МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР

А. Н. БАРСУКОВ

ПЕРВЫЕ УРОКИ АЛГЕБРЫ в VI классе

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

УЧПЕДГИЗ * 1951

ОТ РЕДАКЦИИ

Начинающего учителя в особенности затрудняют первые шаги в изучении новых учебных предметов. Одни из таких новых предметов в VI классе является алгебра.

В настоящей работе освещены задачи изучения алгебры на первых уроках, а затем даётся последовательное изложение начальных сведений по алгебре до введения отрицательных чисел.

Методические указания, характер изложения уроков алгебры и приведенные упражнения являются лишь примерными, имеющими своей целью помочь начинающему учителю. В соответствии с конкретными условиями работы школы учитель может внести в него свои поправки и изменения.

Материал подготовлен для печати и отредактирован заведующим сектором методики математики Института методов обучения Академии педагогических наук Н. Н. Никитиным и консультантом Управления школ Министерства просвещения РСФСР П. А. Ларичевым.

ПЕРВЫЕ УРОКИ АЛГЕБРЫ

§ 1. Содержание раздела

Первая тема программы по алгебре охватывает три группы вопросов:

а) введение буквенной символики;

б) ознакомление с элементарными алгебраическими понятиями и терминами (алгебраическое выражение, формула, коэффициент, степень и пр.);

в) первоначальные сведения об уравнениях, их составлении и решении.

Несомненно, первый из этих трёх пунктов занимает во всём разделе ведущее, центральное место. На это указывает уже и самое название всей темы в программе: «Буквенные обозначения». Все остальные вопросы этого раздела проходятся в процессе усвоения буквенной символики, в процессе приобретения первоначальных навыков в оперировании с буквами как с заменителями конкретных чисел. В то же время, постепенно вводимые новые понятия (числовая величина, степень, уравнение и пр.) дают разнообразный материал для упражнений в действиях с буквенными выражениями и тем самым способствуют лучшему усвоению буквенной символики.

Огромная роль первых уроков алгебры для всего дальнейшего её изучения очевидна. Сознательное и прочное усвоение буквенной символики имеет решающее значение для успешного изучения всего раздела тождественных преобразований, а следовательно, в значительной степени и всего курса алгебры. В качестве основного итога первых уроков алгебры должно быть ясное и твёрдое усвоение учащимися следующих положений.

1. Всякая буква в алгебраическом выражении представляет собой *некоторое число, и только число*. Здесь можно и нужно совсем не считаться с тем, что в алгебре как науке буквы могут обозначать

и объекты самого различного рода, не имеющие к числам никакого отношения. Можно не считаться также и с тем, что в дальнейшем учащиеся встретятся с такими буквенными символами, как lg, sin и пр., где l, g, s, i, n уже не числа. На протяжении трёх лет обучения (VI—VIII классы) для учащегося всякая буква, входящая в алгебраическое выражение, есть только число и ничто другое. Нужно добиваться того, чтобы при первом же взгляде на букву в алгебраическом выражении эта буква немедленно вызывала бы в голове ученика представление о «каком-то» числе.

То, что ученик «не видит» за буквой числа, и является причиной ряда известных каждому учителю типичных ошибок. Например, ученик пишет: $a+a=a^2$ и, наоборот, $a \cdot a=2a$ и т. п., хотя тот же ученик, вероятно, никогда не напишет $7+7=7^2=49$ или $7 \cdot 7=2 \cdot 7=14$.

2. Не менее ясно ученик должен осознать и усвоить, что буква в алгебраическом выражении означает не одно какое-то определённое число. Оно может представлять собой или любое число (из всех известных ученику), или, по крайней мере, бóльшую или меньшую группу (множество) чисел. Последнее имеет место в том случае, когда самый вид алгебраического выражения или условия задачи налагают на числовые значения буквы те или иные ограничения.

Например, в выражении $\frac{a+b}{c}$ должно быть $c \neq 0$. Если буквой обозначено количество людей, то она может означать только натуральное число. Если буквой a обозначена цифра единиц в двузначном числе, то $0 \leqslant a \leqslant 9$ и т. п.

Только в конце раздела, при знакомстве с уравнениями, учащиеся встречаются со случаем, когда условия задачи таковы, что им удовлетворяет только одно число. Учитель должен обратить внимание на это обстоятельство. (Конечно, в виде исключения и раньше в упражнениях могут встретиться случаи, когда буква может означать только одно число, например, в вопросе: при каких значениях a будет верно равенство $2a=a$? Но, во-первых, и здесь мы фактически имеем дело с уравнением, во-вторых, учитель и в этом случае может обратить внимание учащихся на то, что здесь уже мы не можем давать a произвольные значения.)

Недостаточно отчётливое осознание того, что буква в алгебраическом выражении может означать любое число (при отсутствии ограничений), и является причиной типичных ошибок другого рода. Именно, как правило, учащиеся на первых порах уверенно утверждают, что, например, всегда $ab > b$ и т. п. Нередко эти неверные суждения высказываются и учащимися старших классов и влекут за собой подчас грубейшие ошибки. Задача учителя — с первых же уроков повести упорную борьбу с этими неправильными представлениями, в подходящих случаях давая буквам, входящим в алгебраическое выражение, различные значения.

3. Как уже сказано, борьба с ошибками, указанными в предыдущем пункте (вернее, предупреждение таких ошибок), должна вестись путём упражнений в нахождении числовых значений алгебраических выражений при различных значениях входящих в них букв. Зависимость первых от вторых выступает с большей конкретностью при табличной записи результатов вычислений. На это указывает и объяснительная записка к программе по алгебре. Так, для упомянутых выше выражений a^2 и ab таблицы будут иметь примерно такой вид:

a	4	3	2	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
a^2	16	9	4	1	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$

a	6	6	6	6	6	6	6	6
b	4	3	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0
ab	24	18	12	6	4	3	2	0

Таблица непосредственно показывает, при каких именно значениях букв выражения a^2 и ab больше, равны или меньше a. Такого рода упражнения дают и нечто большее. Именно здесь, на этих упражнениях, учащиеся исподволь, легко усваивают третье, важное для дальнейшего, положение: численная величина алгебраического выражения изменяется вместе с изменением числовых значений входящих в него букв. Или, короче: значение алгебраического выражения зависит от значения входящих в него букв.

Таким образом, уже здесь у учащихся возникают первоначальные, элементарные представления о переменной величине и о функциональной зависимости. Разумеется, о введении какой-либо функциональной терминологии на данном этапе не может быть и речи.

§ 2. Связь с арифметикой

Поскольку каждая буква в алгебраическом выражении, а следовательно, и всякое алгебраическое выражение есть некоторое число, постольку и все операции, производимые над алгебраическими выражениями, являются по существу операциями над числами. Недаром школьную алгебру в её первой части (тождественные преобразования) часто называют «обобщённой арифметикой».

С другой стороны, общеизвестное элементарное методическое правило требует, чтобы преподаватель при объяснении нового материала шёл от известного к неизвестному, т. е. опирался на знания, уже имеющиеся у учащихся, привлекал эти знания как базу для объяснения и обоснования нового, обеспечивая тем самым лучшее понимание и усвоение этого нового.

А отсюда следует, что теснейшая связь с арифметикой, дающая чрезвычайно плодотворные результаты при изучении алгебры в VI и VII (в значительной мере и старших) классах, является совершенно необходимым и обязательным условием сознательного и прочного усвоения алгебраического материала, изучаемого на первых уроках.

Здесь эта связь должна проходить красной нитью буквально через каждый урок, проявляться во всех возможных формах.

а) Всякую вновь вводимую операцию над буквенными выражениями следует обязательно о б о с н о в ы в а т ь законами (свойствами) арифметических действий.

В программе имеется специальный пункт («законы арифметических действий, их формулировка и буквенная запись»), основная цель которого — показать учащимся, что все свойства действий, изученные ими в арифметике, целиком и полностью относятся и к буквенным выражениям. В дальнейшей работе при выполнении преобразований, при решении арифметических задач с буквенными данными преподаватель должен систематически возвращаться к свойствам действий, выявлять, какое из них ученик применил в данном случае.

б) Арифметика должна быть в широкой мере привлечена и для усвоения и закрепления нового материала.

Решение арифметических задач с буквенными данными является прекрасным средством для этой цели. Ход решения задачи ученик знает из арифметики. Решая задачу, он видит, что и при замене чисел буквами ход решения остаётся тем же, что, следовательно, буквы в данной задаче играют совершенно ту же роль, что и числа в соответствующей задаче из арифметики.

Значительное место следует уделить задачам, в которых имеются и буквенные и числовые данные, особенно если при этом буквой и числом выражены однородные величины. Решение такой задачи наглядно показывает «равноправие» буквенного и числового значений величины, приучает смотреть на букву как на какое-то число. Решение арифметических задач с буквенными данными имеет и другое, не менее важное, методическое значение. Дело в том, что закрепление теоретического материала обычно производилось исключительно на упражнениях совершенно абстрактных (см., например, задачник Шапошникова и Вальцова). И поэтому весь начальный курс алгебры до уравнений принимал отвлечённый, сухой характер и, понятно, с трудом воспринимался и усваивался учащимися. Ученик совершенно не представлял реального смысла производимых им операций над буквами.

Арифметические задачи с буквенными данными (полностью и частично) и являются благодарным и ценным материалом для оживления и улучшения преподавания первых глав алгебры. Решая задачу, ученик производит различные операции не просто над буквами, а над конкретными величинами, выраженными с помощью букв. Самые операции приобретают смысл, направлены к определённой цели, и это, несомненно, повышает интерес к ним и способствует их пониманию и усвоению. Эта положительная роль арифметических задач имеет место не протяжении всего алгебраического курса VI—VII классов и тем более, конечно, на первых уроках алгебры. Нужно принять за правило: при изучении первой темы решение задач является обязательной составной частью каждого урока. Не вдаваясь в подробности, лишь упомянем, что решение задач в VI—VII классах окажет огромную помощь и в дальнейшем, при обучении учащихся составлению уравнений по условию задачи.

в) Наконец, арифметика привлекается на уроках алгебры и для п р о в е р к и правильности полученного результата.

Поскольку буквами обозначены числа, постольку подстановка в исходные выражения и в полученное любых чисел (в пределах допустимого множества) на место букв и выполнение над ними соответствующих операций должно тоже дать правильный результат (строго говоря, проверка ещё не даёт ручательства за правильность произведённой операции, но известную долю уверенности в этой правильности сообщает. Можно смотреть на такую «проверку» как на числовую иллюстрацию выполненной операции, но не следует, конечно, посвящать учащихся в эти логические тонкости).

На первых уроках алгебры такого рода проверка может быть применена при выводе свойств арифметических действий. Получив, на основе решения задачи (см. ниже § 10), например, формулу $a-(b-c)=a-b+c$, преподаватель предлагает подставить вместо букв различные числа. Получение одинаковых результатов в левой и правой части убеждает в правильности формулы. Подстановка числовых значений в выражение, полученное в результате решения задачи, тоже, в известной степени, является проверкой правильности полученного решения.

§ 3. Планирование

На изучение первой темы программа отводит 12 часов. При этом принимается во внимание, что учащиеся, в известной степени, ознакомились с буквенной символикой еще в V классе: при изучении свойств арифметических действий (на это есть специальное указание в объяснительной записке к программе) и при записи формул для площадей и объёмов.

Отметим также, что во многих школах даётся в V классе и понятие о степени (при разложении чисел на простые множители, при записи формул для площади квадрата и объёма куба).

При этих условиях 12 часов для прохождения первой темы достаточно. Если же по каким-либо причинам буквенные обозначения здесь вводятся впервые, то уложить весь материал первой темы в 12 часов будет затруднительно. Исходя из этих соображений, мы даём здесь примерное распределение материала на 14 часов.

1. Вступительная беседа. Решение арифметических задач с записью решения в виде формулы . . .	1 час
2. Введение букв. Решение задач в 1—2 действия	1 час
3. Алгебраическое выражение, его числовая величина. Решение задач в 2—3 действия . . .	2 часа
4. Коэффициент	1 час
5. Степень	2 часа
6. Порядок действий	2 часа
7. Свойства арифметических действий . . .	2 часа
8. Решение и составление уравнений	2 часа
9. Контрольная работа	1 час

Конечно, приведённое распределение является только примерным. В зависимости от конкретных условий возможны и вполне допустимы изменения как в порядке изучения отдельных вопросов, так и в дозировки во времени.

Напоминаем ещё раз, что решение задач с буквенными данными проводится не только в специально отведённые для этой цели часы (п. 2 и 3), но на протяжении всего раздела. Все вновь вводимые понятия и правила вводятся на основе решения задач и закрепляются не только на специальных упражнениях, но и на задачах. Ниже даются методические указания к отдельным вопросам темы, исходя из приведённого здесь плана.

§ 4. Вводная беседа. Решение задач

На первом уроке целесообразно провести вступительную беседу, цель которой — в доступной форме дать учащимся представление о предмете алгебры.

Школьный алгебраический курс содержит сведения из различных математических дисциплин. Охарактеризовать содержание школьного курса алгебры — это, по существу, значит перечислить все его разделы. Конечно, такое перечисление ничего не даст учащимся (так как они ещё не знают, что означают термины «иррациональные числа», «уравнения», «логарифмы» и пр.). И правильно поэтому в существующих учебниках совсем не даётся определение алгебры.

Будет вполне достаточно, если учитель, отправляясь от уже известного учащимся предмета — арифметики, даст им некоторое представление о том, чем они будут заниматься на уроках алгебры. Содержание беседы сведётся, примерно, к следующему.

1. В арифметике мы изучали числа и действия с ними. Сначала изучали целые числа; после того как вы приобрели достаточный навык в действиях с ними, были введены новые числа — дробные, и вы стали изучать действия как с целыми, так и с новыми, дробными числами. В алгебре мы будем продолжать изучать эти — *целые и дробные — числа, но познакомимся и ещё с другими*, новыми числами и будем изучать действия с ними.

2. В арифметике мы изучали четыре действия с числами: сначала сложение и вычитание, затем умножение и деление. В алгебре мы будем продолжать изучение этих действий, но, кроме того, познакомимся ещё с новыми действиями.

3. В арифметике мы решали задачи и, в зависимости от условия задачи, применяли различные способы решения (способ уравнивания данных, способ приведения к единице и др.). В алгебре мы также будем решать задачи прежними способами, но, кроме того, познакомимся ещё с новыми способами решения задач.

Таково примерное содержание беседы. Конкретное подтверждение изложенного учащиеся получат в ближайшее же время: они познакомятся и с новыми числами (*отрицательными*), и с новым действием (возведение в степень), и с новым способом решения задач (уравнения).

Конечно, эта вступительная беседа должна быть именно беседой, а не простым сообщением учителем того, что изложено выше.

Лучше всего, если учитель начнёт урок с решения какой-либо арифметической задачи и на основе этого решения поведёт беседу в вопросо-ответной форме: «Какие числа были даны в этой задаче?» «Какие действия мы производили над этими числами?» «Какие действия вы ещё изучали в арифметике?» «Каким способом мы решали задачу?»

Каждый из этих вопросов и явится отправным пунктом для приведённых выше сообщений о содержании дальнейшей работы. Остальная часть урока должна быть посвящена решению арифметических задач пока только с числовыми данными.

Учащиеся уже в V классе практиковали запись решения задачи в виде формулы, не производя промежуточных вычислений до её получения. Поэтому здесь достаточно на двух-трёх задачах воспроизвести в памяти учащихся такую форму записи решения для увязки с дальнейшей записью решения в общем виде с помощью букв и для подготовки к введению такой записи.

В качестве первой нужно взять несложную задачу в 2—3 действия, например:

Ученик купил 4 тетради по 18 коп. за тетрадь и учебник за 80 коп. Сколько заплатил он за всю покупку?

Решается задача обычным путём — по вопросам. В итоге получается формула:

$$18 \cdot 4 + 80. \qquad (1)$$

Затем другому ученику даётся аналогичная задача с изменёнными данными, например, 5 тетрадей по 30 коп. и учебник за 65 коп. Получается формула:

$$30 \cdot 5 + 65. \qquad (2)$$

Сравниваются формулы (1) и (2) и выясняется, что и самые действия и их порядок в обеих задачах одни и те же, только числа разные. Поэтому задача, данная третьему ученику (6 тетрадей по 20 коп. и учебник за 90 коп.), уже не решается, а сразу составляется формула решения.

Если останется время, можно дать вторую задачу, хотя бы такого вида:

Для школы закуплено 80 учебников и 60 задачников, всего на 250 рублей. Сколько стоил один задачник, если каждый учебник стоил 2 рубля?

Получается формула:

$$\frac{250 - 2 \cdot 80}{60}.$$

Аналогичная задача даётся следующему ученику (90 учебников, 75 задачников по 3 рубля, всего на 405 рублей).

В итоге можно сделать вывод, что ряд задач с одним и тем же условием, но с разными числами дают в результате одинаковую формулу. Найдя её для одной задачи, мы можем уже не решать другие, сходные с ней, а просто написать ту же формулу для чисел, данных в них. Этот вывод явится вступлением к следующему уроку.

Задачи для решения можно взять из задачника П. А. Ларичева (ч. 1, § 1, №№ 1—9).

§ 5. Введение букв

Для введения буквенных обозначений следует дать несколько вариантов одной задачи, лучше всего в одно действие, причём один из компонентов остаётся постоянным, а другой изменяется. Примеры таких задач:

1. В палатке продаются арбузы по 3 рубля за килограмм. Сколько нужно заплатить за арбуз весом в 3 *кг*? 5 *кг*? $3\frac{1}{2}$ *кг*?

2. Поезд в среднем проходит 40 *км* в час. Какое расстояние пройдет он в 4 часа? 6 часов? $7\frac{1}{2}$ часов?

3. Окружность приблизительно в 3,14 раза длиннее своего диаметра. Чему равна длина окружности, если диаметр равен 3 *см*? 5 *см*? 4,5 *см*?

Решение, например, первой задачи даёт формулы:

$$3 \cdot 3;\ 3 \cdot 5;\ 3 \cdot 3\frac{1}{2}.$$

Вместе с учащимися выясняется, что продавцу приходится решать всё время задачи, сходные между собой, и решает он их одним и тем же способом: цену 1 *кг*, т. е. 3 рублей, умножает на количество килограммов (вес арбуза). Если мы число килограммов обозначим какой-либо буквой, например a, то стоимость любого арбуза можно записать формулой:

$$3 \cdot a. \tag{1}$$

Чтобы узнать стоимость любого арбуза, достаточно в формуле (1) подставить вместо a число килограммов, которое весит этот арбуз, и произвести умножение.

Так, при $a=3$ получим решение первой задачи. При $a=5$ — второй и т. д.

Узнаем по этой формуле, сколько стоит арбуз весом в 6 *кг*, в 4 *кг* 300 *г*.

Теперь мы можем и самую задачу дать в такой форме, чтобы она сразу дала нашу формулу (1), именно:

В палатке продаются арбузы по 3 рубля за килограмм. Сколько придётся заплатить за арбуз весом в a килограммов?

При решении второй из приведённых выше задач учащиеся уже сами напишут общую формулу решения, обозначив число часов какой-либо буквой. После этого можно перейти к решению задач, уже сразу сформулированных в общем виде, т. е. имеющих одно из данных в буквенном обозначении, например:

Рабочий получает 20 руб. в день. Сколько он получит за t дней?

На одном складе x кубометров дров, на другом в 3 раза меньше. Сколько дров на втором складе?

Отметим, что можно уже при решении первых же задач указать, что принято соглашение опускать знак умножения между числом и буквой. Но можно отнести это и на последующие уроки, когда в выражении будут фигурировать несколько букв, и указание можно уже дать в полном виде (знак умножения опускается, когда один или оба сомножителя выражены буквами).

§ 6. Алгебраическое выражение

Два последующих урока посвящаются дальнейшему расширению буквенных обозначений. Решив на 1-м уроке несколько задач с одной буквой (в том числе и на сложение и вычитание, например: брату m лет, а сестра на 5 лет старше. Сколько лет сестре?), можно на 2-м уроке перейти к задачам в 2—3 действия с одной, двумя, а затем и тремя буквенными данными. Задачи такого рода имеются в задачнике Ларичева (ч. 1, § 1, №№ 10—36; § 8, №№ 179—190), а также в книге А. Барсукова «Уравнения первой степени в средней школе».

При подборе задач должны быть учтены следующие положения:

1. В большинстве задач должны одновременно фигурировать и числовые и буквенные данные. Например:

Смешано *m кг* печенья по 8 руб. килограмм и *n кг* по 12 руб. килограмм. Сколько будет стоить килограмм смеси?

О значении задач такого типа было уже сказано выше (§ 2).

2. Особое внимание следует уделить задачам на разностное и кратное сравнение (на столько-то больше, меньше; во столько-то раз больше, меньше). В задачах на составление уравнений именно такого рода соотношения между величинами встречаются наиболее часто. Навык в написании величин, находящихся в разностном и кратном отношении, в дальнейшем значительно облегчит овладение навыком в решении задач при помощи уравнений.

3. Подобрать задачи легче всего из задачников по арифметике для IV и V классов, заменив в них некоторые числовые данные буквенными.

4. Среди других задач должны быть даны и упражнения из §§ 1 и 2 из задачника Шапошникова и Вальцова. Эти упражнения обычно носят название алгебраического диктанта. Они дают некоторую предварительную тренировку, главным образом для составления уравнений по условиям задачи. Однако мы бы не рекомендовали очень увлекаться такого рода упражнениями. Дело в том, что при решении арифметических задач с буквенными данными постоянно придётся составлять выражения такого же типа, как и в этих упражнениях. А в задачах на составление уравнений учащимся приходится иметь дело именно с теми же величинами и зависимостями, которые встречались им в арифметических задачах.

Что касается методики решения задач, то здесь надо иметь в виду следующее:

1. При решении каждой задачи после получения ответа давать в полученном выражении буквам одно, два числовых значения. Обратить внимание на особые случаи при некоторых значениях букв, если это имеет место.

Например, в некоторых случаях получается дробное число, которое по условию задачи не годится. В случае, если в выражение входит разность, обратить внимание на то, что уменьшаемое должно быть не меньше (а иногда непременно больше, например, когда разность входит в знаменатель), чем вычитаемое, и т. п.

2. Нужно предусмотреть и заранее спланировать по урокам ряд вопросов, заставляющих учащихся глубже почувствовать, осознать «числовую сущность» каждой буквы.

Вот примеры таких вопросов.

1) Всегда ли число $2m$ будет больше, чем m? (Нет: при $m=0$ числа равны.)

2) Всегда ли $a+3$ больше, чем a? (Всегда.)

3) Всегда ли $a+3$ больше, чем 3? (Нет.)

4) Является ли число $3m$ целым числом? $\frac{k}{3}$ — дробным числом? (Могут быть и теми и другими. Дать числовые примеры.)

5) Всегда ли ab больше, чем a? (Нет, может быть и равно и меньше.)

6) Когда $ab=a$? (Обычный ответ: при $b=1$, и упускается случай $a=0$.)

7) Всегда ли $a+b$ больше a? (Нет.)

8) Может ли $a+b$ быть меньше a? (Нет: только больше или равно.)[1] и т. п.

Такого рода вопросы не нужно, конечно, сосредоточивать на одном уроке. Их надо заранее распределить на несколько уроков, связав каждый с какой-либо задачей.

3. В процессе решения задач следует ввести термины: «алгебраическое выражение» и «числовая величина», или «числовое значение» буквенного выражения. Не следует заставлять учащихся заучивать данное в учебнике Киселёва «определение» алгебраического выражения. (Его можно лишь прочитать вслух в классе и разъяснить смысл каждой фразы.) Во-первых, этот термин совсем не является таким математическим понятием, на котором

---

[1] Такого рода вопросы следует снова задавать после введения отрицательных чисел. Понятно, что ряд ответов соответственно изменится.

базируются дальше какие-либо выводы или теоремы (подобно, например, понятиям «прогрессия», «логарифм», «окружность» и т. п.). Во-вторых, данное у Киселёва определение нельзя назвать удачным. Проще и короче определение, данное в учебнике Александрова и Колмогорова: «Всякая запись чисел и действий над ними называется алгебраическим выражением».

4. Для нахождения числовых значений алгебраических выражений, кроме использования для этой цели ответов, полученных при решении задач, следует включить и упражнения, обычно называемые «примерами», т. е. упражнения типа №№ 259, 261, 263, 264 из § 9 главы I задачника Шапошникова и Вальцова и № 158 из задачника Ларичева.

После введения понятия о степени следует учесть и остальные задачи этих параграфов или аналогичные им.

5. При нахождении числового значения алгебраических выражений применяются различные формы записи. Наиболее удобной является такая запись:

Вычислить, чему равно:

$$\frac{a^2b+ab^2}{a-c}$$

при:

1) $a=3$; $b=1$; $c=2$; 2) $a=8$; $b=\frac{1}{2}$; $c=0$.

Решение

1) $\frac{3^2\cdot 1+3\cdot 1^2}{3-2}=\frac{9+3}{1}=12$.

2) $\frac{8^2\cdot\frac{1}{2}+8\left(\frac{1}{2}\right)^2}{8-0}=\frac{64\cdot\frac{1}{2}+8\cdot\frac{1}{4}}{8}=\frac{32+2}{8}=\frac{34}{8}=4\frac{1}{4}$.

В первоначальных упражнениях полезно выписывать все промежуточные вычисления, чтобы проверить и закрепить знание учащимися порядка действий. Но затем следует всё в большей и большей мере приучать производить ряд промежуточных действий в уме, в особенности напоминая о применении приёмов устных вычислений.

§ 7. Коэффициент

Собственно говоря, определение коэффициента легко можно было дать на одном из предыдущих уроков в связи с какой-либо задачей. Если мы здесь и отводим этому понятию отдельный урок, то только имея в виду подчеркнуть необходимость введения нескольких упражнений специально на эту тему. Такие упражнения даны в § 3 главы I задачника Шапошникова и Вальцова и в § 3 главы I задачника Ларичева.

Ввести понятие о коэффициенте следует при решении простой задачи, например:

1. Ученик купил m тетрадей по 30 коп. Сколько он заплатил за все тетради?

Устанавливается, что в ответе получилось произведение ($30\ m$), причём один из сомножителей выражен числом, а другой — буквой. Преподаватель сообщает, что в произведении, содержащем числовой множитель, этот множитель называется коэффициентом. Поэтому в выражении $30m$ число 30 — коэффициент. (Учитель должен чётко записать слово «коэффициент» на доске и заставить учеников переписать его в тетрадь, затем предложить 1—2 ученикам ещё раз написать это слово на доске. Это нужно потому, что учащиеся часто пишут этот термин с ошибками.)

Затем следует дать задачу такого вида:

2. Рабочий получает a рублей в день. Сколько он получит за 5 дней? Ответ: $a \cdot 5$.

Отмечается, что и здесь в произведении имеется числовой множитель, который, следовательно, мы можем назвать коэффициентом. Учитель указывает, что принято числовой множитель ставить первым в произведении. Это мы всегда можем сделать на основании переместительного свойства умножения. В данном случае $a \cdot 5 = 5 \cdot a$ (или $5a$). [То, что о свойствах арифметических действий будет говориться позднее (см. § 10), не имеет значения. Там эти свойства даются в порядке п о в т о р е н и я и для записи их в буквенном виде. Преподаватель может с первых же уроков алгебры ссылаться на них как на изученные в арифметике. Тем самым подчёркивается факт, что буквы в алгебре — те же числа.]

Затем даётся выражение вида $3 \cdot a \cdot 4$, и учитель предлагает ученику указать в этом выражении коэффициент.

Часто даётся ответ: 3, или: «здесь два коэффициента». Преподаватель отмечает, что до сих пор мы говорили об одном числовом сомножителе, который называли коэффициентом, и спрашивает, нельзя ли данное произведение записать так, чтобы был только один числовой множитель. Совместно с учащимися устанавливается, что $3 \cdot a \cdot 4 = 3 \cdot 4 \cdot a$ (переместительное свойство) $= 12a$ (сочетательное свойство).

Таким образом, в данном выражении коэффициент равен 12.

Даются ещё примеры вида $a \cdot 5 \cdot b \cdot 4$; $6 \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot b$; $3 \cdot m \cdot \frac{3}{4}$, и делается вывод: если в произведение входят буквы и числа, то все числа перемножаются Произведение ставится впереди буквенного выражения и называется коэффициентом для этого выражения. На третьем из приведённых примеров выясняется, что коэффициент может быть и дробным числом. Далее следуют тренировочные упражнения из § 3 задачника Шапошникова и Вальцова (§ 3 задачника Ларичева).

Объяснение первого упражнения проводится примерно так. Дано выражение $a+a+a$. Здесь одно и то же число a повторяется слагаемым три раза. Но из арифметики мы знаем, что повторить число слагаемым три раза — это значит умножить это число на 3. (Можно задать в виде вопроса: «Что значит повторить число слагаемым 2, 3 раза?») Следовательно, мы можем написать:

$$a+a+a=a \cdot 3.$$

Согласно принятому условию запишем $3a$, и число 3 будет коэффициентом.

Следующие упражнения проводятся, конечно, уже без пояснений, просто записывается: $a+a+a+b+b = 3a+2b$ и т. д.

На данном уроке, вероятно, можно будет проделать не более 1—2 упражнений, несколько примеров дать на дом и несколько проделать на последующих уроках.

Как уже указано выше, можно было (и желательно) ввести понятие о коэффициенте на предыдущих уроках при решении задач, включив в них приведённые здесь задачи 1 и 2 и сопроводив указанными пояснениями. Тогда данный урок, посвященный специально усвоению понятия «коэффициент», можно начать сразу с отвлечённых упражнений вида $3 \cdot a \cdot 4$ и т. п.

При выполнении упражнений из задачников следует обратить внимание учащихся на два момента:

1. Получив, например, выражение $3a+2b$, преподаватель выясняет, что здесь имеется сумма двух произведений, каждое из которых имеет свой коэффициент.

2. При выполнении упражнения вида $ab+ab+ab=$ $=3ab$ преподаватель доводит до полной ясности, до полного понимания учащимися того обстоятельства, что здесь повторяется слагаемым три раза число ab и поэтому получим $ab \cdot 3$ или $3ab$. Недостаточное выяснение этого факта влечёт за собой известную типичную ошибку учащихся: $ab+ab+ab=3a3b$.

Лишь на одном из последующих уроков, после того как учащиеся уже в известной мере освоились с новым термином, следует дать понятие о коэффициенте, равном 1. После, например, упражнения $m+m+m+n=$ $=3m+n$ указывается, что во втором слагаемом подразумевается коэффициент 1.

Здесь учениками может быть (и бывает) задан такой вопрос: «Значит, выражение a имеет коэффициент 1? Как же мы решали такие примеры: написать без коэффициента выражение $3a$ — и получали $a+a+a$?»

Следует, не дожидаясь такого вопроса, указать, что поскольку всякое выражение «без коэффициента» можно записать с коэффициентом 1, постольку мы в дальнейшем во всех таких выражениях будем подразумевать этот коэффициент. Поэтому, когда раньше мы говорили: написать выражение $4ab$ без коэффициента — это по существу означало: написать это выражение так, чтобы все коэффициенты были равны 1 (которые можно опустить).

В связи с введением коэффициента 1 следует к упражнениям задачника добавить несколько упражнений такого вида:

1. *Назвать коэффициенты в выражениях:*

$$3a;\ 5b;\ m;\ \frac{3}{5}c;\ a.$$

2. *Указать, где в выражениях:*

$$3a+1;\ 1 \cdot b+3;\ 1 \cdot c+1$$

можно опустить единицу?

3. Чем является единица в выражении $5a+1$? (слагаемым), в выражении $1 \cdot a+5$ (коэффициентом или сомножителем).

Такого рода вопросы имеют значение для предупреждения ошибок в дальнейшем [например: $3a^3+2a^2+a=a(3a^2+2a)$].

Примечание. В дальнейшем придётся расширить понятие коэффициента (буквенные коэффициенты, свободный член в уравнении). Это расширение и будет проводиться по мере надобности. На данном этапе приведённое выше «узкое» определение является наиболее целесообразным.

§ 8. Возведение в степень

Первый из двух уроков, отведённых на данную тему, следует посвятить только второй и третьей степеням. Начать с элементарной задачи, например:

Длина и ширина комнаты содержит по 6 метров. Чему равна площадь пола?

Ввести определение и обозначение второй степени и закрепить новое понятие на **числовых** упражнениях $\left(7^2;\ 10^2;\ 25^2;\ \left(3\frac{1}{2}\right)^2;\ 0{,}2^2;\ \left(\frac{3}{5}\right)^2 \text{ и т. п.}\right)$.

После этого ввести буквенное обозначение хотя бы на задаче, аналогичной предыдущей, заменив в ней 6 буквой. Получив a^2, дать букве a несколько числовых значений и вычислить результат.

В таком же порядке даётся понятие о кубе (третьей степени) и проводятся соответствующие упражнения. В число упражнений включаются и задачи такого типа:

1. Рабочий работал по c часов в день, получая 4 руб. в час; сколько он заработал за c дней?

2. Ширина огорода d метров. Длина его в 3 раза больше ширины. Какова площадь огорода?

3. Длина прямоугольного участка земли a *м*; ширина составляет $\frac{3}{4}$ длины. Какова площадь участка?

4. Длина прямоугольного поля x *м*, ширина составляет $\frac{2}{3}$ длины. Сколько потребуется семян для засева этого поля, если на 1 кв. метр требуется $3\frac{1}{2}$ *кг* семян? (при получении решения напомнить о коэффициенте)

5. Длина комнаты x *м*, а ширина и вышина по a *м*. Найти площадь каждой стены.

6. Из доски нарезали 8 квадратиков со стороной в x *см* и 5 — со стороной y *см*. Какова была площадь доски?

7. Бригада в a человек работала a дней по a часов в день. Каждому рабочему платили 6 руб. за час. Сколько получила вся бригада?

Понятно, что и эти задачи должны служить материалом для вычислительных упражнений при различных числовых значениях букв. Особое внимание следует обратить на возведение в квадрат смешанных чисел, чтобы предупредить частую ошибку учащихся: $\left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 9\frac{1}{4}$.

Конечно, из приведённых задач на первом уроке можно успеть решить лишь одну-две. Остальные решаются на втором и последующих уроках и в порядке домашнего задания.

В дальнейшем следует добиваться того, чтобы учащиеся постепенно заучили квадраты натуральных чисел до 20 и кубы до 10.

На втором уроке понятие о степени распространяется на любой натуральный показатель, причём, конечно, и здесь начинать нужно с числовых примеров. Не следует увлекаться большими показателями. В подавляющем большинстве упражнений не стоит давать показатели, большие четырёх. Лишь для чисел 2 и 3 небесполезно в порядке домашнего задания составить таблички до 2^{10} и 3^6.

Весь материал закрепляется на упражнениях из § 4 Шапошникова и Вальцова (§ 4 — Ларичева) и на нахождение численной величины алгебраических выражений, включающих степени, из § 9 Шапошникова и Вальцова (§ 7 — Ларичева).

§ 9. Порядок действий

На предыдущих уроках было введено новое арифметическое действие — возведение в степень. В связи с этим возникает необходимость установить *порядок выполнения различных действий, включая и это новое действие.*

Начать следует с повторения правил, усвоенных учениками на уроках арифметики. Прежде всего, преподаватель напоминает, что в арифметике сложение и вычитание назывались действиями первой ступени, умножение и деление — действиями второй ступени. Те же названия остаются для этих действий и в алгебре.

Затем на простых числовых примерах, как-то:

$$17 - 5 + 30 - 23; \qquad 24 \cdot 2 : 6,$$

учащиеся вспоминают первое правило относительно порядка действий:

Действия одной и той же ступени могут производиться в любом порядке (конечно, если каждое из вычитаний выполнимо).

Действительно:

$$17 - 5 + 30 - 23 = 17 + 30 - 5 - 23 =$$
$$= 30 - 5 - 23 + 17 = 19,$$

в чём ученики убеждаются непосредственным вычислением. Но нельзя пока написать: $17 - 23 + 30 - 5$, так как первое действие становится невыполнимым. В дальнейшем, после введения отрицательных чисел, уже всякое ограничение отпадает; в приведённом выражении можно будет записать компоненты в любом порядке, например: $-5 + 30 - 23 + 17 = -5 - 23 + 17 + 30$ и т. п.

Точно так же:

$$24 \cdot 2 : 6 = 24 : 6 \cdot 2 = 8.$$

Так как ученики уже знают дробные числа и умеют оперировать с ними, то здесь вопрос о выполнимости деления отпадает. Так, выражение $12 \cdot 8 : 32 = 3$ можно записать и в такой форме: $12 : 32 \cdot 8$ и т. п., получится тот же результат.

Далее, вспоминается второе правило:

Если в выражение входят действия разной ступени, то сначала производятся действия высшей (т. е. второй) ступени.

И это правило можно показать на числовых примерах, но лучше дать на применение этого правила одну-две задачи примерно такого типа:

1. На складе было a *ц* угля. В течение k дней на склад привозили ещё по b *ц* ежедневно. Сколько угля стало на складе? $(a + bk.)$

2. Расстояние между городами d *км*. Велосипедист ехал из одного города в другой, проезжая по m *км*

в час. Сколько останется ему ехать через t часов? ($d - mt$.)

3. Учитель роздал a тетрадей поровну m ученикам. У Вани уже было c тетрадей. Сколько тетрадей стало у Вани? $\left(c + \frac{a}{m}.\right)$

Находя числовую величину полученных выражений при различных значениях букв, устанавливаем, что сначала выполняются всегда умножения и деления, а затем уже сложения и вычитания. Наконец, напоминается и третье правило:

Если нормальный порядок действий нарушается, то действие, которое нужно произвести раньше, заключается в скобки. (Нормальным порядком называется порядок, устанавливаемый вторым правилом.)

Конкретнее всего это правило выясняется на задаче примерно такого типа:

4. Из двух городов выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Один ехал со скоростью m *км*, другой n *км* в час. Через p часов они встретились. Чему равно расстояние между городами?

Решаем задачу одним способом:

а) Какое расстояние проехал первый велосипедист? (mp.)

б) Какое расстояние проехал второй велосипедист? (np.)

Чему равно расстояние между городами? ($mp + np$.)

При подстановке в решение числовых значений действия приходится производить в обычном (нормальном) порядке.

Решим ту же задачу другим способом:

Какое расстояние проезжают оба велосипедиста за 1 час? ($m + n$.)

Какое расстояние они проедут за p часов (или, что то же, чему равно расстояние между городами? [$(m + n)p$.]

Здесь при подстановке числовых значений приходится выполнять сложение раньше умножения. Это и показано тем, что сложение заключено в скобки. Легко убедиться (давая в обоих решениях одни и те же числовые значения), что только при соблюдении правила 3 оба решения дают один и тот же результат.

Воспроизведя таким образом уже известные учащимся правила выполнения действий, преподаватель на втором уроке сообщает, что: 1) новое действие — возведение в степень — называется действием третьей ступени; 2) что только что повторённые правила без всяких изменений относятся к действиям всех трёх ступеней.

Разъяснить это положение следует на конкретных числовых примерах вида:

$$2+3^2;\quad (2+3)^2;\quad 2\cdot 3^2;\quad (2\cdot 3)^2 \text{ и т. п.,}$$

а также на задачах вида:

5. Урожай пшеницы был в среднем a *ц* с *га*. Сколько пшеницы собрано с квадратного поля, каждая сторона которого равна b *м*? $\left(\frac{ab^2}{10\,000}.\right)$ (Напомнить, что черта в дробном выражении заменяет скобки.)

6. Побелка стен комнаты, длина и ширина которой l *м* стоила m рублей. Покраска пола обошлась в a руб. за 1 кв. метр. Сколько стоил весь ремонт? $(m+al^2.)$

Из задачника Шапошникова и Вальцова (§ 6) можно взять примеры №№ 161, 162, 166—177.

Заметим, что отчётливое и прочное усвоение порядка действий имеет огромное значение для дальнейшего. Общеизвестны типичные ошибки, которые делают ученики в отношении именно порядка действий. Поэтому и в дальнейшем при решении примеров и задач на тождественные преобразования следует систематически восстанавливать в памяти изложенные здесь правила и применять их к данному выражению. Конечно, это напоминание совершенно обязательно при обнаружении соответствующей ошибки.

§ 10. Свойства арифметических действий

Этот раздел представляет собой по существу повторение пройденного по арифметике. Это повторение необходимо прежде всего потому, что на свойствах арифметических действий основаны все тождественные преобразования, а также решение уравнений. В то же время, пройденные в течение длительного промежутка времени, они обычно очень бессистемно, отрывочно складываются в памяти учащихся и в значительной части забываются. Наконец, имеет значение и то, что здесь эти свойства могут быть при помощи буквенных обозначений выражены в общем виде.

Но если только изложить в декларативном порядке свойства арифметических действий так, как это сделано в учебнике Киселёва, то вряд ли получится от того большая польза. Перед учащимися промелькнёт калейдоскоп правил, заучивать которые довольно скучно и которые, в лучшем случае, они запомнят чисто механически. Вот почему мы отводим на этот раздел не менее двух уроков с тем, чтобы большинство свойств вывести из конкретной задачи с буквенными данными и иллюстрировать затем подстановкой числовых значений вместо букв.

Метод изучения каждого свойства один и тот же. Даётся задача, которая двумя учениками решается двумя различными способами. Один способ даёт левую часть формулы, например, $a+(b-c)$, другой — правую $(a+b-c)$. Так как ответ в обоих случаях должен быть один и тот же, то оба выражения приравниваются друг к другу: $a+(b-c)=a+b-c$. Полученная формула проверяется подстановкой числовых значений, и даётся словесная формулировка свойства.

Так как в задачниках обычно отсутствуют специально подобранные задачи для иллюстрации перечисленных в учебнике алгебры свойств, то мы даём здесь подбор таких задач.

Понятно, что они являются лишь примерными. Преподаватель сам может придумать задачи, аналогичные приведённым и, может быть, более удачные.

1. Переместительный закон сложения.

В одном ящике a, в другом b апельсинов. Сколько апельсинов в обоих ящиках?

Можно к апельсинам в первом ящике присчитать апельсины, лежащие во втором. Получим $a+b$. Можно сделать наоборот: к апельсинам во втором ящике присчитать апельсины первого. Получим $b+a$. Очевидно, должно быть $a+b=b+a$.

Хорошей числовой иллюстрацией этого свойства является такая задача, обычно нравящаяся ученикам.

Город Калинин стоит на железнодорожной линии Ленинград — Москва. От Калинина до Ленинграда 443 *км*, а до Москвы 166 *км*. Сколько километров от Ленинграда до Москвы?

Представим себе поезд, идущий из Ленинграда в Москву. Он пройдёт сначала 443 *км* до Калинина, а затем 166 *км* от Калинина до Москвы. Всего он пройдёт 433 *км* + 166 *км*, что и даст расстояние Ленинград — Москва.

Наоборот, поезд, идущий из Москвы в Ленинград, пройдёт сначала 166 *км* до Калинина, а затем 433 *км* от Калинина до Ленинграда, что даст 166 *км* + 443 *км*. Очевидно, что 443 *км* + 166 *км* = 166 *км* + 443 *км* = 609 *км*.

2. Группировка слагаемых.

На склад привезли в первый день a кубометров берёзовых дров и b кубометров сосновых. На второй день привезли c кубометров берёзовых и d кубометров сосновых. Сколько всего дров привезли за два дня?

1-й способ.

1) Сколько дров привезли в 1-й день? ($a+b$.)

2) Сколько дров привезли во 2-й день? ($c+d$.)

3) Сколько дров привезли в оба дня? [$(a+b)+(c+d)$.]

2-й способ.

1) Сколько всего привезли берёзовых дров? ($a+c$.)

2) Сколько всего привезли сосновых дров? ($b+d$.)

3) Сколько всего было привезено дров? [$(a+c)+(b+d)$.]

Очевидно, имеем: $(a+b)+(c+d)=(a+c)+(b+d)$.

3. Прибавление суммы.

На складе было a *ц* угля. В первый день привезли ещё b *ц*, а во второй c *ц*. Сколько угля стало на складе?

1-й способ.

1) Сколько угля привезли за 2 дня? ($b+c$.)

2) Сколько угля стало на складе? [$a+(b+c)$.]

2-й способ.

1) Сколько стало угля в первый день? ($a+b$.)

2) Сколько стало угля во второй день? [$(a+b)+c$.]

Будем иметь:

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

Примечание. Свойства сложения мы даём здесь в том порядке и в тех формулировках, как они даны в учебнике Киселёва. Считаем, однако, необходимым отметить, что в научных курсах математики сочетательный закон даётся только в той форме, к какой приводит задача 3, т. е. выражается формулой: $a+(b+c)=(a+b)+c$. Свойство же 2, названное у Киселёва сочетательным законом, является, по существу, применением переместительного и сочетательного законов.

4. Вычитание суммы.

На складе было a *ц* угля. В первый день из него взяли b *ц*, а во второй c *ц*. Сколько стало угля на складе?

Решение аналогично предыдущему. В итоге получится: $a-(b+c)=a-b-c$.

5. Прибавление разности.

Брат и сестра ходили в лес за грибами. Брат нашёл a грибов, а сестра b грибов. Но у неё c грибов оказались червивыми, и их пришлось выбросить. Сколько грибов принесли они домой?

1-й способ.

1) Сколько хороших грибов нашла сестра? $(b-c.)$

2) Сколько грибов было принесено домой? $[a+(b-c).]$

2-й способ.

1) Сколько грибов нашли брат и сестра? $(a+b.)$

2) Сколько грибов принесли они домой? $(a+b-c.)$

В итоге: $a+(b-c)=a+b-c$.

6. Вычитание разности.

Покупатель имел при себе a руб. Он уплатил за покупку в кассу b руб. и получил сдачи c руб. Сколько денег у него осталось?

1-й способ.

1) Сколько было уплачено за покупку? $[b-c.]$

2) Сколько денег осталось у покупателя? $[a-(b-c).]$

2-й способ.

1) Сколько денег осталось у покупателя после того, как он уплатил в кассу b руб.? $(a-b.)$

2) Сколько денег стало у него, когда он получил сдачи c руб.? $(a-b+c.)$

В итоге:

$$a-(b-c)=a-b+c.$$

7. Переместительный закон умножения.

Прямоугольный участок имеет в длину a *м*, в ширину b *м*. Какова его площадь?

Помножив длину на ширину, а затем ширину на длину, получим: $ab=ba$. (Для полного «равноправия» обоих данных можно было сформулировать задачу и так: передняя стена дома имеет в длину b *м*, а боковая a *м*. Какую площадь занимает дом?)

8. Сочетательный закон умножения.

Для столовой был привезён картофель на n грузовиках, по m мешков на каждом. Сколько килограммов картофеля привезли, если каждый мешок весил a *кг*?

1-й способ.

1) Сколько килограммов картофеля привезли на каждом грузовике? (am.)

2) Сколько килограммов картофеля привезли на n грузовиках? [$(am)n$.]

2-й способ.

1) Сколько всего мешков картофеля было привезено? (nm.)

2) Сколько килограммов картофеля было привезено? [$a(nm)$.]

В итоге:

$$(am)n = a(mn).$$

9. Распределительный закон.

См. задачу 4 о велосипедистах, приведённую в предыдущем параграфе.

10. Умножение на произведение.

Дать задачу, аналогичную 8-й, изменив порядок способов решения. Получится формула:

$$a(mn) = (am)n.$$

Можно также, не придумывая новой задачи, при решении задачи 8, после получения формулы $(am)n = a(mn)$, переписать её в виде $a(mn) = (am)n$ и сразу сформулировать свойство 10.

11. Умножение произведения. Задача, аналогичная задаче 8.

12. Умножение разности.

Из одного пункта отправились в одном направлении велосипедист и пешеход. Скорость велосипедиста a *км* в час, пешехода b *км* в час. На каком расстоянии будут они друг от друга через t часов?

1-й способ.

1) На сколько километров велосипедист обгоняет пешехода за 1 час? ($a - b$.)

2) На каком расстоянии они будут друг от друга через t часов? [$(a-b)t$.]

2-й способ.

1) Какое расстояние проедет велосипедист за t часов? (at.)

2) Какое расстояние пройдёт пешеход за t часов? (bt.)

3) На каком расстоянии они будут друг от друга через t часов? ($at - bt$.)

В итоге:

$$(a-b)t=at-bt.$$

13. Умножение на разность.

В столовую привезли a мешков картофеля по m *кг* каждом. В первый день было израсходовано b мешков. Сколько килограммов картофеля осталось в столовой?

1-й способ.

1) Сколько мешков картофеля осталось? $(a-b.)$

2) Сколько килограммов картофеля в $a-b$ мешках? $[m(a-b).]$

2-й способ.

1) Сколько картофеля было привезено? $(ma.)$

2) Сколько картофеля было израсходовано? $(mb.)$

3) Сколько картофеля осталось? $(ma-mb.)$

В итоге:

$$m(a-b)=ma-mb.$$

14. Деление суммы.

Для одной школы было закуплено a тетрадей, для другой b тетрадей. Все тетради были розданы учащимся, по m тетрадей каждому. Сколько учеников в обеих школах?

1-й способ.

1) Сколько всего закуплено тетрадей? $(a+b.)$

2) Сколько учеников в обеих школах? $\left(\frac{a+b}{m}.\right)$

2-й способ.

1) Сколько учеников в 1-й школе? $\left(\frac{a}{m}.\right)$

2) Сколько учеников во 2-й школе? $\left(\frac{b}{m}.\right)$

3) Сколько учеников в обеих школах? $\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}.\right)$

В итоге:

$$\frac{a+b}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}.$$

15. Деление разности.

На складе было a *кг* картофеля в мешках, по m *кг* в каждом. Было израсходовано b *кг*. Сколько мешков картофеля осталось?

Решение аналогично предыдущей задаче. В итоге получится формула:

$$\frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}.$$

16. Деление произведения.

На n грузовиках было привезено m мешков картофеля, по a *кг* в каждом. Сколько килограммов картофеля было привезено на каждом грузовике?

1-й способ.

1) Сколько всего килограммов картофеля было привезено? (am.)

2) Сколько было привезено на каждом грузовике? $\left(\frac{am}{n}.\right)$

2-й способ.

1) Сколько мешков картофеля было привезено на каждом грузовике? $\left(\frac{m}{n}.\right)$

2) Сколько килограммов картофеля в $\frac{m}{n}$ мешках? $\left(a\cdot\frac{m}{n}.\right)$

В итоге:

$$\frac{am}{n}=a\cdot\frac{m}{n}.$$

17. Деление на произведение.

Изготовленные фабрикой m резиновых мячей были уложены в коробки и упакованы в a ящиков, по b коробок в каждом. Сколько мячей было уложено в каждую коробку?

1-й способ.

1) Сколько было всего коробок? (ba.)

2) Сколько мячей было в каждой коробке? $\left(\frac{m}{ba}=\frac{m}{ab}.\right)$

2-й способ.

1) Сколько мячей было в каждом ящике? $\left(\frac{m}{a}.\right)$

2) Сколько мячей было в каждой коробке? $\left(\frac{m}{a}:b.\right)$

В итоге:

$$\frac{m}{ab}=(m:a):b.$$

В этой задаче приходится менять порядок сомножителей для того, чтобы запись соответствовала словесной формулировке, данной в учебнике (сначала разделить на первый сомножитель). Если несколько изменить формулировку (сначала разделить на один из сомножителей), то перестановки делать не придётся.

Примечание. Из курса арифметики V класса учащиеся уже знают, что деление на число a равносильно умножению на обратное число $\frac{1}{a}$. Это позволяет учителю совместно с учениками выявить, что все перечисленные выше свойства деления являются прямыми следствиями аналогичных свойств умножения. Например: в п. 12 даётся правило умножения разности на любое число, в частности, на какое-либо число $\frac{1}{a}$. Но умножить на $\frac{1}{a}$ — всё равно, что разделить на a. Отсюда непосредственно получается правило деления разности на любое число a (не равное нулю). Аналогично и в остальных случаях. Такое сопоставление — обобщение является ценным для математического развития учащихся.

Таковы примерные задачи на все свойства действий, данные в учебнике. По поводу этих задач нужно заметить следующее:

1. Совсем не обязательно все свойства до одного выявлять на задачах. Для основных свойств это нужно, а для некоторых можно, как в учебнике, ограничиться числовыми иллюстрациями и обобщением на буквах.

2. Для ясности здесь приведены решения по вопросам. Конечно, в классе не нужно писать вопросы. Они говорятся устно, а записывается лишь ответ. Другое дело, если некоторые из этих задач будут даны на дом. Дома задача должна быть решена двумя способами, с записью вопросов. Формулировка же свойства даётся в классе.

3. При записи свойств в общем виде не рекомендуется пользоваться многоточиями, как это сделано в учебнике. Можно взять не три, а больше компонентов, но всегда определённое число.

4. Каждую полученную формулу проверить подстановкой чисел вместо букв.

§ 11. Уравнения

Учащиеся уже решали в IV и V классах элементарные уравнения на определение неизвестного компонента каждого из четырёх арифметических действий. С них и надо начать упражнения в решении уравнений. (Такие упражнения даны в задачнике Ларичева, § 2, №№ 42—50, и в упомянутой книге А. Барсукова.) Уравнение определяется как равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой. Найти, чему равно это неизвестное число, и значит решить уравнение. В классе даются уравнения главным образом для устного решения, типа: $x+14=29$; $18+a=31$; $m-49=35$; $7x=42$ и т. п.

На дом даются задачи для письменного решения, например:

$$x+387=2\,005;\ x:209=317 \text{ и т. п.}$$

Числовые данные для первой серии уравнений следует подбирать так, чтобы повторить с учащимися приёмы устного счёта. В задачах для письменного решения и домашних заданий предусмотреть случаи письменных вычислений, которые обычно затрудняют учащихся (занимание единицы у высших разрядов при вычитании, умножение на число с нулём в середине, деление с нулями в частном и т. п.).

На втором уроке можно решить 2—3 уравнения уже в два действия, например:

$$2x+15=17;\ 5x-27=28;\ (x-2)\cdot 5=85 \text{ и т. п.}$$

Но в основном уравнения такого типа (и задачи, приводящие к таким уравнениям) решаются при прохождении следующего раздела («Отрицательные числа»).

Одновременно с решением простейших уравнений вводятся и задачи, решаемые при помощи уравнений. Здесь особенно следует соблюдать строгую постепенность в нарастании трудностей. Начать следует с задач такого вида:

А. 1. К неизвестному числу x прибавили 19 и получили 57. Чему равно неизвестное число?

2. К 368 прибавили неизвестное число a и получили 762. Чему равно неизвестное число?

3. От числа m отняли 38 и получили 26. Чему равно m?

Как видим, эти задачи являются теми же примерами (икс плюс 19 равно 57), данными в несколько иной (словесной) форме. Нужно добиться того, чтобы ученик и воспринимал задачу как «диктовку» и в то время, как учитель читает задачу, записывал ее условие в виде уравнения: к неизвестному числу x (ученик пишет x), прибавили (на доске $x+$), девятнадцать (на доске $x+19$) и получили ($x+19=$) пятьдесят семь ($x+19=57$). Затем задача решается устно или письменно, в зависимости от числовых данных.

Следующая серия задач отличается очень незначительно от первой.

Б. 1. К неизвестному числу прибавили 90 и получили 120. Чему равно неизвестное число?

2. Число 35 умножили на некоторое другое число и получили 385. На какое число умножили? И т. п.

Отличие этих задач от предыдущих в том, что неизвестное число в задаче не обозначено. Это должен сделать сам ученик. Это небольшая, но существенная деталь, так как в дальнейшем ученику уже всегда придётся самому вводить букву для обозначения неизвестного числа.

Следующая серия задач вносит новую деталь.

В. 1. К какому числу надо прибавить 36, чтобы получить 82?

2. На какое число надо разделить 750, чтобы получить 50? И т. п.

Здесь ученик должен сам определить, какой компонент здесь является неизвестным (слагаемое, делитель), затем обозначить его буквой и уже после этого записать условие в виде уравнения.

На этих задачах ученик уже приучается к тому, чтобы сначала выслушать задачу полностью, определить, какой компонент является неизвестным, обозначить его и записать условие задачи в виде уравнения. К этому побуждают задачи такого типа, как вторая из приведённых выше, или, например: «Какое число надо вычесть из 75, чтобы получить 38?» Если ученик станет сразу писать «под диктовку», как раньше, то напишет сначала x, а затем окажется, что сначала надо записать 75 и из него уже вычесть x.

Последняя серия задач — это уже задачи в настоящем смысле слова.

Г. 1. На полке лежат книги. Когда к ним приложили ещё 17 книг, то всех книг стало 53. Сколько книг было вначале? ($x+17=53$.)

2. На складе сложены дрова. После того как из этого запаса израсходовали 753 кубометра, на складе оста-

лось 1 285 кубометров. Как велик был запас? ($x - 753 = 1\,285$.)

3. Для класса было запасено 200 тетрадей. Часть тетрадей была роздана учащимся, после чего осталось 112 тетрадей. Сколько тетрадей было роздано? ($200 - x = 112$.)

Переход к этим задачам является важнейшим моментом в деле усвоения учащимися нового метода решения задач. Дальнейшие задачи (в последующих разделах) будут представлять собой лишь постепенное и планомерное усложнение этих элементарных задач.

Прежде всего нужно добиться, чтобы учащиеся в этих задачах узнали уже решавшиеся ими задачи на отыскание неизвестного компонента. Для этого целесообразно перед первой, например, задачей дать сначала такую: «К неизвестному числу прибавили 17 и получили 53. Чему равно неизвестное число?» После её решения дать задачу 1 и сравнить полученное уравнение с предыдущим.

Наоборат, дав, например, вторую задачу, предложить ученику переделать её в задачу на отыскание неизвестного компонента. На первом уроке решаются задачи типов **А**, **Б**, на втором — типов **В** и **Г**.

Заключение

Изучение раздела следует закончить контрольной работой. В качестве таковой могут быть даны 2—3 варианта вроде следующих:

1. а) Уравнение (в 1 действие).

б) Арифметическая задача в 3—4 действия, с последующей подстановкой заданных числовых значений для букв.

2. а) Нахождение числовой величины алгебраического выражения (с 2—3 буквами).

б) Задача на составление уравнения (в одно действие; в задании так и должно быть сформулировано: решить с помощью уравнения задачу:...).

3. а) Нахождение квадрата и куба чисел $\left[\text{вычислить: } 3{,}5^2;\ 207^2;\ \left(2\frac{1}{3}\right)^3\right]$.

б) Арифметическая задача.

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор *С. В. Пазельский.* Техн. редактор *М. Д. Петрова.*

...одписано к печати 8/VIII 1951 г. А05060. Бумага 84 × 108¹/₃₂. ...мажных листов 0,5. Печатных листов 1,64. Учётно-изд. листов 1,67. Тираж 50 000 экз. Цена 50 коп. Заказ № 2728.

...ервая Образцовая типография им. А. А. Жданова Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Москва, Валовая, 28.

Отпечатано с матриц в тип. Трудрезервиздата, Москва, Хохловский, 7. Зак. 1712