновенную, достаточно её период сделать числителем, а знаменателем написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде.**

Примеры: 1) $0{,}(7) = \frac{7}{9}$; 2) $2{,}(05) = 2\frac{5}{99}$;

3) $0{,}(063) = \frac{63}{999} = \frac{7}{111}$.

183. Обращение смешанной периодической дроби в обыкновенную. Пусть требуется найти обыкновенную дробь, от которой происходит смешанная периодическая 0,3(52).

[1]) Более строгое обоснование этого утверждения см. в § 190.

Для этого перенесём в последней запятую на одно место вправо; тогда получим чистую периодическую дробь 3,(52), которая происходит от обыкновенной $3\frac{52}{99}$. Но, перенеся запятую на один знак вправо, мы увеличили дробь в 10 раз; следовательно, дробь $3\frac{52}{99}$ будет в 10 раз более той, от которой произошла дробь 0,3(52). Поэтому, чтобы найти искомую дробь, достаточно $3\frac{52}{99}$ разделить на 10. Таким образом,

$$0{,}35252\ldots = 3{,}(52):10 = 3\frac{52}{99}:10 = \frac{349}{99}:10 = \frac{349}{990}.$$

И действительно,

$$\begin{array}{l|l}
\underline{349} & \underline{\;990\;} \\
\underline{3490} & 0{,}352\ldots \\
\underline{2970} & \\
\;\;5200 & \\
\;\;\underline{4950} & \\
\;\;\;\;2500 & \\
\;\;\;\;\underline{1980} & \\
\;\;\;\;\;\;520 &
\end{array}
\qquad
\frac{349}{990} = 0{,}3525252\ldots = 0{,}3(52).$$

Можно вывести очень удобное правило для обращения смешанной периодической дроби в обыкновенную; для этого обратим внимание на то, как можно выполнить деление смешанного числа $3\frac{52}{99}$ на 10. Сначала обратим смешанное число в неправильную дробь. Для этого следует 3 умножить на 99 и приложить потом 52. Но, вместо того чтобы умножить 3 на 99, мы можем умножить 3 на 100 и уменьшить результат на 3. Таким образом,

$$3\frac{52}{99} = \frac{3\cdot 99 + 52}{99} = \frac{3\cdot 100 - 3 + 52}{99}.$$

Вместо того чтобы вычесть 3, а потом приложить 52, можно сначала приложить 52, а потом вычесть 3. Следовательно,

$$3\frac{52}{99} = \frac{3\cdot 100 + 52 - 3}{99} = \frac{352 - 3}{99}.$$

Остаётся уменьшить эту дробь в 10 раз, т. е. приписать к её знаменателю нуль; тогда мы получим ту обыкновенную дробь, от которой происходит периодическая 0,3(52). Таким образом,

$$0{,}35252\ldots=\frac{352-3}{990}=\frac{349}{990}.$$

Рассуждая подобно предыдущему, найдём, что:

$$0{,}26444\ldots=\frac{264-26}{900}=\frac{238}{900}=\frac{119}{450};$$

$$5{,}7888\ldots=\frac{578-57}{90}=\frac{521}{90}=5\frac{71}{90},$$

или

$$5{,}7888\ldots=5\,\frac{78-7}{90}=5\frac{71}{90}.$$

Правило. **Чтобы обратить смешанную периодическую дробь в обыкновенную, достаточно из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и полученную разность взять числителем, а знаменателем написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями, сколько цифр между запятой и периодом.**

184. Какие обыкновенные дроби обращаются в чистые периодические и какие — в смешанные. Мы уже знаем, что всякая обыкновенная дробь при обращении в десятичную даёт либо конечную, либо периодическую десятичную дробь. Мы знаем также, в каких случаях получается конечная и в каких — периодическая десятичная дробь. Теперь мы выясним, в каких случаях получающаяся периодическая дробь будет чистой и в каких — смешанной. При этом правила, которые мы укажем, будут обоснованы в ближайших параграфах; здесь же мы приводим лишь несколько предварительных соображений, говорящих в пользу этих правил.

1. Обыкновенная дробь, знаменатель которой после сокращения не содержит множителей 2 и 5, обращается в чистую периодическую дробь.

Например:

$$\frac{3}{7}=0{,}(428571);\quad \frac{2}{3}=0{,}(6);\quad \frac{5}{11}=0{,}(45).$$

Действительно, во-первых, такая дробь должна обратиться в какую-нибудь периодическую (§ 180); во-вторых, эта периодическая дробь не может быть смешанной, потому что смешанная периодическая дробь, как мы видели, обращается в такую обыкновенную дробь, знаменатель которой содержит множители 2 и 5. Следовательно, данная дробь должна обратиться в чистую периодическую.

2. Обыкновенная дробь, знаменатель которой, после сокращения, вместе с другими множителями содержит множители 2 или 5, или оба, обращается в смешанную периодическую дробь.

Например:

$$\frac{35}{42}=\frac{5}{6}=0{,}8(3);\quad \frac{8}{15}=0{,}5(3);$$

$$\frac{119}{450}=0{,}26(4) \text{ и т. д.}$$

Действительно, во-первых, такая дробь должна обратиться в какую-нибудь периодическую; во-вторых, эта периодическая дробь не может быть чистой, потому что чистая периодическая дробь, как мы видели, происходит от такой обыкновенной, знаменатель которой не содержит множителей 2 и 5. Следовательно, данная дробь должна обратиться в смешанную периодическую дробь.

Обоснование теории периодических дробей.

185. *Замечание.* Предыдущее изложение обращения периодических дробей в обыкновенные не вполне строго; в нём, между прочим, допускается (§ 182), что если каждое слагаемое увеличится в несколько раз, то и сумма увеличится во столько же раз. Предложение это, вполне обоснованное для сумм с *конечным* числом слагаемых, не может быть применено без особого доказательства к суммам с *бесконечным* числом слагаемых (каковы все периодические бесконечные дроби).

Строгая теория периодических дробей основана на понятии о пределе. Изложим вкратце эту теорию.

186. Предел последовательности чисел. Пусть дана бесконечная последовательность числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. Условимся называть число a *пределом* этой последовательности, если разность $a_n - a$ по абсолютной величине становится как угодно малой для всех достаточно больших n. Так, последовательность чисел

$$1+1,\quad 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, \ldots,\quad 1+\frac{1}{n}, \ldots$$

имеет пределом число 1, потому что разность

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=\frac{1}{n}$$

становится как угодно малой для всех достаточно больших n.

187. Если в бесконечной десятичной дроби мы возьмём несколько первых десятичных знаков, а остальные отбросим, то получится конечная десятичная дробь, которую мы будем называть отрезком данной бесконечной дроби.

Так, дроби

$$0,8;\ 0,83;\ 0,833;\ 0,8333 \text{ и т. д.}$$

служат отрезками бесконечной периодической дроби 0,8(3). Вообще каждая бесконечная десятичная дробь имеет бесконечную последовательность отрезков, при этом каждый из этих отрезков есть конечная десятичная дробь.

Теорема 1. Обыкновенная дробь, обращающаяся в бесконечную десятичную, есть предел последовательности отрезков этой бесконечной десятичной дроби.

Доказательство. В самом деле, мы знаем, что первый (т. е. заканчивающийся на первом десятичном знаке) отрезок полученной бесконечной десятичной дроби отличается от данной простой дроби меньше чем на $\frac{1}{10}$; второй отрезок отличается от неё меньше чем на $\frac{1}{100}$; третий — меньше чем на $\frac{1}{1000}$ и т. д. Поэтому всякий отрезок, взятый с достаточно большим числом знаков, будет отличаться от данной простой дроби как угодно мало; но по определению предела это и означает, что данная простая дробь есть предел последовательности отрезков той бесконечной десятичной дроби, в которую она разлагается.

188. *Теорема 2. Если две обыкновенные дроби равны между собой, то они обращаются в одну и ту же десятичную дробь* (конечную или бесконечную).

Доказательство. Пусть дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{a_1}{b_1}$ равны. Предположим, что, обращая их в десятичные дроби (деля числитель на знаменатель), мы остановились на тысячных долях. Тогда мы узнаем *наибольшее* число тысячных, заключающееся в каждой из дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{a_1}{b_1}$ (так как, увеличив частное хотя бы на 1 тысячную, мы получили бы больше, чем следует при правильном делении). Но по условию дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{a_1}{b_1}$ равны; следовательно, наибольшее число тысячных долей, заключающееся в каждой из них, должно быть одно и то же. Таким образом, три первых десятичных знака обеих десятичных дробей, получающихся от обращения дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{a_1}{b_1}$, должны быть одинаковы. Таким же рассуждением убедимся, что *любое число* десятичных знаков должно быть одинаково; другими словами, обе дроби должны в точности совпадать между собой.

189. *Теорема 3* (обратная предыдущей). *Если две обыкновенные дроби обращаются в одну и ту же десятичную дробь* (конечную или бесконечную), *то они равны.*

Доказательство. Пусть дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{a_1}{b_1}$ обращаются в одну и ту же десятичную дробь N. Если эта дробь конечная, то мы будем иметь точные равенства:

$$\frac{a}{b}=N \text{ и } \frac{a_1}{b_1}=N;$$

следовательно,

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}.$$

Если же дробь N бесконечная, то каждая из дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{a_1}{b_1}$ равна пределу последовательности отрезков дроби N и, следовательно,

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}.$$

190. *Теорема 4.* *Последовательность отрезков чистой периодической дроби имеет предел, равный обыкновенной дроби, у которой числитель есть разность между числом, стоящим до второго периода, и числом, стоящим до первого периода, а знаменатель — цифра 9, написанная столько раз подряд, сколько цифр в периоде.*

Доказательство. Возьмём, например, чистую периодическую дробь 7,2323... . Обозначим буквой X_n отрезок этой дроби, включающий в себя n периодов, т. е. положим:

$$7{,}\overbrace{2323...23}^{n}=7+\frac{23}{100}+\frac{23}{100^2}+\ldots+\frac{23}{100^n}=X_n.$$

Умножим обе части этого равенства на 100:

$$723{,}\overbrace{23\,23...23}^{n-1}=723+\frac{23}{100}+\frac{23}{100^2}+\ldots+\frac{23}{100^{n-1}}=100X_n.$$

Вычтя из этого равенства предыдущее, найдём:

$$723-7-\frac{23}{100^n}=99X_n,$$

откуда

$$\frac{723-7}{99}-\frac{23}{100^n\cdot 99}=X_n,$$

или

$$\frac{723-7}{99}-X_n=\frac{23}{100^n\cdot 99}.$$

Из последнего равенства видно, что по мере увеличения числа периодов n разность между постоянным числом $(723-7):99$ и числом X_n делается и остаётся меньше любого данного числа (как бы мало это число ни было); а это значит, что

$$\text{предел } X_n=\frac{723-7}{99}=7\frac{23}{99}.$$

Из способа получения этого предела видно, что 723 есть число, стоящее до второго периода, а 7 — число, стоящее до первого периода; значит, числитель удовлетворяет тому, что говорится в теореме. Знаменатель также удовлетворяет теореме, так как цифра 9 повторяется столько раз, сколько цифр в периоде.

Заметим, что целое число периодической дроби мы могли бы от неё отделить, т. е. писать так:

$$\text{предел } 7,(23) = 7 + \text{предел } 0,(23) = 7 + \frac{23}{99} = 7\frac{23}{99}.$$

191. ***Теорема 5.*** *Последовательность отрезков смешанной периодической дроби имеет предел, равный обыкновенной дроби, у которой числитель есть разность между числом, стоящим до второго периода, и числом, стоящим до первого периода, а знаменатель — цифра 9, написанная столько раз подряд, сколько цифр в периоде, со столькими нулями на конце, сколько цифр между запятой и первым периодом.*

Доказательство. Возьмём смешанную периодическую дробь, например такую:

$$8,52(375),$$

и положим снова:

$$8,52375\,\overbrace{375\ldots375}^{n} = 8 + \frac{52}{100} + \frac{375}{100\cdot 1000} + \frac{375}{100\cdot 1000^2} + \ldots + \frac{375}{100\cdot 1000^n} = X_n.$$

Умножив обе части этого равенства на 100, а затем полученное равенство на 1000, получим:

$$852 + \frac{375}{1000} + \ldots + \frac{375}{1000^n} = 100X_n;$$

$$852375 + \frac{375}{1000} + \ldots + \frac{375}{1000^{n-1}} = 100000X_n.$$

Вычтя из последнего равенства предыдущее, найдём:

$$852375 - 852 - \frac{375}{1000^n} = 99900X_n,$$

откуда

$$\frac{852375 - 852}{99900} - \frac{375}{1000^n\cdot 99900} = X_n,$$

или

$$\frac{852375 - 852}{99900} - X_n = \frac{375}{1000^n\cdot 99900}.$$

Из последнего равенства видно, что при неограниченном возрастании n

$$\text{предел } X_n = \frac{852375 - 852}{99900} = 8\frac{52323}{99900}.$$

Целое число периодической дроби мы могли бы и здесь отделить от неё, т. е. писать так:

$$\text{предел } X_n = 8 + \text{предел } 0,52(375) = 8 + \frac{52375 - 52}{99900},$$

Примеры:

$$1)\ 2,(05)=\frac{205-2}{99}=\frac{203}{99}=2\frac{5}{99}.$$

$$2)\ 0,(063)=\frac{63}{999}=\frac{7}{111}.$$

$$3)\ 0,26(4)=\frac{264-26}{900}=\frac{238}{900}=\frac{119}{450}.$$

$$4)\ 5,7(8)=\frac{578-57}{90}=\frac{521}{90}=5\frac{71}{90}, \text{ или } 5,7(8)=5\frac{78-7}{90}=5\frac{71}{90}.$$

192. *Замечание.* Теоремы 4 и 5 показывают, что последовательность отрезков каждой периодической десятичной дроби имеет пределом некоторую обыкновенную дробь. Отсюда следует на основании теоремы 1, что если вообще существует такая обыкновенная дробь, которая разлагается в данную периодическую дробь, то эта обыкновенная дробь равна пределу данной периодической дроби.

Однако из предшествующих теорем ещё не следует, что для всякой периодической дроби найдётся такая обыкновенная дробь, которая в неё разлагается. И на самом деле, не для всякой периодической дроби это верно, как мы сейчас увидим.

193. *Теорема 6. Если период данной периодической дроби состоит из одной цифры 9, то не существует такой обыкновенной дроби, которая разлагалась бы в данную периодическую дробь. Во всех других случаях та обыкновенная дробь, которая служит пределом данной последовательности отрезков периодической дроби, разлагается в неё.*

Это означает, что, написав любую (чистую или смешанную) периодическую дробь, только бы её период не состоял из одной девятки, мы всегда можем найти обыкновенную дробь, разлагающуюся в данную периодическую дробь; напротив, периодическая дробь, имеющая периодом цифру 9, не может служить разложением никакой обыкновенной дроби.

Доказательство. 1) Пусть дана любая периодическая дробь с периодом 9, например 5,28(9). Если бы существовала обыкновенная дробь, которая при разложении в десятичную давала 5,28(9), то, как мы знаем, эта обыкновенная дробь должна была бы равняться пределу последовательности отрезков данной периодической дроби; но для дроби 5,28(9) этот предел есть согласно теореме 5

$$\frac{5289-528}{9\cdot 10^2}=\frac{5280+9-528}{9\cdot 10^2}=\frac{528\cdot 10-528+9}{9\cdot 10^2}=$$
$$=\frac{528\cdot 9+9}{9\cdot 10^2}=\frac{528+1}{10^2},$$

т. е. дробь, знаменатель которой не содержит других простых множителей, кроме 2 и 5; такая обыкновенная дробь, как мы знаем, разлагается в конечную, а не периодическую десятичную дробь. Мы провели доказательство на примере (для наглядности), но приведённое нами рассуждение, очевидно, остаётся верным для любой периодической дроби с периодом 9.

2) Пусть теперь дана периодическая дробь с периодом, состоящим либо из нескольких цифр, либо из одной цифры, отличной от 9, например 7,(23). При доказательстве теоремы 4 мы полагали

$$7,\overbrace{2323...23}^{n} = X_n$$

и видели, что, когда n растёт,

$$7\frac{23}{99} = \frac{723-7}{99} = \text{пределу } X_n;$$

точнее мы имели там

$$\frac{723-7}{99} - X_n = \frac{23}{100^n \cdot 99} < \frac{1}{100^n},$$

так как $\frac{23}{99} < 1$ (именно это последнее неравенство, которое остаётся верным для любого периода, отличного от 9, позволяет распространить рассуждение, проведённое нами для частного примера на любые дроби с периодом, отличным от 9). Но это значит, что конечная десятичная дробь X_n со знаменателем 100^n служит для числа $\frac{723-7}{99}$ приближением (с недостатком) с точностью до $\frac{1}{100^n}$; такими приближениями являются, как мы знаем, те отрезки, которые получаются при разложении данного числа в десятичную дробь; значит, X_n есть отрезок разложения числа $\frac{723-7}{99}$; а так как n произвольно, то разложение числа $\frac{723-7}{99}$ в десятичную дробь действительно совпадает с данной периодической дробью 7,(23).

194. *Следствия.* 1) *Знаменатель обыкновенной дроби, обращающейся в чистую периодическую, после сокращения не содержит множителей 2 и 5, так как согласно теореме 4 он всегда может быть представлен числом, оканчивающимся цифрой 9, и поэтому не может делиться ни на 2, ни на 5, тем более не может он содержать этих множителей после сокращения дроби.*

2) *Знаменатель обыкновенной дроби, обращающейся в смешанную периодическую, содержит множитель 2 или 5, или тот и другой вместе.*

Действительно, этот знаменатель согласно теореме 5 может быть представлен числом, которое оканчивается нулём, и потому делится и на 2, и на 5. Оба эти множители могли бы сократиться с числителем только тогда, если бы числитель оканчивался нулём. Но числитель получается от вычитания числа, стоящего до первого периода, из числа, стоящего до второго периода; так как последняя цифра периода не может оказаться одинаковой с последней цифрой до периода (если период начат с надлежащего места), то числитель не может оканчиваться нулём. Поэтому и после сокращения (если такое возможно) в знаменателе останется либо множитель 2, либо 5, либо тот и другой вместе.

3) *Обыкновенная дробь, знаменатель которой не содержит множителей 2 и 5, обращается в чистую периодическую дробь.*

Например:

$$\frac{3}{7}=0,(428571);\quad \frac{2}{3}=0,(6);\quad \frac{5}{11}=0,(45).$$

Действительно: 1) такая дробь должна обратиться в какую-нибудь периодическую (§ 180); 2) эта периодическая дробь не может быть смешанной, потому что в смешанную периодическую дробь, как мы видели, может обратиться только такая обыкновенная дробь, знаменатель которой содержит множители 2 и 5. Следовательно, данная дробь должна обратиться в чистую периодическую.

4) *Обыкновенная дробь, знаменатель которой после сокращения вместе с другими множителями содержит множитель 2 или 5* (или оба), *обращается в смешанную периодическую дробь.* Например:

$$\frac{35}{42}=\frac{5}{6}=0,8(3);\quad \frac{8}{15}=0,5(3);\quad \frac{119}{450}=0,26(4) \text{ и т. п.}$$

Действительно: 1) такая дробь должна обратиться в какую-нибудь периодическую; 2) эта периодическая дробь не может быть чистой, потому что чистая периодическая дробь, как мы видели, происходит только от такой обыкновенной, знаменатель которой не содержит множителей 2 и 5. Следовательно, данная дробь должна обратиться в смешанную периодическую дробь.

ОТДЕЛ VI.

ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

I. ПРОПОРЦИИ.

195. Пропорции. *Пропорцией называется равенство двух отношений.* Так, равенства

$$\frac{3}{4}=\frac{9}{12}, \quad \frac{10}{2\frac{1}{2}}=\frac{1\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}, \quad \frac{3\frac{1}{2}\ кг}{5\ кг}=\frac{\frac{1}{2}\ м}{\frac{5}{7}\ м}$$

представляют собой пропорции. Эти пропорции можно записать так:

$$3:4=9:12, \qquad 10:2\frac{1}{2}=1\frac{1}{3}:\frac{1}{3} \text{ и т. д.}$$

Словами эти пропорции читаются так: 3 *относится к* 4, *как* 9 *к* 12; 10 *относится к* $2\frac{1}{2}$, *как* $1\frac{1}{3}$ *к* $\frac{1}{3}$, и т. д. Члены каждого из двух отношений, составляющих пропорцию, могут быть числами либо отвлечёнными (как в первых двух примерах), либо именованными одного и того же наименования (как в третьем примере). В последнем случае вполне допустимо, что члены первого отношения имеют одно наименование (например, килограммы), а члены второго отношения — совсем другое (например, метры); при этом каждое из двух отношений есть число отвлечённое, и пропорция представляет собой равенство этих двух отвлечённых чисел.

Каждая пропорция, очевидно, имеет два предыдущих члена и два последующих. Члены отношений, составляющих пропорцию, называются также *членами пропорции.* В пропорции

$$3:4=9:12 \qquad (1)$$

члены 3 и 12 называются *крайними*, члены 4 и 9 — *средними*. Каждый из членов пропорции называют *четвёртым пропорциональным* к трём другим членам.

196. Основное свойство пропорций. В этом параграфе мы будем говорить только о таких пропорциях, все члены которых — отвлечённые числа.

Рассмотрим пропорцию $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$; помножим каждое из двух равных отношений на одно и то же число $4\cdot 12$, т. е. на произведение последующих членов; в результате получаются опять равные числа:

$$\frac{3\cdot 4\cdot 12}{4}=\frac{9\cdot 4\cdot 12}{12},$$

или, после сокращения,

$$3\cdot 12=9\cdot 4.$$

Это равенство показывает, что

произведение крайних членов пропорции равно произведению её средних членов.

Но легко убедиться, что и обратно: **четыре числа, выбранные так, что произведение двух из них равно произведению двух других, всегда являются членами пропорции.**

В самом деле, возьмём, например, равенство

$$4\cdot 15=3\cdot 20;$$

разделив обе его части на произведение $15\cdot 3$, находим после сокращения:

$$\frac{4}{3}=\frac{20}{15};$$

мы могли бы делить обе части данного равенства и на другие произведения, например на $4\cdot 3$, $4\cdot 20$ или $15\cdot 20$, и получить, таким образом, несколько различных пропорций.

Единственное исключение из этого правила мы имеем в том случае, когда в одном из двух произведений (или в обоих) оба множителя — нули, например $0\cdot 5=0\cdot 0$; в этом случае из данных чисел, очевидно, пропорции составить нельзя, потому что в такой пропорции по крайней мере один из последующих членов должен был бы быть нулём, что, как мы знаем, недопустимо.

В общем виде основное свойство пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ записывается так:

$$ad=bc.$$

Обратно, из равенства $ad=bc$ следует, что

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d},\ \frac{d}{b}=\frac{c}{a}\ \text{и}\ \frac{d}{c}=\frac{b}{a}.$$

197. Следствия основного свойства. 1) Каждый крайний член пропорции равен произведению средних, делённому на другой крайний, и

каждый средний член пропорции равен произведению крайних, делённому на другой средний.

Это даёт нам возможность находить неизвестный член пропорции, если остальные 3 члена её известны; например, из пропорции

$$10 : x = 45 : 20,$$

где через x обозначен неизвестный средний член пропорции, находим

$$x = \frac{10 \cdot 20}{45} = 4\frac{4}{9}.$$

2) Перестановки членов пропорции. В каждой пропорции можно переставить: 1) средние члены, 2) крайние члены и 3) крайние на место средних, и наоборот. От таких перестановок пропорция не нарушится, потому что не нарушится равенство между произведениями крайних и средних членов. Пусть, например, имеем пропорцию:

$$1)\ 4 : 7 = 12 : 21.$$

Переставив в ней средние члены, получим:

$$2)\ 4 : 12 = 7 : 21.$$

Переставим в каждой из этих пропорций крайние члены, тогда получим ещё две пропорции:

$$3)\ 21 : 7 = 12 : 4; \qquad 4)\ 21 : 12 = 7 : 4.$$

Наконец, переставим в каждой из полученных четырёх пропорций средние на место крайних, и наоборот, тогда получим ещё четыре пропорции:

$$5)\ 7 : 4 = 21 : 12; \qquad 7)\ 7 : 21 = 4 : 12;$$
$$6)\ 12 : 4 = 21 : 7; \qquad 8)\ 12 : 21 = 4 : 7.$$

Можно было бы в каждой из этих восьми пропорций переставить отношения, т. е. поставить второе отношение первым, а первое вторым, но от такой перестановки не получится новой пропорции, в чём легко убедиться непосредственно. Если, например, в пропорции 5) переставим отношения, то получим не новую пропорцию, а пропорцию 4). Следовательно, путём всевозможных перестановок можно получить вместо одной пропорции восемь пропорций.

3) **Проверка пропорции.** На основании того же основного свойства, чтобы проверить пропорцию, достаточно убедиться, что в ней произведение крайних членов равно произведению средних. Например, пропорция $4:7=868:1519$ верна, так как $1519 \cdot 4 = 868 \cdot 7$.

198. Среднее геометрическое. Возьмём пропорцию, в которой средние члены одинаковы, например:

$$36:12=12:4.$$

Повторяющийся член такой пропорции называется *средним геометрическим* числом двух остальных членов пропорции. Так, 12 есть среднее геометрическое 36 и 4.

Таким образом, если требуется найти среднее геометрическое двух чисел a и b, то, обозначив его буквой x, мы можем написать пропорцию:

$$a:x=x:b,$$

откуда

$$x^2=ab.$$

Значит, *среднее геометрическое двух данных чисел есть такое третье число, квадрат которого равен произведению данных чисел* [1]). Например, среднее геометрическое 25 и 4 равно 10, потому что $10^2=25 \cdot 4$.

199. Среднее арифметическое. *Средним арифметическим нескольких данных чисел называется частное от деления суммы этих чисел на число их.* Например, среднее арифметическое четырёх чисел: 10, 2, 8 и 12 равно:

$$\frac{10+2+8+12}{4}=\frac{32}{4}=8.$$

Среднее арифметическое обладает тем свойством, что если при сложении данных чисел мы заменим каждое из них средним арифметическим, то от этой замены сумма не изменится. Так, сумма чисел 10, 2, 8 и 12 равна 32 и сумма $8+8+8+8$ также равна 32.

Положим, например, что производительность фабрики в течение первых четырёх месяцев текущего года, сравнительно с производительностью её в декабре предыдущего года, повысилась: в январе на 10000 рублей, в феврале на 2000 рублей, в марте на 8000 рублей и в апреле на 12000 рублей. Тогда можно сказать, что среднее повышение производительности за эти 4 месяца составляет 8000 рублей в месяц. Это надо понимать так, что производительность фабрики за все 4 месяца оказалась такая же, какая была бы, если бы она повышалась каждый месяц одинаково, именно на 8000 рублей.

В подобном же смысле говорят часто о среднем доходе, о средней скорости движения, о средней плотности населения и т. п.

---

[1]) Следовательно, среднее геометрическое двух чисел равно квадратному корню из произведения данных чисел.

Во всех таких выражениях подразумевается, что речь идёт о среднем арифметическом.

200. Производные пропорции. Из одной пропорция можно получить несколько других пропорций, называемых **производными** пропорциями, основываясь на следующих соображениях.

Возьмём какое-нибудь отношение, например 21 : 7. Если к предыдущему его члену приложим последующий, а последующий оставим без изменения, то получим новое отношение (21+7) : 7; которое, очевидно, больше прежнего на 1 единицу. Если же из предыдущего члена вычтем последующий (если это возможно, как в нашем примере), а последующий оставим без изменения, то получим новое отношение (21—7):7, которое меньше прежнего на 1 единицу.

Заметив это, возьмём какую-нибудь пропорцию:

$$21 : 7 = 30 : 10$$

и составим из неё новую пропорцию таким образом:

$$(21 + 7) : 7 = (30 + 10) : 10. \qquad (1)$$

Эта пропорция верна, потому что каждое отношение в ней больше отношений данной пропорции на одно и то же число, именно на 1 единицу. Составленную нами производную пропорцию можно высказать так:

сумма членов первого отношения относится к его последующему члену, как сумма членов второго отношения относится к его последующему члену.

Составим теперь из данной пропорции такую:

$$(21 - 7) : 7 = (30 - 10) : 10. \qquad (2)$$

Эта пропорция верна, потому что каждое отношение в ней меньше отношений данной пропорции на одно и то же число, именно на 1 единицу. Составленную нами вторую производную пропорцию можно высказать так:

разность членов первого отношения относится к его последующему члену, как разность членов второго отношения относится к его последующему члену.

Переставляя члены этих двух производных пропорций, можно получить ещё другие производные пропорции. Так, переставим средние члены в первой производной пропорции и в данной:

$$(21 + 7) : (30 + 10) = 7 : 10;$$
$$21 : 30 = 7 : 10.$$

В этих двух пропорциях вторые отношения одинаковы; значит, первые отношения должны быть равны:

$$(21+7):(30+10)=21:30.$$

Переставив средние члены, получим:

$$(21+7):21=(30+10):30. \qquad (3)$$

Эту третью производную пропорцию можно высказать так: **сумма членов первого отношения относится к его предыдущему члену, как сумма членов второго отношения относится к его предыдущему члену.**

Переставив средние члены во второй производной пропорции и в данной, получим:

$$(21-7):(30-10)=7:10;$$
$$21:30=7:10,$$

откуда

$$(21-7):(30-10)=21:30,$$

или

$$(21-7):21=(30-10):30. \qquad (4)$$

Эту четвёртую производную пропорцию можно высказать так:

разность членов первого отношения относится к его предыдущему члену, как разность членов второго отношения относится к его предыдущему члену.

Переставив средние члены в первой и второй производных пропорциях, получим:

$$(21+7):(30+10)=7:10;$$
$$(21-7):(30-10)=7:10,$$

откуда

$$(21+7):(30+10)=(21-7):(30-10),$$

или

$$(21+7):(21-7)=(30+10):(30-10). \qquad (5)$$

Эту пятую производную пропорцию можно высказать так: **сумма членов первого отношения относится к их разности, как сумма членов второго отношения относится к их разности.**

201. Свойство равных отношений. Укажем ещё одно свойство, которое принадлежит не только пропорции, т. е.

равенству двух отношений, но и равенству трёх, четырёх и более отношений.

Возьмём несколько равных отношений, например таких:

$$40:10=20:5=8:2=\ldots .$$

Так как во всяком отношении предыдущий член равен последующему, умноженному на отношение, и так как в нашем примере каждое отношение равно 4, то можем написать:

$$40=10\cdot 4;\quad 20=5\cdot 4;\quad 8=2\cdot 4;\ \ldots .$$

Сложим левые части этих равенств между собой и правые части между собой. Очевидно, что от сложения равных чисел мы должны получить и равные суммы; поэтому

$$40+20+8+\ldots=10\cdot 4+5\cdot 4+2\cdot 4+\ldots .$$

В правой части этого равенства отдельно умножаются на 4 числа 10, 5, 2, ... и полученные произведения складываются. Вместо этого можно предварительно числа 10, 5, 2, ... сложить и затем сумму умножить сразу на 4. Поэтому последнее выведенное нами равенство мы можем переписать так:

$$40+20+8+\ldots=(10+5+2+\ldots)\cdot 4.$$

Разделим обе части этого равенства на сумму $10+5+$ $+2+\ldots$; от этого равенство не нарушится, и мы получим:

$$(40+20+8+\ldots):(10+5+2+\ldots)=4.$$

Но каждое из взятых нами равных отношений также равно числу 4; значит,

$$(40+20+8+\ldots):(10+5+2+\ldots)=$$
$$=40:10=20:5=8:2=\ldots .$$

Пусть вообще имеем несколько равных отношений:

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=q .$$

Тогда

$$a=bq;\quad a_1=b_1q;\quad a_2=b_2q;\ \ldots \text{ и т. д.}$$

Сложив эти равенства, получим:

$$a+a_1+a_2+\ldots=bq+b_1q+b_2q+\ldots=(b+b_1+b_2+\ldots)\,q.$$

Теперь разделим обе части равенства на сумму $b+b_1+b_2+\ldots$, отчего равенство не нарушится:

$$\frac{a+a_1+a_2+\ldots}{b+b_1+b_2+\ldots}=q.$$

Но каждое из данных отношений также равно q; значит,

$$\frac{a+a_1+a_2+\ldots}{b+b_1+b_2+\ldots}=\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots$$

Таким образом,

если несколько отношений равны друг другу, то сумма всех предыдущих их членов так относится к сумме всех последующих, как какой-нибудь один предыдущий член относится к своему последующему.

Всякая пропорция представляет собой равенство двух отношений; значит, указанное нами свойство принадлежит, в частности, всякой пропорции.

II. ПРОПОРЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕЛИЧИН.

202. Величины прямо пропорциональные. Пусть 3 *м* сукна стоят 360 рублей, тогда вдвое большее количество сукна, т. е. 6 *м*, стоят вдвое больше, т. е. $360 \cdot 2 = 720$ (рублей); втрое большее количество сукна, т. е. 9 *м*, стоит втрое больше, т. е. $360 \cdot 3 = 1080$ (рублей), и т. д.

Вообще, если данное количество товара увеличить в любое число раз, то и стоимость его увеличится во столько же раз; если данное количество товара уменьшить в несколько раз, то и стоимость его уменьшится во столько же раз.

Если две величины связаны между собой так, что увеличение (уменьшение) одной из них в несколько раз необходимо влечёт за собой увеличение (уменьшение) другой во столько же раз, то такие две величины называются прямо пропорциональными.

Так, количество товара и стоимость его — прямо пропорциональные величины. Точно так же

вес однородного тела (например, вес куска железа) прямо пропорционален его объёму;

длина пути, проходимого равномерно движущимся телом (например, поездом железной дороги), прямо пропорциональна продолжительности движения;

величина дроби при неизменном знаменателе прямо пропорциональна её числителю и т. п.

Если в одном отрезе сукна содержится 4 *м*, а в другом 10 *м*, то второй отрез в $\frac{10}{4}=2\frac{1}{2}$ раза больше первого; значит, и стоимость второго отреза в $2\frac{1}{2}$ раза больше стоимости первого отреза, т. е.:

$$\frac{\text{стоимость } 10\ м}{\text{стоимость } 4\ м}=\frac{10\ м}{4\ м}\left(=2\frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, *если две величины прямо пропорциональны, то отношение любых двух значений первой величины равно отношению соответствующих значений второй величины.*

203. ***Задача.*** *8 м сукна стоят 960 рублей. Сколько стоят 15 м того же сукна?*

1) Решение способом приведения к единице.

Стоимость сукна пропорциональна числу метров его; поэтому 1 *м* стоит в 8 раз менее, чем 8 *м*, а 15 *м* стоят в 15 раз более, чем 1 *м*; но

$$8\ м \text{ стоят } 960 \text{ рублей;}$$

значит,

$$1\ м \text{ стоит } \frac{960}{8} (=120 \text{ рублей}),$$

$$15\ м \text{ стоят } \frac{960}{8}\cdot 15=1800 \text{ (рублей)}.$$

Способ, которым мы решили эту задачу, называется *приведением к единице*, так как, чтобы узнать стоимость 15 *м* сукна, мы сначала нашли стоимость 1 *м*.

2) Решение задачи посредством пропорции.

Обозначив через x стоимость 15 *м* сукна, по правилу § 202 будем иметь пропорцию:

$$x:960=15:8,$$

откуда

$$x=\frac{960\cdot 15}{8}=1800 \text{ (рублей)}.$$

204. Выражение пропорциональной зависимости формулой. Пусть мы имеем какие-нибудь две пропорциональные величины A и B и, положим, что когда величина A равна единице (величин этого рода), тогда другая величина B становится равной k единицам (величин этого другого рода). Если теперь допустим, что величина A получит некоторое значение x единиц, тогда значение величины B будет уже не k единиц, а какое-нибудь другое число, которое мы обозначим через y. Выразим это для ясности такой табличкой:

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & k \\ \hline x & y \end{array}$$

Так как по условию величины A и B пропорциональны, то отношение $1:x$ должно быть равно отношению $k:y$. Следовательно, мы можем написать пропорцию:

$$1:x=k:y,$$

из которой находим:

$$y=kx.$$

По этой формуле мы легко можем найти число y, соответствующее любому значению x, если только известно число k. Если, например, $x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 4\frac{1}{2},\ 9\frac{3}{4},\ \ldots$ и т. п., то y будет соответственно равен $k,\ 2k,\ 3k,\ 4k,\ 4\frac{1}{2}k,\ 9\frac{3}{4}k$ и т. п.

Таким образом,

если две величины пропорциональны, то зависимость между ними может быть выражена формулой: $y=kx$, в которой y и x — переменные числа, выражающие соответствующие друг другу значения взятых величин, а k — постоянное число, равное тому частному значению y, которое соответствует значению $x=1$. Число это принято называть *коэффициентом пропорциональности* (y относительно x).

Например, применяя эту формулу к нашей задаче (§ 203), мы можем написать:

$$\text{стоимость сукна}=k\times\text{количество сукна},$$

где k есть величина стоимости, когда количество сукна равно единице. Значит, если стоимость выражается в рублях, а количество в метрах, то k есть цена 1 *м* (120 рублей).

205. Величины обратно пропорциональные. Рассмотрим такую задачу: 6 *человек рабочих оканчивают некоторую работу в* 18 *дней. Во сколько дней окончат ту же работу* 9 *человек, работая так же успешно, как и первые?*

В этой задаче тоже говорится о двух величинах: о количестве рабочих и о продолжительности работы их. Эти величины зависят одна от другой, потому что с изменением одной изменяется и другая. Но эта зависимость иная, чем в задаче § 203.

Там при увеличении одной величины в 2, 3 и т. д. раз другая величина увеличивалась во столько же раз. Здесь же, если вдвое увеличить число рабочих, продолжительность той же работы вдвое уменьшится; напротив, если, например, число рабочих втрое уменьшить, то продолжительность данной работы, очевидно, втрое увеличится.

Если при увеличении (уменьшении) одной из двух величин в несколько раз другая величина уменьшается (увеличивается) во столько же раз, то такие две величины называются обратно пропорциональными.

Так, число рабочих и продолжительность данной работы — величины обратно пропорциональные.

Точно так же

вес товара, который можно купить на данную сумму денег (например, на 100 рублей), обратно пропорционален цене единицы веса этого товара;

время, в течение которого проходится данный путь движущимся равномерно телом, обратно пропорционально скорости движения;

величина дроби при неизменном числителе обратно пропорциональна её знаменателю и т. п.

Если в одной бригаде 6 рабочих, а в другой — 9 рабочих, т. е. в $\frac{9}{6}=1\frac{1}{2}$ раза больше, то вторая бригада выполнит ту же работу в $1\frac{1}{2}$ раза скорее, чем первая, т. е.

$$\frac{\begin{array}{c}\text{продолжительность работы}\\ \text{1-й бригады}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{продолжительность работы}\\ \text{2-й бригады}\end{array}}=\frac{\begin{array}{c}\text{число рабочих}\\ \text{2-й бригады}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{число рабочих}\\ \text{1-й бригады}\end{array}}\left(=1\frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, *если две величины обратно пропорциональны, то отношение любых двух значений первой величины равно обратному отношению соответствующих значений второй величины.*

206. Перейдём теперь к решению задачи, поставленной в начале § 205.

1) Решение способом приведения к единице.

Число дней обратно пропорционально числу рабочих; поэтому 1 человек окончит работу в число дней, большее в 6 раз, чем число дней, в которое окончат ту же работу 6 человек, а 9 человек окончат эту работу в число дней, меньшее в 9 раз, чем число дней, в которое её окончит 1 человек. Но 6 человек, окончат работу в 18 дней; значит, 1 человек окончит её в $18\cdot6$ ($=108$ дней), а 9 человек окончат ту же работу в $\frac{18\cdot6}{9}=12$ (дней).

2) **Решение посредством пропорции.** Обозначая через x неизвестное число дней, в которое окончат работу 9 рабочих, будем по правилу § 205 иметь пропорцию:

$$\frac{18}{x}=\frac{9}{6},$$

откуда

$$x=\frac{18\cdot 6}{9}=12 \text{ (дней)}.$$

Замечание. Для того чтобы две зависящие друг от друга величины были пропорциональны (прямо или обратно), недостаточно только того обстоятельства, что одна из этих величин увеличивается, когда и другая увеличивается (для прямой пропорциональности), или что одна величина увеличивается, когда другая уменьшается (для обратной пропорциональности). Например, если какое-нибудь слагаемое увеличится, то и сумма увеличится; но было бы ошибочно сказать, что сумма прямо пропорциональна слагаемому, так как если увеличим слагаемое, положим, в 3 раза, то сумма хотя и увеличится, но не в 3 раза. Подобно этому нельзя, например, сказать, что разность двух чисел обратно пропорциональна вычитаемому, так как если увеличится вычитаемое, положим, в 2 раза, то разность хотя и уменьшится, но не в 2 раза. Для пропорциональности нужно, чтобы увеличение и уменьшение обеих величин происходило в **о д и н а к о в о е ч и с л о р а з.**

207. **Выражение обратной пропорциональной зависимости формулой.** Пусть A и B будут две какие-нибудь обратно пропорциональные величины и, положим, что когда величина A равна единице (величин этого рода), тогда другая величина B будет равна k единицам (величин этого другого рода). Если допустим, что величина A примет вместо единицы какое-нибудь другое значение x единиц, тогда величина B примет вместо прежнего значения (k единиц) некоторое значение y.

Для ясности запишем это в виде такой таблички:

A	B
1	k
x	y

Так как величины A и B по условию обратно пропорциональны, то отношение $1:x$ равно обратной величине отношения $k:y$, т. е. отношению $y:k$. Поэтому мы можем написать пропорцию:

$$1:x=y:k,$$

откуда находим:

$$y=\frac{k}{x} \text{ (или } xy=k).$$

Таким образом,

если две величины обратно пропорциональны, то зависимость между ними может быть выражена формулой: $y=\frac{k}{x}$ (или иначе формулой $xy=k$), *где x и y — какие-нибудь соответствующие друг другу значения этих величин, а k — число постоянное, равное значению y при $x=1$.*

По этой формуле мы можем вычислить величину y для всякого данного значения x, если только известно число k. Так, если $x=1, 2, 3, 4, 4\frac{1}{2}, \ldots$ и т. п., то

$$y=k, \frac{k}{2}, \frac{k}{3}, \frac{k}{4}, \frac{k}{4\frac{1}{2}}, \ldots \text{ и т. д.}$$

Для нашей задачи (§ 205) о продолжительности работы постоянное число k есть число дней, соответствующее одному рабочему (108 дней); тогда 2 (рабочих) окончат работу в $\frac{108}{2}=54$ (дня), а 3 (рабочих) в $\frac{108}{3}=36$ (дней) и т. д.

208. Пример задачи на пропорциональные величины, когда этих величин более двух.

Задача. *На 5 одинаковых керосинок, горевших 24 дня по 6 часов ежедневно, израсходовано 120 л керосина. На сколько дней хватит 216 л керосина, если 9 таких же керосинок будут гореть по 8 часов в день?*

Расположим данные этой задачи так:

120 *л* — 5 керосинок — 6 часов — 24 дня;
216 *л* — 9 керосинок — 8 часов — x дней.

Мы видим, что и запас керосина, и число керосинок, и время их ежедневного горения в новых условиях изменены; учесть сразу влияние всех этих изменений трудно; поэтому мы сначала допустим, что изменяется какое-нибудь одно из данных чисел, например запас керосина, а другие остаются неизменёнными. Мы получаем такую задачу: на сколько дней хватит 216 *л* керосина, если те же 5 керосинок будут гореть попрежнему по 6 часов в день? Если при этих условиях 120 *л* хватает на 24 дня, то 216 *л* хватит на $\frac{24 \cdot 216}{120}$ дней, так как число дней, очевидно, прямо пропорционально количеству сгоревшего керосина. Мы можем теперь составить такую запись: 216 *л* — 5 керосинок — 6 часов — $\frac{24 \cdot 216}{120}$ дней.

Теперь будем изменять число керосинок, оставляя неизменёнными запас керосина (216 *л*) и время ежедневного горения (6 часов). Очевидно, что если вместо пяти керосинок будет гореть одна, то того же запаса керосина при том же времени ежедневного горения хватит на число дней, в 5 раз большее, а если вместо одной керосинки будет гореть 9, то его хватит на число дней, в 9 раз меньшее (число дней обратно пропорционально числу керосинок); поэтому мы можем составить такую запись:

$$216 \text{ л} — 9 \text{ керосинок} — 6 \text{ часов} — \frac{24 \cdot 216 \cdot 5}{120 \cdot 9} \text{ дней.}$$

Нам остаётся изменить число часов ежедневного горения. Очевидно, что при данном запасе керосина и данном числе керосинок число дней увеличится (уменьшится) во столько раз, во сколько раз мы уменьшим (увеличим) число часов ежедневного горения. Другими словами, число дней горения и число часов ежедневного горения обратно пропорциональны. Поэтому, переходя от 6 часов к 8 часам ежедневного горения, мы должны полученное в последней записи число дней умножить на 6 и разделить на 8. Это даёт такую запись:

$$216 \text{ л} — 9 \text{ керосинок} — 8 \text{ часов} — \frac{24 \cdot 216 \cdot 5 \cdot 6}{120 \cdot 9 \cdot 8} \text{ дней;}$$

таким образом,

$$x = \frac{24 \cdot 216 \cdot 5 \cdot 6}{120 \cdot 9 \cdot 8} = 18 \text{ (дней).}$$

III. ЗАДАЧИ НА ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ.

209. *Задача 1. Разделить* 84 *на* 3 *части пропорционально ряду чисел:* 7, 5 *и* 2.

Это надо понимать так: разделить 84 на такие три части, чтобы первая часть относилась к 7, как вторая к 5 и как третья к 2.

Назовём искомые части буквами x_1, x_2, x_3. В задаче требуется, чтобы эти части удовлетворяли следующим пропорциям:

$$\frac{x_1}{7} = \frac{x_2}{5} = \frac{x_3}{2}.$$

Отсюда по свойству равных отношений (§ 201) находим:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{7 + 5 + 2} = \frac{x_1}{7} = \frac{x_2}{5} = \frac{x_3}{2}.$$

Но $x_1+x_2+x_3=84$ и $7+5+2=14$; поэтому предыдущую строку мы можем переписать так:

$$\frac{84}{14}=\frac{x_1}{7};\ \frac{84}{14}=\frac{x_2}{5};\ \frac{84}{14}=\frac{x_3}{2}.$$

Отсюда выводим:

$$x_1=\frac{84}{14}\cdot 7=42;\quad x_2=\frac{84}{14}\cdot 5=30;\quad x_3=\frac{84}{14}\cdot 2=12,$$

т. е. мы приходим к следующему правилу:

Правило. **Чтобы разделить число на части пропорционально данным числам, надо разделить его на сумму этих чисел и частное последовательно умножить на каждое из этих чисел.**

210. *Задача 2. Разделить* 968 *на* 4 *части пропорционально ряду чисел:* $1\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{8}$.

Прежде всего заменим данный ряд дробных чисел рядом целых чисел. Для этого приведём все дроби к общему знаменателю и обратим смешанную дробь в неправильную:

$$1\frac{1}{2}=\frac{60}{40};\ \frac{3}{4}=\frac{30}{40};\ \frac{2}{5}=\frac{16}{40};\ \frac{3}{8}=\frac{15}{40}.$$

Обозначая искомые числа через x_1, x_2, x_3, x_4, мы получаем поэтому:

$$\frac{x_1}{\frac{60}{40}}=\frac{x_2}{\frac{30}{40}}=\frac{x_3}{\frac{16}{40}}=\frac{x_4}{\frac{15}{40}},$$

или уменьшая все четыре отношения в 40 раз (отбрасывая в последующих членах знаменатель 40),

$$\frac{x_1}{60}=\frac{x_2}{30}=\frac{x_3}{16}=\frac{x_4}{15},$$

после чего задача решается, как задача 1.

Примечание. Можно решить задачу 2 и прямо по правилу, указанному при задаче 1; однако для упрощения вычислений удобнее сначала заменить последующие члены отношений целыми числами, как это сделано в тексте.

211. *Задача 3. Разделить* 125 *на такие* 4 *части, чтобы первая часть относилась ко второй, как* 2 : 3, *вторая к третьей, как* 3 : 5, *а третья к четвёртой, как* 5 : 6.

Обозначая искомые части через x_1, x_2, x_3, x_4, имеем:

$$x_1 : x_2 = 2 : 3, \quad x_2 : x_3 = 3 : 5, \quad x_3 : x_4 = 5 : 6;$$

переставляя в этих пропорциях средние члены, находим:

$$x_1 : 2 = x_2 : 3, \quad x_2 : 3 = x_3 : 5, \quad x_3 : 5 = x_4 : 6,$$

или

$$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3}{5} = \frac{x_4}{6},$$

после чего задача решается, как задача 1.

212. *Задача 4. Разделить* 125 *на такие* 4 *части, чтобы первая часть относилась ко второй, как* 2 : 3, *вторая к третьей, как* 4 : 5, *а третья к четвёртой, как* 6 : 11.

Эта задача по виду похожа на задачу 3. Однако есть существенная разница между этими задачами. В задаче 3 отношения 2 : 3, 3 : 5 и 5 : 6 таковы, что последующий член первого отношения равен предыдущему члену второго, а последующий член второго отношения равен предыдущему члену третьего. Вследствие этого можно сказать, что в задаче 3 требуется 125 разделить на 4 части пропорционально ряду чисел 2, 3, 5, 6. Значит, эта задача ничем не отличается от задачи 1.

В задаче 4 отношения между частями 2 : 3, 4 : 5 и 6 : 11 таковы, что последующий член одного отношения не равен предыдущему члену следующего отношения. Однако и этот случай можно решать рассуждением, подобным предыдущему.

Обозначив искомые части буквами x_1, x_2, x_3 и x_4, мы можем написать следующие три пропорции:

$$x_1 : x_2 = 2 : 3; \quad x_2 : x_3 = 4 : 5; \quad x_3 : x_4 = 6 : 11.$$

Переставляя средние члены в написанных пропорциях, мы находим:

$$x_1 : 2 = x_2 : 3, \qquad (1)$$

$$x_2 : 4 = x_3 : 5, \qquad (2)$$

$$x_3 : 6 = x_4 : 11. \qquad (3)$$

Из пропорции (2) находим:

$$x_2 = \frac{4 \cdot x_3}{5},$$

откуда

$$\frac{x_2}{3} = \frac{4x_3}{5 \cdot 3} = \frac{x_3}{\frac{15}{4}}.$$

Далее из пропорции (3) находим:

$$x_3 = \frac{6 \cdot x_4}{11},$$

откуда

$$\frac{x_3}{\frac{15}{4}} = \frac{6x_4}{11 \cdot \frac{15}{4}} = \frac{x_4}{\frac{55}{8}}.$$

Таким образом,

$$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3}{\frac{15}{4}} = \frac{x_4}{\frac{55}{8}},$$

после чего задача решается, как задача 2.

213. *Задача 5. Разделить число a обратно пропорционально числам m, n и p.*

Это значит, что число a требуется разделить на части, прямо пропорциональные обратным величинам чисел m, n и p, т. е. прямо пропорциональные числам $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{p}$. Обозначая искомые части через x_1, x_2 и x_3, имеем поэтому:

$$x_1 : \frac{1}{m} = x_2 : \frac{1}{n} = x_3 : \frac{1}{p};$$

отсюда

$$x_1 : x_2 = \frac{1}{m} : \frac{1}{n} = n : m,$$

$$x_2 : x_3 = \frac{1}{n} : \frac{1}{p} = p : n,$$

т. е. если числа x_1, x_2, x_3 обратно пропорциональны числам m, n, p, то отношение x_1 к x_2 равно отношению n и m (а не m к n, как при прямой пропорциональности); точно так же отношение x_2 к x_3 равно отношению p к n (а не n к p, как при прямой пропорциональности).

214. Пример более сложной задачи на пропорциональное деление. *За переписку рукописи уплачено 123 рубля. Переписка производилась тремя машинистками; первая работала 8 часов, переписывая по 6 страниц в час; вторая работала 6 часов, переписывая по 10 страниц в час; третья работала 7 часов, переписывая по 8 страниц в час. Сколько заработала каждая машинистка?*

Если бы производительность труда всех трёх машинисток была одинакова, то заработанную сумму надо было бы распределить пропорционально времени их работы. С другой стороны, если бы все они работали одинаковое число часов, то заработок надо было бы распределить пропорционально производительности их труда. Но на самом деле и время работы и производительность труда для всех трёх машинисток различны. Поэтому для решения задачи мы рассуждаем так. Первая машинистка, работая 8 часов, переписывала по 6 страниц в час и, следовательно, всего переписала $6 \cdot 8$ (страниц); точно так же вторая переписала $10 \cdot 6$ (страниц) и третья $8 \cdot 7$ (страниц). Поэтому общая сумма заработка, т. е. 123 рубля, должна быть разделена пропорционально произведениям $6 \cdot 8$, $10 \cdot 6$ и $8 \cdot 7$, т. е. пропорционально числам 48, 60 и 56, или, по сокращении, числам 12, 15 и 14. Обозначив искомые числа через x_1, x_2 и x_3, находим поэтому:

$$x_1 = \frac{123 \cdot 12}{12 + 15 + 14} = \frac{123 \cdot 12}{14} = 3 \cdot 12 = 36 \text{ (рублей)},$$

$$x_2 = \frac{123 \cdot 15}{41} = 3 \cdot 15 = 45 \text{ (рублей)},$$

$$x_3 = \frac{123 \cdot 41}{41} = 3 \cdot 14 = 42 \text{ (рубля)}.$$

ТАБЛИЦА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, НЕ ПРЕВОСХОДЯЩИХ 6000.

2	349	797	1283	1787	2339	2857	3461	4007	4597	5189	5791
3	353	809	1289	1789	2341	2861	3463	4013	4603	5197	5801
5	359	811	1291	1801	2347	2879	3467	4019	4621	5209	5807
7	367	821	1297	1811	2351	2887	3469	4021	4637	5227	5813
11	373	823	1301	1823	2357	2897	3491	4027	4639	5231	5821
13	379	827	1303	1831	2371	2903	3499	4049	4643	5233	5827
17	383	829	1307	1847	2377	2909	3511	4051	4649	5237	5839
19	389	839	1319	1861	2381	2917	3517	4057	4651	5261	5843
23	397	853	1321	1867	2383	2927	3527	4073	4657	5273	5849
29	401	857	1327	1871	2389	2939	3529	4079	4663	5279	5851
31	409	859	1361	1873	2393	2953	3533	4091	4673	5281	5857
37	419	863	1367	1877	2399	2957	3539	4093	4679	5297	5861
41	421	877	1373	1879	2411	2963	3541	4099	4691	5303	5867
43	431	881	1381	1889	2417	2969	3547	4111	4703	5309	5869
47	433	883	1399	1901	2423	2971	3557	4127	4721	5323	5879
53	439	887	1409	1907	2437	2999	3559	4129	4723	5333	5881
59	443	907	1423	1913	2441	3001	3571	4133	4729	5347	5897
61	449	911	1427	1931	2447	3011	3581	4139	4733	5351	5903
67	457	919	1429	1933	2459	3019	3583	4153	4751	5381	5923
71	461	929	1433	1949	2467	3023	3593	4157	4759	5387	5927
73	463	937	1439	1951	2473	3037	3607	4159	4783	5393	5939
79	467	941	1447	1973	2477	3041	3613	4177	4787	5399	5953
83	479	947	1451	1979	2503	3049	3617	4201	4789	5407	5981
89	487	953	1453	1987	2521	3061	3623	4211	4793	5413	5987
97	491	967	1459	1993	2531	3067	3631	4217	4799	5417	
101	499	971	1471	1997	2539	3079	3637	4219	4801	5419	
103	503	977	1481	1999	2543	3083	3643	4229	4813	5431	
107	509	983	1483	2003	2549	3089	3659	4231	4817	5437	
109	521	991	1487	2011	2551	3109	3671	4241	4831	5441	
113	523	997	1489	2017	2557	3119	3673	4243	4861	5443	
127	541	1009	1493	2027	2579	3121	3677	4253	4871	5449	
131	547	1013	1499	2029	2591	3137	3691	4259	4877	5471	
137	557	1019	1511	2039	2593	3163	3697	4261	4889	5477	
139	563	1021	1523	2053	2609	3167	3701	4271	4903	5479	
149	569	1031	1531	2063	2617	3169	3709	4273	4909	5483	
151	571	1033	1543	2069	2621	3181	3719	4283	4919	5501	
157	577	1039	1549	2081	2633	3187	3727	4289	4931	5503	
163	587	1049	1553	2083	2647	3191	3733	4297	4933	5507	
167	593	1051	1559	2087	2657	3203	3739	4327	4937	5519	
173	599	1061	1567	2089	2659	3209	3761	4337	4943	5521	
179	601	1063	1571	2099	2663	3217	3767	4339	4951	5527	
181	607	1069	1579	2111	2671	3221	3769	4349	4957	5531	
191	613	1087	1583	2113	2677	3229	3779	4357	4967	5557	
193	617	1091	1597	2129	2683	3251	3793	4363	4969	5563	
197	619	1093	1601	2131	2687	3253	3797	4373	4973	5569	
199	631	1097	1607	2137	2689	3257	3803	4391	4987	5573	
211	641	1103	1609	2141	2693	3259	3821	4397	4993	5581	
223	643	1109	1613	2143	2699	3271	3823	4409	4999	5591	
227	647	1117	1619	2153	2707	3299	3833	4421	5003	5623	
229	653	1123	1621	2161	2711	3301	3847	4423	5009	5639	
233	659	1129	1627	2179	2713	3307	3851	4441	5011	5641	
239	661	1151	1637	2203	2719	3313	3853	4447	5021	5647	
241	673	1153	1657	2207	2729	3319	3863	4451	5023	5651	
251	677	1163	1663	2213	2731	3323	3877	4457	5039	5653	
257	683	1171	1667	2221	2741	3329	3881	4463	5051	5657	
263	691	1181	1669	2237	2749	3331	3889	4481	5059	5659	
269	701	1187	1693	2239	2753	3343	3907	4483	5077	5669	
271	709	1193	1697	2243	2767	3347	3911	4493	5081	5683	
277	719	1201	1699	2251	2777	3359	3917	4507	5087	5689	
281	727	1213	1709	2267	2789	3361	3919	4513	5099	5693	
283	733	1217	1721	2269	2791	3371	3923	4517	5101	5701	
293	739	1223	1723	2273	2797	3373	3929	4519	5107	5711	
307	743	1229	1733	2281	2801	3389	3931	4527	5113	5717	
311	751	1231	1741	2287	2803	3391	3943	4543	5119	5737	
313	757	1237	1747	2293	2819	3407	3947	4549	5147	5741	
317	761	1249	1753	2297	2833	3413	3967	4561	5153	5743	
331	769	1259	1759	2309	2937	3433	3989	4567	5167	5749	
337	773	1277	1777	2311	2843	3449	4001	4583	5171	5779	
347	787	1279	1783	2333	2851	3457	4003	4591	5179	5783	

Андрей Петрович Киселёв. Арифметика.
Учебник для 5-го и 6-го классов семилетней и средней школы.

Редактор *Н. И. Лепёшкина*
Технический редактор *Н. И. Миронцева*
Корректор *А. Тарасова*

* * *

Сдано в набор 6/IV 1954 г. Подписано к печати 27/VII 1954 г. 84 X 108$^{1}/_{32}$. Печ. л. 10,5 (8,61). Уч.-изд. л. 9,92. Тираж 600 000 экз. (1—450 000) А 05474.

* * *

Учпедгиз. Москва, Чистые пруды, 6.
Заказ № 1221.
Цена без переплёта 1 р. 30 к.
Переплёт 50 коп.

Отпечатано с матриц 2-й типографии «Печатный двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома Главиздата Министерства культуры СССР в типографии «Известий Советов депутатов трудящихся СССР» им. И. И. Скворцова-Степанова, Москва, Пушкинская пл., 5. Зак. 2027.