НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Е. БЕРЕЗАНСКАЯ

# ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОДИКА ИХ ПРЕПОДАВАНИЯ

•

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Н. НЕЧАЕВА и С. ГАЙСИНОВИЧА

НАРКОМПРОС РСФСР
УЧПЕДГИЗ

# ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОДИКА ИХ ПРЕПОДАВАНИЯ*

## ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о тригонометрических уравнениях полностью рассматривается с учащимися в 10 классе средней школы. Ранее, в 9 классе, при изучении формул гониометрии, выполняя упражнения, наряду с соответствующими тождественными гониометрическими преобразованиями, учащиеся решают и уравнения. Но лишь в 10 классе можно поставить систематический просмотр всего вопроса, в частности вопрос о решении уравнений в тех случаях, когда в процессе решения нарушается равносильность между полученным уравнением (или совокупностью их) и данным. Для того чтобы учащиеся могли в 10 классе приступить к изучению вопроса „тригонометрические уравнения", они должны четко знать из курса алгебры:

1) различие между тождеством и уравнением;

2) теоремы, на которых основывается решение уравнений;

3) определение каждого из нижеуказанных уравнений: решение и исследование решений уравнений 1-й степени с одним неизвестным, с целыми и дробными членами; квадратного уравнения; биквадратного уравнения; уравнений однородных; уравнений высших степеней, решение которых сводится к решению уравнений 1-й и 2-й степени; иррационального уравнения; логарифмических и показательных уравнений; системы уравнений 1-й степени с двумя и тремя неизвестными как с числовыми, так и с буквенными коэфициентами.

В частности, для того, чтобы успешно решать тригонометрические уравнения, учащиеся должны усвоить из курса алгебры решение уравнений вида произведения в одной части, при условии, что другая часть равна 0; вида дроби; учащиеся должны уметь (в результате изучения теории пределов в 9 и 10 классах) находить $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}$ в том случае, когда $f(a)=0$ и $F(a)=0$ и др.

Из курса тригонометрии необходимо знать формулы гониометрии и их использование при решении упражнений, а именно:

1) формулы приведения;

---

* Курс проведен в 1934/35 уч. году в 10 классе опытной школы НКП имени Лепешинского.

2) основные зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же угла;

3) тригонометрические функции суммы и разности углов; двойных и тройных углов; половинных углов;

4) формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций;

5) введение вспомогательного угла;

6) определение обратных круговых функций и их свойства.

Таким образом вопрос о тригонометрических уравнениях основывается на вышеперечисленных вопросах теории алгебраических уравнений, которые дополняются, расширяются и видоизменяются соответственно особенностям входящих в них тригонометрических функций.

Указание: отдельные вопросы, рассматриваемые нами в данной статье, как напр. вопрос о периодичности тригонометрических функций, сложение обратных круговых функций и др., а также отдельные типы уравнений, приводимые нами, прорабатываются с учащимися и в 9 классе; нами они повторяются с целью дать систематическое изложение вопроса о преподавании „тригонометрических уравнений". С этой же целью для учителя помещены в данной статье некоторые более сложные приемы решения уравнений и последние §§, не входящие* в курс средней школы

## § 1. Определения. Общие замечания

1. Тригонометрическим уравнением называется уравнение в том случае, когда в нем неизвестное содержится под знаком тригонометрической функции.

Неизвестным в тригонометрическом уравнении является угол (дуга). Он может быть непосредственно аргументом тригонометрической функции, как в уравнении $a\operatorname{tg}x=b$ или может входить в состав аргумента, как в уравнении $a\operatorname{tg}(x+b)=c$ или $a\operatorname{tg} kx=b$ и т. п.

Замечания:

1) Уравнение $x\cos a-\sin a=0$, в котором неизвестное $x$, есть уравнение не тригонометрическое, а алгебраическое, его решение $x=\operatorname{tg}a$**.

2) Выражения:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

или

$$\sin^2(3x+a)+\cos^2(3x+a)=1$$

являются тригонометрическими тождествами.

---

* В тексте дано мелким шрифтом (§§ 15, 20, 21, 22 и др.).

** Аналогично тому, как уравнение $x\sqrt{a}=\sqrt{b}$ — уравнение не иррациональное, но с коэфициентами, которые представляют собой иррациональные выражения и т. п.

II. Понятия „решить тригонометрическое уравнение“, „найти корень тригонометрического уравнения“ не отличаются от аналогичных понятий в теории алгебраических уравнений. Но неизвестным аргументом в тригонометрическом уравнении является угол (дуга), содержащийся под знаком тригонометрической функции, и при решении уравнения сначала приходится определять тригонометрическую функцию аргумента. А так как каждому значению тригонометрической функции соответствует неограниченное множество углов, то тригонометрическое уравнение имеет неограниченное множество решений (в отличие от алгебраического уравнения). Лишь в том случае, когда имеется какое-либо дополнительное условие, данное задачей, число решений тригонометрического уравнения ограничивается (напр., надо найти только острый угол; только углы в одном треугольнике и т. п.).*

Кроме того, бывают тригонометрические уравнения, для которых нет соответствующего угла, удовлетворяющего уравнению, как напр. в случае $2 \sin x = 3$, где $\sin x = \frac{3}{2}$ и т. п.

Таким образом, тригонометрические уравнения в отличие от алгебраических уравнений или не имеют решений в области действительных чисел (в данной работе рассматриваются только действительные значения корней), или имеют неограниченное множество решений в силу периодичности тригонометрических функций. В последнем случае решения выражаются общей формулой.

III. Процесс решения тригонометрического уравнения, аналогично процессу решения алгебраического уравнения, заключается в приведении данного уравнения к простейшему виду путем последовательной замены данного уравнения равносильными ему уравнениями.

## § 2. Формулы общего вида

1. Прежде всего, до решения тригонометрических уравнений, следует повторить с учащимися основное свойство всех тригонометрических функций, а именно их периодичность, т. е. свойство функций не изменяться ни по величине, ни по знаку, при изменении аргумента на определенную величину. Поэтому тригонометрические функции называются периодическими. Наименьшее абсолютное значение величины, прибавление которой к аргументу не влечет изменения функции, называется периодом функции. Для функций тангенса и котангенса период

---

* Некоторые авторы различают «тригонометрические» уравнения и «гониометрические», считая, что углы, входящие в тригонометрическое уравнение — это углы треугольника, а углы в гониометрическом уравнении следует рассматривать с общей точки зрения, как аргумент круговой

равен $\pi$; период остальных четырех тригонометрических функций равен $2\pi$;

$$\sin(2k\pi + a) = \sin a \qquad \operatorname{ctg}(k\pi + a) = \operatorname{ctg} a$$
$$\cos(2k\pi + a) = \cos a \qquad \sec(2k\pi + a) = \sec a$$
$$\operatorname{tg}(k\pi + a) = \operatorname{tg} a \qquad \operatorname{cosec}(2k\pi + a) = \operatorname{cosec} a,$$

где $k$ произвольное целое положительное и отрицательное число или нуль.

Следует тщательно повторить общие формулы углов (дуг), для которых тригонометрическая функция имеет данное значение.

1) Все углы, имеющие одинаковое значение синуса могут быть записаны формулами: $2k\pi + x_0$ и $(2k+1)\pi - x_0$ или, объединяя обе формулы:

$$\boxed{m\pi + (-1)^m x_0}$$

**Объяснение.** В первой окружности всегда найдется угол (дуга), обозначим его $x_0$ (часто обозначают его греческой буквой $a$), синус которого равен данному числу, если это число по абсолютному значению не превышает единицы. В первой окружности имеется еще один угол (дуга) с таким же значением синуса $(\pi - x_0)$. Через $x_0$ обозначен меньший (по абсолютному значению) из этих двух углов в одной окружности, имеющих одинаковые значения синуса. Все остальные углы (дуги) получаются из найденных по свойству периодичности функций:

$$2k\pi + x_0; \quad 2k\pi + (\pi - x_0) = (2k+1)\pi - x_0.$$

Выражение $m\pi + (-1)^m x_0$ включает обе формулы; при $m$ четном имеем одну и при $m$ нечетном—другую формулу.

**Замечание:** Это объединение формул (в данном случае двух) крайне плодотворно; его следует проводить, где возможно, при решении уравнений*.

2) Все углы, косинус которых имеет данное значение, записываются формулой: $2k\pi \pm x_0$.

**Объяснение:** В первой окружности всегда найдется угол $x_0$ (берем меньший), косинус которого имеет данное значение (если это значение не превышает единицы по абсолютной величине); это же значение косинуса в первой окружности имеет угол $(-x_0)$. Остальные решения получаются из найденных по свойству периодичности функций:

$$2k\pi + x_0; \quad 2k\pi - x_0.$$

Общая формула:

$$\boxed{2k\pi \pm x_0}$$

3) Общая формула углов, тангенс которых имеет данное значение $\boxed{m\pi + x_0}$, где $m$ — любое целое относительное число.

---

* Без объединения формул может быть повторение одних и тех же значений неизвестного в полученных формулах.