НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Е. БЕРЕЗАНСКАЯ

# ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОДИКА ИХ ПРЕПОДАВАНИЯ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Н. НЕЧАЕВА и С. ГАЙСИНОВИЧА

НАРКОМПРОС РСФСР
УЧПЕДГИЗ

# ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОДИКА ИХ ПРЕПОДАВАНИЯ*

## ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о тригонометрических уравнениях полностью рассматривается с учащимися в 10 классе средней школы. Ранее, в 9 классе, при изучении формул гониометрии, выполняя упражнения, наряду с соответствующими тождественными гониометрическими преобразованиями, учащиеся решают и уравнения. Но лишь в 10 классе можно поставить систематический просмотр всего вопроса, в частности вопрос о решении уравнений в тех случаях, когда в процессе решения нарушается равносильность между полученным уравнением (или совокупностью их) и данным. Для того чтобы учащиеся могли в 10 классе приступить к изучению вопроса „тригонометрические уравнения", они должны четко знать из курса алгебры:

1) различие между тождеством и уравнением;

2) теоремы, на которых основывается решение уравнений;

3) определение каждого из нижеуказанных уравнений: решение и исследование решений уравнений 1-й степени с одним неизвестным, с целыми и дробными членами; квадратного уравнения; биквадратного уравнения; уравнений однородных; уравнений высших степеней, решение которых сводится к решению уравнений 1-й и 2-й степени; иррационального уравнения; логарифмических и показательных уравнений; системы уравнений 1-й степени с двумя и тремя неизвестными как с числовыми, так и с буквенными коэффициентами.

В частности, для того, чтобы успешно решать тригонометрические уравнения, учащиеся должны усвоить из курса алгебры решение уравнений вида произведения в одной части, при условии, что другая часть равна 0; вида дроби; учащиеся должны уметь (в результате изучения теории пределов в 9 и 10 классах) находить $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)}$ в том случае, когда $f(a) = 0$ и $F(a) = 0$ и др.

Из курса тригонометрии необходимо знать формулы гониометрии и их использование при решении упражнений, а именно:

1) формулы приведения;

---

* Курс проведен в 1934/35 уч. году в 10 классе опытной школы НКП имени Лепешинского.

2) основные зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же угла;

3) тригонометрические функции суммы и разности углов; двойных и тройных углов; половинных углов;

4) формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций;

5) введение вспомогательного угла;

6) определение обратных круговых функций и их свойства.

Таким образом вопрос о тригонометрических уравнениях основывается на вышеперечисленных вопросах теории алгебраических уравнений, которые дополняются, расширяются и видоизменяются соответственно особенностям входящих в них тригонометрических функций.

Указание: отдельные вопросы, рассматриваемые нами в данной статье, как напр. вопрос о периодичности тригонометрических функций, сложение обратных круговых функций и др., а также отдельные типы уравнений, приводимые нами, прорабатываются с учащимися и в 9 классе; нами они повторяются с целью дать систематическое изложение вопроса о преподавании „тригонометрических уравнений". С этой же целью для учителя помещены в данной статье некоторые более сложные приемы решения уравнений и последние §§, не входящие* в курс средней школы

## § 1. Определения. Общие замечания

1. Тригонометрическим уравнением называется уравнение в том случае, когда в нем неизвестное содержится под знаком тригонометрической функции.

Неизвестным в тригонометрическом уравнении является угол (дуга). Он может быть непосредственно аргументом тригонометрической функции, как в уравнении $a \operatorname{tg} x = b$ или может входить в состав аргумента, как в уравнении $a \operatorname{tg}(x + b) = c$ или $a \operatorname{tg} kx = b$ и т. п.

Замечания:

1) Уравнение $x \cos a - \sin a = 0$, в котором неизвестное $x$, есть уравнение не тригонометрическое, а алгебраическое, его решение $x = \operatorname{tg} a$**.

2) Выражения:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

или

$$\sin^2(3x + a) + \cos^2(3x + a) = 1$$

являются тригонометрическими тождествами.

---

* В тексте дано мелким шрифтом (§§ 15, 20, 21, 22 и др.).

** Аналогично тому, как уравнение $x\sqrt{a} = \sqrt{b}$ — уравнение не иррациональное, но с коэфициентами, которые представляют собой иррациональные выражения и т. п.

II. Понятия „решить тригонометрическое уравнение“, „найти корень тригонометрического уравнения“ не отличаются от аналогичных понятий в теории алгебраических уравнений. Но неизвестным аргументом в тригонометрическом уравнении является угол (дуга), содержащийся под знаком тригонометрической функции, и при решении уравнения сначала приходится определять тригонометрическую функцию аргумента. А так как каждому значению тригонометрической функции соответствует неограниченное множество углов, то тригонометрическое уравнение имеет неограниченное множество решений (в отличие от алгебраического уравнения). Лишь в том случае, когда имеется какое-либо дополнительное условие, данное задачей, число решений тригонометрического уравнения ограничивается (напр., надо найти только острый угол; только углы в одном треугольнике и т. п.).*

Кроме того, бывают тригонометрические уравнения, для которых нет соответствующего угла, удовлетворяющего уравнению, как напр. в случае $2\sin x = 3$, где $\sin x = \frac{3}{2}$ и т. п.

Таким образом, тригонометрические уравнения в отличие от алгебраических уравнений или не имеют решений в области действительных чисел (в данной работе рассматриваются только действительные значения корней), или имеют неограниченное множество решений в силу периодичности тригонометрических функций. В последнем случае решения выражаются общей формулой.

III. Процесс решения тригонометрического уравнения, аналогично процессу решения алгебраического уравнения, заключается в приведении данного уравнения к простейшему виду путем последовательной замены данного уравнения равносильными ему уравнениями.

## § 2. Формулы общего вида

1. Прежде всего, до решения тригонометрических уравнений, следует повторить с учащимися **основное свойство всех тригонометрических функций**, а именно их **периодичность**, т. е. свойство функций не изменяться ни по величине, ни по знаку, при изменении аргумента на определенную величину. Поэтому тригонометрические функции называются **периодическими**. Наименьшее абсолютное значение величины, прибавление которой к аргументу не влечет изменения функции, называется **периодом** функции. Для функций тангенса и котангенса период

---

* Некоторые авторы различают «тригонометрические» уравнения и «гониометрические», считая, что углы, входящие в тригонометрическое уравнение — это углы треугольника, а углы в гониометрическом уравнении следует рассматривать с общей точки зрения, как аргумент круговой

равен $\pi$; период остальных четырех тригонометрических функций равен $2\pi$;

$$\sin(2k\pi + a) = \sin a \qquad \operatorname{ctg}(k\pi + a) = \operatorname{ctg} a$$
$$\cos(2k\pi + a) = \cos a \qquad \sec(2k\pi + a) = \sec a$$
$$\operatorname{tg}(k\pi + a) = \operatorname{tg} a \qquad \operatorname{cosec}(2k\pi + a) = \operatorname{cosec} a,$$

где $k$ произвольное целое положительное и отрицательное число или нуль.

Следует тщательно повторить общие формулы углов (дуг), для которых тригонометрическая функция имеет данное значение.

1) Все углы, имеющие одинаковое значение синуса могут быть записаны формулами: $2k\pi + x_0$ и $(2k+1)\pi - x_0$ или, объединяя обе формулы:

$$\boxed{m\pi + (-1)^m x_0}$$

**Объяснение.** В первой окружности всегда найдется угол (дуга), обозначим его $x_0$ (часто обозначают его греческой буквой $a$), синус которого равен данному числу, если это число по абсолютному значению не превышает единицы. В первой окружности имеется еще один угол (дуга) с таким же значением синуса $(\pi - x_0)$. Через $x_0$ обозначен меньший (по абсолютному значению) из этих двух углов в одной окружности, имеющих одинаковые значения синуса. Все остальные углы (дуги) получаются из найденных по свойству периодичности функций:

$$2k\pi + x_0; \quad 2k\pi + (\pi - x_0) = (2k+1)\pi - x_0.$$

Выражение $m\pi + (-1)^m x_0$ включает обе формулы; при $m$ четном имеем одну и при $m$ нечетном—другую формулу.

**Замечание:** Это объединение формул (в данном случае двух) крайне плодотворно; его следует проводить, где возможно, при решении уравнений*.

2) Все углы, косинус которых имеет данное значение, записываются формулой: $2k\pi \pm x_0$.

**Объяснение:** В первой окружности всегда найдется угол $x_0$ (берем меньший), косинус которого имеет данное значение (если это значение не превышает единицы по абсолютной величине); это же значение косинуса в первой окружности имеет угол $(-x_0)$. Остальные решения получаются из найденных по свойству периодичности функций:

$$2k\pi + x_0; \quad 2k\pi - x_0.$$

Общая формула:

$$\boxed{2k\pi \pm x_0}$$

3) Общая формула углов, тангенс которых имеет данное значение $\boxed{m\pi + x_0}$, где $m$ — любое целое относительное число.

---

* Без объединения формул может быть повторение одних и тех же значений неизвестного в полученных формулах.

Объяснение аналогично вышеприведенным: в первой окружности имеются углы $x_0$ и $\pi + x_0$, которые имеют одинаковое значение тангенса (без всяких ограничений).

4) Аналогично рассуждая, получается, что все углы, имеющие одинаковое значение котангенса, записываются формулой: $m\pi + x_0$.

5) Все углы, удовлетворяющие требованию иметь определенное значение секанса (за исключением значений, заключающихся между $+1$ и $-1$), записываются формулой:

$$2k\pi \pm x_0.$$

6) Общая формула углов (дуг), имеющих одинаковый косеканс (за исключением значений между $+1$ и $-1$): $m\pi + (-1)^m x_0$.

## § 3. Уравнения „простейшего вида“: $\sin x = a$; $\cos x = b$; $\operatorname{tg} x = c$.

К решению уравнения простейшего вида: $\sin x = a$; $\cos x = b$; $\operatorname{tg} x = c$ приводится решение любого тригонометрического уравнения; поэтому учащимся необходимо приобрести большой навык в решении ур-ний простейшего вида, навык быстро и безошибочно решать их, и тем самым доводить до конца решение любого тригонометрического уравнения.

В зависимости от подготовки класса работа проводится на числовых и буквенных примерах в том или ином порядке: от числовых примеров к буквенным, или наоборот, применяя общие решения к частным случаям.

Крайне важно в каждом случае указывать учащимся, что простейшие тригонометрические уравнения, как и любые тригонометрические уравнения или не имеют решенийили имеют неограниченное число решений. 1. Уравнение $\sin x = a$. Если $|a| > 1$, — нет решений, если $|a| \leq 1$, имеет бесчисленное множество решений.

а) $\operatorname{Sin} x = 0.5$.

$$x_0 = 30^\circ; \qquad x_0 = \frac{\pi}{6};$$

$$x = m \cdot 180^\circ + (-1)^m \cdot 30^\circ; \qquad x = m\pi + (-1)^m \frac{\pi}{6};$$

$$x_0 = \arcsin 0{,}5;$$

$$x = m\pi + (-1)^m \arcsin 0{,}5,$$

где $\arcsin 0{,}5$ есть дуга в первой окружности, наименьшая по численному значению ($x_0$).

Если

| | | |
|---|---|---|
| $m = 0$ | $x = 30^\circ$ | $x = \frac{\pi}{6}$ |
| $m = 1$ | $x = 150^\circ$ | $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$ |
| $m = 2$ | $x = 390^\circ$ | $x = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13}{6}\pi$ |
| $m$ . . . | . . . . | . . . . |

**Указание:** Мы считаем полезным: 1) приучать учащихся по таблицам натуральных тригонометрических величин* отыскивать угол в градусах и минутах, переводить его в радианы и давать ответ во всех 3-х указанных формах. (Обычной ошибкой учащихся является то, что они пишут: $x = m\pi + (-1)^m 30°$, пользуясь в одной формуле и радианным и градусным выражением угла); 2) отыскивать некоторые частные значения углов, придавая коэфициенту $m$ различные значения, хотя мы не приводим их в дальнейшем. Необходимость этого в отдельных случаях будет указана ниже.

б) $\sin x = -0,5$

$$x_0 = 180° + 30° = 210°$$
$$x = m \cdot 180° + (-1)^m \cdot 210;$$
$$m = 0 \quad x = 210°$$
$$m = 1 \quad x = -30°$$
$$m = 2 \quad x = 570°$$
$$m = 3 \quad x = 330°$$
$$\ldots \quad \ldots$$

или

$$\ldots \quad \ldots$$
$$x_0 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$$
$$x = m\pi + (-1)^m \frac{7}{6}\pi;$$

или (предпочтительно)

$$\sin x = -0,5$$
$$x_0 = -\frac{\pi}{6}$$
$$x = m\pi - (-1)^m \frac{\pi}{6}$$

или $\sin x = -0,5$

$$x_0 = -30°$$
$$x = m \cdot 180° + (-1)^m (-30°)$$
$$x = m \cdot 180° - (-1)^m \cdot 30°.$$

Корни те же:

при

$$m = 0 \quad x = -30°$$
$$m = 1 \quad x = 210°$$
$$m = 2 \quad x = 330°$$
$$m = 3 \quad x = 570°$$

или

$$x_0 = \arcsin(-0,5)$$
$$x_0 = -\arcsin 0,5$$
$$x = m\pi - (-1)^m \arcsin 0,5.$$

---

* В случае, напр., когда $\sin x = 0,6$ и т. п.

Общий случай

в)

| | |
|---|---|
| $\sin x = a;\quad 0 \leq a \leq 1$ | $\sin x = -a;\quad 0 \leq a \leq 1$ |
| $x_0 = \arcsin a$ | $x_0 = -\arcsin a$ |
| $x = m\pi + (-1)^m \arcsin a,$ | $x = m\pi - (-1)^m \arcsin a$ |

где $\arcsin a = x_0$

II. Уравнение $\cos x = b$, при $0 \leq b \leq 1$

а) $\cos x = 0,5$

| | | |
|---|---|---|
| $x_0 = 60°$ | $x_0 = \frac{\pi}{3}$ | $x_0 = \arccos 0,5$ |
| $x = 2k \cdot 180° \pm 60°$ | $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ | $x = 2k\pi \pm \arccos 0,5$ |

б) $\cos x = -0,5$

| | |
|---|---|
| $x_0 = 180° - 60° = 120°$ | $x_0 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ |
| $x = 2k \cdot 180° \pm 120°$ | $x = 2k\pi \pm \frac{2}{3}\pi$ |

$$x_0 = \arccos(-0,5)$$
$$x_0 = \pi - \arccos 0,5$$
$$x = 2k\pi \pm (\pi - \arccos 0,5)$$

Общий случай:

в)

| | |
|---|---|
| $\cos x = b;\quad 0 \leq b \leq 1$ | $\cos x = -b;\quad 0 \leq b \leq 1$ |
| $x_0 = \arccos b$ | $x_0 = \pi - \arccos b$ |
| $x = 2k\pi \pm \arccos b$ | $x = 2k\pi \pm (\pi - \arccos b)$ |

III. Общий случай:

| | |
|---|---|
| Уравнение $\operatorname{tg} x = c;\quad c > 0$ | $\operatorname{tg} x = -c;\quad c > 0$ |
| $x_0 = \operatorname{arc\,tg} c$ | $x_0 = -\operatorname{arc\,tg} c$ |
| $x = m\pi + \operatorname{arc\,tg} c$ | $x = m\pi - \operatorname{arc\,tg} c$ |

**Указания.** 1) Решение простейших уравнений $\operatorname{ctg} x = c$; $\sec x = b$ и $\operatorname{cosec} x = a$ не представляет новых трудностей.

2) Случаи $\sin x = -a$, $\cos x = -a$, $\operatorname{tg} x = -a$ можно опустить для более подготовленных учащихся.

## § 4. Частные случаи „уравнений простейшего вида"

### I. Случай, когда тригонометрическая функция угла равна 0.

| | |
|---|---|
| 1) $\sin x = 0$ | 2) $\operatorname{tg} x = 0$ |
| $x = m\pi$ | $x = m\pi$ |

$$x = m\pi$$

| | |
|---|---|
| 3) $\cos x = 0$ | 4) $\operatorname{ctg} x = 0$ |
| $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ | $x = m\pi + \frac{\pi}{2}$ |

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

5) $\sec x = 0$ — нет решений,

6) $\operatorname{cosec} x = 0$ — нет решений.

Обычно решения уравнений 1) и 2) записывают формулой $x = m\pi$ и решения уравнений 3) и 4) записывают формулой $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, так как обе последние формулы говорят о нечетном числе $\frac{\pi}{2}$ *.

## II. Случай равенства тригонометрических функций **

1) Если 2 угла имеют равные синусы (или косекансы), то они или отличаются друг от друга на четное число полупериодов, или в сумме составляют нечетное число полупериодов ($\pi$).

В самом деле, если $\underline{\sin x = \sin a}$, то

все углы $x$ находятся по формуле $x = m\pi + (-1)^m a$, так как одно из решений данного уровнения (частный случай) будет при равенстве углов $x$ и $a$, т. е. $x_0 = a$, тогда

при $m$ четном, $x = 2k\pi + a$;

при $m$ нечетном, $x = (2k+1)\pi - a$,

Можно записать

$$\boxed{\begin{aligned} x - a &= 2k\pi; \\ x + a &= (2k+1)\pi. \end{aligned}}$$

Пример:

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{7};$$

$$x - \frac{\pi}{7} = 2k\pi; \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{7};$$

$$x + \frac{\pi}{7} = (2k+1)\pi; \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{7};$$

или сразу:

$$x = m\pi + (-1)^m\frac{\pi}{7}.$$

2) Если 2 угла имеют равные косинусы (или секансы), то и в сумме и в разности они дают четное число полупериодов ($\pi$).

$$\underline{\cos x = \cos a}.$$

Рассуждая попрежнему, мы имеем:

$$x = 2k\pi \pm a \quad \text{или} \quad x \pm a = 2k\pi.$$

Пример:

$$\cos x = \cos 17^\circ$$

$$x \pm 17^\circ = 2k \cdot 180^\circ$$

$$x = 2k \cdot 180^\circ \pm 17^\circ.$$

---

* $2k\pi \pm \frac{\pi}{2} = (4k \pm 1)\frac{\pi}{2}$; $m\pi + \frac{\pi}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$.

** Иногда говорят „освобождение обеих частей от знака тригонометрических функций“.

3) Если 2 угла имеют равные тангенсы (или котангенсы), то они отличаются на целое число полупериодов:

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$. Все углы $x$ записываются формулой:

$$x - \alpha = m\pi$$

Пример:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{2}{3}\pi$$

$$x = m\pi + \frac{2}{3}\pi.$$

## § 5. Простейшее уравнение в случае, когда неизвестное входит в состав аргумента

Последним этапом в подготовительной работе к решению уравнений является решение уравнений простейшего вида в том случае, когда неизвестный угол входит в состав аргумента. В этом случае возможны разнообразнейшие комбинации. Рассмотрим некоторые из них как в общем виде, так и в частных случаях.

1) Уравнение $\sin(x + \alpha) = a$

Определяем аргумент $(x + \alpha)$.

Решение:

$$(x + \alpha) = \arcsin a$$

$$x + \alpha = m\pi + (-1)^m \arcsin a$$

$$x = m\pi + (-1)^m \arcsin a - \alpha$$

2) Уравнение $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$

Определяем аргумент $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение:

$$x_0 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$x - \frac{\pi}{2} = m\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$x = m\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2},$$

$$x = m\pi + \frac{3}{4}\pi$$

3) Уравнение $\cos 2x = 1$

Решение:

$$(2x)_0 = 0$$

$$2x = 2k\pi$$

$$x = k\pi$$

4) Уравнение $\cos(mx + n) = 0$

Решение:

$$(mx + n)_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$mx + n = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$mx = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} - n$$

$$x = \frac{1}{m}\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{2} - n\right).$$

5) $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-1$

$$2x_0+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}$$

$$2x+\frac{\pi}{2}=m\pi-\frac{\pi}{4}$$

$$2x=m\pi-\frac{3}{4}\pi$$

$$x=\frac{m\pi}{2}-\frac{3}{8}\pi.$$

К этим же простейшим уравнениям следует отнести уравнения вида

$$a\sin(kx\pm m)=b \quad \text{или} \quad a\sin(kx\pm m)+b=c \text{ и т. п.}$$

Пример:

$$3\operatorname{tg}(2x-\pi)+0{,}4=2{,}8$$

$$\operatorname{tg}(2x-\pi)=0{,}8$$

$$2x_0-180^\circ=38^\circ$$

$$2x-180^\circ=m\cdot180^\circ+38^\circ;$$

$$2x=(m+1)\,180^\circ+38^\circ;$$

$$x=m\cdot90^\circ+109^\circ.$$

**Замечания:**

Обычными ошибками учащихся при решении рассмотренных выше уравнений вида

$$\sin(x\pm a)=b$$

$$\sin(a\pm x)=b$$

$$\sin kx=c$$

$$\sin(kx\pm m)=c$$

$$\sin\left(\frac{x}{k}\pm m\right)=c \text{ и т. п.}$$

1) является то, что они при решении стремятся использовать известные им формулы гониометрии, как напр. функции суммы, разности углов и т. д., что является совершенно излишним;

2) то, что учащиеся часто не пишут значений для всего аргумента в общем виде, а находят сперва численное значение для $x$, входящего в аргумент, и затем присоединяют к нему период.

## § 6. Двучленные уравнения первой степени, содержащие одинаковые функции с численными коэфициентами, равными 1, причем неизвестное входит в состав аргумента

Эти уравнения также относятся к „простейшим". Они решаются на основании сказанного в § 4, II и в § 5.

Пример 1.

$$\sin(8x+60^\circ)+\sin 2x=0$$

I прием:

а) $\sin(8x+60^\circ)=-\sin 2x$

$$8x+60^\circ=m\cdot180^\circ-(-1)^m\cdot2x;$$

откуда имеем некоторые значения неизвестного:
при

$$m = 0; \quad 8x + 60^\circ = -2x; \quad x = -6^\circ$$
$$m = 1; \quad 8x + 60^\circ = 180^\circ + 2x; \quad 6x = 120^\circ; \quad x = 20^\circ$$
$$m = 2; \quad 8x + 60^\circ = 360^\circ - 2x; \quad 10x = 300^\circ; \quad x = 30^\circ$$
$$m = 3; \quad x = 80^\circ \text{ и т. д.}$$

б) Иная запись:

$$8x + 60^\circ + (-2x) = (2k + 1)\, 180^\circ$$
$$8x + 60^\circ - (-2x) = 2k \cdot 180^\circ$$

Получаем те же решения

$$\text{при } k = 0,\ 1,\ 2 \ldots .$$

Эти уравнения решаются несколько сложнее путем преобразования по соответствующим формулам гониометрии, а затем согласно теории решения аналогичных алгебраических уравнений, а именно:

II прием:

$$\sin (8x + 60^\circ) + \sin 2x = 0$$
$$2 \sin (5x + 30^\circ) \cos (3x + 30^\circ) = 0.$$

В данном случае произведение равняется нулю, и оба сомножителя определены при любых значениях аргумента, поэтому

$$\cos (3x + 30^\circ) = 0 \qquad\qquad \sin (5x + 30^\circ) = 0 \text{ (см. § 4, I)}$$
$$3x + 30^\circ = (2k + 1) \cdot 90^\circ \qquad\qquad 5x + 30^\circ = m \cdot 180^\circ$$

Получаем снова:
при

$$k = 0; \quad 3x + 30^\circ = 90^\circ; \quad x = 20^\circ$$
$$k = 1; \quad 3x + 30^\circ = 270^\circ; \quad x = 80^\circ \text{ и т. д.}$$

при

$$m = 0; \quad 5x + 30^\circ = 0; \quad x = -6^\circ$$
$$m = 1; \quad 5x + 30^\circ = 180^\circ; \quad x = 30^\circ \text{ и т. д.}$$

Как уже сказано выше, полезно при обучении решению уравнений находить частные численные значения неизвестных, в особенности в случае, аналогичном данному, когда учащиеся, решив пример различными приемами, могут проверить правильность решения.

Пример 2

$$\sin \alpha = \cos \beta$$
$$\sin \alpha = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right)$$
$$\alpha = m\pi + (-1)^m \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right).$$

Вопрос может быть поставлен и иначе (см. § 4, II): найти зависимость между углами $\alpha$ и $\beta$.

Ответ:

$$\alpha - \beta = 2k\pi$$
$$\alpha + \beta = (2k + 1)\pi.$$

Пример 3.

$$\sin 13x = -\sin 5x$$

$$13x + (-5x) = (2k+1)\pi$$

$$13x - (-5x) = 2k\pi,$$

откуда

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{8}$$

и

$$x = \frac{2k\pi}{18} \quad \text{или} \quad x = 20^\circ k.$$

Пример 4.

$$\operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg} x,$$

$$4x - x = m\pi,$$

$$x = \frac{m\pi}{3}.$$

Обращаем внимание, что, решая указанные в этом § примеры путем тождественных преобразований по формулам, мы усложняем работу и часто приводим решение к необходимости дополнительно исследовать получающиеся корни. Так, в данном случае уравнение примет вид дроби

$$\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} x = 0$$

$$\frac{\sin 3x}{\cos 4x \cdot \cos x} = 0.$$

Соответствующее исследование указано ниже.

**Замечания:**

1) На основании вышеуказанного решается вопрос: при каких значениях $x$

$$\cos 5x = \cos 3x?$$

I прием:

$$5x = 2k\pi \pm 3x \quad (\S\ 4,\ \text{II})$$

$$2x = 2k\pi; \quad x = k\pi$$

$$8x = 2k\pi; \quad x = \frac{k\pi}{4}.$$

II прием:

$$\cos 5x - \cos 3x = 0$$

$$-2\sin 4x \sin x = 0$$

(исследование см. ниже)

$$\begin{array}{c|c} \sin 4x = 0 & \sin x = 0 \ (\S\ 4, \text{I}) \\ 4x = m\pi & x = m\pi \\ x = \frac{m\pi}{4} & \end{array}$$

2) более простой вопрос: при каких значениях угла, $m$ раз взятое значение любой его тригонометрической функции можно приравнять $n$ значениям той же функции?

Напр., найти $x$, если

$$5\operatorname{tg}x = 3\operatorname{tg}x\text{*},$$

$$2\operatorname{tg}x = 0,$$

$$x = m\pi.$$

В §§ 3, 4, 5 и 6 нами рассмотрены уравнения „простейшего вида“ и их частные случаи (пять видов).

## § 7. Общие указания к решению тригонометрических уравнений

В решении тригонометрических уравнений можно указать 3 этапа:

1) уравнение приводят к виду, содержащему только о д н у ф у н к ц и ю о д н о г о а р г у м е н т а на основании тождественных преобразований по формулам гониометрии;

2) эту функцию принимают за неизвестное и решают соответствующее алгебраическое уравнение (см. введение);

3) получив корни алгебраического уравнения, исследуют пригодность их для данного тригонометрического уравнения и пишут общий вид его корней.

П р и м е р 1. Уравнение $2\sin^2 x = 3\cos x$ заменяется равносильным уравнением $2 - 2\cos^2 x = 3\cos x$ или

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0;$$

получают квадратное уравнение относительно $\cos x$, откуда

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4};$$

$$\cos x = \frac{1}{2};$$

$$\cos x = -2 \text{ (не дает решения).}$$

Окончательно:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

П р и м е р 2. Уравнение $3\sin 2x - 2\sin x = 0$ заменяется равносильным уравнением

$$6\sin x\cos x - 2\sin x = 0;$$

$$\sin x(3\cos x - 1) = 0.$$

Уравнение распадается на 2 уравнения первой степени

$$\sin x = 0$$

и

$$3\cos x - 1 = 0;$$

---

* Этими примерами подчеркивается наличие неограниченного числа решений у тригонометрического уравнения.

Так, аналогичный вопрос в алгебре: при каких значениях $x$, $5x=3x$, имеет лишь одно решение. Вопрос, какое число равно своему квадрату, приводящий к квадратному уравнению в алгебре $x^2=x$, имеет 2 решения; соответствующие тригонометрические уравнения, напр., $\sin^2 x = \sin x$ и т. п. имеют по отношению к углу $x$ неограниченное число решений.

откуда

$$x = m\pi;$$

$$x = 2k\pi \pm arc\cos\frac{1}{3}.$$

**Указания:**

1. Когда при решении в уравнении переносятся члены из одной части в другую и соединяются подобные члены, получаются уравнения, равносильные данному.

Таким образом всякое уравнение может быть представлено так, что одна из его частей равняется нулю $M(x) = 0$.

2. Когда при решении уравнения освобождают уравнение от знаменателей и сокращают члены уравнения, то возможно получение уравнения не равносильного данному, в случае умножения и деления на выражение, содержащее неизвестное.

При этом могут быть все 3 случая: и сохранение равносильности, и потеря корней, и получение посторонних корней*.

3. Когда при решении уравнения над обеими частями уравнения производят действие возведения в степень (напр., при решении иррационального уравнения), то возможно получение уравнения, не равносильного данному. В частности, при возведении обеих частей в квадрат, как известно (см. исследование решений уравнений в курсе алгебры), получается уравнение, которому удовлетворяют не только все решения данного уравнения, но и корни того уравнения, которое получается из данного, если в одной его части переменить знаки на обратные. **

Из всего вышесказанного следует:

1) что при решении уравнения путем выполнения действия умножения или деления на выражение, содержащее неизвестное, и возведения в степень обеих частей уравнения, необходимо: а) подстановкой проверять пригодность полученных корней, б) проводить исследование в процессе решения уравнения, чтобы избегнуть потери его корней, а также и введения посторонних корней;

2) предпочитают в тех случаях, когда это возможно, приемы решения, которые давали бы возможность избегнуть получения дробных уравнений, иррациональных и т. п.

Поэтому: 1) при решении тригонометрических уравнений далеко не всегда пользуются общими приемами решения; 2) иногда, приводя уравнение к виду, содержащему только одну функцию одного аргумента, приводят к функции, которой и не было в данном уравнении, предпочитая приводить к $\operatorname{tg} x$ (см. §§ 9, 11, 13), так как дуги по тангенсу определяются точнее (до 45°) и формулы общего вида более простые; 3) вводят искусственные приемы решения уравнений.

В последовательности указанных трудностей мы и будем рассматривать решение уравнений.

---

* См. „Исследование уравнений“ в курсе алгебры. (Бертран. Алгебра. Комаров. Теор. основ. арифм. и алг. и др.).

** Решения уравнений $A \pm B = 0$.

**Замечание**. При решении уравнений с учащимися в 9 классе придерживаются иной системы—решают уравнения, требующие выполнения тождественных преобразований в определенной последовательности согласно программе гониометрии (см. Рыбкин. Сборник задач по тригонометрии, уравнения в §§ 2, 3, 8, 9, 10, 11). Вопрос о тождественных преобразованиях уравнений не рассматривается в данной статье, но как уравнения названных §§, так и уравнения, данные для 10 класса в §§ 14 и 15 сборника, решаются указываемыми нами приемами.

## § 8. Уравнение, левая часть которого представляет собой произведение, а правая нуль

I. Выше указан общий прием решения уравнений: на практике этим приемом решаются те уравнения, которые путем тождественных преобразований приводятся к уравнению, содержащему одну функцию одного аргумента 1-й степени, квадратному уравнению, биквадратному, уравнению высшей степени, решение которого путем подстановки или разложения на множители приводит к решению тех же уравнений — квадратного и первой степени. В данном § остановимся на решении уравнений, которые путем разложения на множители приводятся к решению системы уравнений, равносильных данному, причем каждое ур-ние содержит одну функцию одного неизвестного аргумента 1-й и 2-й степени. Такой, например, случай рассмотрен в § 7, в примере 2, где данное уравнение было лишь второго измерения. В этом §, в примере 1, рассмотрен аналогичный случай уравнения 3-й степени. В уравнениях этого рода одна из частей представляет собой произведение сомножителей, а другая—нуль:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \dots f_\kappa(x) = 0.$$

II. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы произведение обратилось в нуль, является равенство нулю одного или нескольких сомножителей этого произведения. $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$ и т. д. Корни $f(x)$ будут корнями данного ур-ия, если они не обращают в бесконечность (или неопределенность) какой-либо сомножитель (или произведение других сомножителей).

Поэтому полученные корни надо испытывать.

**Указание**. При этом корни могут быть получены непосредственным решением тригонометрического уравнения, или в случае неопределенности выражения они рассматриваются как значения, которые находятся путем отыскания предельного значения. * Такие случаи в тригонометрии встречаются чаще, чем в алгебре, потому что и некоторые значения тригонометрических функций рассматриваются как предельные (например, значение $\operatorname{tg} x$ для $\frac{\pi}{2}$).

---

* В „Сборнике задач“ Рыбкина имеются соответствующие упражнения в § 14, №№ 64—73.

III. Пример 1.

$$2\sin^3 x + \sin x\cos x \quad = 2\sin 2x,$$
$$2\sin^3 x - 3\sin x\cos x = 0,$$
$$\sin x\,(2\sin^2 x - 3\cos x) = 0,$$

а) $\sin x = 0$.

Второй множитель имеет определенное значение. Значит $x = m\pi$.

Проверка:

$$2\sin^3 m\pi - \sin m\pi\cos m\pi = 2\sin 2m\pi,$$
$$0 - 0\cdot(\pm 1) = 0; \qquad 0 = 0,$$

б) $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$.

$$2 - 2\cos^2 x - 3\cos x = 0,$$
$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0,$$
$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4}.$$
$$\cos x_1 = \frac{1}{2};$$
$$\cos x_2 = -2 \text{ (нет решения).}$$
$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

**Проверка:**

$$2\sin^3\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right),$$
$$\pm 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \pm 2\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2};$$
$$\pm\frac{3\sqrt{3}}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4} = \pm\sqrt{3};$$
$$\pm\sqrt{3} = \pm\sqrt{3}.$$

В решенном примере испытания корней можно было не делать.

Пример 2.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,(1 + \cos x) = 0.$$

Указание: Можно предложить ученикам преобразовать левую часть ур-ния, получают $\sin x = 0$, откуда

$$x = m\pi$$

Действительно: а) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$,

$$\frac{x}{2} = m\pi,$$
$$x = 2m\pi.$$

б) $1 + \cos x = 0;$

$\cos x = -1;$

$x = 2k\pi \pm \pi,$

но

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ обращается в $\infty$ при этом значении $x$.

Имеем

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}(1 + \cos x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot 2\cos^2\frac{x}{2} = \sin x.$$

$$\sin x = 0,$$

при $\quad x = 2k\pi \pm \pi.$

Таким образом корни уравнения:

из а) $x = 2m\pi$ (четное число $\pi$) и из б) $x = (2k+1)\pi$ (нечетное число $\pi$).

Или все корни можно записать одной формулой: $x = n\pi$, где $n$ любое целое четное и нечетное число.

Пример 3.

$$\cos x(\operatorname{tg} x - 1) = 0.$$

а) $\cos x = 0.$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2},$$

при этом значении $x$ второй множитель обращается в $\infty$.

Преобразуем:

$$\cos x \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} = \sin x - \cos x;$$

Это выражение при найденном значении $x$ не равно 0:

$$\sin\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1 - 0 \neq 0$$

и $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ не есть корень уравнения.

В решенном примере, после испытания 1-го полученного корня, убедились в его непригодности.

б) $\operatorname{tg} x - 1 = 0,$

$\operatorname{tg} x = 1;$

$x = m\pi + \frac{\pi}{4}.$

Это корень данного уравнения.

Замечание. Из выражения, полученного после преобразования левой части ур-ия: $\sin x - \cos x = 0$, ученики находят сразу решения ур-ния, которое мы имеем в случае б).

**Проверка:**

$$\cos\left(m\pi + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\left[\operatorname{tg}\left(m\pi + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right] = 0,$$

$$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - 1\right) = 0; \qquad 0 = 0.$$

Пример 4.

$$\operatorname{cosec} 2x \cdot \sin x = 0.$$

После преобразования:

$\operatorname{cosec} 2x \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2 \cos x}$; $\frac{1}{2\cos x} = 0$ не имеет решения.

Действительно:

а) $\operatorname{cosec} 2x = 0$ — нет решения,

б) $\sin x = 0$,

$x = m\pi$; при этом значении $x$ первый множитель $\operatorname{cosec} 4m\pi$ обратится в $\infty$.

При подстановке $x = m\pi$, $\frac{1}{2 \cos x}$ обращается в $\frac{1}{2 \cdot 0}$.

Значит $x = m\pi$ также не будет корнем уравнения.

Данное уравнение не имеет решений.

Пример 5.

$$4 \operatorname{tg} x \cdot \sin 4x = 0.$$

Преобразуем:

$$4 \operatorname{tg} x \cdot \sin 4x = \frac{4 \sin x}{\cos x} 4 \sin x \cos x \cos 2x = 16 \sin^2 x \cos 2x,$$

откуда $x = m\pi$, $x = (2к+1)\frac{\pi}{4}$.

Действительно данное ур-ие распадается на 2 уравнения.
а) $\operatorname{tg} x = 0$; второй множитель имеет определенное значение и $x = m\pi$.

б) $\sin 4x = 0$,

$4x = m\pi$,

$x = m\frac{\pi}{4}$.

Первый множитель обращается в $\infty$ только при некоторых значениях $m$ в выражении для $x$, напр., при $m = 2$; 6; 10; 14 и т. д., т. е. при значениях $m = 4k + 2$, где $k$—любое целое число *.

При подстановке в преобразованное уравнение

$x = m\frac{\pi}{4}$, убеждаемся, что

$$16 \sin^2 \frac{m\pi}{4} \cos m\frac{\pi}{2} = 0,$$

при всех значениях $m$ (включая и $m = 4k + 2$). В самом деле

$$16 \sin^2 \left(\frac{2k+1}{2}\right) \pi \cos (2k+1)\pi = 16 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Корни уравнения:

$$x = m\pi; \qquad x = m\frac{\pi}{4}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{4} = \operatorname{tg}\frac{10\pi}{4} = \operatorname{tg}\frac{18 \cdot \pi}{4} = \ldots \infty,$$

$$\operatorname{tg}\frac{6\pi}{4} = \operatorname{tg}\frac{14 \cdot \pi}{4} = \ldots\ldots \infty,$$

Пример 6.

Решить уравнение:

$$\sin x \cdot \operatorname{ctg} x \cdot (1-\operatorname{tg}^2 x)=0.$$

$$\sin x = 0 \qquad \operatorname{ctg} x = 0 \qquad 1-\operatorname{tg}^2 x = 0$$

$$x = m\pi; \qquad x = m\pi + \frac{\pi}{2}; \; x = m\pi \pm \frac{\pi}{4} \; .$$

Две первые группы корней, обращая один из множителей в нуль, в то же время делают другой множитель бесконечно большим. Преобразовав $\sin x \cdot \operatorname{ctg} x\,(1-\operatorname{tg}^2 x) = \cos 2x \sec x$, убеждаемся, что только решения $x = m\pi + \frac{\pi}{4}$ будут корнями данного уравнения.

**Указание**: Если дано уравнение вида произведения нескольких (более двух) сомножителей (в другой части уравнения 0), то для решения исследуют порознь каждый из сомножителей, который может стать равным нулю, находят общий вид корней и проверяют подстановкой в уравнение.

## § 9. Приложение теории предыдущего параграфа

I. Часто при решении уравнений пользуются приемом сокращения обеих частей уравнения. Как известно из курса алгебры, при этом может получиться уравнение, не равносильное данному. Поэтому следует предпочесть прием, при котором все члены переносятся в одну часть уравнения, а в другой части 0; тогда общие множители, на которые можно было сократить все члены уравнения, будут сомножителями произведения, и исследование проводится согласно сказанному в § 8.

Пример 1.

$$a \sin^2 x = b \sin x \text{ при } |b| \le |a|.$$

Решение:

$$a \sin^2 x - b \sin x = 0$$

$$\sin x\,(a \sin x - b) = 0$$

$$\begin{array}{r|l} \sin x = 0 & a \sin x - b = 0 \\ x = m\pi & x = m\pi + (-1)^m \arcsin \dfrac{b}{a}. \end{array}$$

**Указание:**

Сократив обе части уравнения на $\sin x$, теряют первую группу корней.

Пример 2.

$$\sin^3 x = 2 \sin 2x - \sin x$$

$$\sin x\,(\sin^2 x + 1 - 4 \cos x) = 0$$

$$\sin x\,(\cos^2 x + 4 \cos x - 2) = 0$$

1) $\sin x = 0$, $x = m\pi$

2) $\cos^2 x + 4 \cos x - 2 = 0$

$\cos x = -2 \pm \sqrt{6}$,

откуда, так как

$\cos x = -2 - \sqrt{6}$ не дает решения

$x = 2k\pi \pm \arccos\left(\sqrt{6} - 2\right)$.

Корни:

$$x = m\pi; \quad x = 2k\pi \pm \arccos\left(\sqrt{6} - 2\right).$$

## II. Однородные уравнения относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Указываемый прием имеет большое значение при решении однородных тригонометрических уравнений, содержащих функцию и кофункцию одной дуги.

Пример 3. $a \sin x = b \cos x$. Однородное уравнение 1-й степени.

Решение: $a \sin x - b \cos x = 0$. Для приведения к одной функции* вынесем $\cos x$ за скобки: $\cos x (a \operatorname{tg} x - b) = 0$.

а) $\cos x = 0$ не может быть корнем уравнения**.

б) $a \operatorname{tg} x - b = 0$

$$\operatorname{tg} x = \frac{b}{a}; \quad x = m\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$$

есть общий вид корней данного уравнения.

Пример 4.

$$a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x = 0$$

$$\operatorname{tg} x (a + b \operatorname{ctg}^2 x) = 0$$

а) $\operatorname{tg} x = 0$ не удовлетворяет данному уравнению.

б) $a + b \operatorname{ctg}^2 x = 0$; $\operatorname{ctg}^2 x = -\frac{a}{b}$; $\operatorname{tg}^2 x = -\frac{b}{a}$

$$x = m\pi \pm \operatorname{arc\,tg} \sqrt{-\frac{b}{a}}$$

при условии, что $b$ и $a$ разных знаков.

Пример 5.

$$\sin^2 x + \sin x \cos x = 1$$

$$\sin x \cos x - (1 - \sin^2 x) = 0.$$

Получаем однородное уравнение относительно $\sin x$ и $\cos x$ второй степени:

$$\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

$$\cos^2 x (\operatorname{tg} x - 1) = 0.$$

| а) | б) |
|---|---|
| $\cos^2 x = 0$ | $\operatorname{tg} x - 1 = 0$ |
| $\cos x = 0$ | $x = m\pi + \frac{\pi}{4}$ |
| $x = (2k\pi + 1)\frac{\pi}{2}$ | Обе группы значений неизвестного удовлетворяют уравнению. |

Пример 6. Уравнение третьей степени без свободного члена: $3\sqrt{3} \sin^3 x = \cos^3 x$.

* Не содержащейся в данном уравнении.

** В данном случае можно было сократить члены уравнений на $\cos x$, так как $\cos x$ имеет определенное значение, не может равняться 0, в чем можно убедиться подстановкой.

Решение:

$$\cos^2 x\left(3\sqrt{3}\,\operatorname{tg}^3 x-1\right)=0;$$

а) $\cos x=0$ не может быть корнем уравнения, так как

$$3\sqrt{3}\cdot(\pm 1)\neq 0;$$

б) $\left(\sqrt{3}\,\operatorname{tg}x-1\right)\left(3\operatorname{tg}^2 x+3\sqrt{3}\,\operatorname{tg}x+1\right)=0$

| | |
|---|---|
| $\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ <br> $x=m\pi+\frac{\pi}{6}$ | $3\operatorname{tg}^2 x+\sqrt{3}\,\operatorname{tg}x+1=0$ дает мнимые корни, не рассматриваемые в данной работе. |

Пример 7. Однородное уравнение второй степени в общем виде:

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0,$$

$$\cos^2 x\,(a\operatorname{tg}^2 x+b\operatorname{tg}x+c)=0.$$

а) корни ур-ия $\cos x=0$ не удовлетворяют данному уравнению (можно сократить на $\cos x$);

б) $a\operatorname{tg}^2 x+b\operatorname{tg}x+c=0$;

$$x=m\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Пример 8. Рассмотрим однородное уравнение 4-й степени:

$$\sin^3 x\cos x+\sin^2 x\cos^2 x-4\sin x\cos^3 x-4\cos^4 x=0.$$

1) Члены уравнения можно делить на $\sin^4 x$ без потери корней, так как корень уравнения $\sin^4 x=0$ не удовлетворяет данному уравнению, в чем легко убедиться.

Тогда уравнение запишется $\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}^2 x-4\operatorname{ctg}^3 x-4\operatorname{ctg}^4 x=0$ или $\operatorname{ctg}x(1+\operatorname{ctg}x)(1+2\operatorname{ctg}x)(1-2\operatorname{ctg}x)=0$.

2) Так как корни уравнения $\cos^4 x=0$ удовлетворяют данному уравнению, то уравнение перепишется:

$$\cos^4 x(\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg}x-4)=0$$

или

$$\cos^4 x(\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{tg}x-2)(\operatorname{tg}x+2)=0$$

и решения $x=(4k\pm 1)\frac{\pi}{2}$ уравнения $\cos^4 x=0$ будут корнями данного уравнения дополнительно к тем, которые будут получены после рассмотрения остальных сомножителей.

## § 10. Уравнение вида дроби

1. Уравнения, в которых тригонометрические функции неизвестного аргумента входят в знаменатель одного или нескольких членов (т. е. с дробными членами), путем приведения к общему знаменателю, перенесения членов в одну часть уравнения, приводятся к виду $\frac{A(x)}{B(x)}=0$, где $A$ и $B$

являются тригонометрическими функциями (без дробных членов). Некоторые уравнения в таком виде и даются.

Освобождение от знаменателя в данном случае, как известно из курса алгебры, нежелательно, так как возможно получение уравнения неравносильного данному.*

Пример 1. Решить уравнение: $\frac{\cos x}{2-\cos x}=\frac{1}{3}$.

**Решение:**

$\frac{4\cos x-2}{3(2-\cos x)}=0$. Так как знаменатель имеет определенное значение и не равное нулю, то данное ур-ие равносильно ур-ию $4\cos x-2=0$, откуда $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

**Замечание:** Деление на $\varphi(x)$ можно заменить умножением на $\frac{1}{\varphi(x)}$, и рассматриваемый случай решения уравнения может быть сведен к решению уравнения, левая часть которого имеет вид произведения, а в правой нуль (применяется в том случае, когда знаменатель обращается в бесконечность).

Пример 2.

$$\frac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg} x}=0 \text{ или } (\sin x-\cos x)\operatorname{ctg} x=0.$$

Решение:

а) $\sin x-\cos x=0$. Разделим все члены на $\cos x$**, получим $\operatorname{tg} x=1$. И корень $x=m\pi+\frac{\pi}{4}$ (при этом значении $x$ знаменатель дроби не равен 0).

б) $\operatorname{tg} x=\infty$ или $\operatorname{ctg} x=0$, имеем $x=m\pi+\frac{\pi}{2}$.

Итак:

$$x=m\pi+\frac{\pi}{4};\ x=m\pi+\frac{\pi}{2};$$

**Замечание:** Освободившись от знаменателя, мы потеряли бы вторую группу корней.

**Проверка:**

$$\frac{\sin\left(m\pi+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(m\pi+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(m\pi+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\mp\sin\frac{\pi}{4}\pm\cos\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{0}{1}=0.$$

$$\frac{\sin\left(m\pi+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(m\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(m\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=\left(\mp\sin\frac{\pi}{2}\pm\cos\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0.$$

---

* Если взять за корни дробного уравнения $\frac{A(x)}{B(x)}=0$ корни того уравнения, которым является числитель, приравненный нулю, т. е. $A(x)=0$, то корни могут не удовлетворять первому уравнению (в том случае, если найденное значение неизвестного является также корнем знаменателя).

** При делении на $\cos x$ корень не теряется, так как $\cos x=0$ не является корнем уравнения: $1-0\neq 0$.

Пример 3.

$$\sec x = \cos x + \sin x$$

$$\frac{1}{\cos x} = \cos x + \sin x$$

$$\frac{1 - \cos^2 x - \cos x \sin x}{\cos x} = 0.$$

Левая часть ур-ния тождественно равна нулю при том значении $x$, при котором

$1 - \cos^2 x - \cos x \sin x = 0$, так как при этом значении $x$, $\cos x \neq 0$

$$\sin^2 x - \cos x \sin x = 0$$

$$\sin x (\sin x - \cos x) = 0$$

| | |
|---|---|
| $\sin x = 0$ | $\sin x - \cos x = 0$ |
| $x = m\pi$ | $x = m\pi + \frac{\pi}{4}$ |

**Проверка:**

1) $\sec m\pi = \cos m\pi + \sin m\pi$

$$\pm 1 = \pm 1$$

2) $\sec\left(m\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(m\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(m\pi + \frac{\pi}{4}\right);$

$$-\sec\frac{\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} \quad \text{(при } m \text{ нечетном)}$$

$$-\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$-\sqrt{2} = -\sqrt{2} \text{ и т. д.}$$

Пример 4.

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{\cos 2x}{\cos x}$$

$$\frac{\sin 2x \cdot \cos x - \cos 2x \cdot \sin x}{\sin x \cdot \cos x} = 0$$

$$\frac{\sin(2x - x)}{\sin x \cdot \cos x} = 0; \quad \frac{\sin x}{\sin x \cdot \cos x} = 0.$$

Данное ур-ие может быть не равносильно уравнению $\sin x = 0$, так как при этом значении $x$ и знаменатель обратится в 0. Сократив числителя и знаменателя дроби на общий множитель, который обратит числитель и знаменатель в 0 при предельном значении $x$, а именно на $\sin x$, имеем $\frac{1}{\cos x} = \pm 1$, а не нулю при $x = m\pi$. Данное уравнение не имеет решения.

Пример 5.

Решить ур-ие:

$$\frac{\sin x \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \cos x} = \frac{9}{4}.$$

Решение:

$$\frac{5\cos^2 x-9\cos x+4}{4\cos x\,(1-\cos x)}=0;$$

$5\cos^2 x-9\cos x+4=0$, откуда $\cos x=1$; $\cos x=0{,}8$.

$\operatorname{Cos} x=1$ может быть посторонним корнем, ибо он обращает знаменатель в нуль. В самом деле:

$$\frac{\sin x \operatorname{tg} x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\cos x}=2, \text{а не } \frac{9}{4} \text{ при } \cos x=1.$$

Пример 6.

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=2-\frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\frac{\sin^2 x-2\sin x-2\sin x\cos x+\cos x+\cos^2 x}{(1+\cos x)\sin x}=0,$$

$$\frac{1-2\sin x+\cos x-2\sin x\cos x}{(1+\cos x)\sin x}=0,$$

$$1-2\sin x+\cos x-2\sin x\cos x=0,$$

$$(1-2\sin x)\cdot(1+\cos x)=0.$$

а) $1-2\sin x=0$; $\sin x=\frac{1}{2}$; при этом значении синуса неизвестного аргумента знаменатель не обращается в 0, значит уравнение удовлетворяется при

$$x_0=\frac{\pi}{6} \quad \text{и} \quad x=m\pi+(-1)^m\frac{\pi}{6}.$$

б) Если $1+\cos x=0$, то и знаменатель дроби

$$(1+\cos x)\sin x=0.$$

$\cos x=-1$ не удовлетворяет уравнению.

**Проверка.** Для удобства проверки напишем 2 функции для общего вида корней:

$$1)\ x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \quad \text{и} \quad 2)\ x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}.$$

Подставляем:

1)
$$\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}=2-\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=2-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}; \quad \frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3},$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}; \quad 2-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}.$$

$$2)\ \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{1-\cos\frac{\pi}{6}} = 2 - \frac{-\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}};\quad \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3};\quad 2+\sqrt{3} = 2+\sqrt{3}.$$

Таким образом общий вид корней данного уравнения

$$x = m\pi + (-1)^m \frac{\pi}{6}.$$

## § 11. Приемы решений уравнения, левая часть которого однородная функция II степени относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Пример 1. В § 9 даны примеры решения однородного уравнения II степени относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Укажем иной прием* решения примера 7 из § 9:

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0.$$

Вынесем за скобки $\sin x \cdot \cos x$. Имеем:

$$\sin x\cos x\,(a\,\mathrm{tg}\,x + b + c\,\mathrm{ctg}\,x) = 0.$$

Левая часть уравнения состоит из 3 множителей:

а) $\sin x = 0$. Не удовлетворяет уравнению. (Убеждаемся подстановкой);

б) $\cos x = 0$. Не удовлетворяет уравнению;

в) $\frac{a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}\,x + c}{\mathrm{tg}\,x} = 0$. Уравнение равносильно ур-нию:

$$a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}\,x + c = 0,$$

решения которого не обращают знаменатель в 0.

Корни уравнения:

$$x = m\pi + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

совпадают с решением примера 6 в § 9.

Способ решения более громоздкий, но рекомендуется в учебниках (без подробного исследования).

Пример 2. Однородная функция второй степени относительно $\sin x$ и $\cos x$-в левой части ур-ия, а в правой свободный член (в общем виде):

1-й способ: $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = n$.

Заменяя

$$\sin x = \frac{\mathrm{tg}\,x}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}},$$

* В § 13 приведен еще один прием в „Добавлении".

получаем

$\frac{a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}\, x + c - n(1 + \mathrm{tg}^2 x)}{1 + \mathrm{tg}^2 x} = 0$. Это уравнение равносильно ур-ию:

$$(a - n)\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}\, x + c - n = 0,$$

$$x = m\pi + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(a-n)(c-n)}}{2(a-n)}$$

2-й способ. Сделать данное уравнение однородным, умножив правую часть на $(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

$$(a - n)\sin^2 x + b \sin x \cos x + (c - n)\cos^2 x = 0.$$

Откуда (см. § 10, пример 1 или § 9, пример 7)

$$x = m\pi + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(a-n)(c-n)}}{2(a-n)};$$

решение то же.

**Замечания:** 1. Этот способ быстро дает ответ, но способ 1) имеет то преимущество, что показывает прием замены функций синуса и косинуса через тангенс, крайне полезный в аналогичных случаях, см. § 13)*.

2. Иногда, решая указанный пример способом 2), говорят: умножим правую часть уравнения на $(\sin^2 x + \cos^2 x)$ и разделим все члены на $\cos^2 x$. Надо выяснить учащимся, почему в данном случае можно выполнить указанные действия, не нарушая равносильности данного и полученного уравнения.

Приложения:

а) Для примера $\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x = 1$, имеем по формуле:

$$x = m\pi + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{-2\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{4},$$

т. е. имеем корни

$$x = m\pi;\quad m\pi - \frac{\pi}{3}.$$

Проверить корни непосредственным решением данного уравнения.

б) Для примера $a\sin^2 x + b \sin x \cos x + c\cos^2 x = a$, где $a = n$, имеем корни

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2};\ x = m\pi - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{c-a}{b}.$$ Проверить.

## § 12. Уравнения иррациональные

В § 7 уже были указаны трудности, связанные с решением уравнений в том случае, когда обе части уравнения возводятся в степень (мы ограничиваемся возведением в квадрат) и необходимость проверки получаемых решений при употреблении этого приема.

Возведение в квадрат обеих частей уравнения применяется здесь, так как этого нельзя избегнуть.

---

* В § 13 приведен еще один прием.

Пример 1. Иррациональное уравнение *

$$\sqrt{3\sin x} = -\cos x\sqrt{2}$$

Возводим в квадрат обе части уравнения:

$$3\sin x = 2\cos^2 x,$$

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0,$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sin x = -2 \text{ (нет решения).}$$

Корни уравнения:

$$x = m\pi + (-1)^m \frac{\pi}{6}$$

или

$$x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \text{ и } x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

Проверка:

1) Подставляем $x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}$,

$$\sqrt{3\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)} = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\sqrt{2},$$

$$\sqrt{3\cdot\frac{1}{2}} = +\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2};$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} = +\sqrt{\frac{3}{2}}; \text{ удовлетворяют.}$$

2) Подставляем $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$,

$$\sqrt{3\sin\frac{\pi}{6}} = -\cos\frac{\pi}{6}\sqrt{2},$$

$$\sqrt{3\cdot\frac{1}{2}} \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2},$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \neq -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Вторая группа корней принадлежит уравнению, в котором знаки членов одной из частей противоположны данным, а именно уравнению:

$$\sqrt{3\sin x} = +\cos x\sqrt{2}.$$

Пример 2. Иногда пользуются приемом возведения в квадрат обеих частей уравнения в том случае, когда уравнение содержит функции синуса и косинуса в первой степени.

---

* В иррациональном уравнении тригонометрическая функция неизвестного аргумента находится под радикалом.)

Полезно на примерах выяснить невыгодность этого приема:

Способ I: $\sin x + \cos x = 1$,

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} = 1 - \cos x.$$

$$1 - \cos^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x,$$

$$\cos^2 x - \cos x = 0,$$

$$\cos x(\cos x - 1) = 0.$$

а) $\cos x = 0$; б) $\cos x = 1$;

$$x = (2k + 1)\frac{\pi}{2};\ x = 2k\pi.$$

Проверка:

1) $$\sin\left[(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right] + \cos\left[(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right] = 1;$$

$$\pm 1 + 0 = \pm 1.$$

Другими словами, те корни, записанные формулой $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$, удовлетворяют уравнению, для которых $k$—четное, включая 0, а именно: $k = 0, 2, 4\ldots$ При нечетном $k$ углы, записанные этой формулой, не удовлетворяют данному уравнению *.

2) Проверка решения $x = 2k\pi$:

$$\sin 2k\pi + \cos 2k\pi = 1;$$

$0 + 1 = 1$; удовлетворяют.

Способ II. Решим тот же пример иным способом **:

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Зная, что

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

перепишем данное уравнение:

$$\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4},$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2};\quad x = 2k\pi.$$

---

* Если записать корни уравнения $\cos x = 0$ как $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$, то решения $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ удовлетворяют уравнению, а $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ — не удовлетворяют.

** Другие приемы решения указаны также в § 13.

При этом способе сразу получились только те решения которые удовлетворяют уравнению. Но, конечно, этот способ удалось использовать только благодаря тому, что все коэфициенты данного уравнения равны 1. Далее приведем более общий прием.

Способ III. $\sin x + \sin(90° - x) = 1$,

$$2\sin 45° \cdot \cos(x - 45°) = 1,$$

$$\cos(x - 45°) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

решения те же.

**Замечания.** Можно на числах показать те лишние корни, которые получились при решении примера 2 способом I— возведение в квадрат обеих частей ур-ия.

В самом деле:

при способе I получены решения: 90°, 270°, 450°, 550°, 810° и т. д., затем 0°, 360°, 720°, 1080° и т. д;

при способе II и III получены: 90°, 450°, 810° и т. д., затем 0°, 360°, 720°, 1080° и т. д.

Сравнивая, видим, что лишние решения, полученные при первом способе, это 270°, 560° и т. д. при $k = 1, 3, 5$ и т. д.

Пример 3. Приведем еще один пример, который содержит функции синуса, косинуса в 1-й степени. Решим возведением обеих его частей в квадрат:

$$\sin x + \cos x + \sin 2x = 1\ ^*,$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = (1 - \sin 2x)^2,$$

$$1 + \sin 2x = 1 - 2\sin 2x + \sin^2 2x,$$

$$\sin^2 2x - 3\sin 2x = 0,$$

$$\sin 2x(\sin 2x - 3) = 0.$$

а) $\sin 2x = 0$;

б) $\sin 2x = 3$ (нет решения).

$$2x = m\pi,$$

где $m$ число четное и нечетное;

$$x = \frac{m\pi}{2}.$$

Проверка: $2x = 2k\pi$; $2x = (2k + 1)\pi$,

1) $\sin k\pi + \cos k\pi + \sin 2k\pi =$
$= 0 \pm 1 + 0 = \pm 1$; значения неизвестного удовлетворяют уравнению при $k$ четном (включая $k = 0$), т. е. при $m$, кратном числу 4 и равном 0.

2) $\sin(2k + 1)\frac{\pi}{2} + \cos(2k + 1)\frac{\pi}{2} + \sin(2k + 1)\pi =$

$$= \pm 1 + 0 + 0 = \pm 1.$$

---

* Полезно запомнить:

$$\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1.$$

Значения неизвестного удовлетворяют при $k$ четном (включая $k=0$); т. е. при $m=1,\ 5,\ 9\ldots$ (арифметическая прогрессия).

Убедимся на числах, что корнями уравнения $\sin x+\cos x+\sin 2x=1$ будет

$x=\frac{m\pi}{2}$ при $m=0$; при $m=1,\ 5,\ 9\ldots$ и при $m$ кратном числу 4 (т. е. $m=4,\ 8,\ 12\ldots$).

Возьмем для $m$ значения ряда натуральных чисел и нуль: $m=0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\ldots$

$x=0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2};\ 2\pi;\ \frac{5\pi}{2};\ 3\pi;\ \frac{7\pi}{2};\ 4\pi\ldots$

$\sin 0+\cos 0+\sin 0=0+1+0=1$ (удовлетворяет).

$\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}+\sin\pi=1+0+0=1$ (удовлетворяет).

$\sin\pi+\cos\pi+\sin 2\pi=0-1+0\neq 1$ (не удовлетворяет).

$\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{3\pi}{2}+\sin 3\pi=-1+0+0\neq 1$ (не удовлетворяет).

$\sin 2\pi+\cos 2\pi+\sin 4\pi=0+1+0=1$ (удовлетворяет).

Дальнейшее не требует проверки.

Пример 4.

В решенном примере мы имели соотношение

$$\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2-1.$$

Пользуясь этим соотношением легко решается пример вида:

$$a\sin 2x=b(\sin x+\cos x).$$

$$a(\sin x+\cos x)^2-b(\sin x+\cos x)-a=0,$$

$$az^2-bz-a=0,$$

где

$$z=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(45^\circ-x),$$

откуда

$$z=\frac{b\pm\sqrt{b^2+4a^2}}{2a},$$

т. е.

$$\cos(45^\circ-x)=\sin(45^\circ+x)=\frac{b\pm\sqrt{b^2+4a^2}}{2a\sqrt{2}},$$

откуда определяют $x$.

Решить: $2\sin 2x=3(\sin x+\cos x)$.

## § 13. Уравнение $a\sin x+b\cos x=c$

1. В частных случаях решение уравнения этого вида дано: 1) в § 9, пример 3, а именно уравнение $a\sin x=b\cos x$ — без свободного члена и 2) в § 12, в частности пример 2, случай $\sin x+\cos x=1$ (тремя способами).

Различные примеры указанного вида в различных частных случаях могут решаться различно, Дадим еще один пример:

$$\sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x = -1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)^{*}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = m\pi - (-1)^m \frac{\pi}{6},$$

откуда

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$$

или

$$x = 2k\pi - \frac{5}{12}\pi$$

и

$$x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$$

или

$$x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{12}.$$

II. Рассмотрим способы решения данного уравнения в общем виде.

**1-й способ:** путем возведения обеих частей уравнения в квадрат

$$a\sin x + b\cos x = c$$

$$a\sin x + b\sqrt{1-\sin^2 x} = c$$

(можно решать относительно $\cos x$).

$$b\sqrt{1-\sin^2 x} = c - a\sin x$$

$$b^2 - b^2\sin^2 x = c^2 - 2ac\sin x + a^2\sin^2 x$$

$$(a^2+b^2)\sin^2 x - 2ac\sin x + (c^2-b^2) = 0$$

$$\sin x = \frac{ac \pm \sqrt{a^2c^2 - (a^2+b^2)(c^2-b^2)}}{a^2+b^2}$$

$$\sin x = \frac{ac \pm b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}$$

$$x = m\pi + (-1)^m \arcsin\frac{ac \pm b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}.$$

Для получения вещественных корней $a^2+b^2 \geqslant c^2$.

Найденные решения необходимо испытать.

---

* Можно выразить и через функцию косинуса.

Пример:

$$\sin x + 7\cos x = 5.$$

Условие соблюдено: $a^2 + b^2 \geqslant c^2$

Решение: $(\sin x)^2 = (5 - 7\cos x)^2$

$$1 - \cos^2 x = 25 - 70\cos x + 49\cos^2 x$$

$$25\cos^2 x - 35\cos x + 12 = 0$$

$$\cos x = \frac{35 \pm 5}{50}$$

| | |
|---|---|
| $\cos x_1 = 0{,}8$ | $\cos x_2 = 0{,}6$ |
| $x = 2k\pi + \arccos 0{,}8$ | $x = 2k\pi \pm \arccos 0{,}6$ |
| $x = 2k \cdot 180^\circ + 36^\circ.$ | $x = 2k \cdot 180^\circ + 52^\circ.$ |

Полученные решения могут принадлежать не только данному уравнению

$$\sin x = 5 - 7\cos x,$$

но и уравнению

$$\sin x = -(5 - 7\cos x).$$

Необходимо проверить:

| | |
|---|---|
| $\sin x = 5 - 7 \cdot 0{,}8 < 0;$ | $\sin x = 5 - 7 \cdot 0{,}6 > 0.$ |
| Не пригодны те углы, которые дают положительное значение синуса. | Непригодны те углы, которые дают отрицательное значение синуса. |

Решения: $x = 2k \cdot 180^\circ - 36^\circ$; $2k \cdot 180^\circ + 52^\circ$ (с точностью до $1^\circ$).

Значение же $x = 2k \cdot 180^\circ + 36^\circ$ и $x = 2k \cdot 180^\circ - 52^\circ$ служат корнями ур-ия: $\sin x = -(5 - 7\cos x)$

**2-й способ.** Наилучший прием, помогающий избежать иррациональности при решении ур-ия $a\sin x + b\cos x = c$, заключается в том, что все функции рационально выражают через тангенс половинного угла*:

$$a \cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + b\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = c$$

$$a\,\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + b\,\frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = c$$

$$\frac{2a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b - b\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - c\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 0.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$(b + c)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + (c - b) = 0, \text{ откуда}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - (c + b)(c - b)}}{b + c}.$$

---

* См. указание 1 § 7.

Условие вещественности корней—то же: $a^2+b^2 \geqslant c^2$.

$$x = 2m\pi + 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}.$$

Решение выше приведенного уравнения:

$$\sin x + 7\cos x = 5$$

приводит к решению уравнения:

$$6\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - 1 = 0,$$

откуда

$$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = \frac{1 \pm 5}{12};$$

| | |
|---|---|
| $\mathrm{tg}\,\frac{x_1}{2} = \frac{1}{2}$ | $\mathrm{tg}\,\frac{x_2}{2} = -\frac{1}{3}$ |
| $\frac{x}{2} = m \cdot 180 + 26°$ | $\frac{x}{2} = m \cdot 180° - 18°$ |

$$x = 2m \cdot 180 + 52°; \qquad x = 2\,m \cdot 180° - 36°$$

(с той же точностью).

Пользуясь этим способом, корни уравнения получают сразу.

Замечание. Следует отметить, что данное уравнение

$$a\sin x + b\cos x = c$$

приводится к тому же уравнению, выраженному через $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ при помощи рассуждений, аналогичных тем, которые даны в § 11, в примере 2, как 2) способ для решения уравнения, левая часть которого представляет собой—однородную функцию относительно $\sin x$ и $\cos x$, а именно:

перепишем:

$$2a\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} + b\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = c.$$

Умножмм правую часть уравнения на $\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)$ и разделим все члены на $\cos^2\frac{x}{a}$, получим:

$$\frac{2a\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + b - b\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = c + c\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}.$$

$$2a\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + b - b\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} = c + c\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}.$$

$$(b+c)\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 2a\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - (b-c) = 0$$

и т. д.

**3-й способ.** (Искусственный прием)—введение вспомогательного угла.

а) $a\sin x + b\cos x = c$. Вынесем $a$ за скобки в левой части уравнения* и обозначим $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$.

$$a\left(\sin x + \frac{b}{a}\cos x\right) = c,$$

$$a(\sin x + \operatorname{tg}\varphi\cos x) = c,$$

$$\frac{a\sin(x+\varphi)}{\cos\varphi} = c,$$

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c\cos\varphi}{a},$$

откуда, обозначив наименьшее численное значение $(x+\varphi)_0 = \alpha$, имеем:

$$x + \varphi = 2k\pi + \alpha; \quad x = 2k\pi + \alpha - \varphi$$

$$x + \varphi = (2k+1)\pi - \alpha: \quad x = (2k+1)\pi - \alpha - \varphi.$$

Для получения вещественных решений:
должно быть

$$\frac{c\cos\varphi}{a} < 1; \quad \cos^2\varphi \leqslant \frac{a^2}{c^2},$$

но

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2+b^2},$$

т. е. должно быть

$$\frac{a^2}{a^2+b^2} \leq \frac{a^2}{c^2}.$$

Откуда для получения вещественных корней данного уравнения должно быть соблюдено условие $a^2 + b^2 \geqslant c^2$ (см. выше).

б) Если вынести за скобки множитель $b$, и обозначить $\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\varphi$, то получим:

$$\frac{b\cos(x-\varphi)}{\cos\varphi} = c,$$

$$x - \varphi = 2k\pi \pm \arccos\frac{c\cos\varphi}{b},$$

$$x = 2k\pi \pm \arccos\varphi\frac{c\cos\varphi}{b} + \varphi;$$

вещественные корни—при условии $\frac{c\cos\varphi}{b} \leqslant 1$ или попрежнему $a^2 + b^2 \geq c^2$.

---

* Можно разделить обе части уравнения на $a$ или на $b$.

Пример (тот же):

$$\sin x + 7\cos x = 5,$$

$$\frac{7\cos(x-\varphi)}{\cos\varphi} = 5;\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{7} \approx 0{,}14;$$

$$\varphi \approx 8^\circ;\ \cos\varphi \approx 0{,}99;\ \arccos\frac{5\cos\varphi}{7} \approx \arccos 0{,}71 \approx 44^\circ\ {}^*,$$

$$x = 2k\pi \pm \arccos\frac{5\cos\varphi}{7} + \varphi,$$

$$x = 2k\cdot 180 \pm 44^\circ + 8^\circ,$$

$$x = 2k\cdot 180 + 52^\circ;\quad x = 2k\cdot 180^\circ - 36^\circ.$$

Добавление. Укажем, что и решение уравнения 2-й степени, левая часть которого (см. § 11) однородная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$, путем введения двойного угла приводится к виду уравнения, рассмотренного в данном §:

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d,$$

$$a\frac{1-\cos^2 x}{2} + \frac{b}{2}\sin 2x + c\frac{1+\cos^2 x}{2} = d.$$

$$b\sin 2x + (c-a)\cos 2x = 2d - a - c.$$

Если полученное уравнение решать способом введения вспомогательного угла, то можно записать:

$$\sin 2x + \frac{c-a}{b}\cos 2x = \frac{2d-a-c}{b}.$$

Вводя $\frac{c-a}{b} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, имеют

$$\sin 2x\cdot\cos\varphi + \cos 2x\cdot\sin\varphi = \frac{2d-a-c}{b}\cdot\cos\varphi,$$

$$\sin(2x+\varphi) = \frac{2d-a-c}{b}\cdot\cos\varphi;$$

откуда определяют $(2x+\varphi)$ и окончательно $x$.

## § 14. Уравнение, имеющее вид равенства одноименных функций или кофункций (дополнительные упражнения к § 6)

Решим уравнение, которое при помощи тождественных преобразований приводится к виду равенства одноименных функций. Зависимость между углами (дугами) пишется согласно сказанному в § 4, II и в § 5.

Пример 1.

$$\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sin x,$$

$$\sin 3x - \sin x = \cos x - \cos 3x,$$

$$\cos 2x\sin x = \sin 2x\sin x,$$

$$\sin x(\cos 2x - \sin 2x) = 0,$$

$$\sin x = 0,\quad \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right),$$

---

* Для примера ограничиваемся точностью до 1° и пользуемся таблицей натуральных тригонометрических величин.

$$x = m\pi, \quad 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)^{*},$$

Указанный прием особенно часто применяется в примерах вида, приводимого ниже.

Пример 2.

$$\sin(\pi \operatorname{tg} x) = \cos(\pi \operatorname{tg} x).$$

Решение:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{tg} x\right) = \cos(\pi \operatorname{tg} x),$$

$$\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{tg} x \pm \pi \operatorname{tg} x = 2k\pi$$

(надо взять знак — перед $\pi \operatorname{tg} x$).

$$-2\pi \operatorname{tg} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{4} - k,$$

т. е.

$$x = m\pi + \operatorname{arc\,tg}(0{,}25 - k).$$

Пример 3.

$$\cos(\cos x) = \sin(\sin x).$$

Решение:

$$\cos(\cos x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right),$$

откуда

$$\cos x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right)$$

или

$$\cos x \pm \sin x = \frac{\pi}{2}(4k \pm 1).$$

Возведя обе части в квадрат, получаем:

$$\pm \sin 2x = \frac{\pi^2}{4}(4k \pm 1)^2 - 1,$$

так как

$$|\sin 2x| \leqslant 1, \quad \text{то} \quad k = 0$$

и

$$\pm \sin 2x = + \frac{\pi^2}{4} - 1$$

или

$$\sin 2x = \pm\left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right).$$

## § 15. Показательные и логарифмические уравнения

Решение тригонометрических показательных и логарифмических уравнений ** приводится к решению всех типов уравнений, рассмотренных выше на основании теории решения алгебраических показательных и ло-

---

* Или сразу: разность углов равна целому числу периодов:

$$2x - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2k\pi,$$

$$4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}; \quad x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

или

$$x = \frac{\pi}{8}(4k + 1).$$

** Тригонометрическая функция неизвестного аргумента находится в показателе степени или под знаком lg.

гарифмических уравнений. Эти упражнения можно предлагать учащимся во время повторения курса или в порядке внеклассной работы.

Примеры:

1) $a^{1+\operatorname{tg} x} = a.$

Решение:

$$1 + \operatorname{tg} x = 1; \quad x = m\pi.$$

2) $\sqrt{2} \cdot 2^{\cos x} = 1;$

Решение:

$$2^{\frac{1}{2} + \cos x} = 2^0,$$

$$\frac{1}{2} + \cos x = 0.$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3};$$

3) $a^{2\sin x} = b.$

Решение:

$$2 \sin x \lg a = \lg b;$$

$$\sin x = \frac{\lg b}{2\lg a};$$

$$x = m\pi + (-1)^m \arcsin \frac{\lg b}{2 \lg a};$$

4) $a^{k \operatorname{tg}^2 x + m \operatorname{tg} x + n} = b.$

Решение:

$$k \operatorname{tg}^2 x + m \operatorname{tg} x + n = \frac{\lg b}{\lg a},$$

откуда находят $\operatorname{tg} x$ и т. д.

5) $a^{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = a^2.$

Решение:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2 \text{ и т. д.}$$

6) $a^{1+\operatorname{tg} x} = a^{\sqrt{3(1+\operatorname{ctg} x)}}.$

Решение:

$$1 + \operatorname{tg} x = \sqrt{3}(1 + \operatorname{ctg} x);$$

$$1 + \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}(\operatorname{tg} x + 1)}{\operatorname{tg} x};$$

$$\frac{(\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})}{\operatorname{tg} x} = 0;$$

$$\begin{array}{r|l} \operatorname{tg} x = -1; & \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \\ x = m\pi - \frac{\pi}{4}; & x = m\pi + \frac{\pi}{3} \end{array}.$$

7) $ma^{2 \operatorname{tg} x} + na^{\operatorname{tg} x} = b.$

Решение:

$$a^{\operatorname{tg} x} = y;$$

$$my^2 + ny - b = 0$$

и т. д. Аналогично решается:

8) $ma^{2 \operatorname{tg} nx} + pa^{\operatorname{tg} nx} = b$

9) $\sqrt[\operatorname{tg} x]{a^{\sin x - \cos x}} = 1.$

Решение:

$$a^{\frac{\sin x - \cos x}{\operatorname{tg} x}} = a^0;$$

$$\frac{\sin x - \cos x}{\operatorname{tg} x} = 0;$$

$$\sin x - \cos x = 0; \quad \operatorname{tg} x = 1; \quad x = m\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{ctg} x = 0 \quad x = m\pi + \frac{\pi}{2}.$$

10) $\sqrt[\operatorname{tg} 2x]{m^{2\cos x}} = m.$

11) $a^{4\sin^3 x} \cdot a^{3\sin^3 x} = a^4 \cdot a^{3\sin x}.$

Решение:

$$a^{4\sin^3 x + 4\sin^2 x - 3 - 3\sin x} = a^0;$$

$$4\sin^2 x(\sin x + 1) - 3(\sin x + 1) = 0.$$

$$(\sin x + 1)(4\sin^2 x - 3) = 0,$$

$$\sin x = -1 \quad x = m\pi - (-1)^m \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{3}{4} \quad x = m\pi \pm (-1)^m \frac{\pi}{3}$$

12) $ma^{\sin^2 x} + na^{\cos^2 x} = p.$

Решение:

$$ma^{\sin^2 x} + \frac{na}{a^{\sin^2 x}} = p.$$

Обозначив $a^{\sin^2 x} = z$,
имеем

$$mz + \frac{na}{z} = p;$$

$$mz^2 - pz + na = 0,$$

откуда определяют $z$, а затем $x$.

13) $5 \cdot 4^{1-\cos^2 x} - 7 \cdot 2^{\sin^2 x} = 6;$

Решение:

$$5 \cdot 2^{2\sin^2 x} - 7 \cdot 2^{\sin^2 x} = 6; \quad 2^{\sin^2 x} = z.$$

$$5z^2 - 7z - 6 = 0;$$

$$z_1 = 2; \quad z_2 = -\frac{3}{5};$$

$$2^{\sin^2 x} = 2; \quad 2^{\sin^2 x} = -\frac{3}{5} \text{ (не дает решения)}$$

$$\sin^2 x = 1; \quad \sin x = \pm 1; \quad x = m\pi \pm (-1)^m \frac{\pi}{2}.$$

14) $ma^{1+\cos x} - na^{1-\cos x} = p.$

Решение:

$$ma^{2\cos^2\frac{x}{2}} - na^{2-2\cos^2\frac{x}{2}} = p; \quad a^{2\cos^2\frac{x}{2}} = z;$$

$$mz - \frac{na^2}{z} = p; \quad mz^2 - pz - na^2 = 0,$$

откуда определяют $z$, а затем $x$.

15) $\lg_2 \sin x = 0.$

Решение:
Потенцируя:

$$\sin x = 2^0 = 1;\ x = m\pi + (-1)\,x = m\pi + (1-)^m\ \frac{\pi}{2}.$$

16) $\lg\cos x = 0{,}00001$. Уравнение невозможно.
17) $\lg\operatorname{tg} x + \lg\operatorname{ctg} x = \lg 10$.
Решение:

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1.\ \text{Это тождество.}$$

18) $\lg\cos 3x + \lg\cos x = \frac{1}{2}\lg 5 - \lg 4$.

Решение. Потенцируя:

$$\cos 3x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

$$(4\cdot\cos^3 x - 3\cos x)\cos x = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

$$16\cos^4 x - 12\cos^2 x - \sqrt{5} = 0$$

$$\cos^2 x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 16\sqrt{5}}}{16}{}^{*} = \frac{6 \pm (4 + 2\sqrt{5})}{16}.$$

$$\cos^2 x = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16};\qquad \cos^2 x = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{16}\ \text{не дает решения}$$

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}}.$$

Отрицательное значение косинуса $x$ не удовлетворяет данному уравнению (при положительном основании). Таким образом корни уравнения запишутся:

$$\cos x = +\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4};$$

$$x_0 = 18^\circ = \frac{\pi}{10},$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{10}.$$

19) $(\sin x)^{\cos x} = 1$. В этом показательном уравнении основанием также служит тригонометрическая функция неизвестного угла (дуги).

Решение: $\cos x \lg\sin x = 0$

$$\cos x = 0\ \left|\ \begin{array}{l}\lg\sin x = 0\\ \sin x = 1\end{array}\right.$$

$$x = m\pi + \frac{\pi}{2}$$

20) $(\cos 2x)^{2\cos 3x + 4\cos x - 1} = \sec 2x$.

Решение. Заменив $\sec 2x = (\cos 2x)^{-1}$ и взяв логарифм обеих частей, получим

$$(2\cos 3x + 4\cos x - 1)\lg\cos 2x = -\lg\cos 2x,$$
$$(2\cos 3x + 4\cos x)\lg\cos 2x = 0,$$
$$(\cos 3x + 2\cos x)\lg\cos 2x = 0,$$
$$(4\cos^3 x - \cos x)\lg\cos 2x = 0,$$
$$\cos x\,(4\cos^2 x - 1)\lg\cos 2x = 0,$$

---

* $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5}$.

откуда:

| | | |
|---|---|---|
| $\cos x = 0$ | $4\cos^2 x = 1$ | $\lg \cos 2x = 0$ |
| $x = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ | $\cos x = \pm\frac{1}{2}$ | $\cos 2x = 1$ |
| | $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ | $2x = 2k\pi$ |
| | $x = 2k\pi \pm \frac{2}{3}\pi$ | $x = k\pi$ |

## § 16. Уравнения, содержащие обратные круговые функции

1. Так как вопрос об обратных круговых функциях недостаточно полно изложен в принятом в школе учебнике тригонометрии Рыбкина, то в данной статье мы уделим несколько дополнительных строк тождественным преобразованиям с обратными круговыми функциями, без которых невозможно решение соответствующих уравнений *.

1) Основные свойства обратных круговых функций:

Значение сумм:

$$\arcsin m + \arccos m = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arc\,tg} m + \operatorname{arc\,ctg} m = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arc\,sec} m + \operatorname{arc\,cosec} m = \frac{\pi}{2}.$$

Эти углы (дуги) дополняют друг друга до $\frac{\pi}{2}$, потому что

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right);$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \text{и} \quad \sec\alpha = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

б) Каждую из обратных круговых функций можно выразить через остальные:

Если $\arcsin m = \alpha$, то есть $\sin\alpha = m$, то

$$\cos\alpha = \sqrt{1-m^2}; \quad \text{т. е.} \quad \alpha = \arccos\sqrt{1-m^2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}; \quad \text{т. е.} \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{1-m^2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m}; \quad \text{т. е.} \quad \alpha = \operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}; \quad \text{т. е.} \quad \alpha = \operatorname{arc\,sec}\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{m}, \quad \text{т. е.} \quad \alpha = \operatorname{arc\,cosec}\frac{1}{m}$$

* Не останавливаясь на определении обратных круговых функций, установлении их многозначности, обозначениях и пределах их изменения и т. п.

или

$$\alpha = \arcsin m = \arccos\sqrt{1-m^2} = \operatorname{arctg}\sqrt{1-m^2} =$$

$$= \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-m^2}}{m} = \operatorname{arcsec}\frac{1}{\sqrt{1-m^2}} = \operatorname{arccosec}\frac{1}{m}.$$

При $m \leq 1$ эти соотношения справедливы. Так как слово arc написано с малой буквы $a$, то мы не ставим двойного знака при радикале*.

2) Сложение обратных круговых функций:

1) $\arcsin m + \arcsin n = \arcsin\left[m\sqrt{1-n^2} + n\sqrt{1-m^2}\right]$.

Доказательство: пусть

$$\arcsin m = \alpha; \ \arcsin n = \beta,$$

тогда

и
$$\arcsin m \pm \arcsin n = \alpha \pm \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta =$$

$$= m\sqrt{1-n^2} \pm n\sqrt{1-m^2}$$

2) $\arccos m + \arccos n =$

$$= \arccos\left[mn + \sqrt{(1-m^2)\cdot(1-n^2)}\right],$$

что следует из соотношения:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta =$$

$$= mn \mp \sqrt{(1-m^2)\cdot(1-n^2)}$$

3) $\operatorname{arctg} m + \operatorname{arctg} n = \operatorname{arctg}\frac{m \pm n}{1 \mp mn}$,

что следует из соотношения:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

**Замечания:**

1) Формулы сложения других функций получаются аналогично.

2) Если слагаемые представляют разноименные функции, то на основании соотношения а) их преобразуют и приводят к одноименным функциям.

II. Уравнения.

Пример 1. $\arcsin x + \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}; \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В рассматриваемых уравнениях неизвестным является тригонометрическая функция угла (дуги).

---

* arc — обозначение наименьшего по абсолютной величине значения угла (дуги), соответствующего данному значению тригонометрической функции.

Пример 2. $x = \arcsin\cos x$. Уравнение может быть представлено в виде:

$$\sin x = \cos x, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 3. $x = \operatorname{Arc}\sin \sin\arccos\frac{1}{2}$.

Уравнение можно переписать:

$$\sin x = \sin\arccos\frac{1}{2};$$

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{3}; \quad x = m\pi + (-1)^m \frac{\pi}{3}.$$

Пример 4. $\arcsin 2x = 3\arcsin x$. Обозначим первый угол (дугу) через $y$; второй—$z$; тогда $y = 3z$,

$$\sin y = 2x; \quad \sin 3z = 3\sin z - 4\sin^3 z = 3x - 4x^3,$$

т. е.

$$2x = 3x - 4x^3,$$

и

$$x_1 = 0; \quad x_{2,3} = \pm\frac{1}{2}.$$

Иная запись решения:

$$\arcsin 2x = \arcsin(3x - 4x^3),$$
$$2x = 3x - 4x^3$$

и т. д.

Пример 5. $\arcsin x = 2\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$.

Решение:

$$\arcsin x = \arcsin 2\cdot\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$$

на основании формулы:

$$\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x.$$

Тогда:

$$\arcsin x = \arcsin x\sqrt{2 - x^2}.$$

$$x - x\sqrt{2 - x^2} = 0.$$

$$x_1 = 0; \quad 1 = \sqrt{2 - x^2}$$
$$1 = 2 - x^2; \quad x_{2,3} = \pm 1.$$

Пример 6: $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 3x = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{4x}{1 - 3x^2} = \infty; \quad 1 = 3x^2; \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Но так как углы должны быть острые, то $x = +\frac{\sqrt{3}}{3}$ *

---

* Решение при помощи составления системы уравнений указывается в § 18.

Пример 7. $\arccos x + \arccos(1-x) = \arccos(-x)$,

$$\arccos\left[x(1-x) - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(1-x)^2}\right] = \arccos(-x)$$

$$x - x^2 - \sqrt{(1-x^2)(2x-x^2)} = -x,$$

$$(1-x^2)(2x-x^2) = (2x-x^2)^2,$$

$$(2x-x^2)[1-2x] = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 2; \text{ (невозможно)};$$

$$x_3 = \frac{1}{2}$$

Проверка:

1) $\arccos 0 + \arccos 1 = \arccos 0$

$$\frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2};$$

$x_1$ удовлетворяет уравнению.

2) $\arccos\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi;$$

$x_3$ удовлетворяет уравнению.

Пример 8. $\operatorname{arcctg} 4 + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{4}$;

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{5}{12} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{4},$$

где

$$2\operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \operatorname{arctg}\frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \operatorname{arctg}\frac{2\cdot 25}{5\cdot 24} = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}.$$

Затем:

$$\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{4}+\frac{5}{12}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{12}} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \operatorname{arctg}\frac{32}{43} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{x}+\frac{32}{43}}{1-\frac{1}{x}\cdot\frac{32}{43}} = \frac{\pi}{4}; \quad \frac{43+32x}{43x-32} = 1;$$

$$43 + 32x = 43x - 32; \quad 75 = 11x; \quad x = \frac{75}{11}.$$

## § 17. Уравнения, содержащие тригонометрические функции дуг $(\alpha \pm x)$; $(\beta \pm x)$

1. Решение этих уравнений служит подготовительной работой к решению системы уравнений.

Пример 1. Указанные тригонометрические функции даны в сумме (разности), в произведении или в частном, с коэфициентами или без них

$$p\sin(\alpha - x) - q\sin(\beta - x) = 0.$$

Способ 1), вытекающий из общей теории решения уравнения:

$$p\sin\alpha\cos x - p\cos\alpha\sin x - q\sin\beta\cos x + q\cos\beta\sin x = 0,$$

$$(p\sin\alpha - q\sin\beta)\cos x - (p\cos\alpha - q\cos\beta)\sin x = 0.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{p\sin\alpha - q\sin\beta}{p\cos\alpha - q\cos\beta}.$$

Полученное выражение для $\operatorname{tg} x$ можно привести к виду, удобному для логарифмирования.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\dfrac{p\sin\alpha}{q\cos\beta} - \operatorname{tg}\beta}{\dfrac{p\cos\alpha}{q\cos\beta} - 1} = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{ctg}\alpha - 1} =$$

$$= \frac{(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin(\varphi - \beta)\sin\alpha}{\cos\beta\sin(\varphi - \alpha)},$$

где введен вспомогательный угол $\varphi$,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p\sin\alpha}{q\cos\beta};$$

$$\frac{p\cos\alpha}{q\cos\beta} = \operatorname{tg}\varphi\operatorname{ctg}\alpha.$$

Способ 2) $p\sin(\alpha - x) = q\sin(\beta - x)$. Перепишем в виде пропорции и составим производную пропорцию:

$$\frac{\sin(\alpha - x)}{\sin(\beta - x)} = \frac{q}{p};$$

$$\frac{\sin(\alpha - x) + \sin(\beta - x)}{\sin(\alpha - x) - \sin(\beta - x)} = \frac{q + p}{q - p};$$

$$\frac{2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2} - x\right)\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2} - x\right)\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{q+p}{q-p};$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - x\right) = \frac{q+p}{q-p}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2},$$

откуда находят $\dfrac{\alpha+\beta}{2} - x$, затем $x$.

Пример 2. $m\operatorname{tg}(a + x) = n\operatorname{tg}(a - x)$.

Решение:

Способ 1) $m\dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} a\operatorname{tg} x} = n\dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} a\operatorname{tg} x}$

и т. д.

Способ 2) $\frac{\operatorname{tg}(a+x)}{\operatorname{tg}(a-x)}=\frac{n}{m}$

$$\frac{\operatorname{tg}(a+x)+\operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}=\frac{n+m}{n-m},$$

$$\frac{\sin 2a\cos(a+x)\cos(a-x)}{\cos(a+x)\cos(a-x)\sin 2x}=\frac{n+m}{n-m},$$

$$\sin 2x=\sin 2a\cdot\frac{n-m}{n+m},$$

$$2x=m\pi+(-1)^m\arcsin\left[\sin 2a\,\frac{n-m}{n+m}\right].$$

Пример 3. $a\sin(x+m)\sin(x+n)$* $=b$. Тригонометрические функции аргументов даны в виде произведения.

Решение:

$$-\frac{a}{2}\left[\cos(2x+m+n)-\cos(m-n)\right]=b,$$

$$\cos(2x+m+n)=-\frac{2b}{a}+\cos(m-n),$$

$$2x+m+n=2k\pi\pm\arccos\left[-\frac{2b}{a}+\cos(m-n)\right]$$

$$x=k\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\left[-\frac{2b}{a}+\cos(m-n)\right]-\frac{m+n}{2}.$$

Пример 4. $\sin(38^\circ+x)\cdot\cos(52^\circ-x)=\frac{1}{2}$.

Решение:

$$\frac{1}{2}\left[\sin 90^\circ+\sin(2x-14^\circ)\right]=\frac{1}{2},$$

$$\sin(2x-14^\circ)=0,$$

$$2x-14=m\cdot 180^\circ;\quad x=m\cdot 90^\circ+7^\circ,$$

имеем решение при $m=0$; $x=7^\circ$.

Пример 5. $a\operatorname{tg}(\alpha+x)\operatorname{tg}(\beta-x)=b$.

Решение:

$$a\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta+2x)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta+2x)}=b,$$

откуда, обозначив

$$\alpha-\beta+2x=y,$$

имеем уравнение:

$$a\sin y-b\cos y=c,$$

где:

$$c=b\cos(\alpha+\beta)-a\sin(\alpha+\beta).$$

Откуда определяем $y$ и затем $x$.

---

* $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]=$

$=\frac{1}{2}\left[\sin(\beta+\alpha)-\sin(\beta-\alpha)\right].$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right],$

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right].$

## § 18. Системы тригонометрических уравнений

1. Как сказано в § 17, решение уравнений, в которые входят тригонометрические функции углов $(\alpha \pm x)$ и $(\beta \pm x)$, служит подготовительной работой к решению системы уравнений. Напр.: надо угол в $120^\circ$ разделить на 2 угла так, чтобы синус, косинус (или иная тригонометрическая функция) одного из них был в 2 раза более синуса или косинуса другого, или составлял $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ и т. п. тригонометрической функции другого угла; или надо $120^\circ$ разделить на 2 части так, чтобы сумма синусов углов (или других тригонометрических функций) составляла любое число.

Другими словами:

Решить уравнения:

а) $\frac{\sin x}{\sin(120-x)} = 2.$

**Указание:**

$$\frac{\sin x + \sin(120-x)}{\sin x - \sin(120-x)} = \frac{2+1}{2-1}.$$

Ответ: $90^\circ$; $30^\circ$.

б) $\sin x + \sin(120^\circ - x) = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

Ответ $105^\circ$; $15^\circ$.

в) $\cos x - \sin(120^\circ - x) = \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{4}.$

Решение:

$$\sin(90^\circ - x) - \sin(120^\circ - x) = \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{4}.$$

$$2\sin(-15^\circ)\cos(105^\circ - x) = \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{4};$$

зная, что

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

получаем

$$\cos(105^\circ - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

и ответ: $75^\circ$; $45^\circ$.

Но все указанные уравнения можно было записать в виде систем, а именно:

а) $x + y = 120^\circ$

$\frac{\sin x}{\sin y} = 2,$

б) $x + y = 120^\circ,$

$\sin x + \sin y = \frac{\sqrt{6}}{2},$

в) $x + y = 120^\circ,$

$\cos x - \sin y = \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{4},$

и для решения применить способ подстановки.

II. Записанные выше системы двух уравнений с двумя неизвестными относятся к простейшим, когда в одном уравнении дана зависимость между углами (или дугами), в другом — зависимость между любыми их тригонометрическими функциями (частное, сумма, произведение).

Приведем решение нескольких таких систем на буквах.

Пример 1.

$$x + y = a$$

$$\sin x + \sin y = b$$

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = b$$

$$2\sin\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} = b;$$

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{b}{2\sin\frac{a}{2}},$$

откуда находим $\frac{x-y}{2}$ и $(x-y)$. Обозначив $x-y=m$, имеем:

$$x - y = m,$$

$$x + y = a,$$

откуда

$$x = \frac{a+m}{2};$$

$$y = \frac{a-m}{2}.$$

**Пример 2.**

$$x - y = a,$$

$$\sin x\cdot\cos y = b.$$

$$\frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)] = b;$$

$$\frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin a] = b;$$

$$\sin(x+y) = 2b - \sin a;$$

$$x + y = m\pi + (-1)^m \arcsin(2b - \sin a),$$

$$x - y = a;$$

$$x = \frac{1}{2}[m\pi + (-1)^m \arcsin(2b - \sin a) + a];$$

$$y = \frac{1}{2}[m\pi + (-1)^m \arcsin(2b - \sin a) - a].$$

**Пример 3.**

$$x + y = a;$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{m}{n};$$

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{m+n}{m-n},$$

откуда после преобразований получим:

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\frac{m-n}{m+n} \text{ и т. д.}$$

**Пример 4.**

$$x-y=a$$
$$\sin x+\cos y=b$$
$$x-y=a$$
$$\sin x+\sin(90^\circ-y)=b \text{ и т. д.}$$

**Пример 5.**

$$x+y=a;\quad \operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=b;$$
$$\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}=b;$$
$$\frac{2\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}=b;$$
$$2\sin(x-y)=b\cos a+b\cos(x-y),$$

откуда

$$2\sin(x-y)-b\cos(x-y)=b\cos a \text{ и т. д.}$$

**Пример 6.**

$$x+y=a;\quad \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=b.$$

Решение:

$$\frac{\sin x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}=b.$$

Составим производную пропорцию:

$$\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}=\frac{1+b}{1-b}.$$
$$\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}=\frac{1+b}{1-b}$$
$$\cos(x-y)=\frac{1+b}{1-b}\cos a$$

и т. д.

**Пример 7.**

$$x+y=a$$
$$\cos^2 x+\cos^2 y=b.$$

Решение.

Преобразуем II уравнение следующим образом:

$$\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 2y}{2}=b,$$

тогда данную систему уравнений можно переписать:

$$x+y=a$$
$$\cos 2x+\cos 2y=2b-2$$
$$\cos(x+y)\cos(x-y)=b-1$$
$$\cos(x-y)=\frac{b-1}{\cos a}$$

и т. д.

**Пример 8.**

$$x+y=a$$

$$m\sin x+n\sin y=b$$

Решение:

$$m\sin x+n\sin(a-x)=b$$

$$m\sin x+n\sin a\cos x-n\sin x\cos a=b$$

$$\sin x(m-n\cos a)+n\sin a\cos x=b$$

и т. д.

**Замечание.** Эта система иногда решается искусственным приемом. Полагают, что $x-y=2z$; кроме того известно, что $x+y=2d$ (вместо $a$). Тогда $x=d+z$; $y=d-z$. И второе уравнение можно переписать:

$$m\sin(d+z)+n\sin(d-z)=b;$$

$$m\sin d\cos z+m\sin z\cos d+n\sin d\cos z-n\sin z\cos d=b,$$

где неизвестно $z$.

$$(m+n)\sin d\cos z+(m-n)\cos d\sin z=b$$

и т. д.

Оба приема приводят к уравнению одного и того же вида,

$$a\sin x+b\cos x=c,$$

но первый прием проще.

III. Более сложная система двух уравнений с двумя неизвестными во втором случае, когда оба уравнения показывают зависимость между тригонометрическими функциями углов (дуг).

Рассмотрим типичные случаи.

**Пример 9.**

$$\sin x+\sin y=m$$

$$\cos x+\cos y=n$$

В этом случае функции, имеющиеся в одном уравнении, являются дополнительными к тем, которые имеются в другом уравнении.

Решение:

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=m$$

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=n$$

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\frac{m}{n}$$

$$x+y=2k\pi+2\operatorname{arc\,tg}\frac{m}{n}.$$

Подставив значение $(x+y)$ в одно из преобразованных уравнений, можно найти $(x-y)$, а затем $x$ и $y$ по их сумме и разности.

**Пример 10.**

$$\sin x \cos y = a$$
$$\cos x \sin y = b$$

Сложив и вычтя почленно данные уравнения, получим:

$$\sin(x+y) = a+b; \quad x+y = m\pi + (-1)^m \arcsin(a+b)$$
$$\sin(x-y) = a-b; \quad x-y = m\pi + (-1)^m \arcsin(a-b)$$

откуда находят $x$ и $y$.

**Пример 11.**

$$\frac{\sin x}{\sin y} = a;$$
$$\frac{\cos x}{\cos y} = b$$

Решение:

$$\sin x = a \sin y$$
$$\cos x = b \cos y$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = a^2 \sin^2 y + b^2 \cos^2 y$$
$$a^2 \sin^2 y + b^2 \cos^2 y = 1; \quad (a^2 - b^2)\sin^2 y = 1 - b^2;$$
$$\sin y = \pm \sqrt{\frac{1-b^2}{a^2-b^2}}$$
$$\sin x = \pm a \sqrt{\frac{1-b^2}{a^2-b^2}}.$$

Решения необходимо проверить.

**Пример 12.**

Решение

I способ:

$$\begin{array}{c} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a \\ \underline{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = b} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a \\ \underline{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} + \dfrac{1}{\operatorname{tg} y} = b} \\ \operatorname{tg} x = a - \operatorname{tg} y \end{array}$$

$$\frac{1}{a - \operatorname{tg} y} + \frac{1}{\operatorname{tg} y} = b.$$

Откуда находят $\operatorname{tg} y$; $y$, а затем $\operatorname{tg} x$ и $x$.

II способ:

$$\operatorname{tg} x = a - \operatorname{tg} y; \quad \operatorname{ctg} x = b - \operatorname{ctg} y.$$

Перемножив почленно:

$$1 = ab - a \operatorname{ctg} y - b \operatorname{tg} y + 1$$
$$b \operatorname{tg} y + a \operatorname{ctg} y - ab = 0$$

и т. д.

Решения необходимо проверить.

III способ:

$$\begin{array}{c} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a \\ \underline{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = b} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a \\ \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \end{array}$$

Вычтя почленно:

$$0 = a - b \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = + \frac{a}{b} .$$

По сумме и произведению $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$ составляют уравнение

$$z^2 - az + \frac{a}{b} = 0,$$

откуда находят значения $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$.

**Пример 13.**

$$\begin{array}{c} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = m \\ \operatorname{tg}(x + y) = n. \end{array}$$

Из данных уравнений, как и в предыдущем примере, находят

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{n - m}{n}$$

и т. д.

**Пример 14.**

$$\begin{array}{c} \sin(2x + y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(x + 2y) = \frac{1}{2} ; \end{array}$$

Решение:

$$\begin{array}{c} \sin(2x + y) = \sin \frac{\pi}{3} \\ \cos(x + 2y) = \cos \frac{\pi}{3} \end{array}$$

$$2x + y = x + 2y = \frac{\pi}{3} ; \qquad x = y = 2k\pi + \frac{\pi}{9}$$

Пример 15. Система показательных уравнений:

$$\begin{array}{c} 3^{\sin x} + 5^{\sin y} = 4 \\ \underline{3^{\sin x + 1} + 5^{\sin y + 1} = 14} \\ 3^{\sin x} + 5^{\sin y} = 4 \\ \underline{3 \cdot 3^{\sin x} + 5 \cdot 5^{\sin y} = 14} \\ 2 \cdot 5^{\sin y} = 2 \end{array}$$

$$5^{\sin y} = 1 ; \quad \sin y = 0; \quad y = m\pi;$$

$$3^{\sin x} = 3; \quad \sin x = 1; \quad x = m\pi + (-1)^m \frac{\pi}{2} .$$

Система 3 уравнений с 3 неизвестными:

Пример 16:

$$1. \quad x+y+z=\pi$$

$$\sin x:\sin y:\sin z=a:b:c$$

Запишем:

$$\sin z=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\cdot\sin y.$$

Так как полученное уравнение однородно относительно $\sin x$, $\sin y$ и $\sin z$, то эти функции можно в нем заменить величинами, им пропорциональными $a$, $b$, $c$, и написать:

$$c=a\cdot\cos y+b\cdot\cos x;$$

аналогично:

$$b=a\cdot\cos z+c\cos x,$$

$$a=b\cos z+c\cos y.$$

Решив эту систему 3 уравнений с 3 неизвестными, получим

$$\cos x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\cos y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2bc},$$

$$\cos z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

2. Применить решение для системы

$$\sin x:\sin y:\sin z=1:\sqrt{2}:\sqrt{?}$$

$$x+y+z=\pi.$$

Пример 17.

$$\cos x:\cos y:\cos z=m:n:p$$

$$x+y+z=\pi.$$

Указание: Имеем выше рассмотренный случай, записав первое уравнение в виде:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right):\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right):\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=m:n:p$$

Пример 18.

$$\operatorname{tg}x:\operatorname{tg}y:\operatorname{tg}z=m:n:p;$$

$$x+y+z=\pi.$$

Решение:

$$\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z}{m+n+p}=\frac{\operatorname{tg}x}{m}=\frac{\operatorname{tg}y}{n}=\frac{\operatorname{tg}z}{p}.$$

Указание. Известно, что $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z$, когда $x+y+z=\pi$, т. е.

$$\frac{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z}{m+n+p}=\frac{\operatorname{tg}x}{m}=\frac{\operatorname{tg}y}{n}=\frac{\operatorname{tg}z}{p}.$$

Из систем уравнений:

$$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=\frac{m+n+p}{n} \quad \text{и} \quad \frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}y}=\frac{m}{n};$$

$$\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z=\frac{m+n+p}{m} \quad \text{и} \quad \frac{\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}z}=\frac{n}{p};$$

$$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}z=\frac{m+n+p}{n} \quad \text{и} \quad \frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}z}=\frac{m}{p}$$

находим

$$\operatorname{tg}x=\pm\sqrt{\frac{m(m+n+p)}{np}}$$

и т. д.

Откуда

$$x = \operatorname{arc\,tg} \pm \sqrt{\frac{m(m+n+p)}{np}}$$

$$y = \operatorname{arc\,tg} \pm \sqrt{\frac{n(m+n+p)}{mp}}$$

$$z = \operatorname{arc\,tg} \pm \sqrt{\frac{p(m+n+p)}{mn}}.$$

Решения надо проверить.

Пример 19.

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 2; \quad \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z = 3; \quad x + y + z = \pi.$$

Решение:

$$\operatorname{tg} y (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} z) = 5 \text{ (после почленного сложения)}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg}^2 y = 6 \text{ (после почленного умножения)}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z \text{ (тождество при } x + y + z = \pi)$$

$$\operatorname{tg} y (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z) = 6$$

или

$$\operatorname{tg} y (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} z) + \operatorname{tg}^2 y = 6; \quad \operatorname{tg}^2 y = 6 - 5.$$

$$\operatorname{tg} y = \pm 1;$$

$$\operatorname{tg} x = \pm 2;$$

$$\operatorname{tg} z = \pm 3;$$

наименьшие положительные значения углов, удовлетворяющих уравнению 45°, 63°, 72°.

Пример 20.

Решить систему:

$$\sin x = \sqrt{2} \cos y$$

$$\operatorname{tg} x = 2 \sin z$$

$$\cos z = \frac{\sqrt{3}}{2 \operatorname{tg} x}, \text{ где } x, y \text{ и } z \text{—острые углы.}$$

IV. Система уравнений, содержащих обратные круговые функции. В § 16 при решении тригонометрических уравнений, содержащих обратные круговые функции, была указана возможность их решения при помощи системы уравнения. (Пример 4).

Пример 21 (пример 5 из § 16).

$$\arcsin x = 2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Обозначим:

$$\arcsin x = y$$

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} = z.$$

Тогда

$$y = 2z$$

$$\sin y = x$$

$$\sin z = \frac{x}{\sqrt{2}};$$

---

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z = x \sqrt{2 - x^2}$$

$$\sin y = \sin 2z, \text{ значит}$$

$$x = x\sqrt{2 - x^2}; \quad x = 0; \quad x = \pm 1.$$

Пример 22 (пример 6 из § 16).

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} 3x = \frac{\pi}{2}.$$

Введя обозначения $y$ и $z$, имеем:

$$y + z = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg} y = x$$

$$\operatorname{tg} z = 3x$$

$$\operatorname{tg}(y + z) = \infty$$

$$\operatorname{tg}(y+z) = \frac{x + 3x}{1 - x \cdot 3x}; \quad 1 - 3x^2 = 0; \qquad x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Пример 23 (пример 7 из § 16),

$$\arccos x + \arccos(1 - x) = \arccos(-x).$$

Введя обозначения $y$, $z$, $t$, имеем систему 4 уравнений:

$$y + z = t$$

$$\cos y = x$$

$$\cos z = 1 - x$$

$$\cos t = -x$$

$$\cos t = \cos(y + z) = \cos y \cos z - \sin y \sin z$$

$$-x = x \cdot (1 - x) - \sqrt{1 - x^2}\ \sqrt{1 - (1 - x)^2}$$

Откуда попрежнему $x + 0; \frac{1}{2}$.

## § 19. Различные упражнения с уравнениями (дополнительно)

I. Иногда из данного уравнения надо найти определенную зависимость между искомыми. Такие упражнения полезно давать учащимся.

Пример 1. Имеется уравнение:

$$\sin(x + y) \operatorname{tg} z = \cos(x + y).$$

Какова зависимость между углами $x$, $y$, $z$? Ясно, что $\operatorname{tg}(x + y) = \operatorname{ctg} z$ и $x + y + z = \frac{\pi}{2}$.

II. Исследование получаемых решений уравнений проводят постоянно, но полезно давать учащимся и упражнения, в которых требуется исследовать возможные значения коэфициентов.

Пример 2. Определить значения $m$, чтобы уравнение

$$\sin x + \cos x = m$$

имело решения.

Решения данного уравнения запишутся формулой:

$$\sin(x + 45^\circ) = \frac{m\sqrt{2}}{2}.$$

Но

$$-1 \leq \sin(x + 45°) \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{m\sqrt{2}}{2} \leq 1, \text{ откуда}$$

$$-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}.$$

III. При изложении различных приемов решения уравнений неизвестные в них обычно обозначались последними буквами латинского алфавита, но это необязательно; полезно давать упражнения и на других буквах.

Пример 3. Полагая $\varrho$ известным, определить $\alpha$ из уравнения:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2(\alpha + \varrho)} - \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varrho)}{\cos^2\alpha} = 0.$$

Решение:

$$\sin\alpha\cos\alpha - \sin(\alpha + \varrho) \cdot \cos(\alpha + \varrho) = 0$$

$$\sin 2(\alpha + \varrho) = \sin 2\alpha$$

$$2(\alpha + \varrho) = (2k + 1)\pi - 2\alpha$$

$$\alpha = (2k + 1)\frac{\pi}{4} - \frac{\varrho}{2}\,^{*}.$$

**Замечание.** При $\varrho = 180° \cdot n$ данное выражение представляет собой тождество.

Пример 4. Найти значения $\mu$ и $\gamma$, не превышающие $\frac{\pi}{2}$ из системы уравнений:

$$\sin\mu + \sin\gamma = 1$$

$$\cos\mu + \cos\gamma = 1.$$

**Указание.** Возвышая обе части уравнений в квадрат и складывая, находят $\cos(\mu - \gamma)$; почленным делением находят $\operatorname{tg}\frac{\mu + \gamma}{2}$ и т. д. Полученные решения проверить.

IV. Особо важны упражнения, в которых поставлено требование исключить неизвестное из системы уравнений.

Пример 5. Исключить $x$ из уравнений:

$$\sin x = m \quad \text{и} \quad \cos 4x = n.$$

Решение:

$$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 4\sin^2 x\cos^2 x$$

$$1 - 4m^2\cos^2 x = n; \quad \cos^2 x = \frac{1 - n}{4m^2}.$$

Подставив значения $\sin x$ и $\cos x$ в зависимость $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, имеем $m^2 + \frac{1 - n}{4m^2} = 1$ (что и требовалось получить).

Пример 6. Исключить $x$ из уравнений:

$$1 + \sin x = 4a\operatorname{tg}x; \quad 1 - \sin x = 4b\operatorname{tg}x.$$

---

* $2(\alpha + \varrho) = 2k\pi + 2\alpha$ не дает решения.

Решение: Сложив и вычтя почленно данные уравнения, получим:

$$2 = 4\operatorname{tg} x(a+b)$$
$$2\sin x = 4\operatorname{tg} x(a-b),$$

откуда

$$\sin x = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{и} \quad \cos x = 2(a-b).$$

Результат после исключения $x$ запишется

$$\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + 4(a-b)^2 = 1.$$

Пример 7. Исключить $x$ из уравнений:

$$a\operatorname{tg} x = m;$$
$$b\cos 2x = n.$$

*Ответ:*

$$\frac{n}{b} = \frac{a^2-m^2}{a^2+m^2}.$$

Пример 8. Исключить $x$ из уравнений:

$$(m\sin x - n\cos x)^2 = m^2+n^2; \ \frac{\cos^2 x}{a^2} + \frac{\sin^2 x}{b^2} = \frac{1}{m^2+n^2}.$$

Пример 9. Исключить $x$ из уравнений:

$$\sin x = m$$
$$\sin\frac{1}{2}x = n.$$

Пример 10. Исключить $x$ из уравнений:

$$\sin x - \cos x = m; \quad \cos 2x = n.$$

V. Укажем, что уравнение следует иногда давать в виде требования, выраженного словами (текстом). Например:

Пример 11. Для какого острого угла косинус его составляет $\frac{4}{5}$ его синуса?

Уравнение запишется:

$$\cos x = \frac{4}{5}\sin x.$$

Пример 12. Числовое значение синуса дуги, большей $^3/_4$ окружности, но меньшей полной окружности, равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Чему равен тангенс $^1/_4$ этой дуги?

Запись:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg}\frac{1}{4}x = ?$$

Такие уравнения послужат подготовкой для учащихся к составлению уравнения из условия задачи (в частности при решении треугольников в задачах, требующих применения тригонометрии к решению задач геометрии).

Пример 13. Под какой широтой ($\angle x$?) находится пункт земной поверхности, движущийся вдое медленнее г. Москвы (широта г. Москвы $\varphi = 55°45'$)?

Решение: Обозначим скорости неизвестного пункта и Москвы через $v$ и $v_1$*. Тогда $v : v_1 = 2\pi r : 2\pi r_1$, где $r$ и $r_1$—радиусы соответствующих параллелей, т. е. $r = R\cos x$ и $r_1 = R\cos\varphi$.

Откуда

$$\frac{v}{v_1} = \frac{\cos x}{\cos\varphi},$$

подставив данные, имеем:

$$\frac{1}{2} = \frac{\cos x}{\cos 55°45'}; \quad \cos x = {}^1/_2 \cos 55°45';$$

$$\cos x = \frac{0{,}57}{2} = 0{,}285; \angle x \approx 73^1/_2°.$$

Указание: Широта Москвы взята с точностью до 1′. Решение задачи дано до $^1/_2°$.

Пример 14. Разложить силу в 5 *кг* на 2 взаимно-перпендикулярные силы $p$ и $q$ так, чтобы одна из них составила с данной силой угол в 36°.

Решение: Система уравнений

$$\frac{p}{q} = \frac{\sin 36°}{\sin 54°}$$

$$p^2 + q^2 = 25$$

Ответ с точностью до 1 *кг*: 3 *кг*; 4 *кг*.

Пример 15. На концы рычага действуют силы в 120 *кг* и 136 *кг*. Первая—под углом в 60° к плечу. Определить направление второй силы, если в положении равновесия длины плеч находятся в отношении 2 : 3.

Решение: Неизвестный угол обозначим $x$. Тогда

$$120 \cdot \sin 60 \cdot 2 = 136 \sin x \cdot 3.$$

Указание. Для получения более точного ответа следует вычисления выполнять с помощью таблицы логарифмов (см. § 20).

Пример 16. Найти углы треугольника по его стороне $b$, высоте $h_b$ и разности углов $\angle A - \angle C = \alpha$.

Решение: Из равенства выражений площади треугольника:

$$b \cdot h_b = \frac{b^2 \sin A \sin C}{\sin B};$$

$$h_b = \frac{b[\cos(A-C) - \cos(A+C)]}{2\sin(A+C)}$$

имеем уравнение:

$$2h_b \sin(A+C) + b\cos(A+C) = b\cos(A-C).$$

Откуда находят $(A+C)$ и т. д.

---

* Скорости равномерного движения прямо пропорциональны пройденным путям.

Пример 18. Определить в конусе угол между образующей и плоскостью основания, если площадь основания, поверхность шара, вписанного в конус, и боковая поверхность конуса составляют арифметическую прогрессию*.

Запись условия: $S$ основания $-$ $S$ шара $=$ $S$ шара $-$ $-$ $S$ бок. конуса, откуда имеем соотношение: $\pi r^2 - 4\pi R^2 = 4\pi R^2 - \pi rl$, где $r$ — радиус основания конуса, $R$ — радиус шара и $l$ — образующая конуса. После сокращения уравнение перепишется: $r^2 + rl = 8R^2$; $l = \frac{r}{\cos x}$; $R = r\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, где $\angle x$ — искомый; т. е. $r^2 + \frac{r^2}{\cos x} = 8r^2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$; $1 + \frac{1}{\cos x} = 8\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$. Таким образом $\angle x$ находится как острый угол, удовлетворяющий уравнению вида дроби:

$$\frac{9\cos^4\frac{x}{2} - 12\cos^2\frac{x}{2} + 4}{\cos^2\frac{x}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right)} = 0$$

или

$$\frac{\left(3\cos^2\frac{x}{2} - 2\right)^2}{\cos^2\frac{x}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right)} = 0,$$

откуда

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad x = 2\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$$

(остальные решения не удовлетворяют условию задачи).

## § 20. Применение логарифмов

В примерах, приведенных для иллюстрации различных методов решения уравнений, давались общие формулы для корней и указывался наименьший по абсолютному значению корень уравнения (иногда на буквах). Простейшие числовые наименьшие значения корней, как напр. $0$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{10}$ и некоторые другие узнаются сразу по значениям их тригонометрических функций. Другие вычисляются по таблицам натуральных записей их тригонометрических функций, а также по таблицам логарифмов значений их тригонометрических функций. Несколько примеров последнего случая, не рассмотренного выше, мы дадим в этом параграфе.

Пример 1.

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x.$$

Решение:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - {}^1/_2\sin^2 2x.$$

Уравнение перепишем:

$$\sin^2 2x + 2\sin 2x - 2 = 0;$$
$$\sin 2x = -1 \pm \sqrt{3}$$

---

* Задача из сборника задач Рыбкина по геометрии с применением тригонометрии, § 22 № 11.

возможно лишь одно решение

$$\sin 2x = -1 + \sqrt{3}\,^{*}$$

или, приводя к виду, удобному для логарифмирования:

$$\sin 2x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\sin 15^\circ$$

$$\lg\sin 2x = \frac{3}{2}\lg 2 + \lg\sin 15^\circ; \quad \lg\sin 2x = \begin{array}{r} 0,45155 \\ \underline{1,41300} \\ \bar{1},86455 \end{array}; \ (2x)_0 = 47^\circ 12' 35''$$

$$2x = m\cdot 180^\circ + (-1)^m\cdot 47^\circ 12' 35'' \text{ и т. д.}$$

Можно подстановкой найденного решения выполнить проверку (см. пример 3).

Пример 2.

$$2^{\cos y} = 1,5$$

Решение:

$$\cos y \lg 2 = \lg 1,5$$

$$\cos y = \frac{0,17609}{0,30103}; \ \lg\cos y = \lg 0,17609 - \lg 0,30103;$$

$$\lg\cos y = \begin{array}{r} \bar{1},24573 \\ -\underline{\bar{1},47861} \\ \bar{1},76712 \end{array}; \quad y = 54^\circ 12'$$

Пример 3.

$$3,78\sin x + 5,36\cos x = 0.$$

Решение:

$$\operatorname{tg} x = -\frac{5,36}{3,78}$$

$$\lg(-5,36) = 0,72916n$$

$$\lg 3,78 = \underline{0,57749}$$

$$\lg\operatorname{tg} x = 0,15167n$$

$$x_0 = -54^\circ 48' 27'' \quad x = m\cdot 180^\circ - 54^\circ 48' 27''.$$

Проверка: $3,78\sin x$ должно $= -5,36\cos x$. При $m = 1$;

$$x = 125^\circ 11' 33''$$

| | |
|---|---|
| $\lg 3,78 = 0,57749$ | $\lg(-5,36) = 0,72916\,n$ |
| $\lg\sin 125^\circ 11' 33'' = \bar{1},91234$ | $\lg\cos 125^\circ 11' 33'' = \bar{1},76067\,n$ |
| $0,48983$ | $0,48983$ |

Пример 4. Найти острые углы, удовлетворяющие уравнению:

$$9\sin x + 10\cos x = 11.$$

Решения будут вещественны, так как $9^2 + 10^2 > 11^2$ и находятся по формуле

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c\cos\varphi}{a},$$

где $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$, т. е.

$$\sin(x + \varphi) = \frac{10\cos\varphi}{9},$$

где $\operatorname{tg}\varphi = \frac{10}{9}$.

---

* Ясна необходимость приводить решение квадратного уравнения к логарифмическому виду, что выполняется введением вспомогательного угла.

$$\lg \operatorname{tg} \varphi = \lg 10 - \lg 9;$$
$$\lg 10 = 1,00000$$
$$\lg 9 = 0,95424$$
$$\lg \operatorname{tg} \varphi = 0,04576; \quad \varphi = 48°0'46'';$$
$$\lg \sin (x + \varphi) = \lg 11 + \lg \cos \varphi - \lg 9$$
$$\lg \cos \varphi = \bar{1},82541 \text{*}$$
$$\lg 11 = \bar{1},04139$$
$$\text{доп.} \lg 9 = \bar{1},04576$$
$$\lg \sin (x + \varphi) = \bar{1},91256; \quad (x + \varphi)_0 = 54°50'53''$$
$$(x + \varphi)_0 = 125°9'7''$$
$$x = 54°50'53'' - 48°0'46'' = 6°50'7''$$
$$x = 125°9'7'' - 48°0'46'' = 77°8'21''$$

Пример 5. Найти $x$ из уравнения $\sin x = 2\cos^2 x$;

$$2\sin^2 x + \sin x - 2 = 0;$$

$$\sin x = \frac{-1 + \sqrt{17}^{**}}{4}.$$

Приведя к виду, удобному для логарифмирования:

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} 45°}{4} = \frac{\sin(\varphi - 45°)}{2\cos\varphi \cdot \sqrt{2}}, \text{ где } \sqrt{17} = \operatorname{tg} \varphi;$$

$$\lg \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \lg 17 = 1,23045 \,\Big|\, \frac{2}{0,61522}$$

$$\varphi = 76°22'1''; \quad \varphi - 45° = 31°22'1''$$

$$\lg \sin x = \lg \sin 31°22'1'' - \frac{3}{2}\lg 2 - \lg \cos \varphi$$

$$\lg \sin 31°22'1'' = \bar{1},71643$$

$$\text{доп.} \frac{3}{2} \lg 2 = \bar{1},54846$$

$$\text{доп.} \lg \cos \varphi = 0,62764;$$

$$\lg \sin x = \bar{1},89253;$$

$$x_0 = 51°19'54'';$$

$$x = m \cdot 180 + (-1)^m 51°19'54''.$$

Проверка: $\lg 2 + 2\lg \cos x = 0,30103$

$$\bar{1},59150$$

$$\bar{1},89253 = \lg \sin x.$$

Пример 6. Дугу в 30° разделить на такие 2 части, чтобы синус одной из двух получаемых при этом дуг был вдвое более синуса другой. Решить.

Пример 7. Найти общий вид дуг $x$ и $y$, удовлетворяющих системе уравнений

$$5^{\sin x} + 3^{\sin y} = 4.$$

$$3 \cdot 5^{\sin x} - 2 \cdot 3^{\sin y} = 5. \text{ Решить.}$$

---

* Не пользуясь таблицей логарифмов сумм и разностей чисел.

** Второе значение sin x непригодно.

## § 21. Квадратное уравнение

Дадим решение полного квадратного уравнения тригонометрически при помощи введения вспомогательного угла (отдельные случаи приведены выше)*. Рассматривать, как всегда, будем только случай корней вещественных.

Возьмем 4 случая.

1) $ax^2+bx-c=0$, где $a$, $b$, $c$ — числа положительные.

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}}$$

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=\left(\frac{b}{2a}\right)^2\left\{1+\frac{4ac}{b^2}\right\}=\left(\frac{b}{2a}\right)^2\{1+\operatorname{tg}^2\varphi\}=$$
$$=\left(\frac{b}{2a}\right)^2\sec^2\varphi,$$

где
$$\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{4ac}{b^2}.$$

Тогда
$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{b}{2a}\sec\varphi=\frac{b}{2a}(\pm\sec\varphi-1).$$

Так как
$$\sec\varphi+1=\frac{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi};$$
$$\sec\varphi-1=\frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi},$$

то
$$x_1=-\frac{b\cos^2\frac{\varphi}{2}}{a\cos\varphi};$$
$$x_2=\frac{b\sin^2\frac{\varphi}{2}}{a\cos\varphi}.$$

Эти выражения можно преобразовать, заменив
$$b=\frac{2\sqrt{ac}}{\operatorname{tg}\varphi},$$

тогда
$$x_1=-\frac{2\sqrt{ac}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{a\cos\varphi\cdot\operatorname{tg}\varphi}=-\frac{2\sqrt{c}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{a}\,2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}=-\sqrt{\frac{c}{a}}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\ \text{и т. д.}$$

Окончательно для уравнения:
$$ax^2+bx=c,$$
где $a$, $b$, $c$—положительные:
$$x_1=-\sqrt{\frac{c}{a}}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2};$$
$$x_2=\sqrt{\frac{c}{a}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2};$$

2) $\underline{ax^2-bx-c=0;}$ $a$, $b$, $c$ — числа положительные;

$$x=\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}},$$

* В программе средней школы этот вопрос не рассматривается.

откуда попрежнему

$$x = \frac{b}{2a} \pm \frac{b}{2a} \sec\varphi = \frac{b}{2a}(1 \pm \sec\varphi)$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{c}{a}} \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}; \quad x_2 = -\sqrt{\frac{c}{a}} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

В случаях 1 и 2 через $\varphi$ обозначен угол, для которого

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{4ac}{b^2};$$

3) $ax^2 + bx + c = 0$, где $a$, $b$, $c$—числа положительные, корни вещественные, т. е. $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant \frac{c}{a}$ или в случае различных корней $\frac{b^2}{4a^2} > \frac{c}{a}$ и $\frac{4ac}{b^2} < 1$;

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}};$$

так как

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \left[1 - \frac{4ac}{b^2}\right] = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 (1 - \sin^2\varphi) =$$
$$= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \cos^2\varphi.$$

Тогда

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{b}{2a}\cos\varphi = \frac{b}{2a}(\cos\varphi \pm 1)$$

$$x_1 = -\frac{b\cos^2\frac{\varphi}{2}}{a};$$

$$x_2 = -\frac{b\sin^2\frac{\varphi}{2}}{a}$$

или подставив значение $b$ из равенства

$$\sin^2\varphi = \frac{4ac}{b^2};$$

получим

$$x_1 = -\sqrt{\frac{c}{a}} \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2};$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{c}{a}} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2};$$

4) $ax^2 - bx + c = 0$ при $a$, $b$, $c$ — положительных и корнях вещественных, то-есть $\frac{4ac}{b^2} \leqslant 1$.

Введя, как и в случае 3), обозначение

$$\sin^2\varphi = \frac{4ac}{b^2},$$

получим

$$x_1 = \sqrt{\frac{c}{a}} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}; \qquad x_2 = \sqrt{\frac{c}{a}} \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$$

В результате исследования имеем*.

| Уравнения | Решения $x_1$ | Решения $x_2$ | Вспомогат. угол |
|---|---|---|---|
| 1) $ax^2+bx-c=0$; | $-\sqrt{\frac{c}{a}}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ | $+\sqrt{\frac{c}{a}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ | $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\sqrt{ac}}{b}$ |
| 2) $ax^2-bx-c=0$; | $+\sqrt{\frac{c}{a}}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ | $-\sqrt{\frac{c}{a}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ | $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\sqrt{ac}}{b}$ |
| 3) $ax^2+bx+c=0$; | $-\sqrt{\frac{c}{a}}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ | $-\sqrt{\frac{c}{a}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ | $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{ac}}{b}$ |
| 4) $ax^2-bx+c=0$; | $+\sqrt{\frac{c}{a}}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ | $+\sqrt{\frac{c}{a}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ | $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{ac}}{b}$ |
| 1) $x^2+px-q=0$; | $-\sqrt{q}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ | $+\sqrt{q}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ | $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\sqrt{q}}{p}$ |
| 2) $x^2-px-q=0$; | $+\sqrt{q}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ | $-\sqrt{q}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ | $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\sqrt{q}}{p}$ |
| 3) $x^2+px+q=0$; | $-\sqrt{q}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ | $-\sqrt{q}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ | $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{q}}{p}$ |
| 4) $x^2-px+q=0$; | $+\sqrt{q}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ | $+\sqrt{q}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ | $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{q}}{p}$ |

Полезно в порядке самостоятельной работы учащихся в кружке непосредственно вывести формулы для уравнения вида

$$x^2+px+q=0.$$

П р и м е р 1. $y^2+3y-28=0$. В этом примере коэфициенты настолько просты, что решения (—7, 4) легко проверить алгебраическим способом. Для упражнения учащихся один подобный пример решить полезно или

а) непосредственным приведением данного уравнения к тригонометрическому виду; или

б) пользуясь выведенными выше формулами.

Дадим решение б): Данный пример относится к случаю 1) и решается по формулам:

$$x_1=-\sqrt{q}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2};\quad x_2=\sqrt{q}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

где

$$\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{4q}{p^2};$$

$$2\lg\operatorname{tg}\varphi=\lg 4+\lg q-2\lg p=\lg 4+\lg 28-2\lg 3.$$

* $a$, $b$, $c$, $p$, $q$ — положительные; корни вещественные; $\varphi$ — наименьшее абсолютное значение вспомогательного угла.

$$\lg 4 = 0{,}60206$$
$$\lg 28 = 1{,}44716$$
$$\text{доп. } 2\lg 3 = \bar{1}{,}04576$$
$$1{,}09498 \;|\; 2 \quad 0{,}54749$$
$$\lg \operatorname{tg} \varphi = 0{,}54749; \quad \varphi = 74^\circ 10' 24'';$$
$$\frac{\varphi}{2} = 37^\circ 5' 12''; \qquad \sqrt{q} = \sqrt{28}$$
$$\lg \sqrt{28} = 0{,}72358 \qquad\qquad \lg \sqrt{28} = 0{,}72358$$
$$\lg \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = 0{,}12152 \qquad\qquad \lg \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \bar{1}{,}87848$$
$$\lg x_1 = 0{,}84510\, n \qquad\qquad \lg x_2 = 0{,}60206$$
$$x_1 = -7 \qquad\qquad x_2 = 4$$

Пример 2.
$$z^2 + 0{,}56487\, z + 0{,}02564 = 0.$$

Этот пример относится к случаю 3).
$$z_1 = -\sqrt{q}\, \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}; \quad z_2 = -\sqrt{q}\, \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2};$$
где
$$\sin^2 \varphi = \frac{4q}{p^2}$$
$$\lg \sin \varphi = \lg 2 + \frac{1}{2} \lg 0{,}02564 - \lg 0{,}56487 = \bar{1}{,}75354;$$
$$\varphi = 34^\circ 32' 13'';$$
$$\lg z_1 = \lg \operatorname{tg} 17^\circ 16' 16''5 + \frac{1}{2} \lg 0{,}02564\,(n) = \bar{2}{,}69703\, n.$$
$$\lg z_2 = \lg \operatorname{ctg} 17^\circ 16' 16''5 + \frac{1}{2} \lg 0{,}02564\,(n) = \bar{1}{,}71188\, n$$
$$z_1 = -0{,}0498; \qquad z_2 = -0{,}5151.$$

Пример 3. Найти $x$ из уравнения: $x^2 + px + q = 0$, где $\lg p = 3{,}06785$; $\lg q = 1{,}78609$*.

## § 22. Графическое решение тригонометрических уравнений

Графический метод решения уравнений имеет большое значение в технических расчетах. Он применяется в тех случаях, когда требуется узнать результат приближенно**. Как известно из курса алгебры, графический прием решения уравнения заключается в отыскании точек пересечения геометрических мест, заданных уравнениями. Используя прием увеличения области, в которой расположены точки пересечения, можно достигнуть большей точности ответа. Чертежи выполняются обычно на миллиметровой бумаге. В школе графическая иллюстрация решения тригонометрических уравнений имеет значение тем, что наглядно показывает учащимся смысл получаемых решений: множества решений, отсутствия решений и т. п.

Приступая к графическому решению уравнений, учащиеся должны уметь чертить основные 3 линии:
$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x^{***}.$$

Понятно, что вопрос о функциях и их графиках, согласно программе 8 класса, должен быть известен учащимся.

---

* Решение примеров вида $ax^2 \pm bx \pm c = 0$ трудностей новых не дает.

** В частности в расчетах по электротехнике, где синусоида играет большую роль.

*** Погрешность зависит и от точности чертежных инструментов и от искусства того, кто выполняет чертеж.

Пример 1. Решить графически уравнение:

а) $\sin x = 0$ (или $\cos x = 0$; $\operatorname{tg} x = 0$). Как известно из курса алгебры, решениями данного уравнения будут точки пересечения линий

$$y = \sin x \text{ и } y = 0 \text{ (синусоиды с осью } x).$$

Все решения, записываемые формулой $x = m\pi$, как при $m > 0$, так и при $m < 0$, будут наглядно показаны на чертеже точками, в которых синусоида пересекает ось $x$.

Значения $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots -\pi, -2\pi, -3\pi \ldots$

Те же значения корней для уравнения с) $\operatorname{tg} x = 0$.

б) Уравнение $\cos x = 0$ имеет решения в точках $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi \ldots$; также отрицательные решения.

Пример 2. Графическое решение уравнения $\sin x = n$ (аналогично $\cos x = m$; $\operatorname{tg} x = p$) приводит к отысканию точек пересечения синусоиды $y = \sin x$ и прямой параллельной оси $x$, т. е. $y = n$.

Крайне важно, что на чертеже учащиеся увидят, что при $|n| > 1$ нет решения уравнения и что при $|n| \leqslant 1$ имеется множество решений.

Пример 3. 1) Решениями уравнения $\sin x = ax + n$ (аналогично для $\cos x$ и для $\operatorname{tg} x$) будут точки пересечения графиков, соответствующих уравнениям $y = \sin x$ и $y = ax + n$.

2) Решить графически уравнение:

$$\cos x = 1{,}2x$$

$y = \cos x$ (кривая косинусов)

$y = 1{,}2x$ (прямая, проходящая через начало координат под углом $\alpha = \operatorname{arc\,tg} 1{,}2$ к оси $x$), $x \approx 38°$.

Пример 4. Найти графически корни уравнения:

$\sin 2x = \sin x$. Задача сводится к отысканию точек пересечения двух синусоид: $y = \sin 2x$ и $y = \sin x$.

Указание: синусоида $y = \sin 2x$ имеет период в 2 раза меньший, чем синусоида $y = \sin x$. При выполнении чертежа ясны 2 группы корней.

Пример 5. Корни уравнений $\sin 2x = \cos x$ отыскиваются как пересечение двух синусоид

$$y = \sin 2x \text{ и}$$

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^*$$

При построении синусоида $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ сдвинута по оси $x$ относительно начала на $\frac{\pi}{2}$.

Пример 6. Корни уравнения $\sin x = a + \cos x$ (или $\sin x - \cos x = a$) находятся, как пересечение кривых $y = \sin x$ и

$$y = a + \cos x,$$

или

$$y = \sin x$$

и

$$y = a + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

где вторая синусоида при построении смещена по оси $x$ на $\frac{\pi}{2}$ и по оси $y$ на $a$.

**Замечание.** Аналогичные упражнения могут быть даны для решения уравнений, содержащих тангенс угла и т. п.

Вопрос о графическом методе решения уравнения рассматривается нами лишь в наиболее простых случаях и имеет целью только показать наглядно смысл получаемых решений и метод их получения при помощи графиков.

---

* Можно взять и кривую косинусов $y = \cos x$.

## СОДЕРЖАНИЕ




Сдано в производство 26/VI—35 г. Подписано к печати 23/IX—35 г.

Отв. редактор *Н. В. Нечаев* Редактор Издатчасти НКП *Л. И. Генсиоровская*

Техп. редактор *Г. Г. Робинсон* Изд. ч. НКП № 114/3040 Учгиз № 7411

[illegible] Тираж 10,0[illegible]